УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 3

ДВУМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: КЛАССИФИКАЦИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — II

В. В. Басов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Данная статья является второй в цикле работ, посвященном двумерным однородным кубическим системам, и состоит из двух разделов.

В первом разделе приводятся структурные принципы, позволяющие ввести полную упорядоченность в множество структурных форм — векторных многочленов с фиксированным числом нулевых коэффициентов, являющихся правыми частями двумерных однородных кубических систем ОДУ. Из них последовательно выделяются нормированные на основании нормировочных принципов структурные формы и линейно неэквивалентные друг другу, простейшие в своем классе канонические формы (КФ).

Во втором разделе для упомянутых систем, компоненты правых частей которых пропорциональны, находятся все КФ со своими каноническими множествами допустимых значений. Для каждой КФ приводятся: a) условия на коэффициенты исходной системы, b) линейные замены, сводящие правую часть системы при этих условиях в выбранную КФ, c) получаемые значения коэффициентов КФ. Библиогр. 1 назв.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

Введение. Данная работа является непосредственным продолжением работы [1], поэтому в ней сохраняются все введенные ранее обозначения. В связи с большим количеством ссылок на формулы, полученные в [1], будем для краткости отмечать их номера сверху символом «1». Например, систему (2.1) из [1] будем обозначать $(2.1)^1$.

1. Канонические формы и принципы их определения. ***1.1. Структурные формы.*** Рассмотрим однородную кубическую систему $(2.1)^1$

$$\dot{x} = P(x) = A\,q^{[3]}(x), \tag{1.1}$$

отождествляемую с вещественной матрицей A, любая строка которой $A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ $(i = 1, 2)$ отлична от нуля, а $q^{[3]} = \mathrm{colon}\,(x_1^3,\, x_1^2x_2,\, x_1x_2^2,\, x_2^3)$.

Основная задача этого раздела заключается в формулировке принципов, позволяющих выделять «самые простые» линейно неэквивалентные друг другу системы, называемые в дальнейшем кубическими нормальными формами (НФ), а их правые части соответственно каноническими формами. Для каждой кубической НФ требуется указать условия на коэффициенты исходной системы (1.1) и линейную неособую замену $(2.2)^1$:

$$x_1 = r_1y_1 + s_1y_2,\ x_2 = r_2y_1 + s_2y_2 \quad \text{или} \quad x = Ly \quad (\delta = \det L \neq 0), \tag{1.2}$$

при помощи которой (1.1) сводится к выбранной кубической НФ.

При этом принципы выбора канонических форм требуется сформулировать таким образом, чтобы максимально облегчить сведение системы $(1.4)^1$ $\dot{x} = P(x) + X(x)$, в которой невозмущенная часть $P(x)$ уже является какой-либо канонической формой, к обобщенным нормальным формам при помощи почти тождественных замен.

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.302

Первым шагом на пути к определению канонической формы станет ввод формального понятия структурной формы и упорядочивание множества структурных форм.

Определение 1.1. Вещественную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ с ненулевыми строками будем называть *объединенной структурной m-формой* $(m = 2, \ldots, 8)$ и обозначать USF^m (united structural form), если какие-либо m ее элементов отличны от нуля, а остальные равны нулю. Конечное множество, объединяющее все USF^m, будем обозначать $SUSF^m$ (set of USF^m).

Очевидно, что объединенные структурные m-формы отличаются одна от другой различным расположением мест для ненулевых элементов.

В дальнейшем для краткости любую USF^m можно будет записывать по строкам, указывая в каждой только ненулевые элементы, напр., $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = (a_1, c_1; d_2)$.

Рассмотрим всевозможные расстановки ненулевых элементов в $SUSF^m$ $(m = \overline{2, 8})$.

Определение 1.2. *Индексом элемента* a_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3, 4)$ *матрицы* A будем называть число, стоящее на месте (i, j) в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. В свою очередь, *индексом k матрицы A* будем называть сумму индексов ненулевых элементов A и при необходимости писать $A_{[k]}$. Аналогично вводятся *индексы строк* A_1 и A_2.

Непосредственной проверкой будет установлено, что следующие три структурных принципа позволяют вполне упорядочить конечное множество $SUSF = \bigcup_{m=2}^{8} SUSF^m$.

Структурные принципы (СП) для упорядочивания $\boldsymbol{SUSF}$:

СП1) *любая USF^m предшествует любой USF^n, если выполняется $m < n$;*

СП2) *любая USF^m с меньшим индексом предшествует любой USF^m с большим индексом;*

СП3) *для любых двух USF^m с равным индексом предшествует та m-форма, у которой:*

СП3_1) *строка A_2 имеет меньший индекс;*

СП3_2) *при равенстве индексов A_2 левый ненулевой элемент в A_1 имеет меньший индекс;*

СП3_3) *в противном случае правый ненулевой элемент в A_2 имеет меньший индекс.*

Таким образом, в любом подмножестве $SUSF$ структурно «самой простой» назовем матрицу A, у которой в порядке перечисления: 1) число ненулевых элементов m минимально; 2) индекс k минимален; 3_1) индекс A_2 минимален; 3_2) индекс левого ненулевого элемента в A_1 минимален; 3_3) индекс правого ненулевого элемента в A_2 минимален.

Обсудим, на чем основан выбор именно таких СП применительно к системе $(1.4)^1$ с невозмущенной частью $P(x)$, порожденной объединенной структурной m-формой A.

СП1 требует иметь максимальное число нулевых элементов в A, что безусловно необходимо и приоритетно для максимального упрощения связующей системы $(1.7)^1$.

СП2 и СП3, основываясь на рассуждениях раздела 1.4 из [1], оптимизируют расположение имеющихся в распоряжении ненулевых коэффициентов.

Так, СП2 отдает предпочтение самой слабосвязанной невозмущенной системе, т. е. такой, в которой P_1 содержит переменную x_2, а P_2 — переменную x_1, в минимальных степенях. Естественно, СП2 содержателен только при $l \leq 2$, так как при

$l = 3$ коэффициенты многочленов пропорциональны, а перестановка столбцов в A ее индекс не изменяет.

СПЗ всегда отдают предпочтение именно тем структурным формам, для которых выполняется важное для нормализации возмущенных систем условие $(1.9)^1$.

Кроме того, СП выбирались так, чтобы по возможности минимизировать число ненулевых элементов в строке A_2. Об этом сказано ниже в замечании 1.1.

Введение СП позволяет значительно сократить число используемых в дальнейшем USF^m, поскольку с точки зрения последующей нормализации возмущенных систем не имеет значения, какую из двух матриц выбирать в качестве невозмущенной части, если они получены друг из друга перенумерацией $(2.7)^1$ $L = \{r_1, s_2 = 0,\ r_2, s_1 = 1\}$.

Определение 1.3. Из двух различных объединенных структурных m-форм, получаемых друг из друга перенумерацией, форму, являющуюся согласно СПЗ предшествующей, будем называть *структурной m-формой*, при желании добавляя *основная*, и обозначать SF^m, а другую — *дополнительной* и обозначать SF^m_a (additional SF).

Очевидно, что имеется также определенное количество «симметричных» структурных m-форм, т. е. таких SF^m, которые не изменяются в ходе перенумерации $(2.7)^1$.

Поскольку любая пара, состоящая из основной и дополнительной структурных форм, линейно эквивалентна, то «худшая» с точки зрения СПЗ дополнительная форма самостоятельного интереса не представляет, но использовать ее иногда будет удобно.

Соглашение 1.1. *Согласно введенной упорядоченности сопоставим любой основной структурной m-форме порядковый номер i и будем обозначать ее SF^m_i, а дополнительную к ней структурную форму — $SF^m_{a,i}$.*

Список 1.1. 120 упорядоченных структурных форм из $SUSF$.

$$SF^2_1=(a_1;d_2)_{[2]},\ SF^2_2=(a_1;c_2)_{[3]},\ SF^2_3=(a_1;b_2)_{[4]},\ SF^2_4=(b_1;c_2)_{[4]},\ SF^2_5=(a_1;a_2)_{[5]},$$
$$SF^2_6=(b_1;b_2)_{[5]},\ SF^2_7=(b_1;a_2)_{[6]},\ SF^2_8=(c_1;b_2)_{[6]},\ SF^2_9=(c_1;a_2)_{[7]},\ SF^2_{10}=(d_1;a_2)_{[8]};$$

$$SF^3_1=(a_1,b_1;d_2)_{[4]},\ SF^3_2=(a_1,c_1;d_2)_{[5]},\ SF^3_3=(a_1,b_1;c_2)_{[5]},\ SF^3_4=(a_1,d_1;d_2)_{[6]},$$
$$SF^3_5=(b_1,c_1;d_2)_{[6]},\ SF^3_6=(a_1,c_1;c_2)_{[6]},\ SF^3_7=(a_1,b_1;b_2)_{[6]},\ SF^3_8=(b_1,d_1;d_2)_{[7]},$$
$$SF^3_9=(a_1,d_1;c_2)_{[7]},\ SF^3_{10}=(b_1,c_1;c_2)_{[7]},\ SF^3_{11}=(a_1,c_1;b_2)_{[7]},\ SF^3_{12}=(a_1,b_1;a_2)_{[7]},$$
$$SF^3_{13}=(c_1,d_1;d_2)_{[8]},\ SF^3_{14}=(b_1,d_1;c_2)_{[8]},\ SF^3_{15}=(a_1,d_1;b_2)_{[8]},\ SF^3_{16}=(b_1,c_1;b_2)_{[8]},$$
$$SF^3_{17}=(a_1,c_1;a_2)_{[8]},\ SF^3_{18}=(c_1,d_1;c_2)_{[9]},\ SF^3_{19}=(b_1,d_1;b_2)_{[9]},\ SF^3_{20}=(a_1,d_1;a_2)_{[9]},$$
$$SF^3_{21}=(b_1,c_1;a_2)_{[9]},\ SF^3_{22}=(c_1,d_1;b_2)_{[10]},\ SF^3_{23}=(b_1,d_1;a_2)_{[10]},\ SF^3_{24}=(c_1,d_1;a_2)_{[11]};$$

$$SF^4_1 = (a_1,b_1;c_2,d_2)_{[6]},\quad SF^4_2 = (a_1,b_1,c_1;d_2)_{[7]},\quad SF^4_3 = (a_1,c_1;c_2,d_2)_{[7]},$$
$$SF^4_4 = (a_1,b_1,d_1;d_2)_{[8]},\quad SF^4_5 = (a_1,b_1,c_1;c_2)_{[8]},\quad SF^4_6 = (a_1,d_1;c_2,d_2)_{[8]},$$
$$SF^4_7 = (b_1,c_1;c_2,d_2)_{[8]},\quad SF^4_8 = (a_1,c_1;b_2,d_2)_{[8]},\quad SF^4_9 = (a_1,c_1,d_1;d_2)_{[9]},$$
$$SF^4_{10} = (a_1,b_1,d_1;c_2)_{[9]},\quad SF^4_{11} = (a_1,b_1,c_1;b_2)_{[9]},\quad SF^4_{12} = (b_1,d_1;c_2,d_2)_{[9]},$$
$$SF^4_{13} = (a_1,d_1;b_2,d_2)_{[9]},\quad SF^4_{14} = (b_1,c_1;b_2,d_2)_{[9]},\quad SF^4_{15} = (b_1,c_1,d_1;d_2)_{[10]},$$
$$SF^4_{16} = (a_1,c_1,d_1;c_2)_{[10]},\ SF^4_{17} = (a_1,b_1,d_1;b_2)_{[10]},\ SF^4_{18} = (c_1,d_1;c_2,d_2)_{[10]},$$
$$SF^4_{19} = (a_1,b_1,c_1;a_2)_{[10]},\ SF^4_{20} = (b_1,d_1;b_2,d_2)_{[10]},\ SF^4_{21} = (a_1,d_1;a_2,d_2)_{[10]},$$
$$SF^4_{22} = (a_1,d_1;b_2,c_2)_{[10]},\ SF^4_{23} = (b_1,c_1;b_2,c_2)_{[10]},\ SF^4_{24} = (b_1,c_1,d_1;c_2)_{[11]},$$

$SF^4_{25}=(a_1,c_1,d_1;b_2)_{[11]},\ SF^4_{26}=(a_1,b_1,d_1;a_2)_{[11]},\ SF^4_{27}=(c_1,d_1;b_2,d_2)_{[11]},$
$SF^4_{28}=(b_1,d_1;a_2,d_2)_{[11]},\ SF^4_{29}=(b_1,d_1;b_2,c_2)_{[11]},\ SF^4_{30}=(b_1,c_1,d_1;b_2)_{[12]},$
$SF^4_{31}=(a_1,c_1,d_1;a_2)_{[12]},\ SF^4_{32}=(c_1,d_1;a_2,d_2)_{[12]},\ SF^4_{33}=(c_1,d_1;b_2,c_2)_{[12]},$
$SF^4_{34}=(b_1,d_1;a_2,c_2)_{[12]},\ SF^4_{35}=(b_1,c_1,d_1;a_2)_{[13]},\ SF^4_{36}=(c_1,d_1;a_2,c_2)_{[13]},$
$SF^4_{37}=(c_1,d_1;a_2,b_2)_{[14]};$
$SF^5_1=(a_1,b_1,c_1;c_2,d_2)_{[9]},\ SF^5_2=(a_1,b_1,d_1;c_2,d_2)_{[10]},\ SF^5_3=(a_1,b_1,c_1;b_2,d_2)_{[10]},$
$SF^5_4=(a_1,b_1,c_1,d_1;d_2)_{[11]},\ SF^5_5=(a_1,c_1,d_1;c_2,d_2)_{[11]},\ SF^5_6=(a_1,b_1,d_1;b_2,d_2)_{[11]},$
$SF^5_7=(a_1,b_1,c_1;a_2,d_2)_{[11]},\ SF^5_8=(a_1,b_1,c_1;b_2,c_2)_{[11]},\ SF^5_9=(a_1,b_1,c_1,d_1;c_2)_{[12]},$
$SF^5_{10}=(b_1,c_1,d_1;c_2,d_2)_{[12]},\ SF^5_{11}=(a_1,c_1,d_1;b_2,d_2)_{[12]},\ SF^5_{12}=(a_1,b_1,d_1;a_2,d_2)_{[12]},$
$SF^5_{13}=(a_1,b_1,d_1;b_2,c_2)_{[12]},\ SF^5_{14}=(a_1,b_1,c_1;a_2,c_2)_{[12]},\ SF^5_{15}=(a_1,b_1,c_1,d_1;b_2)_{[13]},$
$SF^5_{16}=(b_1,c_1,d_1;b_2,d_2)_{[13]},\ SF^5_{17}=(a_1,c_1,d_1;a_2,d_2)_{[13]},\ SF^5_{18}=(a_1,c_1,d_1;b_2,c_2)_{[13]},$
$SF^5_{19}=(a_1,b_1,d_1;a_2,c_2)_{[13]},\ SF^5_{20}=(c_1,d_1;b_2,c_2,d_2)_{[13]},\ SF^5_{21}=(a_1,b_1,c_1,d_1;a_2)_{[14]},$
$SF^5_{22}=(b_1,c_1,d_1;a_2,d_2)_{[14]},\ SF^5_{23}=(b_1,c_1,d_1;b_2,c_2)_{[14]},\ SF^5_{24}=(a_1,c_1,d_1;a_2,c_2)_{[14]},$
$SF^5_{25}=(a_1,b_1,d_1;a_2,b_2)_{[14]},\ SF^5_{26}=(b_1,c_1,d_1;a_2,c_2)_{[15]},\ SF^5_{27}=(a_1,c_1,d_1;a_2,b_2)_{[15]},$
$SF^5_{28}=(b_1,c_1,d_1;a_2,b_2)_{[16]};$
$SF^6_1=(a_1,b_1,c_1;b_2,c_2,d_2)_{[12]},\ SF^6_2=(a_1,b_1,c_1,d_1;c_2,d_2)_{[13]},$
$SF^6_3=(a_1,b_1,d_1;b_2,c_2,d_2)_{[13]},\ SF^6_4=(a_1,b_1,c_1,d_1;b_2,d_2)_{[14]},$
$SF^6_5=(a_1,c_1,d_1;b_2,c_2,d_2)_{[14]},\ SF^6_6=(a_1,b_1,d_1;a_2,c_2,d_2)_{[14]},$
$SF^6_7=(a_1,b_1,c_1,d_1;a_2,d_2)_{[15]},\ SF^6_8=(a_1,b_1,c_1,d_1;b_2,c_2)_{[15]},$
$SF^6_9=(b_1,c_1,d_1;b_2,c_2,d_2)_{[15]},\ SF^6_{10}=(a_1,c_1,d_1;a_2,c_2,d_2)_{[15]},$
$SF^6_{11}=(a_1,b_1,c_1,d_1;a_2,c_2)_{[16]},\ SF^6_{12}=(b_1,c_1,d_1;a_2,c_2,d_2)_{[16]},$
$SF^6_{13}=(a_1,c_1,d_1;a_2,b_2,d_2)_{[16]},\ SF^6_{14}=(a_1,b_1,c_1,d_1;a_2,b_2)_{[17]},$
$SF^6_{15}=(b_1,c_1,d_1;a_2,b_2,d_2)_{[17]},\ SF^6_{16}=(b_1,c_1,d_1;a_2,b_2,c_2)_{[18]};$
$SF^7_1=(a_1,b_1,c_1,d_1;b_2,c_2,d_2)_{[16]},\quad SF^7_2=(a_1,b_1,c_1,d_1;a_2,c_2,d_2)_{[17]},$
$SF^7_3=(a_1,b_1,c_1,d_1;a_2,b_2,d_2)_{[18]},\quad SF^7_4=(a_1,b_1,c_1,d_1;a_2,b_2,c_2)_{[19]};$
$SF^8_1=(a_1,b_1,c_1,d_1;a_2,b_2,c_2,d_2)_{[20]}.$

Приведенный список демонстрирует достаточность СП для упорядочивания основных структурных форм. Но СП различают и все дополнительные структурные формы.

Действительно, каждая несимметричная форма из списка 1.1, индексы строк A_1 и A_2 которой не равны, является основной по СП3$_1$. Оставшиеся пять несимметричных SF — это SF^3_6, SF^3_{17}, SF^4_{22}, SF^5_{14}, SF^5_{25} — являются основными согласно СП3$_2$.

Замечание 1.1. Во всех SF^m_i из списка 1.1, кроме SF^5_{20}, количество ненулевых элементов в строке A_2 не превосходит количества ненулевых элементов в строке A_1.

Определение 1.4. *Представителем произвольной* SF^m_i будем называть любую числовую матрицу, структура которой совпадает со структурой SF^m_i.

В результате SF^m_i можно трактовать как совокупность всех ее представителей.

Важная характеристика SF^m_i связана с определением всех возможных значений максимальной степени общего множителя P^l_0 (см. определение 2.1 из [1]), который можно выносить в правой части порожденной этой структурной формой системы (1.1) при различных значениях ненулевых коэффициентов. Поэтому множество вещественных ненулевых значений элементов любой SF_i^m разобьем на множества $s_i^{m,l}$ $(0 \leq l \leq 3)$ следующим образом: $s_i^{m,l}$ содержит те и только те значения элементов SF_i^m, при которых в правой части системы (1.1), порожденной этой формой, можно вынести общий множитель P_0^l.

Определение 1.5. Для любой SF_i^m, задаваемой матрицей A, запись $SF_i^{m,l}$ обозначает ту же матрицу A, но значения ее ненулевых элементов принадлежат $s_i^{m,l} \neq \emptyset$.

Иными словами, $SF_i^{m,l}$ объединяет тех и только тех представителей SF_i^m, чьи элементы принадлежат непустому множеству $s_i^{m,l}$, или, что то же самое, $SF_i^{m,l}$ порождает только такие системы, которые имеют общий множитель максимальной степени l.

Из определения 1.5 и теоремы 2.3 из [1] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.1. *SF_i^{m,l_1} линейно не эквивалентна SF_i^{m,l_2} при $l_1 \neq l_2$, т. е. любые два представителя SF_i^{m,l_1} и SF_i^{m,l_2} линейно не эквивалентны.*

Если SF_i^m имеет только одно множество $s_i^{m,l_0} \neq \emptyset$, оно не имеет ограничений и называется *тривиальным.* Тем самым, справедливо $SF_i^{m,l_0} = SF_i^m$.

Например, значения ненулевых элементов в $SF_8^4 = (a_1, c_1; b_2, d_2)$ разбиваются на два подмножества: $s_8^{4,0} = \{a_1 d_2 \neq b_2 c_1\}$ и $s_8^{4,2} = \{a_1 d_2 = b_2 c_1\}$. А у системы (1.1), порожденной $SF_2^4 = (a_1, b_1, c_1; d_2)$, при любых значениях элементов отсутствует общий множитель, т. е. имеет место $l = 0$ и единственное непустое множество $s_2^{4,0}$ тривиально.

1.2. Нормированные структурные формы и допустимые множества. Следующим шагом на пути к определению канонической формы станет введение понятия нормированной структурной формы, основанного на нормировке при помощи замены $(2.6)^1$ $L = \{r_1, s_2 - \forall,\ r_2, s_1 = 0\}$ всех представителей $SF_i^{m,l}$ с целью получения на двух должным образом выбранных местах единичных по модулю элементов.

Сформулируем принципы выбора нормируемых элементов матрицы A, основная идея которых заключается в необходимости нормировки самых «неприятных» для последующей нормализации возмущенных систем элементов: тех, которые имеют максимальные индексы. При этом, следуя логике структурных принципов (см. СП3$_1$), предпочтение по возможности будет отдаваться нормировке элементов из строки A_2.

Нормировочные принципы (НП) для $SF_i^{m,l}$.

НП1) *Расстановка нормируемых элементов в матрице A осуществляется в следующем порядке:*

НП1$_1$) *1-й нормируемый элемент расположен в A_2 и имеет максимальный индекс;*

НП1$_2$) *если не все ненулевые элементы матрицы A расположены на одном зигзаге (см. замечание 2.1 из [1]), 2-й нормируемый элемент после нормировки должен иметь определенный знак при любых значениях элементов A из $s_i^{m,l}$;*

НП1$_3$) *если $l = 3$, имеем $A_1 = A_2$; если $l \leq 2$, 2-й нормируемый элемент, если возможно, расположен в строке A_2 и имеет там максимальный из оставшихся индекс, иначе он расположен в A_1 и имеет там максимальный индекс.*

НП2) *Значения нормированных элементов по модулю равны единице и при этом:*

НП2$_1$) *если они из нечетного зигзага, 1-й нормированный элемент равен* 1*;*

НП2_2) *если они из разных зигзагов, знак нормированного элемента из нечетного зигзага должен совпадать со знаком нормированного элемента из четного зигзага.*

Непосредственной проверкой установлено, что предложенные НП позволяют в любой $SF_i^{m,l}$ однозначно выбрать места для нормируемых элементов и значения, которые должны получить элементы на этих местах после нормировки. При этом нормирующая замена определяется однозначно для всех SF, кроме $SF_3^{2,2}$ и $SF_4^{2,2}$, для которых элемент s_2 в $(2.6)^1$ произволен и может быть выбран, например, единицей (см. замечание 2.1 из [1]).

Итак, представители любой $SF_i^{m,l}$ (числовые матрицы заданной структуры с элементами из $s_i^{m,l}$) разбиваются на классы эквивалентности относительно нормирующих замен $(2.6)^1$, а в качестве образующих берутся нормированные представители.

Определение 1.6. $SF_i^{m,l}$ будем называть *нормированной структурной формой* и обозначать $NSF_i^{m,l}$ (normalized *SF*), если она объединяет только своих нормированных в соответствии с НП представителей.

Соглашение 1.2. *Любую нормированную структурную форму A будем записывать в виде σB, где вынесенный из матрицы A множитель σ равен знаку первого нормированного элемента. Оставшиеся ненормированными ненулевые элементы матрицы B, если таковые имеются, будем должным образом выражать через переменные, называемые в дальнейшем параметрами NSF, и функции от них. Также при необходимости будем записывать NSF как функцию от своих параметров.*

Тем самым, параметры NSF, обозначаемые $u, v, w, \dots$, всегда предполагаются отличными от нуля. Например, $NSF_7^{5,1} = NSF_7^{5,1}(\sigma, u, v) = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, но при этом $v \neq u$, иначе $m \neq 5$.

Соглашение (1.2) позволяет в матрице B, используемой в дальнейшем для нормализации возмущенных систем, получить максимальное количество единиц, а множитель σ, если он отрицателен, заменой времени всегда можно сделать равным единице.

Так, $SF_2^{2,1} = (a_1; c_2)$ заменой $(2.6)^1$ может быть сведена к $NSF_2^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\sigma = \operatorname{sign} a_1$. Здесь нормируемые элементы расположены на разных зигзагах, и согласно замечанию 2.1 из [1] на знак элемента из четного зигзага повлиять невозможно, поэтому он выносится в виде множителя σ. А знак нормируемого элемента из нечетного зигзага всегда можно сделать равным σ, что и требуется в НП2_2.

Обсудим теперь причину, по которой был введен НП1_2.

Если нормируемые элементы в SF брать из одного зигзага, после нормировки их произведение может получаться как положительным, так и отрицательным.

Нормируем, например, b_2 и d_2 в $SF_{13}^4 = (a_1, d_1; b_2, d_2)$, как того требует НП$1_3$.

Тогда при $l = 1$ получим $NSF_{13}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ с $\sigma = \operatorname{sign} b_2$, а при $l = 0$ — систему $\sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix}$ с $\kappa = \operatorname{sign}(b_2 d_2)$ и тем же σ, причем будем иметь $v \neq u$, если справедливо $\kappa = -1$, т. е. в зависимости от знака κ — одну из двух различных NSF.

В данном случае раздвоения можно избежать, так как в $SF_{13}^{4,0}$ имеется ненулевой элемент d_1 на другом зигзаге, который согласно НП1_2 и следует нормировать. Поэтому при $l = 0$ получаем единственную $NSF_{13}^{4,0} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & v \end{pmatrix}$ с $v \neq -u^{-2}$, что предпочтительнее выбора для нормировки обоих элементов из A_2 ценой раздвоения NSF.

Определение 1.7. Если все ненулевые элементы $SF_i^{m,l}$ расположены только на одном из зигзагов, из-за чего второй нормированный элемент в матрице B при его наличии может равняться как единице, так и минус единице (будем обозначать его κ), то получаемую NSF будем называть *двойственной* и обозначать $NSF_{i,\kappa}^{m,l}$.

Таким образом, НП1$_2$ и НП1$_3$ позволяют однозначно выбрать место для второго нормируемого элемента в любой $SF_i^{m,l}$. При $l \le 2$ они предполагают получение этого элемента в A_2, а при невозможности — в A_1, на месте с максимальным индексом с учетом сохранения единственности после нормировки. В то же время при $l = 3$ второй единичный элемент автоматически располагается в A_1 над первым в силу естественного предположения о равенстве A_1 и A_2, что, в частности, не допускает раздвоений.

Отметим, что для $NSF_i^{m,l}$ по сравнению с $SF_i^{m,l}$ существенно облегчается практическое написание условий, фиксирующих максимальную степень l общего множителя.

Так, $NSF_7^5 = \sigma \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть $NSF_7^{5,2}$ при $-v$, $w = u$; $NSF_7^{5,1}$ при $w = v - u$; $NSF_7^{5,0}$, если не выполняются перечисленные выше ограничения на параметры.

Определение 1.8. Значения параметров, при которых определена произвольная $NSF_i^{m,l}$, будем называть *допустимыми*. Объединение допустимых значений параметров для каждой из форм будем называть *допустимым множеством* и обозначать $ps_i^{m,l}$ (permissible set). Допустимое множество будем называть *тривиальным* и обозначать $tps_i^{m,l}$ (trivial ps), если входящие в него параметры ограничений не имеют.

Из определения 1.8 и теоремы 2.3 из [1] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.2. *При $l = 2, 3$ всех представителей, образующих $NSF_i^{m,l}$, в зависимости от знака дискриминанта $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$ из $(2.14)^1$ можно разбить на три непересекающихся множества, обозначаемых $NSF_i^{m,l,>}$, $NSF_i^{m,l,=}$, $NSF_i^{m,l,<}$. Теперь при $l = 2$ всех представителей, образующих $NSF_i^{m,l,*}$, в зависимости от знака дискриминанта $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$ из $(2.16)^1$ можно разбить на три непересекающихся множества, обозначаемых $NSF_i^{m,l,*,>}$, $NSF_i^{m,l,*,=}$, $NSF_i^{m,l,*,<}$. А при $l = 3$ таких множеств — два, так как в $(2.22)^1$ имеем $D \ge 0$. Аналогичные разбиения можно осуществить в $ps_i^{m,l}$ $(l = 2, 3)$.*

Следствие 1.1. *Системы, порожденные любыми двумя представителями $NSF_i^{m,l}$ $(l = 2, 3)$ с различными парами третьих и четвертых верхних индексов, не могут оказаться линейно эквивалентными.*

Следует иметь в виду, что расположение нормированных элементов в $NSF_i^{m,l}$ может быть различным не только при разных значениях l (см. нормировки $SF_{13}^{4,0}$ и $SF_{13}^{4,1}$ выше), но и при появлении верхних индексов в случае прекращения действия НП1$_2$ в связи с автоматической фиксацией знака для второго нормируемого элемента, выбираемого согласно НП1$_3$ на том же зигзаге, что и первый.

1.3. Канонические множества и канонические формы. Итак, рассмотрим произвольную матрицу $NSF_i^{m,l}$, имеющую m ненулевых элементов с заданным расположением, фиксирующим ее порядковый номер i в $SUSF^m$ согласно введенным СП. Обозначим через l степень общего множителя P_0^l, который выносится из правой части системы, порожденной любым представителем $NSF_i^{m,l}$. По теореме 2.3 из [1] степень l инвариантна относительно линейных неособых замен.

Отметим, что получение нормированных структурных форм — это формальная работа, требующая только нормировки (2.6)[1], т. е. замены, не затрагивающей структуры порождающей эти формы матрицы A.

Теперь же станем упрощать $NSF_i^{m,l}$, сводя их посредством подходящих линейных неособых замен (1.2) при определенных значениях параметров из $ps_i^{m,l}$ к предшествующим структурным формам, т. е. к $SF_j^{n,l}$ с $n < m$ или с $j < i$ при $n = m$.

С одной стороны, практически каждая $NSF_i^{m,l}$ может сводиться к предшествующим $SF_j^{n,l}$, т. е. имеет «лишних» представителей, линейно эквивалентных каким-либо представителям предшествующих форм. Значения параметров, допускающие таких представителей, надо удалять из $ps_i^{m,l}$.

С другой стороны, те $NSF_i^{m,l}$, которые при всех допустимых значениях своих параметров линейно эквивалентны каким-либо предшествующим формам, самостоятельного интереса не представляют, поскольку не могут выступать в роли «простейших».

Определение 1.9. Непустое множество, содержащее те и только те значения параметров из $ps_i^{m,l}$, при которых $NSF_i^{m,l}$ линейно не эквивалентна никакой предшествующей SF, будем называть *каноническим* и обозначать $cs_i^{m,l}$ (canonical set).

Определение 1.10. Любую $NSF_i^{m,l}$ будем называть *канонической формой* и обозначать $CF_i^{m,l}$ (canonical form), если ее параметры принадлежат $cs_i^{m,l}$.

Таким образом, матрицы $CF_i^{m,l}$ и $NSF_i^{m,l}$ выглядят одинаково, но параметры $CF_i^{m,l}$ принадлежат $cs_i^{m,l}$ — это $ps_i^{m,l}$, из которого удалены те значения параметров, при которых представители $NSF_i^{m,l}$ заменами (1.2) сводятся к предшествующим SF.

Утверждение 1.3. *Любые две канонические формы линейно не эквивалентны.*

Это очевидное утверждение означает, что никакие два представителя различных CF или, что то же самое, никакие две системы (1.1), порожденные соответствующими числовыми матрицами, не могут быть связаны линейной неособой заменой.

При $l = 2, 3$ понятия канонической формы и канонического множества требуют уточнения. Дело в том, что при определенных значениях дискриминантов $CF_i^{m,l}$ может перестать быть канонической, т. е. окажется, что все ее представители, значения которых берутся из допустимого множества с определенными третьим и четвертым верхними индексами, сводятся в предшествующие формы. В таких случаях в обозначении каждой $CF_i^{m,l}$ на третьем и (или) четвертом верхних местах будут перечисляться те значения дискриминантов, при которых она остается канонической, и будут описываться все канонические множества при этих значениях дискриминантов.

В ряде случаев канонические множества параметров удается дополнительно ограничить при помощи линейных замен, преобразующих CF в себя. Любое такое ограничение в дальнейшем, безусловно, облегчает нахождение обобщенных НФ возмущенных систем.

Определение 1.11. Каноническое множество любой $CF_i^{m,l}$ будем называть *минимальным* и обозначать $mcs_i^{m,l}$ (minimal cs), если найдена линейная неособая замена, преобразующая $CF_i^{m,l}$ в себя и позволяющая ограничить значения элементов $cs_i^{m,l}$, а именно, если это возможно, хотя бы один из нееденичных элементов получен ограниченным сверху и (или) снизу и (или) зафиксирован знак множителя σ.

Таким образом, если $CF_i^{m,l}$ не содержит параметров или их невозможно ограничить, автоматически выполняется $cs_i^{m,l} = mcs_i^{m,l}$, т. е. оно является минимальным.

Определение 1.12. Множество, содержащее те значения параметров из $cs_i^{m,l}$, от которых удается избавиться при помощи линейных неособых замен, переводящих $CF_i^{m,l}$ в себя, будем называть *дополнительным* и обозначать $acs_i^{m,l}$ (additional cs).

Тем самым, можем записать $mcs_i^{m,l} = cs_i^{m,l} \backslash acs_i^{m,l}$.

Понятие acs введено потому, что на практике удобнее выписывать его, а не mcs.

1.4. Вырожденные формы при $l = 3$. Наряду с невырожденной системой (1.1), отождествляемой с матрицей коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, в случае $l = 3$ имеются системы, одна из строк матрицы A которых может равняться нулю.

Определение 1.13. Структурную μ-форму A $\;(\mu = \overline{1,4})$ будем называть *вырожденной* и обозначать SF_d^{μ} (degenerate SF), если выполняется $A_2 = 0$.

Тогда полученная из SF_d^{μ} при помощи перенумерации $(2.7)^1$ форма с нулевой первой строкой с учетом СПЗ$_1$ и определения (1.3) оказывается дополнительной.

Отметим, что возможное использование при получении SF_d^{μ} перенумерации приводит к отказу от соглашения 2.8 из [1] и допускает случай $a_1, b_1 = 0$, $A_2 = 0$.

Систему вида (1.1), порожденную вырожденной SF, естественно называть вырожденной. Она возникает только при $l = 3$ и является системой $(2.20)^1$ с $k = 0$.

Для $SF_d^{\mu,3}$ сохраняются все СП, кроме СПЗ$_3$, который заменяется следующим принципом: СПЗ$_{d3}$) *иначе, следующий за ним ненулевой элемент в A_1 имеет меньший индекс.*

Теперь для любого $\mu = \overline{1,4}$ согласно введенной упорядоченности каждой $SF_d^{\mu,3}$ сопоставим свой номер ι и будем обозначать ее $SF_{d,\iota}^{\mu,3}$. На $SF_{d,\iota}^{\mu,3}$ естественным образом распространяются все НП, дальнейшие определения и обозначения с поправкой на то, что в НП1 оба нормируемых элемента берутся из строки A_1.

В заключение опишем возможности, которые предоставляет использование вырожденных канонических форм для нормализации возмущенных систем в случае $l = 3$.

Дополнение 1.1. Использование $CF_d^{\mu,3}$ позволяет тремя различными способами нормализовать систему $(1.4)^1$ $\;\dot{x} = P(x) + X(x)$, где P относится к случаю $l = 3$:
1) использовать саму $CF_d^{\mu,3}$ в качестве невозмущенной части;
2) использовать $CF^{m,3}$ в качестве невозмущенной части, сделав в возмущенной системе соответствующую линейную замену, переводящую $CF_d^{\mu,3}$ в $CF^{m,3}$;
3) избавиться от вырожденности невозмущенной части $CF_d^{\mu,3}$, добавив в $P_2 \equiv 0$ какие-либо члены из возмущения системы $(1.4)^1$ так, чтобы новая невозмущенная часть превратилась в квазиоднородный многочлен за счет введения соответствующего веса.

Соглашение 1.3. *В дальнейшем: 1) запись «$\ldots\ \zeta = [\,\varsigma_1 \vee \upsilon_1\,]\ \ldots\ \eta = [\,\varsigma_2 \vee \upsilon_2\,]\ \ldots$» будет означать, что выполняется или $\zeta = \varsigma_1$, $\eta = \varsigma_2$, или $\zeta = \upsilon_1$, $\eta = \upsilon_2$; 2) условие, заключенное в круглые скобки и записанное после другого условия, не является требованием, а приводится в качестве напоминания для лучшего восприятия последующих рассуждений; 3) в формулировках результатов отличие от нуля выражений, стоящих в знаменателе, не является предположением, а устанавливается в ходе доказательства.*

2. Канонические формы однородной кубической системы с общим множителем третьей степени. ***2.1. Шесть классов линейной эквивалентности систем при $l = 3$.*** Рассмотрим систему (1.1) $\;\dot{x} = P(x) = A\,q^{[3]}(x)$, которая при $l = 3$ с учетом пропорциональности ненулевых строк матрицы A в $(2.20)^1$ $\;(P_2 \equiv kP_1)$ и соглашения 2.3 из [1] однозначно по формулам $(2.23)^1$ записывается в виде $(2.21)^1$:

$$\dot{x} = P_0(x)Hx, \quad P_0 = x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2, \quad H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ kp_1 & kq_1 \end{pmatrix}, \begin{array}{l} p_1^2 + q_1^2 \neq 0, \ k \neq 0 \\ (\delta_{pq} = \det H = 0). \end{array} \tag{2.1}$$

По теореме 2.2 из [1] любая замена (1.2) $x = Ly$ сводит (2.1) к системе $(2.17)^1$ вида

$$\dot{y} = (\tilde{\alpha}, 2\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})\, q^{[2]}(y)\, \widetilde{H}y, \tag{2.2}$$

в которой использованы обозначения $\tilde{\alpha} = r_1^2 + 2\beta r_1 r_2 + \gamma r_2^2$, $\tilde{\beta} = r_1 s_1 + \beta(r_1 s_2 + r_2 s_1) + \gamma r_2 s_2$, $\tilde{\gamma} = s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + \gamma s_2^2$ $(\alpha = 1)$ согласно $(2.18)^1$ и введенная там же матрица $\widetilde{H}$ — особая, т. е. выполняется $\delta_{\tilde{p}\tilde{q}} = 0$.

При этом любая линейная неособая замена преобразует матрицу $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 & kd_1 \end{pmatrix}$ в $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (s_2 - ks_1)\tilde{a} & (s_2 - ks_1)\tilde{b} & (s_2 - ks_1)\tilde{c} & (s_2 - ks_1)\tilde{d} \\ (kr_1 - r_2)\tilde{a} & (kr_1 - r_2)\tilde{b} & (kr_1 - r_2)\tilde{c} & (kr_1 - r_2)\tilde{d} \end{pmatrix}$.

Вид матрицы $\widetilde{A}$ позволяет установить некоторые связи между коэффициентами замены и структурами связуемых систем.

Утверждение 2.1. *Пусть замена* (1.2) *сводит* (2.1) *к системе* (2.2), *тогда:*
1) если справедливо $P_2 \equiv 0 \Leftrightarrow k = 0$, *выполняется* $\widetilde{P}_2 \equiv 0 \ \Leftrightarrow \ r_2 = 0$;
2) если справедливо $P_2 \equiv 0 \Leftrightarrow k = 0$, *выполняется* $\widetilde{P}_1 \equiv \widetilde{P}_2 \ \Leftrightarrow \ k = 1 \ \Leftrightarrow \ r_2 = -s_2 \neq 0$;
3) если справедливо $P_1 \equiv P_2 \Leftrightarrow k = 1$, *выполняется* $\widetilde{P}_1 \equiv \widetilde{P}_2 \ \Leftrightarrow \ k = 1 \ \Leftrightarrow \ r_2 = r_1 + s_1 - s_2$.

Выберем замену (1.2) так, чтобы в системе (2.2) $\widetilde{H}$ оказалась жордановой.

Вид замены будет, конечно, зависеть от выбора знака дискриминанта $D = \lambda_1^2$ характеристического полинома матрицы H, являющегося линейным инвариантом; здесь согласно $(2.22)^1$ собственные числа удовлетворяют равенствам $\lambda_1 = p_1 + kq_1$ и $\lambda_2 = 0$. Поэтому множество систем (2.1) разбивается на два линейно неэквивалентных класса в соответствии со знаком D.

Замена $J_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ k & -p_1 \end{pmatrix}$ при $D > 0$ или замена $J_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & q_1^{-1} \end{pmatrix}$ при $D = 0$ преобразует систему (2.1) в систему $(2.17)^1$ соответственно одного из двух видов:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & 2\tilde{\beta} & \tilde{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\tilde{\alpha} = 1 + 2\beta k + \gamma k^2, \quad \tilde{\gamma} = \alpha q_1^2 - 2\beta p_1 q_1 + \gamma p_1^2, \\
&\tilde{\beta} = (1 + \beta k)q_1 - (\beta + \gamma k)p_1; \quad p_1 + kq_1 \neq 0; \\
&\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\alpha} & 2\tilde{\beta} & \tilde{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\tilde{\alpha} = 1 + 2\beta k + \gamma k^2, \quad \tilde{\beta} = (\beta + \gamma k)q_1^{-1}, \\
&\tilde{\gamma} = \gamma q_1^{-2}; \quad p_1 + kq_1 = 0 \quad (q_1 \neq 0).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Очевидно, что (2.3_1) и (2.3_2) — это вырожденные системы вида $(2.20)^1$ с $k = 0$.

В силу $(2.19)^1$ $\widetilde{D}_0 = \delta^2 D_0$ множество систем (2.1) разбивается также на три линейно неэквивалентных класса в зависимости от знака $D_0 = \beta^2 - \gamma$ — общего множителя P_0.

Последовательно фиксируя в дальнейшем различные сочетания знаков дискриминантов D_0 и D, в каждом из шести классов эквивалентности будем максимально упрощать систему (2.3), сохраняя при этом ее вырожденность.

2.2. Построение вырожденных канонических форм. Доказем, что приведенный ниже список содержит все возможные вырожденные канонические формы системы (2.1) со своими каноническими множествами из определений 1.9, 1.10.

Список 2.1. Десять $CF_{d,\iota}^{\mu,3}$ и их нетривиальные $cs_{d,\iota}^{\mu,3}$ $(\sigma, \kappa = \pm 1)$:

$CF_{d,1}^{1,3,=,>} = \sigma(1,0,0,0)$, $CF_{d,2}^{1,3,=,=} = \sigma(0,1,0,0)$, $CF_{d,3}^{1,3,=,>} = \sigma(0,0,1,0)$,
$CF_{d,4}^{1,3,=,=} = \sigma(0,0,0,1)$; $CF_{d,1}^{2,3,=,>} = \sigma(1,1,0,0)$, $CF_{d,2,\kappa}^{2,3,\gtrless,>} = \sigma(\kappa,0,1,0)$,
$CF_{d,3}^{2,3,<,>} = \sigma(1,0,0,1)$, $CF_{d,4}^{2,3,>,>} = \sigma(0,1,1,0)$, $CF_{d,5,+1}^{2,3,<,=} = \sigma(0,+1,0,1)$;
$CF_{d,1}^{3,3,\gtrless,>} = \sigma(v,1,1,0)$;
$cs_{d,2,-1}^{2,3,>,>} = \{\kappa = -1\}$, $cs_{d,2,+1}^{2,3,<,>} = \{\kappa = 1\}$;
$cs_{d,1}^{3,3,>,>} = \{v < 1/4,\ v \neq 2/9\}$, $cs_{d,1}^{3,3,<,>} = \{v > 1/4,\ v \neq 1/3\}$.

Здесь 3-й и 4-й верхние индексы указывают знаки D_0, D, при которых формы являются каноническими, а в правых частях выписаны только строки A_1, поскольку все A_2 — нулевые.

Утверждение 2.2. *$NSF_{d,1}^{3,3}$ при $v = 2/9$ заменой* (1.2) *с $s_1 = -3s_2/2$, $r_2 = 0$ сводится к $SF_{d,2,-1}^{2,3,>,>}$; при $v = 1/4$ заменой с $s_1 = -2s_2$, $r_2 = 0$ сводится к $SF_{d,1}^{2,3,=,>}$; при $v = 1/3$ заменой с $s_1 = -2s_2$, $r_2 = 0$ сводится к $SF_{d,3}^{2,3,<,>}$; при остальных значениях v к предшествующим формам не сводится.*

Набор 2.1. Замены, используемые в дальнейшем в разделе 2:
$J_1^3 = \{r_1 = 1,\ s_1 = q_1,\ r_2 = k,\ s_2 = -p_1\}$, $J_2^3 = \{r_1 = 1,\ s_1 = 0,\ r_2 = k,\ s_2 = q_1^{-1}\}$;
$L_{d,4}^{2,3,>,>} = \{r_1 = (2\tilde\beta)^{-1}\tilde\gamma s_2,\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = |\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}\}$;
$L_{d,2,-1}^{2,3,>,>} = \{r_1 = |\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ s_1 = [\,0 \vee -\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta|\tilde\alpha|^{1/2}|\tilde\beta^2\lambda_1|^{-1/2}\,],\ r_2 = 0,$
$s_2 = [\,|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2} \vee \sqrt{2}|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}\,]\}$;
$L_{d,1}^{3,3,>,>} = \{r_1 = (2\tilde\beta)^{-1}\tilde\gamma s_2,\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = |\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}\}$;
$L_{d,1}^{1,3,=,>} = \{r_1 = (\tilde\alpha|\lambda_1|)^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = 1\}$;
$L_{d,3}^{1,3,=,>} = \{r_1 = 1,\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}\}$;
$L_{d,1}^{2,3,=,>} = \{r_1, s_1 = (\tilde\alpha|\lambda_1|)^{-1/2},\ r_2 = 0,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\beta^{-1}s_1\}$;
$L_{d,2}^{1,3,=,=} = \{r_1 = \tilde\alpha^{-1},\ s_1 = -\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta,\ r_2 = 0,\ s_2 = 1\}$;
$L_{d,4}^{1,3,=,=} = \{r_1 = \tilde\gamma,\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = 1\}$;
$L_{d,2,+1}^{2,3,<,>} = \{r_1 = |\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}\}$;
$L_{d,3}^{2,3,<,>} = \{r_1, s_1 = |\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ r_2 = 0,\ s_2 = -3\tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}s_1\}$;
$L_{d,1}^{3,3,<,>} = \{r_1 = (2\tilde\beta)^{-1}\gamma^{1/2}|\lambda_1|^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = |\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}\}$;
$L_{d,5,+1}^{2,3,<,=} = \{r_1 = \tilde\alpha^{-1}s_2^{-1},\ s_1 = -\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta s_2,\ r_2 = 0,\ s_2 = \tilde\tau^{-1/2}\}$.

Теорема 2.1. *Любая система* (1.1) *с $l = 3$, записанная в виде* (2.1) *согласно* (2.23)[1], *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей вырожденной канонической формы из списка* 2.1. *Ниже для каждой $CF_{d,\iota}^{\mu,3,*,*}$ приведены: a) условия на коэффициенты системы* (2.1), *b) замены* (1.2), *преобразующие правую часть* (2.1) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя σ и параметров из $cs_{d,\iota}^{\mu,3,*,*}$.*

$CF_{d,4}^{2,3,>,>}$: *a)* $\gamma < \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\alpha = 0, \tilde\gamma \neq 0$, *b)* J_1^3, $L_{d,4}^{2,3,>,>}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$;

$CF^{2,3,>,>}_{d,2,-1}$: *a)* $\gamma < \beta^2, \lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\alpha \neq 0, \tilde\gamma \neq 0, \tilde\beta^2 = [0 \vee 9\tilde\alpha\tilde\gamma/8]$, *b)* J^3_1, $L^{2,3,>,>}_{d,2,-1}$, *c)* $\sigma = [\operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1) \vee -\operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)]$;

$CF^{3,3,>,>}_{d,1}$: *a)* $\gamma < \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\alpha \neq 0$, $\tilde\gamma \neq 0$, $\tilde\beta^2 \neq 0,\ 9\tilde\alpha\tilde\gamma/8$, *b)* J^3_1, $L^{3,3,>,>}_{d,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$, $v = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$;

$CF^{1,3,=,>}_{d,1}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\gamma = 0$, *b)* J^3_1, $L^{1,3,=,>}_{d,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF^{1,3,=,>}_{d,3}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\alpha = 0$, *b)* J^3_1, $L^{1,3,=,>}_{d,3}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF^{2,3,=,>}_{d,1}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\alpha \neq 0$, $\tilde\gamma \neq 0$, *b)* J^3_1, $L^{2,3,=,>}_{d,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF^{1,3,=,=}_{d,2}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 = 0$, *в* (2.3_2) $\tilde\alpha \neq 0$, *b)* J^3_2, $L^{1,3,=,=}_{d,2}$, *c)* $\sigma = 1$;

$CF^{1,3,=,=}_{d,4}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 = 0$, *в* (2.3_2) $\tilde\alpha = 0$, *b)* J^3_2, $L^{1,3,=,=}_{d,4}$, *c)* $\sigma = 1$;

$CF^{2,3,<,>}_{d,2,+1}$: *a)* $\gamma > \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\beta = 0$, *b)* J^3_1, $L^{2,3,<,>}_{d,2,+1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF^{2,3,<,>}_{d,3}$: *a)* $\gamma > \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\beta^2 = 3\tilde\alpha\tilde\gamma/4$, *b)* J^3_1, $L^{2,3,<,>}_{d,3}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF^{3,3,<,>}_{d,1}$: *a)* $\gamma > \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\beta^2 \neq 0, 3\tilde\alpha\tilde\gamma/4$, *b)* J^3_1, $L^{3,3,<,>}_{d,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$, $v = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$;

$CF^{2,3,<,=}_{d,5,+1}$: *a)* $\gamma > \beta^2$, $\lambda_1 = 0$, $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ *из* (2.3_2), *b)* J^3_2, $L^{2,3,<,=}_{d,5,+1}$, *c)* $\sigma = 1$.

Доказательство. Системы (2.3_1), (2.3_2), полученные из (2.1) заменами J^3_1, J^3_2, станем максимально упрощать, сохраняя условие $\widetilde{P}_2 \equiv 0$. Для этого согласно утверждению 2.1_1 используем произвольную замену (1.2) с $r_2 = 0$, сводящую (2.3_1), (2.3_2) соответственно к системам с нулевой второй строкой

$$\begin{aligned} \breve{A} &= \lambda_1\Big(\tilde\alpha r_1^2,\ (3\tilde\alpha s_1 + 2\tilde\beta s_2)r_1,\ 3\tilde\alpha s_1^2 + 4\tilde\beta s_1 s_2 + \tilde\gamma s_2^2,\ (\tilde\alpha s_1^2 + 2\tilde\beta s_1 s_2 + \tilde\gamma s_2^2)r_1^{-1}s_1\Big),\\ \breve{A} &= \Big(0,\ \tilde\alpha r_1 s_2,\ 2(\tilde\alpha s_1 + \tilde\beta s_2)s_2,\ (\tilde\alpha s_1^2 + 2\tilde\beta s_1 s_2 + \tilde\gamma s_2^2)r_1^{-1}s_2\Big). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Элементы этих систем будем отмечать символом $\smile$.

1) Рассмотрим $D_0 > 0$, т. е. $P_0(x)$ раскладывается на два различных сомножителя.

$1_1)$ $\lambda_1 = p_1 + kq_1 \neq 0$ $(D = \lambda_1^2 > 0)$. Из (2.1) заменой J^3_1 получена система (2.3_1).

$1^0_1)$ $\tilde\alpha = 0$, $\tilde\gamma = 0$. Тогда в (2.3_1) получаем $\widetilde{P}_1 = (2\tilde\beta y_1 y_2)(\lambda_1 y_1)$, что невозможно, поскольку по соглашению 2.3_1 и следствию 2.1 из [1] в системе (2.3_1) должен быть вынесен y_1^2.

$1^1_1)$ $\tilde\alpha \neq 0$, $\tilde\gamma = 0$. Тогда в (2.3_1) будем иметь $\widetilde{P}_1 = (\tilde\alpha y_1^2 + 2\tilde\beta y_1 y_2)(\lambda_1 y_1)$ — ситуация из случая $1^0_1)$.

$1^2_1)$ $\tilde\alpha = 0$, $\tilde\gamma \neq 0$ $(\tilde\beta \neq 0)$. Система (2.4_1) преобразуется к виду $\lambda_1 s_2(0, 2\tilde\beta r_1, 4\tilde\beta s_1 + \tilde\gamma s_2, (2\tilde\beta s_1 + \tilde\gamma s_2)s_1 r_1^{-1})$ и $\breve{c}_1^2 + \breve{d}_1^2 \neq 0$. С учетом СП2 получим $\breve{d}_1 = 0 \Leftrightarrow s_1 = 0$. Тогда система (2.4_1) может быть записана в виде $\lambda_1 s_2(0, 2\tilde\beta r_1, \tilde\gamma s_2, 0)$. При $r_1 = \tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-1}s_2$, $s_2 = |\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ — это $CF^{2,3,>,>}_{d,4}$ с $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$.

$1^3_1)$ $\tilde\alpha, \tilde\gamma \neq 0$.

$1^{3a}_1)$ $\tilde\beta = 0$ $(\tilde\alpha\tilde\gamma < 0)$. Тогда при $s_1 = 0$ система (2.4_1) преобразуется к виду $\lambda_1(\tilde\alpha r_1^2, 0, \tilde\gamma s_2^2, 0)$. При $r_1 = |\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ — это $CF^{2,3,>,>}_{d,2,-1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$.

$1^{3b}_1)$ $\tilde\beta \neq 0$ $(\tilde\tau = (\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2} \neq |\tilde\beta|)$.

Случай $\breve{b}_1, \breve{c}_1 = 0$ потребовал бы, чтобы $s_1 = (-2\tilde\beta \pm (4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2})(3\tilde\alpha)^{-1}s_2$ и $s_1 = -2\tilde\beta(3\tilde\alpha)^{-1}s_2$, но тогда получаем $4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma = 0$, что невозможно, так как выполняется $\tilde\beta^2 > \tilde\alpha\tilde\gamma$.

Поэтому с учетом СП2 получим $\breve{d}_1 = 0 \Leftrightarrow s_1 = \tilde\alpha^{-1}(-\tilde\beta \pm \tilde\tau)s_2$ или $s_1 = 0$.

Система (2.4_1) при выполнении таких связей имеет вид соответственно

$$\lambda_1\left(\tilde\alpha r_1^2,\,\tilde\beta(3\tilde\tau|\tilde\beta|^{-1}-1)r_1s_2,\,2\tilde\alpha^{-1}\tilde\tau(\tilde\tau-|\tilde\beta|)s_2^2,\,0\right)\quad\text{или}\quad\lambda_1\left(\tilde\alpha r_1^2,2\tilde\beta r_1s_2,\tilde\gamma s_2^2,0\right).\quad(2.5)$$

1_1^{3b1}) $|\tilde\beta|=3\tilde\tau\quad\Leftrightarrow\quad|\tilde\beta|=3(2\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}/4\quad(\tilde\alpha\tilde\gamma>0)$. При $r_1=|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2=\sqrt2|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$, $s_1=-\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta|\tilde\alpha|^{1/2}|\tilde\beta^2\lambda_1|^{-1/2}$ система (2.5_1) — это $CF_{d,2,-1}^{2,3,>,>}$ с $\sigma=-\mathrm{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$.

1_1^{3b2}) $3\tilde\tau\neq|\tilde\beta|\Leftrightarrow\tilde\beta^2\neq9\tilde\alpha\tilde\gamma/8$. Тогда система (2.5_2) при $r_1=(2\tilde\beta)^{-1}\tilde\gamma s_2$, $s_1=0$, $s_2=|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ — это $CF_{d,1}^{3,3,>,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$, $v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$ ($v<1/4,\ v\neq0,2/9$).

1_2) $\lambda_1=p_1+kq_1=0\ \ (q_1\neq0)$. Из (2.1) заменой J_2^3 получена система (2.3_2).

1_2^0) $\tilde\alpha,\tilde\gamma=0$. Тогда в системе (2.3_2) $\widetilde P_1=(2\tilde\beta y_1y_2)(y_2)$ — ситуация из случая 1_1^0).

1_2^1) $\tilde\alpha\neq0,\ \tilde\gamma=0$. В (2.3_2) получаем $\widetilde P_1=(\tilde\alpha y_1^2+2\tilde\beta y_1y_2)(y_2)$, что невозможно, так как по соглашению 2.3_2 из [1] при правильной группировке выполняется $\widetilde P_1=(\tilde\alpha y_1y_2+2\tilde\beta y_2^2)(y_1)$ и $\lambda_1=1$.

1_2^2) $\tilde\alpha=0,\ \tilde\gamma\neq0$. Тогда в (2.3_2) $\widetilde P_1=(2\tilde\beta y_1y_2+\tilde\gamma y_2^2)(y_2)$ — ситуация из случая 1_1^0).

1_2^3) $\tilde\alpha,\ \tilde\gamma\neq0$. В (2.3_2) $\widetilde P_1=(\tilde\alpha y_1^2+2\tilde\beta y_1y_2+\tilde\gamma y_2^2)(y_2)=(\tilde\alpha(y_1+\tilde\zeta y_2)(y_1+\tilde\eta y_2))(y_2)$ с $\tilde\zeta\neq\tilde\eta$ — ситуация из случая 1_2^1).

2) Рассмотрим $D_0=0$, т. е. общий множитель $P_0(x)$ является полным квадратом.

2_1) $\lambda_1=p_1+kq_1\neq0\ \ (D=\lambda_1^2>0)$. Из (2.1) заменой J_1^3 получена система (2.3_1).

2_1^1) $\tilde\gamma=0$ ($\tilde\beta=0,\ \tilde\alpha>0$). Тогда при $s_1=0$ система (2.4_1) преобразуется к виду $(\lambda_1\tilde\alpha r_1^2,0,0,0)$. При $r_1=(\tilde\alpha|\lambda_1|)^{-1/2}$, $s_2=1$ — это $CF_{d,1}^{1,3,=,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\lambda_1$.

2_1^2) $\tilde\alpha=0$ ($\tilde\beta=0,\ \tilde\gamma>0$). Тогда при $s_1=0$ система (2.4_1) может быть записана в виде $(0,0,\lambda_1\tilde\gamma s_2^2,0)$. При $r_1=1$, $s_2=(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ — это $CF_{d,3}^{1,3,=,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\lambda_1$.

2_1^3) $\tilde\alpha>0,\tilde\gamma>0\ \ (\tilde\gamma=\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta^2)$. Тогда в (2.4_1) будем иметь $\check c_1=\lambda_1\tilde\alpha^{-1}(3\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)$, $\check d_1=\lambda_1(\tilde\alpha r_1)^{-1}s_1(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)^2$, а значит, при $s_2=-\tilde\alpha\tilde\beta^{-1}s_1$ систему (2.4_1) можно переписать в виде $\lambda_1\tilde\alpha r_1(r_1,s_1,0,0)$. При $r_1,s_1=(\tilde\alpha|\lambda_1|)^{-1/2}$ — это $CF_{d,1}^{2,3,=,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\lambda_1$.

2_2) $\lambda_1=p_1+kq_1=0\ \ (q_1\neq0)$. Из (2.1) заменой J_2^3 получена система (2.3_2).

2_2^1) $\tilde\alpha>0\ \ (\tilde\gamma=\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta^2)$. Тогда в (2.4_2) будем иметь $\check c_1=2s_2(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)$, $\check d_1=(\tilde\alpha r_1)^{-1}s_2(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)^2$, значит, при $s_1=-\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta s_2$ (2.4_2) можно переписать в виде $(0,\tilde\alpha r_1s_2,0,0)$. При $r_1=\tilde\alpha^{-1}$, $s_2=1$ — это $CF_{d,2}^{1,3,=,=}$.

2_2^2) $\tilde\alpha=0\ \ (\tilde\beta=0,\ \tilde\gamma>0)$. Тогда система (2.4_2) будет иметь вид $(0,0,0,\tilde\gamma r_1^{-1}s_2^3)$. При $r_1=\tilde\gamma$, $s_1=0$, $s_2=1$ — это $CF_{d,4}^{1,3,=,=}$.

3) Рассмотрим $D_0<0$, т. е. P_0 не имеет вещественных нулей.

3_1) $\lambda_1=p_1+kq_1\neq0\ \ (D=\lambda_1^2>0)$. Из (2.1) заменой J_1^3 получена система (2.3_1).

3_1^1) $\tilde\beta=0\ \ (\tilde\alpha\tilde\gamma>0)$. Тогда при $s_1=0$ система (2.4_1) преобразуется к виду $\lambda_1(\tilde\alpha r_1^2,0,\tilde\gamma s_2^2,0)$. При $r_1=|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ — это $CF_{d,2,+1}^{2,3,>,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\lambda_1$.

3_1^2) $\tilde\beta\neq0$.

3_1^{2a}) $\tilde\gamma=4(3\tilde\alpha)^{-1}\tilde\beta^2\,(>\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta^2)$. Тогда при $s_2=-3\tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}s_1$ система (2.4_1) может быть записана в виде $\tilde\alpha\lambda_1(r_1^2,0,0,r_1^{-1}s_1^3)$. При $r_1,s_1=|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$ — это $CF_{d,3}^{2,3,<,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\lambda_1$.

3_1^{2b}) $\tilde\gamma\neq4(3\tilde\alpha)^{-1}\tilde\beta^2$. В (2.4_1) получаем $\check d_1=\lambda_1(\tilde\alpha s_1^2+2\tilde\beta s_1s_2+\tilde\gamma s_2^2)r_1^{-1}s_2$. Тогда при $s_1=0$ система (2.4_1) преобразуется к виду $\lambda_1(\tilde\alpha r_1^2,\,2\tilde\beta r_1s_2,\,\tilde\gamma s_2^2,\,0)$. При $r_1=(2\tilde\beta)^{-1}\gamma^{1/2}|\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ — это $CF_{d,1}^{3,3,<,>}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\lambda_1$, $v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$ ($v>1/4,\ v\neq1/3$).

3_2) $\lambda_1 = p_1 + kq_1 = 0$ $(q_1 \neq 0)$. Из (2.1) заменой J_2^3 получена система (2.3_2). При $s_1 = -\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}s_2$ система (2.4_2) может быть записана в виде $(0, \tilde{\alpha}r_1s_2, 0, \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\tau}^2r_1^{-1}s_2^3)$. При $r_1 = \tilde{\alpha}^{-1}s_2^{-1}$, $s_2 = \tilde{\tau}^{-1/2}$ — это $CF_{d,5,+1}^{2,3,<,=}$ с $\sigma = 1$.

В результате оказалась доказана полнота списка 2.1 и линейная неэквивалентность входящих в него форм. $\square$

Выделим минимальные канонические множества, введенные в определении 1.11.

Утверждение 2.3. *Только в следующих формах из списка* 2.1 *удается ограничить значения параметров в cs : 1) в* $CF_{d,2}^{1,3,=,=}$, $CF_{d,4}^{1,3,=,=}$, $CF_{d,5,+}^{2,3,<,=}$ *нормировка* $(2.6)^1$ *с* $r_1 = 1$, $s_2 = -1$, *а в* $CF_{d,4}^{2,3,>,>}$ *замена с* $r_1, s_1 = 1$, $r_2 = 0$, $s_2 = -1$ *изменяют знак* σ; *2) в* $CF_{d,1}^{3,3,>,>}$ *при* $\tilde{v} = v \in (2/9, 1/4)$ *замена с* $r_1 = (8\tilde{v} - 2 + 2\varrho)^{1/2}(6\tilde{v} - 1 - \varrho)(4\tilde{v})^{-1}(9v-2)^{-1}$, $s_1 = (8\tilde{v} - 2 + 2\varrho)^{1/2}(4\tilde{v} - 1 - \varrho)(4\tilde{v})^{-1}(4\tilde{v} - 1)^{-1}$, $r_2 = 0$, $s_2 = -(8\tilde{v} - 2 + 2\varrho)^{1/2}(2\varrho)^{-1}$, *где* $\varrho = (1 - 4\tilde{v})^{1/2}$, *дает* $v = (36\tilde{v}^2 - 13\tilde{v} + 1 + \varrho(1 - 3\tilde{v}))(9\tilde{v} - 2)^{-2}/2$, *поэтому* $v \in (0, 2/9)$.

Следствие 2.1. *Согласно определению* 1.12 *имеем следующие дополнительные cs:* $acs_{d,2}^{1,3,=,=}$, $acs_{d,4}^{1,3,=,=}$, $acs_{d,4}^{2,3,>,>}$, $acs_{d,5,+1}^{2,3,<,=} = \{\sigma = -1\}$, $acs_{d,1}^{3,3,>,>} = \{2/9 < v < 1/4\}$*; для остальных вырожденных канонических форм из списка* 2.1 *выполняется* $mcs_d^{\mu,3,*,*} = cs_d^{\mu,3,*,*}$.

2.3. Сведение вырожденных канонических форм к каноническим. Докажем, что приведенный ниже список содержит все возможные канонические формы системы (2.1) и их канонические множества, введенные в определениях 1.9, 1.10.

Список 2.2. Семь $CF_{d,i}^{m,3}$ и их нетривиальные $cs_{d,i}^{m,3}$ $(\sigma, \kappa = \pm 1)$:

$$CF_5^{2,3,=,>} = \sigma\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad CF_6^{2,3,=,>} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$CF_{18,-1}^{4,3,=,=} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, \quad CF_{20}^{4,3,\gtrless,>} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & u\end{pmatrix},$$

$$CF_{21,\kappa}^{4,3,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \kappa\\ 1 & 0 & 0 & \kappa\end{pmatrix};$$

$$CF_9^{6,3,=,>} = \sigma\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}; \quad CF_1^{8,3,=,=} = \sigma\begin{pmatrix}1 & -3 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 3 & -1\end{pmatrix};$$

$$cs_{20}^{4,3,>,>} = \{u < 0\},\ cs_{20}^{4,3,<,>} = \{u > 0\};\ \ cs_{21,+1}^{4,3,<,>} = \{\kappa = 1\},\ cs_{21,-1}^{4,3,<,=} = \{\kappa = -1\}.$$

Набор 2.2. Замены, используемые в дальнейшем в разделе 2:

$$L_5^{2,3,=,>} = \{r_1, -r_2, s_2 = 1,\ s_1 = 0\}; \quad L1_{20}^{4,3,<,>} = \{r_1, s_1, -r_2, s_2 = 3^{-1/2}\};$$
$$L_6^{2,3,=,>} = \{r_1, -r_2, s_2 = 1,\ s_1 = 0\}; \quad L2_{20}^{4,3,<,>} = \{r_1 = 0,\ s_1 = -2,\ -r_2, s_2 = 1\};$$
$$L_{18,-1}^{4,3,=,=} = \{r_1 = 0,\ s_1, r_2, -s_2 = 1\}; \quad L_{21,+1}^{4,3,<,>} = \{r_1, s_1 = 2^{-1/2},\ -r_2, s_2 = (3/2)^{1/2}\};$$
$$L2_{20}^{4,3,>,>} = \{r_1, s_1, s_2 = 1,\ r_2 = -1\};$$
$$L_{21,-1}^{4,3,<,=} = \{r_1, s_1 = 3^{3/4}2^{-1/2},\ r_2, -s_2 = 3^{1/4}2^{-1/2}\};$$
$$L1_{20}^{4,3,>,>} = \{r_1, s_2 = 2^{-1/2},\ s_1 = s_2/3,\ r_2 = -s_2\}; \quad L_9^{6,3,=,>} = \{r_1 = 0,\ s_1, -r_2,\ s_2 = 1\};$$
$$L3_{20}^{4,3,>,>} = \{r_1 = 0,\ s_1 = -2,\ -r_2, s_2 = 1\}; \quad L_1^{8,3,=,=} = \{r_1, r_2, -s_2 = 1,\ s_1 = 0\}.$$

Установим линейные связи между вырожденными и невырожденными каноническими формами, доказав, тем самым, линейную неэквивалентность всех $CF_i^{m,3}$.

Теорема 2.2.
$CF^{2,3,>,>}_{d,2,-1}$ *с* $\tilde\sigma=\sigma$ *заменой* $L1^{4,3,>,>}_{20}$ *сводится к* $CF^{4,3,>,>}_{20}$ *с* $\sigma=-\tilde\sigma$, $u=-1/9$;
$CF^{2,3,>,>}_{d,4}$ *с* $\tilde\sigma=\sigma$ *заменой* $L2^{4,3,>,>}_{20}$ *сводится к* $CF^{4,3,>,>}_{20}$ *с* $\sigma=-\tilde\sigma$, $u=-1$;
$CF^{3,3,>,>}_{d,1}$ *заменой* $L3^{4,3,>,>}_{20}$ *сводится к* $CF^{4,3,>,>}_{20}$ *с* $u=4v-1$ $(u<0,\ u\neq-1,-1/9)$;
$CF^{1,3,=,>}_{d,1}$ *заменой* $L^{2,3,=,>}_{5}$ — *к* $CF^{2,3,=,>}_{5}$; $CF^{1,3,=,>}_{d,3}$ *заменой* $L^{6,3,=,>}_{9}$ — *к* $CF^{6,3,=,>}_{9}$;
$CF^{2,3,=,>}_{d,1}$ *заменой* $L^{2,3,=,>}_{6}$ — *к* $CF^{2,3,=,>}_{6}$; $CF^{1,3,=,=}_{d,2}$ *заменой* $L^{4,3,=,=}_{18,-1}$ — *к* $CF^{4,3,=,=}_{18,-1}$;
$CF^{1,3,=,=}_{d,4}$ *заменой* $L^{8,3,=,=}_{1}$ — *к* $CF^{8,3,=,=}_{1}$; $CF^{2,3,<,>}_{d,2,+1}$ *заменой* $L^{4,3,<,>}_{21,+1}$ — *к* $CF^{4,3,<,>}_{21,+1}$;
$CF^{2,3,<,>}_{d,3}$ *заменой* $L1^{4,3,<,>}_{20}$ *сводится к* $CF^{4,3,<,>}_{20}$ *с* $u=1/3$;
$CF^{3,3,<,>}_{d,1}$ *заменой* $L2^{4,3,<,>}_{20}$ *сводится к* $CF^{4,3,<,>}_{20}$ *с* $u=4v-1$ $(u>0,\ u\neq1/3)$;
$CF^{2,3,<,=}_{d,5,+1}$ *с* $\tilde\sigma=\sigma$ *заменой* $L^{4,3,<,=}_{21,-1}$ *сводится к* $CF^{4,3,<,=}_{21,-1}$ *с* $\sigma=-\tilde\sigma$.

Доказательство. Для каждой $CF^{\mu,3}_{d,\iota}$ из списка 2.1 сделаем замену (1.2), в которой согласно утверждению 2.1_2 выполняется $r_2=-s_2\neq0$. Введем для краткости $\delta_1=(r_1+s_1)^{-1}$.

$CF^{2,3,>,>}_{d,4}$ сводится к $\sigma(r_1(r_1-s_2),\ r_1^2-2r_1s_1-2r_1s_2+s_1s_2,\ 2r_1s_1+r_1s_2-s_1^2-2s_1s_2,$ $s_1(s_1+s_2))\delta_1s_2$. При $r_1, s_1=s_2$ получаем $SF^{4,3,>,>}_{20}$ вида $\sigma(0,-1,0,1)s_2^2$.

$CF^{2,3,>,>}_{d,2,-1}$ сводится к $\sigma(r_1(r_1-s_2)(r_1+s_2),\ 3r_1^2s_1+2r_1s_2^2-s_1s_2^2,\ 3r_1s_1^2-r_1s_2^2+2s_1s_2^2,$ $s_1(s_1-s_2)(s_1+s_2))\delta_1$. При $r_1, 3s_1=s_2$ получаем $SF^{4,3,>,>}_{20}$ вида $2\sigma(0,-1,0,1/9)s_2^2$. Вместо $c_i=0$ можно сделать $d_i=0$, получая $SF^{4,3}_{23}$, которой $CF^{4,3,>,>}_{20}$ предшествует.

$CF^{3,3,>,>}_{d,1}$ $(v<1/4,\ v\neq0,2/9)$ сводится к $\sigma(r_1(vr_1^2-r_1s_2+s_2^2),\ 3vr_1^2s_1-2r_1s_1s_2+$ $r_1^2s_2-2r_1s_2^2+s_1s_2^2,\ 3vr_1s_1^2+2r_1s_1s_2-s_1^2s_2-2s_1s_2^2+r_1s_2^2,\ s_1(vs_1^2+s_1s_2+s_2^2))\delta_1$. При $r_1=0$, $s_1=-2s_2$ получаем $SF^{4,3}_{20}$ вида $\sigma(0,1,0,4v-1)s_2^2$. Также можно получить $SF^{4,3}_{23}$.

$CF^{1,3,=,>}_{d,1}$ сводится к $\sigma(r_1^3,3r_1^2s_1,3r_1s_1^2,s_1^3)\delta_1$. При $s_1=0$ получаем $SF^{2,3,=,>}_{5}$ вида $\sigma(1,0,0,0)r_1^2$.

$CF^{1,3,=,>}_{d,3}$ сводится к $\sigma(r_1,s_1-2r_1,r_1-2s_1,s_1)\delta_1s_2^2$. При $r_1=0$ получаем $SF^{6,3,=,>}_{9}$ вида $\sigma(0,1,-2,1)s_2^2$. Вместо $a_i=0$ можно сделать $b_i=0$, получая $SF^{6,3}_{10}$.

$CF^{2,3,=,>}_{d,1}$ сводится к $\sigma(r_1^2(r_1-s_2),\ r_1(3r_1s_1-2s_1s_2+r_1s_2),\ s_1(3r_1s_1+2r_1s_2-s_1s_2),$ $s_1^2(s_1+s_2))\delta_1$. При $r_1=s_2$, $s_1=0$ получаем $SF^{2,3,=,>}_{6}$ вида $\sigma(0,1,0,0)s_2^2$.

$CF^{1,3,=,=}_{d,2}$ сводится к $\sigma(-r_1^2,r_1(r_1-2s_1),s_1(2r_1-s_1),s_1^2)\delta_1s_2$. При $r_1=0$ получаем $SF^{4,3,=,=}_{18,-1}$ вида $\sigma(0,0,-1,1)s_1s_2$.

$CF^{1,3,=,=}_{d,4}$ сводится к $\sigma(-1,3,-3,1)\delta_1s_2^3$.

$CF^{2,3,<,>}_{d,2,+1}$ сводится к $\sigma(r_1(r_1^2+s_2^2),\ 3r_1^2s_1-2r_1s_2^2+s_1s_2^2,\ 3r_1s_1^2-2s_1s_2^2+r_1s_2^2,\ s_1(s_1^2+$ $s_2^2))\delta_1$. При $r_1, s_1=3^{-1/2}s_2$ получаем $SF^{4,3,<,>}_{21,+1}$ вида $2\sigma(1,0,0,1)s_2^2/3$.

$CF^{2,3,<,>}_{d,3}$ сводится к $\sigma((r_1-s_2)(r_1^2+r_1s_2+s_2^2),\ 3(r_1^2s_1+s_2^3),\ 3(r_1s_1^2-s_2^3),\ (s_1+$ $s_2)(s_1^2-s_1s_2+s_2^2))\delta_1$. При $r_1, s_1=s_2$ получаем $SF^{4,3,<,>}_{20}$ вида $3\sigma(0,1,0,1/3)s_2^2$.

$CF^{3,3,<,>}_{d,1}$ $(v>1/4,\ v\neq1/3)$. Все аналогично $CF^{3,3,>,>}_{d,1}$.

$CF^{2,3,<,=}_{d,5,+1}$ сводится к $\sigma(-r_1^2-s_2^2,\ r_1^2-2r_1s_1+3s_2^2,\ 2r_1s_1-s_1^2-3s_2^2,\ s_1^2+s_2^2)\delta_1s_2$. При $r_1, s_1=3^{1/2}s_2$ получаем $SF^{4,3,<,=}_{21,-1}$ вида $2\sigma(-1,0,0,1)s_2^2/3^{1/2}$.

Теперь во всех полученных $SF^{m,3}$, следуя НП, остается сделать нормировку (2.6)[1].

Поскольку $CF^{\mu,3}_{d}$ из списка 2.1 попарно линейно неэквивалентны и к одной из них сводится любая исходная система (2.1), то список 2.2 исчерпывает все $CF^{m,3}$. □

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает утверждение, устанавливающее линейные связи между исходной системой (2.1) и различными каноническими формами из списка 2.2.

Теорема 2.3. *Любая система* (1.1) *с* $l = 3$, *записанная в виде* (2.1) *согласно* $(2.23)^1$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка* 2.2. *Ниже для каждой* $CF_i^{m,3,*,*}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* (2.1), *b) замены* (1.2), *преобразующие правую часть* (2.1) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,3,*,*}$*:*

$CF_{20}^{4,3,>,>}$: *a)* $\gamma < \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\gamma \neq 0$ *и:* $a_1)$ $\tilde\alpha = 0$, $b_1)$ J_1^3, $L_{d,4}^{2,3,>,>}$, $L1_{20}^{4,3,>,>}$, $c_1)$ $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$, $u = -1$; $a_2)$ $\tilde\alpha \neq 0$, $\tilde\beta^2 = [\,0 \vee 9\tilde\alpha\tilde\gamma/8\,]$, $b_2)$ J_1^3, $L_{d,2,-1}^{2,3,>,>}$, $L2_{20}^{4,3,>,>}$, $c_2)$ $\sigma = [-1 \vee 1] \cdot \operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$, $u = -1/9$; $a_3)$ $\tilde\alpha \neq 0$, $\tilde\beta^2 \neq 0, 9\tilde\alpha\tilde\gamma/8$, $b_3)$ J_1^3, $L_{d,1}^{3,3,>,>}$, $L3_{20}^{4,3,>,>}$, $c_3)$ $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde\gamma\lambda_1)$, $u = \tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\beta^{-2} - 1$ $(u < 0,\ u \neq -1, -1/9)$;

$CF_5^{2,3,=,>}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\gamma = 0$, *b)* J_1^3, $L_{d,1}^{1,3,=,>}$, $L_5^{2,3,=,>}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF_9^{6,3,=,>}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\alpha = 0$, *b)* J_1^3, $L_{d,3}^{1,3,=,>}$, $L_9^{6,3,=,>}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF_6^{2,3,=,>}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\alpha, \tilde\gamma \neq 0$, *b)* $J_1^3, L_{d,1}^{2,3,=,>}, L_6^{2,3,=,>}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF_{18,-1}^{4,3,=,=}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 = 0$, *в* (2.3_2) $\tilde\alpha \neq 0$, *b)* J_2^3, $L_{d,2}^{1,3,=,=}$, $L_{18,-1}^{4,3,=,=}$, *c)* $\sigma = 1$;

$CF_1^{8,3,=,=}$: *a)* $\gamma = \beta^2$, $\lambda_1 = 0$, *в* (2.3_2) $\tilde\alpha = 0$, *b)* J_2^3, $L_{d,4}^{1,3,=,=}$, $L_1^{8,3,=,=}$, *c)* $\sigma = 1$;

$CF_{21,+1}^{4,3,<,>}$: *a)* $\gamma > \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) $\tilde\beta = 0$, *b)* J_1^3, $L_{d,2,+1}^{2,3,<,>}$, $L_{21,+1}^{4,3,<,>}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$;

$CF_{20}^{4,3,<,>}$: *a)* $\gamma > \beta^2$, $\lambda_1 \neq 0$, *в* (2.3_1) : $a_1)$ $\tilde\beta^2 = 3\tilde\alpha\tilde\gamma/4$, $b_1)$ J_1^3, $L_{d,3}^{2,3,<,>}$, $L1_{20}^{4,3,<,>}$, $c_1)$ $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$, $u = 1/3$; $a_2)$ $\tilde\beta^2 \neq 0, 3\tilde\alpha\tilde\gamma/4$, $b_2)$ J_1^3, $L_{d,1}^{3,3,<,>}$, $L2_{20}^{4,3,<,>}$, $c_2)$ $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_1$, $u = \tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\beta^{-2}$ $(u > 0,\ u \neq 1/3)$;

$CF_{21,-1}^{4,3,<,=}$: *a)* $\gamma > \beta^2$, $\lambda_1 = 0$, $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ *из* (2.3_2), *b)* J_2^3, $L_{d,5,+1}^{2,3,<,=}$, $L_{21,-1}^{4,3,<,=}$, *c)* $\sigma = -1$.
Здесь замены J_1^3, J_2^3, $L_{d,\iota}^{\mu,3,*,*}$ *приведены в наборе* 2.1, *а* $L_i^{m,3,*,*}$ — *в наборе* 2.2.

Выделим минимальные канонические множества, введенные в определении 1.11.

Утверждение 2.4. *Только в следующих* $CF^{m,3}$ *из списка* 2.2 *удается с учетом утверждения* 2.1_3 *ограничить значения параметров в* $cs^{m,3}$, *а именно:*
1) *в* $CF_{18,-1}^{4,3,=,=}$ *замена с* $r_1 = 1$, $s_1 = -2$, $r_2 = 0$, $s_2 = -1$, *а в* $CF_{21,-1}^{4,3,<,=}$, $CF_1^{8,3,=,=}$ *перенумерация* $(2.7)^1$ *изменяют знак* σ;
2) *в* $CF_{20}^{4,3,>,>}$ *при* $\tilde u = u \in (-\infty, -1) \cup (-1, -1/9)$ *замена с* $r_1 = \varrho(2\tilde u + 2\varrho)^{-1/2}$, $s_1 = -3\varrho(\varrho-1)(3\varrho+1)^{-1}(2\tilde u+2\varrho)^{-1/2}$, $r_2 = (2\tilde u+2\varrho)^{-1/2}$, $s_2 = (\varrho-1)(3\varrho+1)^{-1}(2\tilde u+2\varrho)^{-1/2}$, *где* $\varrho = \sqrt{-\tilde u}$, *дает* $u = -(\varrho-1)^2(3\varrho+1)^{-2}$, *поэтому выполняется* $u \in (-1/9, 0)$, *а при* $u = -1$ *замена с* $r_1 = 1/2$, $s_1 = -3/2$, $r_2, s_2 = -1/2$ *изменяет знак* σ.

Следствие 2.2. *Согласно определению* 1.12 *имеем следующие дополнительные* cs : $acs_{18,-1}^{4,3,=,=}$, $acs_{21,-1}^{4,3,<,=}$, $acs_1^{8,3,=,=} = \{\sigma = -1\}$, $acs_{20}^{4,3,>,>} = \{u \in (-\infty,-1) \cup (-1,-1/9),\ \sigma = -1$ *при* $u = -1\}$; *для остальных канонических форм из списка* 2.2 *справедливо* $mcs^{m,3,*,*} = cs^{m,3,*,*}$.

Литература

1. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 2. С. 181–195.

Статья поступила в редколлегию 18 февраля 2016 г.

Сведения об авторе

Басов Владимир Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент; vlvlbasov@rambler.ru

TWO-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS CUBIC SYSTEMS: CLASSIFICATION AND NORMAL FORMS — II

Vladimir V. Basov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; nina-mpu@mail.ru

In the first part of the paper properly designed structural principles are given to introduce a total order on the set of structural forms — vector polynomials with a fixed number of zero coefficients which represent right-hand parts of two-dimensional homogeneous cubic systems of ODE. Among them normalized based on the principles of normalization structural forms and linear non-equivalent to each other, the simplest in their class canonical forms (CF) are sequentially distinguished.

In the second part of the paper for the mentioned systems the right-hand part components of which are proportional all CF are distinguished with their canonical sets of permissible values. For each CF are given: a) the conditions on the coefficients of the original system, b) linear substitutions that reduce the right-hand part of the system under these conditions to the chosen CF, c) obtained values of CF's coefficients.

This paper is a direct continuation of [1], so it retains all previously introduced notations. Refs 1.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

References

1. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms. I", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**(2), 99–110 (2016).

Для цитирования: Басов В. В. Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 355–371. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.302

For citation: Basov V. V. Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 355–371. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.302