ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977:534.112
MSC 93C15

Оптимальное граничное управление колебаниями струны смещением на двух концах с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени

В. Р. Барсегян

Институт механики НАН Республики Армения, Армения,
0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б
Ереванский государственный университет, Армения,
0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

Для цитирования: *Барсегян В. Р.* Оптимальное граничное управление колебаниями струны смещением на двух концах с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 3. С. 410–424.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.310

Рассматривается задача оптимального граничного управления для уравнения колебаниями струны с заданными начальным, конечным условиями и заданными значениями функции прогиба струны в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Для произвольных чисел первых гармоник с использованием метода разделения переменных и методов теории оптимального управления с многоточечными промежуточными условиями построены оптимальные граничные управления. В качестве приложения предложенного подхода построено граничное оптимальное управление с заданным прогибом в промежуточном моменте времени.

Ключевые слова: колебания струны, оптимальное граничное управление, оптимальное управление колебаниями, промежуточные условия, разделение переменных.

1. Введение. Математическое моделирование различных управляемых физических и технических процессов, связанных с колебательными системами, приводит к волновым уравнениям. Управляемые колебательные системы широко распространены в различных теоретических и прикладных областях науки. Необходимость управления и оптимального управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями — актуальная задача, решению которой уделяют внимание многие исследователи [1–16]. На практике часто возникают задачи граничного и оптимального управления, например, когда нужно сгенерировать заранее заданную (желаемую) форму колебания. Моделирование и управление динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными, с промежуточными условиями — активно развиваемое направление в современной теории управления. Исследованию таких задач посвящены, например, работы [11–18].

В настоящей статье рассматривается задача оптимального граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Она сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями и с помощью метода разделения переменных — к задаче оптимального управления обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями. Методом проблем моментов для произвольных чисел первых гармоник построены оптимальные граничные управления. Полученные результаты иллюстрирует конкретный пример.

2. Постановка задачи. Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т. е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q\,(x,t)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$Q(0,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

в которых функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — граничные управления.

В уравнении (1) $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны. Предполагается, что функция $Q\,(x,t) \in C^2(\Omega_T)$ и множество $\Omega_T = \{(x,t):\ x \in [0,l]\,,\ t \in [0,T]\}$.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, ..., m)$

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения функции прогиба струны

$$Q(x,t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad i = 1, ..., m. \tag{4}$$

Задача граничного оптимального управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, требуется найти оптимальные управления, переводящие систему из заданного начального состояния (2), удовлетворяя промежуточным условиям (4), в конечное состояние

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

и минимизирующие функционал

$$\left[\int\limits_0^T \left(\mu^2(t)+\nu^2(t)\right) dt\right]^{\dfrac{1}{2}}. \tag{6}$$

Будем предполагать, что функции $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, ..., m,\ m+1$) принадлежат пространству $C^2[0,l]$, а функции $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$ — пространству $C^1[0,l]$.

Отметим, что так как в отдельные промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, ..., m$) заданы только значения функции прогиба (4) струны, то использовать подход поэтапного решения задачи оптимального управления не целесообразно. Поэтому в работе предлагается такой подход решения рассмотренной задачи оптимального управления, в котором учитывается специфика промежуточных условий (4).

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Так как граничные условия (3) неоднородны, решение поставленной задачи сводим к задаче с нулевыми граничными условиями [19].

Решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$Q(x,t) = V(x,t) + W(x,t), \tag{7}$$

где $V(x,t)$ — неизвестная функция с однородными граничными условиями

$$V(0,t) = V(l,t) = 0, \tag{8}$$

предстоящая определению, а $W(x,t)$ — решение уравнения (1) с неоднородными граничными условиями

$$W(0,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t). \tag{9}$$

Функция $W(x,t)$ с учетом (9) имеет вид [19]

$$W(x,t) = (\nu(t) - \mu(t))\frac{x}{l} + \mu(t). \tag{10}$$

Подставив (7) в (1) и учитывая (10), получим для функции $V(x,t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{11}$$

в котором

$$F(x,t) = (\mu''(t) - \nu''(t))\frac{x}{l} - \mu''(t). \tag{12}$$

В силу начальных, промежуточных и граничных условий, соответственно (2), (4) и (5), функция $V(x,t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$V(x,0) = \varphi_0(x) - (\nu(0) - \mu(0))\frac{x}{l} - \mu(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x) - (\nu'(0) - \mu'(0))\frac{x}{l} - \mu'(0), \tag{13}$$

промежуточным условиям

$$V(x,t_i) = \varphi_i(x) - (\nu(t_i) - \mu(t_i))\frac{x}{l} - \mu(t_i), \quad i = 1, ..., m, \tag{14}$$

и конечным условиям

$$\begin{gathered} V(x,T) = \varphi_T(x) - (\nu(T) - \mu(T))\frac{x}{l} - \mu(T), \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) - (\nu'(T) - \mu'(T))\frac{x}{l} - \mu'(T). \end{gathered} \tag{15}$$

Из условия (8) следует, что

$$V(0,t_i)=V(l,t_i)=0,\quad \left.\frac{\partial V\left(0,t\right)}{\partial t}\right|_{t=t_i}=\left.\frac{\partial V\left(l,t\right)}{\partial t}\right|_{t=t_i}=0,\quad i=0,1,...,m,m+1. \tag{16}$$

Из условий (13)–(16) получим условия согласования

$$\mu(0)=\varphi_0(0),\quad \mu'(0)=\psi_0(0),\quad \nu(0)=\varphi_0(l),\quad \nu'(0)=\psi_0(l), \tag{17}$$

$$\mu(t_i)=\varphi_i(0),\quad \nu(t_i)=\varphi_i(l),\quad i=1,...,m, \tag{18}$$

$$\mu(T)=\varphi_T(0),\quad \mu'(T)=\psi_T(0),\quad \nu(T)=\varphi_T(l),\quad \nu'(T)=\psi_T(l). \tag{19}$$

Следовательно, принимая во внимание условия (17)–(19), запишем (13)–(15) соответственно таким образом:

$$V(x,0)=\varphi_0(x)-(\varphi_0(l)-\varphi_0(0))\frac{x}{l}-\varphi_0(0),\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_0(x)-(\psi_0(l)-\psi_0(0))\frac{x}{l}-\psi_0(0), \tag{20}$$

$$V(x,t_i)=\varphi_i(x)-(\varphi_i(l)-\varphi_i(0))\frac{x}{l}-\varphi_i(0),\ \ i=1,\ ...,\ m, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&V(x,T)=\varphi_T(x)-(\varphi_T(l)-\varphi_T(0))\frac{x}{l}-\varphi_T(0),\\&\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T}=\psi_T(x)-(\psi_T(l)-\psi_T(0))\frac{x}{l}-\psi_T(0).\end{aligned} \tag{22}$$

Итак, решение задачи оптимального граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени сведено к задаче управления (11), (12) с граничными условиями (8) и минимизируемым функционалом (6), которая формулируется следующим образом: требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$, переводящие колебание, описываемое уравнением (11), с граничными условиями (8) из заданного начального состояния (20) через промежуточные состояния (21) в конечное состояние (22) и минимизирующие функционал (6).

4. Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов. Учитывая однородность граничных условий (8) в задаче (11), (12), предположение выполнения условий согласованности и принадлежность используемых функций указанным соответствующим пространствам, согласно теории рядов Фурье, решение уравнения (11) ищем в виде

$$V(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x,\quad V_k(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l V(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}xdx. \tag{23}$$

Представим функции $F(x,t)$, $\varphi_i(x)$ $(i=0,1,...,m+1)$, $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$ как ряды Фурье и, подставив их выражения вместе с $V(x,t)$ из (23) в (11), (12) и (20)–(22), получим уравнения

$$\ddot{V}_k(t)+\lambda_k^2V_k(t)=F_k(t),\quad \lambda_k^2=\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2, \tag{24}$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\left[\varphi_0(0) - \varphi_0(l)(-1)^k\right], \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\left[\psi_0(0) - \psi_0(l)(-1)^k\right], \tag{25}$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\left[\varphi_i(0) - \varphi_i(l)(-1)^k\right], \quad i = 1, ..., m, \tag{26}$$

$$\begin{gathered} V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\left[\varphi_T(0) - \varphi_T(l)(-1)^k\right], \\ \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\left[\psi_T(0) - \psi_T(l)(-1)^k\right], \end{gathered} \tag{27}$$

где

$$F_k(t) = \frac{2a}{\lambda_k l}\left[\nu''(t)(-1)^k - \mu''(t)\right]. \tag{28}$$

Здесь через $\varphi_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, ..., m, m+1)$, $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ обозначены коэффициенты Фурье соответственно функциям $\varphi_i(x)$ $(i = 0,\ 1, ...,\ m,\ m+1)$, $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$.

Общее решение уравнения (24) с начальными условиями (25) и его производная по времени имеют вид

$$\begin{gathered} V_k(t) = V_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau, \\ \dot{V}_k(t) = -\lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t + \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k t + \int\limits_0^t F_k(\tau)\cos\lambda_k(t-\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{29}$$

Теперь, учитывая промежуточные (26) и конечные (27) условия, из (29) находим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T F_k(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde{C}_{1k}(T), \quad \int\limits_0^T F_k(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde{C}_{2k}(T), \\ \int\limits_0^{t_j} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_j-\tau)\,d\tau = \tilde{C}_{1k}(t_j), \quad j = 1,\ ...,\ m, \end{gathered} \tag{30}$$

в которой

$$\begin{gathered} \tilde{C}_{1k}(T) = \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}(T) = \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k T, \\ \tilde{C}_{1k}(t_j) = \lambda_k V_k(t_j) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k t_j - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t_j. \end{gathered} \tag{31}$$

Подставив выражение функции $F_k(t)$ из (28) в (30) и интегрируя по частям, с учетом условий (17)–(19) имеем, что

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}(T),$$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}(T),\\
\int\limits_0^T \mu(\tau)h_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau = C_{1k}(t_1),\\
\dots\\
\int\limits_0^T \mu(\tau)h_k^{(m)}\,(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(m)}\,(\tau)\,d\tau = C_{1k}(t_m),\quad k=1,\,2,\ldots,
\end{gathered}
\tag{32}
$$

где

$$
\begin{aligned}
C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k}\right],\\
C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k}\right],\\
C_{1k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(t_j) + X_{1k}^{(j)} - (-1)^k Y_{1k}^{(j)}\right],\quad j=1,\,\ldots,\,m,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{1k} &= \lambda_k\varphi_T(0) - \psi_0(0)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(0)\cos\lambda_k T,\\
X_{2k} &= \psi_T(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(0)\sin\lambda_k T,\\
Y_{1k} &= \lambda_k\varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k T,\\
Y_{2k} &= \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k T,\\
X_{1k}^{(j)} &= \lambda_k\varphi_j(0) - \psi_0(0)\sin\lambda_k t_j - \lambda_k\varphi_0(0)\cos\lambda_k t_j,\\
Y_{1k}^{(j)} &= \lambda_k\varphi_j(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k t_j - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k t_j,\\
h_k^{(j)}(\tau) &= \begin{cases} \sin\lambda_k(t_j-\tau), & 0\leqslant\tau\leqslant t_j,\\ 0, & t_j<\tau\leqslant T,\end{cases}\quad j=1,\,\ldots,\,m.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Из соотношений (32) следует, что для каждой гармоники движение (т. е. для каждого $k=1,2,\ldots$), описываемое уравнениями (24), (28) с условиями (25)–(27), вполне управляемо тогда и только тогда, когда для любых заданных значений постоянных $C_{1k}(T)$, $C_{2k}(T)$, $C_{1k}(t_1)$, ..., $C_{1k}(t_m)$ в (33) можно найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, удовлетворяющие условию (32). Из интегральных соотношений (32) также вытекает, что существует множество функций управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, решающих задачу граничного управления.

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению таких граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, которые для каждого $k=1,\,2,\ldots$ удовлетворяют интегральным соотношениям (32) и доставляют минимум функционалу (6). Задачу оптимального управления при функционале (6) с интегральными условиями (32) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления.

5. Решение задачи. Так как функционал (6) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, а интегральные соотношения (32), порожденные функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, линейны, то задачу определения оптимального управления для каждого $k=1,\,2,\,\ldots$ можно рассматривать как проблему моментов [1, 17, 20].

Следовательно, решение можно построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов.

На практике обычно выбираются несколько первых n гармоник упругих колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерными системами. Поэтому построим решение задачи (6) и (32) при $k = 1, 2, ..., n$ с помощью алгоритма решения проблемы моментов. Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, ..., n$) проблемы моментов (6) и (32), следуя [20], нужно найти величины $p_k, q_k, \gamma_{ik}, k = 1, ..., n, i = 1, ..., m$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^{n}\left[p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}C_{1k}(t_i)\right] = 1, \tag{35}$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(35)}\int_0^T \left[h_{1n}^2(\tau) + h_{2n}^2(\tau)\right] d\tau, \tag{36}$$

где

$$\begin{gathered} h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^{n}\left[p_k \sin\lambda_k (T-\tau) + q_k\cos\lambda_k (T-\tau) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}h_k^{(i)}(\tau)\right], \\ h_{2n}(\tau) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[p_k \sin\lambda_k (T-\tau) + q_k\cos\lambda_k (T-\tau) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}h_k^{(i)}(\tau)\right]. \end{gathered} \tag{37}$$

Для расчета величин $p_k^0,\ q_k^0,\ \gamma_{ik}^0,\ k = 1, ..., n,\ i = 1, ..., m$, минимизирующих (36), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f_n = \int_0^T \left[(h_{1n}(\tau))^2 + (h_{2n}(\tau))^2\right] d\tau + \beta_n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}C_{1k}(t_i)\right) - 1\right]$$

с неопределенным множителем Лагранжа β_n. На основе этого метода, вычисляя производные по $p_k, q_k, \gamma_{ik}, k = 1, ..., n, i = 1, ..., m$, функции f_n и приравнивая их к нулю, получаем следующую систему интегральных соотношений:

$$\begin{gathered} \int_0^T [h_{1n}(\tau) + h_{2n}(\tau)]\sin\lambda_k (T-\tau)\, d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{1k}(T), \\ \int_0^T [h_{1n}(\tau) + h_{2n}(\tau)]\cos\lambda_k (T-\tau)\, d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{2k}(T), \\ \int_0^T [h_{1n}(\tau) + h_{2n}(\tau)]\, h_k^{(i)}(\tau) d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{1k}(t_i), \quad k = 1, ..., n, \quad i = 1, ..., m. \end{gathered} \tag{38}$$

Учитывая обозначения (37), уравнения (38) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n} I_k \int_0^T \left[p_k \sin\lambda_k (T-\tau) + q_k \cos\lambda_k (T-\tau) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}h_k^{(i)}(\tau)\right]\sin\lambda_j (T-\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{\beta_n}{2} C_{1j}(T),$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k \int_0^T \left[p_k \sin\lambda_k (T-\tau) + q_k \cos\lambda_k (T-\tau) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} h_k^{(i)}(\tau) \right] \cos\lambda_j (T-\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{\beta_n}{2} C_{2j}(T), \qquad (39)$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k \int_0^T \left[p_k \sin\lambda_k (T-\tau) + q_k \cos\lambda_k (T-\tau) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} h_k^{(i)}(\tau) \right] h_j^{(i)}(\tau) d\tau = -\frac{\beta_n}{2} C_{1j}(t_i),$$

$$j = 1, ..., n, \quad i = 1, ..., m,$$

где $I_k = 1 + (-1)^{k+1},\ k = 1, ..., n$.

Вычислив интегралы в левых частях уравнений (39), учитывая при этом обозначения (34), и присоединив к полученным уравнениям условие (35), приходим к замкнутой системе $2n + mn + 1$ алгебраических уравнений относительно стольких же неизвестных величин p_k, q_k, γ_{ik}, $k = 1, ..., n$, $i = 1, ..., m$, и β_n. Пусть величины p_k^0, q_k^0, γ_{ik}^0, $k = 1, ..., n$, $i = 1, ..., m$, и β_n^0 являются решением этой замкнутой системы алгебраических уравнений. Тогда, согласно (36), (37), будем иметь уравнения

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 h_k^{(i)}(\tau) \right],$$

$$h_{2n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 h_k^{(i)}(\tau) \right], \qquad (40)$$

$$(\rho_n^0)^2 = \int_0^T \left[\left(h_{1n}^0(\tau) \right)^2 + \left(h_{2n}^0(\tau) \right)^2 \right] d\tau,$$

здесь

$$G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) = p_k^0 \sin\lambda_k (T-\tau) + q_k^0 \cos\lambda_k (T-\tau).$$

Следуя [20], оптимальные граничные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ для любого $n = 1, 2, ...$ представим в виде

$$\mu_n^0(\tau) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_{1n}^0(\tau), \quad \nu_n^0(\tau) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_{2n}^0(\tau).$$

Таким образом, оптимальные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$, согласно формулам (34) и (40), запишем следующим образом:

$$\mu_n^0(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 \sin\lambda_k (t_i - \tau) \right], & 0 \leqslant \tau \leqslant t_1, \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum\limits_{i=2}^{m} \gamma_{ik}^0 \sin\lambda_k (t_i - \tau) \right], & t_1 < \tau \leqslant t_2, \\ \ldots \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \gamma_{mk}^0 \sin\lambda_k (t_m - \tau) \right], & t_{m-1} < \tau \leqslant t_m, \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau), & t_m < \tau \leqslant t_{m+1} = T, \end{cases}$$

$$\nu_n^0(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[G_k(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau)+\sum\limits_{i=1}^{m}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k\,(t_i-\tau)\right], & 0\leqslant\tau\leqslant t_1,\\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[G_k(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau)+\sum\limits_{i=2}^{m}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k\,(t_i-\tau)\right], & t_1<\tau\leqslant t_2,\\ \dots\\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[G_k(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau)+\gamma_{mk}^0\sin\lambda_k\,(t_m-\tau)\right], & t_{m-1}<\tau\leqslant t_m,\\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}G_k(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau), & t_m<\tau\leqslant t_{m+1}=T.\end{cases}$$

Надо отметить, что оптимальные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ на конце каждого предыдущего промежутка $[t_{j-1},\ t_j]$ совпадают со значениями в начале последующего промежутка $(t_j,\ t_{j+1}]$, $j=1,...,m$, которые представим в виде

$$\mu_n^0(t_j)=\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum_{k=1}^{n}\left[G_k(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,t_j)+\sum_{i=j+1}^{m}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k\,(t_i-t_j)\right],$$

$$\nu_n^0(t_j)=\frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[G_k(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,t_j)+\sum_{i=j+1}^{m}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k\,(t_i-t_j)\right].$$

Таким образом, построенные оптимальные граничные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ как функции от времени непрерывны на промежутке $[0,\ T]$.

Теперь построим функцию прогиба, соответствующую оптимальным управлениям $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$. Подставив полученные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ в (28), а выражение для $F_k^0(t)$ — в (29), находим функцию $V_k^0(t)$, $t\in[0,\ T]$, $k=1,...,\ n$. Далее, из формулы (23) будем иметь

$$V_n^0(x,t)=\sum_{k=1}^{n}V_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{41}$$

а из (10) — функцию $W_n^0(x,t)$ в виде

$$W_n^0(x,t)=(\nu_n^0(t)-\mu_n^0(t))\frac{x}{l}+\mu_n^0(t). \tag{42}$$

Следовательно, согласно (7), для первых n гармоник оптимальную функцию прогиба струны $Q_n^0(x,t)$ запишем так:

$$Q_n^0(x,t)=V_n^0(x,t)+W_n^0(x,t). \tag{43}$$

6. Пример. Для иллюстрации вышеизложенного предположим, что в граничных условиях (3) $Q(l,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T$ (т. е. $\nu(t)=0$), и в промежуточный момент времени t_1 $(0<t_1<T)$ задано состояние точек струны в виде

$$Q(x,t_1)=\varphi_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

В этом случае из формулы (28) следует, что $F_k(t)=-\frac{2a}{\lambda_k l}\mu''(t)$, и, согласно формулам (32), будем иметь следующие интегральные соотношения:

$$\int\limits_0^T\mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau=C_{1k}(T),\qquad\int\limits_0^T\mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau=C_{2k}(T),$$

$$\int_0^T \mu(\tau) h_k^{(1)}(\tau)\, d\tau = C_{1k}(t_1),$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k}\right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k}\right],$$

$$C_{1k}(t_1) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(t_1) + X_{1k}^{(1)}\right].$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{1k}(t_1)$ определяются из формулы (31), а X_{1k}, X_{2k}, $X_{1k}^{(1)}$ — из (33). В соответствии с (38) получим такую систему интегральных соотношений:

$$\int_0^T h_{1n}(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{1k}(T), \quad \int_0^T h_{1n}(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{2k}(T),$$

$$\int_0^T h_{1n}(\tau)h_k^{(1)}(\tau)d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{1k}(t_1),\ k=1,\,...,\,n,$$

где, согласно (37), $h_{1n}(\tau)$ имеет вид

$$h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^{n}\Big[p_k\sin\lambda_k\,(T-\tau) + q_k\cos\lambda_k\,(T-\tau) + \gamma_{1k}h_k^{(1)}(\tau)\Big].$$

Для определения величин p_k, q_k, γ_{1k}, $k=1,...,n$, и β_n будем иметь систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}p_j + b_{jk}q_j + c_{jk}\gamma_{1j}) = -\frac{\beta_n}{2}C_{1k}(T),$$

$$\sum_{j=1}^{n}(d_{jk}p_j + e_{jk}q_j + f_{jk}\gamma_{1j}) = -\frac{\beta_n}{2}C_{2k}(T),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(a_{jk}^{(1)}p_j + b_{jk}^{(1)}q_j + g_{jk}\gamma_{1j}\Big) = -\frac{\beta_n}{2}C_{1k}(t_1), \quad k=1,...,n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}[p_kC_{1k}(T) + q_kC_{2k}(T) + \gamma_{1k}C_{1k}(t_1)] = 1,$$

в которой

$$a_{jk} = \int_0^T \sin\lambda_j\,(T-\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau, \quad b_{jk} = \int_0^T \cos\lambda_j\,(T-\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau,$$

$$c_{jk} = \int_0^T h_j^{(1)}(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau, \quad d_{jk} = \int_0^T \sin\lambda_j\,(T-\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau,$$

$$e_{jk}=\int\limits_0^T \cos\lambda_j\,(T-\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau,\quad f_{jk}=\int\limits_0^T h_j^{(1)}\,(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau,$$

$$a_{jk}^{(1)}=\int\limits_0^T \sin\lambda_j\,(T-\tau)\,h_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau,\quad b_{jk}^{(1)}=\int\limits_0^T \cos\lambda_j\,(T-\tau)\,h_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau,$$

$$g_{jk}=\int\limits_0^T h_j^{(1)}\,(\tau)\,h_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau.$$

Для простоты построим функцию оптимального граничного управления $\mu_n^0(\tau)$ при $n=1$ (следовательно, $k=1$ и $j=1$). Отсюда найдем, что

$$a_{11}=\frac{T}{2}-\frac{1}{4\lambda_1}\,\sin 2\lambda_1 T,\quad b_{11}=d_{11}=\frac{1}{2\lambda_1}\,\sin^2\lambda_1 T,$$

$$c_{11}=a_{11}^{(1)}=\frac{t_1}{2}\cos\lambda_1\,(T-t_1)-\frac{1}{2\lambda_1}\,\sin\lambda_1 t_1\cos\lambda_1 T,\quad e_{11}=\frac{T}{2}+\frac{1}{4\lambda_1}\,\sin 2\lambda_1 T,$$

$$f_{11}=b_{11}^{(1)}=\frac{1}{2\lambda_1}\,\sin\lambda_1 t_1\,\sin\lambda_1 T-\frac{t_1}{2}\sin\lambda_1\,(T-t_1)\,,\quad g_{11}=\frac{t_1}{2}-\frac{1}{4\lambda_1}\,\sin 2\lambda_1 t_1.$$

Предположим, что $t_1=\frac{l}{a}$, $T=2\frac{l}{a}$. Тогда с учетом $\lambda_1=\frac{a\pi}{l}$ получим, что $t_1\lambda_1=\pi$, $T\lambda_1=2\pi$, $\lambda_1(T-t_1)=\pi$, $a_{11}=e_{11}=\frac{l}{a}$, $b_{11}=d_{11}=f_{11}=b_{11}^{(1)}=0$, $c_{11}=a_{11}^{(1)}=-\frac{l}{2a}$, $g_{11}=\frac{l}{2a}$.

В этом случае для определения p_1, q_1, γ_{11} и β_1 имеем систему уравнений

$$\frac{l}{a}p_1-\frac{l}{2a}\gamma_{11}=-\frac{\beta_1}{2}C_{11}(T),\quad \frac{l}{a}q_1=-\frac{\beta_1}{2}C_{21}(T),\quad -\frac{l}{2a}p_1+\frac{l}{2a}\gamma_{11}=-\frac{\beta_1}{2}C_{11}(t_1),$$

$$p_1C_{11}(T)+q_1C_{21}(T)+\gamma_{11}C_{11}(t_1)=1.$$

Решая ее, получим, что

$$p_1^0=2\left[C_{11}(T)+C_{11}(t_1)\right]A,\quad q_1^0=C_{21}(T)A,\quad \gamma_{11}^0=2\left[C_{11}(T)+2C_{11}(t_1)\right]A,$$

где

$$A^{-1}=2\left[C_{11}(T)+C_{11}(t_1)\right]^2+2C_{11}^2(t_1)+C_{21}^2(T),$$

$$C_{11}(T)=\frac{l}{2a}\left(V_1(T)-V_1(0)\right)+\frac{\varphi_T(0)-\varphi_0(0)}{\lambda_1},$$

$$C_{21}(T)=\frac{l}{2a\lambda_1}\left(\dot V_1(T)-\dot V_1(0)\right)+\frac{\psi_T(0)-\psi_0(0)}{\lambda_1^2},$$

$$C_{11}(t_1)=\frac{l}{2a}\left(V_1(t_1)+V_1(0)\right)+\frac{\varphi_1(0)+\varphi_0(0)}{\lambda_1}.$$

Следовательно, оптимальное граничное управление $\mu_1^0(\tau)$ можно записать в виде

$$\mu_1^0(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{(\rho_1^0)^2}\left[p_1^0\sin\lambda_1\,(T-\tau)+q_1^0\cos\lambda_1\,(T-\tau)+\gamma_{11}^0\sin\lambda_1\,(t_1-\tau)\right], & 0\leqslant\tau\leqslant t_1,\\ \frac{1}{(\rho_1^0)^2}\left[p_1^0\sin\lambda_1\,(T-\tau)+q_1^0\cos\lambda_1\,(T-\tau)\right], & t_1<\tau\leqslant t_2,\end{cases}$$

здесь

$$(\rho_1^0)^2 = \int\limits_0^{t_1} \left[p_1^0 \sin\lambda_1 (T-\tau) + q_1^0 \cos\lambda_1 (T-\tau) + \gamma_{11}^0 \sin\lambda_1 (t_1-\tau)\right]^2 d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{T} \left[p_1^0 \sin\lambda_1 (T-\tau) + q_1^0 \cos\lambda_1 (T-\tau)\right]^2 d\tau.$$

Далее, согласно приведенным формулам (41)–(43), находим, что

$$Q_1^0(x,t) = V_1^0(x,t) + W_1^0(x,t) = V_1^0(t)\sin\frac{\pi}{l}x + \left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1^0(t).$$

7. Заключение. Предложен конструктивный метод построения оптимального граничного управления процессом колебаний однородной струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Такой подход использования метода Фурье вместо метода Даламбера допускает распространение его на другие неодномерные колебательные системы.

Литература

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 476 с.

2. *Знаменская Л. Н.* Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.

3. *Zuazua E.* Controllability of partial differential equations. Madrid: Universidad Autonoma, 2002. 311 p.

4. *Абдукаримов М. Ф.* Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны // Докл. АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 8. С. 612–618.

5. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления для системы волновых уравнений // Вестник Самарск. гос. технич. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16). С. 5–10.

6. *Гибкина Н. В., Сидоров М. В., Стадникова А. В.* Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны // Радиоэлектроника и информатика. 2016. № 2. С. 3–11.

7. *Il'in V. A., Moiseev E. I.* Optimization of boundary controls of string vibrations // Russian Mathematical Surveys. 2005. Vol. 60. Iss. 6. P. 1093–1119. https://doi.org/10.1070/RM2005v060n06ABEH004283

8. *Moiseev E. I., Kholomeeva A. A.* On an optimal boundary control problem with a dynamic boundary condition // Differential Equations. 2013. Vol. 49. P. 640–644. https://doi.org/10.1134/S0012266113050133

9. *Моисеев Е. И., Холомеева А. А., Фролов А. А.* Граничное управление смещением процесса колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического // Материалы Междунар. конференции «Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS–17». С.-Петерб. политехнич. ун-т, 24–28 июля 2017 г. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзор. № 160. М.: ВИНИТИ РАН, 2019. С. 74–84.

10. *Копец М. М.* Задача оптимального управления процессом колебания струны // Теория оптимальных решений. Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, 2014. С. 32–38.

11. *Barseghyan V. R.* Optimal control of string vibrations with nonseparate state function conditions at given intermediate instants // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. Iss. 2. P. 226–235. https://doi.org/10.1134/S0005117920020034

12. *Barseghyan V. R.* About one problem of optimal control of string oscillations with non-separated multipoint conditions at intermediate moments of time // Stability, Control and Differential Games / eds A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Proceedings. Cham: Springer, 2020. P. 13–25. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_2

13. *Барсегян В. Р., Саакян М. А.* Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // Изв. НАН Республики Армения. Механика. 2008. Т. 61. № 2. С. 52–60.

14. *Барсегян В. Р.* Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // Аналитическая механика, устойчивость и управление: труды XI Междунар. Четаевск. конференции. Т. 3. Ч. I. Казань, 13–17 июня 2017 г. Казань: Казанск. науч.-исслед. технич. ун-т, 2017. С. 119–125.

15. *Барсегян В. Р., Солодуша С. В.* Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 131–146.

16. *Barseghyan V. R., Movsisyan L. A.* Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation // Intern. Applied Mechanics. 2012. Vol. 48. Iss. 2. P. 234–239. http://dx.doi.org/10.1007/s10778-012-0519-9

17. *Барсегян В. Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.

18. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19. № 1. С. 62–70.

19. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

20. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с

Статья поступила в редакцию 5 декабря 2021 г.
Статья принята к печати 21 июня 2022 г.

Контактная информация:

Барсегян Ваня Рафаелович — д-р физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр.; barseghyan@sci.am

Optimal boundary control of string oscillations by displacement at two ends with specified values of deflection function at intermediate moments of time

V. R. Barseghyan

Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia,
24B, Marshal Baghramyan pr., Yerevan, 0019, Armenia
Yerevan State University, 1, ul. Alec Manukyan, Yerevan, 0025, Armenia

For citation: Barseghyan V. R. Optimal boundary control of string oscillations by displacement at two ends with specified values of deflection function at intermediate moments of time. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 3, pp. 410–424. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.310 (In Russian)

We consider the problem of optimal boundary control for the equation of string vibrations with given initial, final conditions and given values of the string deflection function at intermediate moments of time and with a quality criterion specified over the entire time interval. Using the method of separation of variables and methods of optimal control theory with multipoint intermediate conditions, optimal boundary controls are constructed for arbitrary numbers of the first harmonics. As an application of the proposed constructive approach, a boundary optimal control is built with a given string deflection function at an intermediate moment of time.

Keywords: string vibrations, optimal boundary control, optimal vibration control, intermediate conditions, variables separation.

References

1. Butkovskiy A. G. *Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [*Theory of optimal control of systems with distributed parameters*]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 476 p. (In Russian)

2. Znamenskaya L. N. *Upravlenie uprugimi kolebaniyami* [*Control of elastic vibrations*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 176 p. (In Russian)

3. Zuazua E. *Controllability of partial differential equations*. Madrid, Universidad Autonoma Press, 2002, 311 p.

4. Abdukarimov M. F. Ob optimal'nom granichnom upravlenii smeshcheniyami protsessa vynuzhdennykh kolebaniy na dvukh kontsakh struny [On optimal boundary control of displacements in the process of forced vibrationson both ends of a string]. *Dokl. Akad. Nauk Republic of Tadzhikistan*, 2013, vol. 56, no. 8, pp. 612–618. (In Russian)

5. Andreev A. A., Leksina S. V. Zadacha granichnogo upravleniya dlya sistemy volnovykh uravneniy [The boundary control problem for the system of wave equations]. *Vestnik of Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics Sciences*, 2008, no. 1(16), pp. 5–10. (In Russian)

6. Gibkina N. V., Sidorov M. V., Stadnikova A. V. Optimal'noe granichnoe upravlenie kolebaniyami odnorodnoy struny [Optimal boundary control of vibrations of uniform string]. *Radioelektronics and informatics*, 2016, no. 2, pp. 3–11. (In Russian)

7. Il'in V. A., Moiseev E. I. Optimization of boundary controls of string vibrations. *Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 6, pp. 1093–1119.
https://doi.org/10.1070/RM2005v060n06ABEH004283

8. Moiseev E. I., Kholomeeva A. A. On an optimal boundary control problem with a dynamic boundary condition. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, pp. 640–644.
https://doi.org/10.1134/S0012266113050133

9. Moiseev E. I., Kholomeyeva A. A., Frolov A. A. Granichnoe upravlenie smeshcheniem protsessa kolebaniy pri granichnom uslovii tipa tormozheniya za vremya, men'shee kriticheskogo [Boundary displacement control for the oscillation process with boundary conditions of damping type for a time less than critical]. *Proceedings of the Intern. Conference "Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS–17". St Petersburg Polytechnical University, July, 24–28, 2017. Results of science and technology. Series Modern Mathematics and its Applications. Thematic overview*, no. 160. Moscow, VINITI Publ., 2019, pp. 74–84. (In Russian)

10. Kopets M. M. Zadacha optimal'nogo upravleniya protsessom kolebaniya struny [The problem of optimal control of the string vibration process]. *The theory of optimal solutions*. Kiev, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS of Ukraine Publ., 2014, pp. 32–38. (In Russian)

11. Barseghyan V. R. Optimal control of string vibrations with nonseparate state function conditions at given intermediate instants. *Automation and Remote Control*, 2020, vol. 81, iss. 2, pp. 226–235. https://doi.org/10.1134/S0005117920020034

12. Barseghyan V. R. About one problem of optimal control of string oscillations with non-separated multipoint conditions at intermediate moments of time. *Stability, Control and Differential Games*. Eds A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova. *Lecture Notes in Control and Information Sciences. Proceedings*. Cham, Springer Publ., 2020, pp. 13–25. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_2

13. Barseghyan V. R., Saakyan M. A. Optimal'noe upravlenie kolebaniyami struny s zadannymi sostoyaniyami v promezhutochnye momenty vremeni [The optimal control of wire vibration in the states of the given intermediate periods of time]. *Proceedings of NAS of Republic Armenia. Mechanics*, 2008, vol. 61, no. 2, pp. 52–60. (In Russian)

14. Barseghyan V. R. Ob odnoy zadache granichnogo optimal'nogo upravleniya kolebaniyami struny s ogranicheniyami v promezhutochnye momenty vremeni [About one problem of optimal boundaery control of string vibrations with restrictions in the intermediate moment of time]. *Proceedings of the 11^{th} Intern. Chetaev Conference "Analytical mechanics, stability and control"*, June, 13–17, 2017, vol. 3, pt 1. Kazan, Kazan Scientific Research Tech. University Publ., 2017, pp. 119–125. (In Russian)

15. Barseghyan V. R., Solodusha S. V. Zadacha granichnogo upravleniya kolebaniyami struny smeshcheniem levogo kontsa pri zakreplennom pravom kontse s zadannymi znacheniyami funktsii progiba v promezhutochnye momenty vremeni [The problem of boundary control of string vibrations by displacement of the left end when the right end is fixed with the given values of the deflection function at intermediate times]. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 131–146. (In Russian)

16. Barseghyan V. R., Movsisyan L. A. Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation. *Intern. Applied Mechanics*, 2012, vol. 48, iss. 2, pp. 234–239.
http://dx.doi.org/10.1007/s10778-012-0519-9

17. Barseghyan V. R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [*Control of compound dynamic systems and of systems with multipoint intermediate conditions*]. Moscow, Nauka Publ., 2016, 230 p. (In Russian)

18. Korzyuk V. I., Kozlovskia I. S. Dvukhtochechnaya granichnaya zadacha dlya uravneniya kolebaniya struny s zadannoy skorost'yu v nekotoryy moment vremeni. II [Two-point boundary problem for the equation of string vibration with the given velocity at the certain moment of time. II]. *Proceedings of the Institute of Mathematics NAS of Belarus*, 2011, vol. 19, no. 1, pp. 62–70. (In Russian)

19. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [*Equations of mathematical physics*]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 736 p. (In Russian)

20. Krasovsky N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [*The theory of motion control*]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p. (In Russian)

Received: December 5, 2021.
Accepted: June 21, 2022.

A u t h o r's i n f o r m a t i o n:

Vanya R. Barseghyan — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Leading Scientific Researcher; barseghyan@sci.am