

ИНФОРМАТИКА

УДК 539.3+519.6

MSC 35C10, 74B05, 74E10, 74G10

Метод суперпозиции в задаче изгиба защемленной по контуру тонкой изотропной пластинки*Г. О. Алцыбеев¹, Д. П. Голоскоков², А. В. Матросов¹*¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9² Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, Российская Федерация, 193232, Санкт-Петербург, пр. Большевиков, 22

Для цитирования: *Алцыбеев Г. О., Голоскоков Д. П., Матросов А. В.* Метод суперпозиции в задаче изгиба защемленной по контуру тонкой изотропной пластинки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 3. С. 347–364. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.305>

В работе методом суперпозиции построено общее решение дифференциального уравнения изгиба тонкой изотропной пластинки под действием нормальной нагрузки, приложенной к ее плоскости. В качестве двух решений, каждое из которых позволяет удовлетворить граничным условиям на двух противоположных сторонах пластины, взяты решения, полученные методом начальных функций в виде тригонометрических рядов. Исследованы два способа удовлетворения граничным условиям жестко защемленной пластины: метод разложения в тригонометрические ряды Фурье и метод коллокаций. Показано, что оба метода дают одинаковые результаты и достаточно быструю сходимость решения во всех точках пластины, кроме малых окрестностей угловых точек. Построенное решение позволило изучить поведение перерезывающей силы в окрестностях угловых точек. Вычислительные эксперименты показали, что при удержании 390 членов в тригонометрических рядах решения перерезывающая сила близка к нулю, но не равна тождественно.

Ключевые слова: изотропная пластинка, изгиб тонкой пластинки, защемленная по контуру пластинка, метод начальных функций, компьютерная алгебра, Maple.

1. Введение. Тонкие изотропные пластины, обладая достаточной прочностью и несущей способностью, представляют собой один из широко используемых элементов конструкций при проектировании изделий судостроительной и авиационной промышленности. Методы расчета тонких изотропных пластин начали разрабатываться с начала XIX в., когда впервые было получено дифференциальное уравнение изгиба,

названное уравнением Софи Жермен в честь французской ученой, впервые выведшей его, правда с небольшой неточностью, исправленной в дальнейшем великим механиком Жозефом Луи Лагранжем при рецензировании ее работы.

После этого стали разрабатываться методы расчета тонких прямоугольных пластин при разнообразных условиях закрепления их сторон. Отметим фундаментальную работу [1], в которой собраны решения для всех практических случаев нагружения пластин с разнообразными условиями закрепления ее контура. Изгиб тонкой изотропной пластинки при жестком защемлении всех ее сторон представляет собой один из самых сложных расчетных случаев и продолжает привлекать внимание как механиков, так и прикладных математиков вплоть до настоящего времени. Предлагаются новые подходы к построению решения этой сложной, с точки зрения математики, краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка. В [2] показана обстоятельная история решения бигармонического уравнения начиная с XIX в., а в [3] представлено историческое исследование методов расчета жестко защемленной прямоугольной тонкой изотропной пластинки, для которой и сейчас продолжают находить новые подходы вычисления ее напряженно-деформированного состояния. Справедливости ради следует отметить, что основное внимание уделяется разработке методов расчета анизотропных пластинок, но эти подходы с большим успехом применяются и для определения напряженно-деформированного состояния изотропных тонких плит.

Методы Рэлея — Ритца и Галеркина, относящиеся к классическим приближенным аналитическим методам расчета элементов конструкций (балки, пластины, оболочки), с успехом использовались многими авторами для решения задач изгиба и колебаний тонких пластинок с различными граничными условиями на сторонах. Эти подходы остаются востребованными и в настоящее время. Так, методом Галеркина выполнен статический анализ суперэллиптической защемленной изотропной пластинки [4], а в [5] исследуются методы Ритца, Галеркина и Канторовича для расчета максимального прогиба защемленной прямоугольной изотропной пластинки. Сравнительному анализу применения методов Галеркина и наименьших квадратов в задаче изгиба слоистых тонких плит при разных углах ориентации ортотропных слоев посвящена работа [6]. Метод Ритца используется как в динамических задачах при анализе собственных частот и свободных колебаний пластин [7], так и при статическом анализе изотропных и слоистых тонких пластинок [8, 9].

Кроме упомянутых классических подходов развиваются и специальные методики расчета изгиба тонких пластин с разными граничными условиями. Прямые вариационные процедуры минимизации потенциальной энергии для определения напряженно-деформированного состояния изогнутой пластины Кирхгофа исследуются в [10], а в [11] этот же подход применен к расчету тонкой пластины, моделируемой с помощью полиномиальной теории сдвига.

Модифицированный метод дифференциальных квадратур, позволяющий получать численное решение уравнений в частных производных, представляя производные искомой функции в виде линейной комбинации ее значений в узловых точках, использовался в работе [12] для исследования изгиба и устойчивости косоугольных пластинок. В [13] разработан обобщенный метод интегрального преобразования для анализа изгиба и устойчивости прямоугольной тонкой пластинки, два противоположных края которой свободно оперты, а два других жестко защемлены. В работе [14] построено точное решение задачи изгиба защемленной по контуру изотропной тонкой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки в виде двойного

ряда по специальной системе ортогональных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

Метод суперпозиции, который базируется на идее Ламе, заключающейся в том, что сумма двух решений, каждое из которых позволяет удовлетворить произвольным граничным условиям на двух противоположных сторонах пластинки, является общим решением задачи изгиба пластинки и развит авторами [3, 15] на основе решений, полученных методом собственных векторных функций в задачах теории упругости, а в [16–19] — на базе решений с помощью метода начальных функций.

Отметим, что во всех приведенных исследованиях, за исключением работ по методу суперпозиции, вычислялись максимальные перемещения, изгибающие моменты и приведенные перерезывающие силы. Однако представляет интерес, с теоретической точки зрения, поведение решения в окрестности угловых точек, в частности характер изменения перерезывающих сил. Авторы [15] утверждают, что перерезывающие силы в углах пластинки равны нулю, и построили алгоритм удовлетворения граничным условиям, учитывающий этот факт.

В настоящей работе анализируется поведение решения, построенного на основе двух решений, полученных методом начальных функций, в окрестности угловых точек тонкой упругой изотропной пластинки.

Метод начальных функций является аналитическим, позволяющим строить решение уравнения (системы уравнений) в частных производных в виде линейной комбинации начальных функций, определенных на начальной линии $x = 0$ или $y = 0$ для плоских задач. Этот метод был разработан в 60-х годах XX в. [20–23] и интенсивно развивался до 90-х годов [24–26]. С широким внедрением в расчетную практику систем компьютерной алгебры (Maple, Mathematica и др.) он получил толчок к дальнейшему развитию [27–41]. Краткий обзор истории развития метода можно найти в [42].

2. Постановка задачи и метод решения. Прогиб $w(x, y)$ прямоугольной изотропной тонкой пластинки толщиной h и размерами $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$ в декартовой прямоугольной системе координат удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (1)$$

в котором $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки, E — модуль упругости материала, ν — коэффициент Пуассона.

Решением неоднородного уравнения (1) является сумма общего решения однородного уравнения ($q(x, y) \equiv 0$) и частного решения неоднородного. В соответствии с методом суперпозиции Ламе [43] общее решение однородного уравнения есть сумма двух решений, каждое из которых дает возможность удовлетворить произвольным граничным условиям на двух противоположных сторонах пластины: $x = 0, a$ или $y = 0, b$.

Методом начальных функций решение однородного уравнения, позволяющее удовлетворить двум граничным условиям на стороне $x = 0$ и двум граничным условиям на стороне $x = a$, в операторной форме получено в виде [16]

$$w_x = X_1(\beta, x) w_x^0(y) + X_2(\beta, x) \theta_x^0(y) + X_3(\beta, x) M_x^0(y) + X_4(\beta, x) V_x^0(y). \quad (2)$$

Здесь $X_1(\beta, x) = \cos \beta x + \frac{(1-\nu)}{2} \beta x \sin \beta x$, $X_2(\beta, x) = \frac{(1-\nu) \beta x \cos \beta x + (1+\nu) \sin \beta x}{2\beta}$,

$X_3(\beta, x) = -\frac{x \sin \beta x}{2D\beta^3}$, $X_4(\beta, x) = \frac{\beta x \cos \beta x - \sin \beta x}{2D\beta^3}$, где $\beta = \frac{\partial}{\partial y}$ — оператор дифференцирования по переменной y , а $w_x^0(y)$, $\theta_x^0(y)$, $M_x^0(y)$, $V_x^0(y)$ — соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и приведенная перерезывающая сила на начальной линии $x = 0$. Перечисленные величины вычисляются через функцию прогиба w по следующим формулам:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Если вид начальных функций известен, то в решении (2) следует воздействовать оператором $X_i(\beta, x)$ ($i = 1, \dots, 4$) на соответствующую начальную функцию и получить решение однородного уравнения. В случае начальных функций $w_x^0(y) = w_x^{0,n} \sin \beta_n y$, $\theta_x^0(y) = \theta_x^{0,n} \sin \beta_n y$, $M_x^0(y) = M_x^{0,n} \sin \beta_n y$, $V_x^0(y) = V_x^{0,n} \sin \beta_n y$, в которых $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, n — натуральное число, а $w_x^{0,n}$, $\theta_x^{0,n}$, $M_x^{0,n}$ и $V_x^{0,n}$ — произвольные постоянные, решение однородного уравнения (1) принимает вид [16]

$$w_x(x, y) = (\bar{X}_1(\beta_n, x) w_x^{0,n} + \bar{X}_2(\beta_n, x) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3(\beta_n, x) M_x^{0,n} + \bar{X}_4(\beta_n, x) V_x^{0,n}) \sin \beta_n y, \quad (4)$$

где $\bar{X}_1(\beta_n, x) = \cosh \beta_n x - \frac{1-\nu}{2} \beta_n x \sinh \beta_n x$; $\bar{X}_2(\beta_n, x) = \frac{(1-\nu)(\beta_n x \cosh \beta_n x - \sinh \beta_n x)}{2\beta_n}$;

$\bar{X}_3(\beta_n, x) = -\frac{x \sinh \beta_n x}{2D\beta_n}$; $\bar{X}_4(\beta_n, x) = \frac{\sinh \beta_n x - \beta_n x \cosh \beta_n x}{2D\beta_n^3}$. Функции $\bar{X}_i(\beta_n, x)$ получаются в результате воздействия операторов-функций $X_i(\beta, x)$ на тригонометрическую функцию $\sin \beta_n y$: $[X_i(\beta, x)] \sin \beta_n y = \bar{X}_i(\beta_n, x) \sin \beta_n y$. Для этого оператор-функцию $X_i(\beta, x)$ следует разложить в степенной ряд по переменной x , предполагая, что $\beta^k = \frac{\partial^k}{\partial y^k}$, выполнить соответствующее дифференцирование функции тригонометрического синуса $\sin \beta_n y$, а затем просуммировать полученный степенной ряд. С примерами приведенной методики получения значений операторов на различных тригонометрических функциях можно познакомиться, например, в работах [17–19, 44].

Суммируя частные решения (4) по $n = 1, 2, 3, \dots$, получим решение, позволяющее удовлетворить граничным условиям на двух противоположных сторонах пластины $x = 0, a$:

$$w_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{X}_1(\beta_n, x) w_x^{0,n} + \bar{X}_2(\beta_n, x) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3(\beta_n, x) M_x^{0,n} + \bar{X}_4(\beta_n, x) V_x^{0,n}) \sin \beta_n y. \quad (5)$$

Действительно, пусть, например, на стороне $x = 0$ заданы перемещение и угол поворота в виде тригонометрических рядов $w_x^0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_x^{0,n} \sin \beta_n y$, $\theta_x^0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_x^{0,n} \sin \beta_n y$. Предполагая, что изгибающий момент и приведенная перерезывающая сила также могут быть представлены как тригонометрические ряды $M_x^0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_x^{0,n} \sin \beta_n y$ и $V_x^0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_x^{0,n} \sin \beta_n y$, в решении (5) неизвестными будут коэффициенты $M_x^{0,n}$ и $V_x^{0,n}$. Для их определения следует воспользоваться граничными

условиями на стороне $x = a$. Пусть для примера на ней заданы изгибающий момент $M_x^a(y)$ и приведенная перерезывающая сила $V_x^a(y)$. Представим их в виде тригонометрических рядов $M_x^a(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_x^{a,n} \sin \beta_n y$, $V_x^a(y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_x^{a,n} \sin \beta_n y$. По формулам (3) вычисляем изгибающий момент и приведенную перерезывающую силу:

$$M_x = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{M}_1^n w_x^{0,n} + \bar{M}_2^n \theta_x^{0,n} + \bar{M}_3^n M_x^{0,n} + \bar{M}_4^n V_x^{0,n}) \sin \beta_n y,$$

$$V_x = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{V}_1^n w_x^{0,n} + \bar{V}_2^n \theta_x^{0,n} + \bar{V}_3^n M_x^{0,n} + \bar{V}_4^n V_x^{0,n}) \sin \beta_n y,$$

$$\bar{M}_i^n = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{X}_i(\beta_n, x) - \nu \beta_n^2 \bar{X}_i(\beta_n, x) \right),$$

$$\bar{V}_i^n = -D \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \bar{X}_i(\beta_n, x) - (2 - \nu) \beta_n^2 \frac{\partial}{\partial x} \bar{X}_i(\beta_n, x) \right), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Используя данные формулы, вычисляем момент и приведенную перерезывающую силу на стороне $x = a$. Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых гармониках полученных выражений и заданных граничных условиях на этой стороне пластины. В результате получаем для каждой гармоники систему двух линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов при такой же гармонике в тригонометрическом ряде изгибающего момента и приведенной перерезывающей силы на стороне $x = 0$:

$$\bar{M}_3^n \Big|_{x=a} M_x^{0,n} + \bar{M}_4^n \Big|_{x=a} V_x^{0,n} = M_x^{a,n} - \bar{M}_1^n \Big|_{x=a} w_x^{0,n} - \bar{M}_2^n \Big|_{x=a} \theta_x^{0,n},$$

$$\bar{V}_3^n \Big|_{x=a} M_x^{0,n} + \bar{V}_4^n \Big|_{x=a} V_x^{0,n} = \bar{V}_x^{a,n} - \bar{V}_1^n \Big|_{x=a} w_x^{0,n} - \bar{V}_2^n \Big|_{x=a} \theta_x^{0,n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Определив из этих систем коэффициенты $M_x^{0,n}$ и $V_x^{0,n}$, тем самым решим задачу изгиба пластинки с заданными граничными условиями на сторонах $x = 0, a$. Напомним, что при этом на сторонах $y = 0, b$ граничные условия будут диктоваться решением (5).

Можно построить еще одно решение метода начальных функций, если в качестве начальной линии выбрать $y = 0$. В этом случае оно будет иметь вид

$$w_y = Y_1(\alpha, y) w_y^0(x) + Y_2(\alpha, y) \theta_y^0(x) + Y_3(\alpha, y) M_y^0(x) + Y_4(\alpha, y) V_y^0(x). \quad (6)$$

В (6) $Y_1(\alpha, y) = \cos \alpha y + \frac{(1 - \nu)}{2} \alpha y \sin \alpha y$, $Y_2(\alpha, y) = \frac{(1 - \nu) \alpha y \cos \alpha y + (1 + \nu) \sin \alpha y}{2\alpha}$, $Y_3(\alpha, y) = -\frac{y \sin \alpha y}{2D\alpha}$, $Y_4(\alpha, y) = \frac{\alpha y \cos \alpha y - \sin \alpha y}{2D\alpha^3}$, $\alpha = \frac{\partial}{\partial x}$ — оператор дифференцирования по переменной x . Так как исходное уравнение изгиба изотропной пластинки (1) симметрично относительно независимых переменных x и y , то операторы-функции $Y_i(\alpha, y)$ получаются из операторов-функций $X_i(\beta, x)$ заменой β на α и x на y . Функции $w_y^0(x)$, $\theta_y^0(x)$, $M_y^0(x)$, $V_y^0(x)$ — соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и приведенная перерезывающая сила на начальной линии $y = 0$, вычисляющиеся по формулам

$$w_y^0(x) = w|_{y=0}, \quad \theta_y^0(x) = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad M_y^0(x) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0},$$

$$V_y^0(x) = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0}.$$

Если начальные функции представляются тригонометрическими рядами

$$w_y^0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_y^{0,m} \sin \alpha_m x, \quad \theta_y^0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_y^{0,m} \sin \alpha_m x,$$

$$Q_y^0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_y^{0,m} \sin \alpha_m x, \quad V_y^0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} V_y^{0,m} \sin \alpha_m x,$$

в которых $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, m — натуральное число, $w_y^{0,m}$, $\theta_y^{0,m}$, $M_y^{0,m}$ и $V_y^{0,m}$ — произвольные постоянные, то после воздействия операторов на соответствующие начальные функции получается решение, позволяющее удовлетворить граничным условиям на сторонах $y = 0, b$:

$$w_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{Y}_1(\alpha_m, y) w_y^{0,m} + \bar{Y}_2(\alpha_m, y) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_3(\alpha_m, y) M_y^{0,m} + \bar{Y}_4(\alpha_m, y) V_y^{0,m}) \sin \alpha_m x, \quad (7)$$

где

$$\bar{Y}_1(\alpha_m, y) = \cosh \alpha_m y - \frac{(1 - \nu) \alpha_m y}{2} \sinh \alpha_m y;$$

$$\bar{Y}_2(\alpha_m, y) = \frac{(1 - \nu) (\alpha_m y \cosh \alpha_m y - \sinh \alpha_m y)}{2\alpha_m};$$

$$\bar{Y}_3(\alpha_m, y) = -\frac{y \sinh \alpha_m y}{2D\alpha_m}; \quad \bar{Y}_4(\alpha_m, y) = \frac{\sinh \alpha_m y - \alpha_m y \cosh \alpha_m y}{2D\alpha_m^3}$$

есть функции, получающиеся в результате воздействия операторов $Y_i(\alpha, y)$ на тригонометрические функции $\sin \alpha_m y$.

Сумма решений (5) и (7) дает возможность удовлетворить произвольным граничным условиям на всех четырех сторонах пластинки, представляя общее решение однородного уравнения задачи изгиба прямоугольной изотропной пластинки следующим образом:

$$w(x, y) = w_x(x, y) + w_y(x, y). \quad (8)$$

Добавляя к (8) частное решение w_{par} неоднородного уравнения (1), получаем общее решение задачи изгиба тонкой изотропной прямоугольной пластинки в виде

$$w(x, y) = w_x(x, y) + w_y(x, y) + w_{\text{par}}. \quad (9)$$

В случае равномерно распределенной по всей пластинке нормальной нагрузки $q(x, y) \equiv q = \text{const}$ в качестве частного решения в (9) можно взять известное решение для свободно опертой изотропной пластинки [1]

$$w_{\text{par}} = \frac{4q}{D\pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

3. Удовлетворение граничным условиям. Ограничиваясь в каждом из решений (5) и (7) одинаковым количеством членов M , получим приближенное аналитическое решение, которое точно удовлетворяет уравнению изгиба тонкой изотропной пластинки (1) и позволяет удовлетворить произвольным граничным условиям на четырех ее сторонах с достаточной степенью точности:

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \sum_{n=1}^M (\bar{X}_1(\beta_n, x) w_x^{0,n} + \bar{X}_2(\beta_n, x) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3(\beta_n, x) M_x^{0,n} + \\
 & + \bar{X}_4(\beta_n, x) V_x^{0,n}) \sin \beta_n y + \\
 & + \sum_{m=1}^M (\bar{Y}_1(\alpha_m, y) w_y^{0,m} + \bar{Y}_2(\alpha_m, y) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_3(\alpha_m, y) M_y^{0,m} + \\
 & + \bar{Y}_4(\alpha_m, y) V_y^{0,m}) \sin \alpha_m x + \\
 & + \frac{4q}{D\pi^6} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Решение (10) содержит $8M$ произвольных коэффициентов $w_x^{0,n}, \theta_x^{0,n}, M_x^{0,n}, V_x^{0,n}, w_y^{0,m}, \theta_y^{0,m}, M_y^{0,m}, V_y^{0,m}, n, m = 1, \dots, M$, которые должны быть определены из удовлетворения граничным условиям. Для задачи изгиба защемленной по контуру пластинки таковыми будут следующие:

$$\begin{aligned}
 w(0, y) = 0, \quad \theta_x(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0, \quad \theta_x(a, y) = 0, \\
 w(x, 0) = 0, \quad \theta_y(x, 0) = 0, \quad w(x, b) = 0, \quad \theta_y(x, b) = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Для удовлетворения граничным условиям (11) потребуется явный вид углов поворота $\theta_x = \frac{dw}{dx}$ и $\theta_y = \frac{dw}{dy}$, который легко получается из (10):

$$\begin{aligned}
 \theta_x(x, y) = & \sum_{n=1}^M (\bar{X}_{1,x}(\beta_n, x) w_x^{0,n} + \bar{X}_{2,x}(\beta_n, x) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_{3,x}(\beta_n, x) M_x^{0,n} + \\
 & + \bar{X}_{4,x}(\beta_n, x) V_x^{0,n}) \sin \beta_n y + \\
 & + \sum_{m=1}^M (\bar{Y}_1(\alpha_m, y) w_y^{0,m} + \bar{Y}_2(\alpha_m, y) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_3(\alpha_m, y) M_y^{0,m} + \\
 & + \bar{Y}_4(\alpha_m, y) V_y^{0,m}) \alpha_m \cos \alpha_m x + \\
 & + \frac{4q}{D\pi^6} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \alpha_m \cos \alpha_m x \sin \beta_n y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_y(x, y) = & \sum_{n=1}^M (\bar{X}_1(\beta_n, x) w_x^{0,n} + \bar{X}_2(\beta_n, x) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3(\beta_n, x) M_x^{0,n} + \\
 & + \bar{X}_4(\beta_n, x) V_x^{0,n}) \beta_n \cos \beta_n y + \\
 & + \sum_{m=1}^M (\bar{Y}_{1,y}(\alpha_m, y) w_y^{0,m} + \bar{Y}_{2,y}(\alpha_m, y) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_{3,y}(\alpha_m, y) M_y^{0,m} + \\
 & + \bar{Y}_{4,y}(\alpha_m, y) V_y^{0,m}) \sin \alpha_m x + \\
 & + \frac{4q}{D\pi^6} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \beta_n \sin \alpha_m x \cos \beta_n y.
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения для производных функций:

$$\bar{X}_{j,x}(\beta_n, x) = \frac{d\bar{X}_j(\beta_n, x)}{dx}, \quad \bar{Y}_{j,y}(\alpha_m, y) = \frac{d\bar{Y}_j(\alpha_m, y)}{dy}, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Удовлетворение граничным условиям можно производить различными способами. В данной работе для защемленной по контуру тонкой изотропной пластинки исследовались два способа: метод разложения граничных условий в тригонометрические ряды Фурье и метод коллокаций.

Способ 1: метод разложения в ряды Фурье. При этом способе на сторонах пластины с использованием решения (10) вычисляются функции соответствующих граничных условий, раскладываются в тригонометрические ряды и приравниваются нулю коэффициенты при всех гармониках не выше M . Таким образом, получается система линейных алгебраических уравнений для определения произвольных параметров решения (10):

$$\begin{aligned} w(0, y) = 0: & \quad w_x^{0,n} = 0, \quad n = 1, \dots, M, \\ w(a, y) = 0: & \quad \bar{X}_1(\beta_n, a) w_x^{0,n} + \bar{X}_2(\beta_n, a) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3(\beta_n, a) M_x^{0,n} + \bar{X}_4(\beta_n, a) V_x^{0,n} = 0, \\ w(x, 0) = 0: & \quad w_y^{0,m} = 0, \quad m = 1, \dots, M, \\ w(x, b) = 0: & \quad \bar{Y}_1(\alpha_m, b) w_y^{0,m} + \bar{Y}_2(\alpha_m, b) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_3(\alpha_m, b) M_y^{0,m} + \bar{Y}_4(\alpha_m, b) V_y^{0,m} = 0, \\ \theta_x(0, y) = 0: & \quad \theta_x^{0,n} + \sum_{m=1}^M \left[\bar{Y}_1^n(\alpha_m) w_y^{0,m} + \bar{Y}_2^n(\alpha_m) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_3^n(\alpha_m) M_y^{0,m} + \right. \\ & \quad \left. + \bar{Y}_4^n(\alpha_m) V_y^{0,m} + \frac{4q}{D\pi^6} \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right] \bar{\alpha}_m = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_x(a, y) = 0: & \quad \bar{X}_{1,x}(\beta_n, a) w_x^{0,n} + \bar{X}_{2,x}(\beta_n, a) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_{3,x}(\beta_n, a) M_x^{0,n} + \\ & + \bar{X}_{4,x}(\beta_n, a) V_x^{0,n} + \sum_{m=1}^M \left[\bar{Y}_1^n(\alpha_m) w_y^{0,m} + \bar{Y}_2^n(\alpha_m) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_3^n(\alpha_m) M_y^{0,m} + \right. \\ & \left. + \bar{Y}_4^n(\alpha_m) V_y^{0,m} + \frac{4q}{D\pi^6} \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right] \alpha_m (-1)^m = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \theta_y(x, 0) = 0: & \quad \theta_y^{0,m} + \sum_{n=1}^M \left[\bar{X}_1^m(\beta_n) w_x^{0,n} + \bar{X}_2^m(\beta_n) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3^m(\beta_n) M_x^{0,n} + \right. \\ & \left. + \bar{X}_4^m(\beta_n) V_x^{0,n} + \frac{4q}{D\pi^6} \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right] \beta_n = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_y(x, b) = 0: & \quad \bar{Y}_{1,y}(\alpha_m, b) w_y^{0,m} + \bar{Y}_{2,y}(\alpha_m, b) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_{3,y}(\alpha_m, b) M_y^{0,m} + \\ & + \bar{Y}_{4,y}(\alpha_m, b) V_y^{0,m} + \sum_{n=1}^M \left[\bar{X}_1^m(\beta_n) w_x^{0,n} + \bar{X}_2^m(\beta_n) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3^m(\beta_n) M_x^{0,n} + \right. \\ & \left. + \bar{X}_4^m(\beta_n) V_x^{0,n} + \frac{4q}{D\pi^6} \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right] \beta_n (-1)^n = 0, \end{aligned}$$

$$\bar{Y}_i^n(\alpha_m) = \frac{2}{b} \int_0^b \bar{Y}_i(\alpha_m, y) \sin \beta_n dy, \quad \bar{X}_i^m(\beta_n) = \frac{2}{a} \int_0^a \bar{X}_i(\beta_n, x) \sin \alpha_m x dx, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Способ 2: метод коллокаций. Этот метод предполагает вычисление на основе решения (10) перемещений и углов поворота на множестве точек границы и приравнивания их заданным граничным условиям (11), что приводит к системе линейных

алгебраических уравнений для нахождения произвольных коэффициентов решения (10). На каждой стороне следует задать по M точек, например, разбив каждую сторону на $M + 1$ отрезков и выбрать внутренние M точки. Стороны $x = 0, a$ будут разбиты точками $y_i = \frac{b}{M + 1}i, i = 1, \dots, M$, а стороны $y = 0, b$ — точками $x_i = \frac{a}{M + 1}i, i = 1, \dots, M$. Для такого выбранного разбиения система линейных алгебраических уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^M (\bar{X}_1(\beta_n, 0) w_x^{0,n} + \bar{X}_2(\beta_n, 0) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3(\beta_n, 0) M_x^{0,n} + \\
 & \quad + \bar{X}_4(\beta_n, 0) V_x^{0,n}) \sin \beta_n y_i = 0, \\
 & \sum_{n=1}^M (\bar{X}_{1,x}(\beta_n, 0) w_x^{0,n} + \bar{X}_{2,x}(\beta_n, 0) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_{3,x}(\beta_n, 0) M_x^{0,n} + \\
 & \quad + \bar{X}_{4,x}(\beta_n, 0) V_x^{0,n}) \sin \beta_n y_i + \\
 & \quad + \frac{4q}{D\pi^6} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \alpha_m \sin \beta_n y_i = 0, \\
 & \sum_{n=1}^M (\bar{X}_1(\beta_n, a) w_x^{0,n} + \bar{X}_2(\beta_n, a) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_3(\beta_n, a) M_x^{0,n} + \\
 & \quad + \bar{X}_4(\beta_n, a) V_x^{0,n}) \sin \bar{\beta}_n y_i = 0, \\
 & \sum_{n=1}^M (\bar{X}_{1,x}(\beta_n, a) w_x^{0,n} + \bar{X}_{2,x}(\beta_n, a) \theta_x^{0,n} + \bar{X}_{3,x}(\beta_n, a) M_x^{0,n} + \\
 & \quad + \bar{X}_{4,x}(\beta_n, a) V_x^{0,n}) \sin \bar{\beta}_n y_i + \\
 & \quad + \frac{4q}{D\pi^6} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} (-1)^m \bar{\alpha}_m \sin \beta_n y_i = 0, \tag{13} \\
 & \sum_{m=1}^M (\bar{Y}_1(\alpha_m, 0) w_y^{0,m} + \bar{Y}_2(\alpha_m, 0) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_3(\alpha_m, 0) M_y^{0,m} + \\
 & \quad + \bar{Y}_4(\alpha_m, 0) V_y^{0,m}) \sin \alpha_m x_i = 0, \\
 & \sum_{m=1}^M (\bar{Y}_{1,y}(\alpha_m, 0) w_y^{0,m} + \bar{Y}_{2,y}(\alpha_m, 0) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_{3,y}(\alpha_m, 0) M_y^{0,m} + \\
 & \quad + \bar{Y}_{4,y}(\alpha_m, 0) V_y^{0,m}) \sin \alpha_m x_i + \\
 & \quad + \frac{4q}{D\pi^6} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \beta_n \sin \alpha_m x_i = 0, \\
 & \sum_{m=1}^M (\bar{Y}_1(\alpha_m, b) w_y^{0,m} + \bar{Y}_2(\alpha_m, b) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_3(\alpha_m, b) M_y^{0,m} + \\
 & \quad + \bar{Y}_4(\alpha_m, b) V_y^{0,m}) \sin \alpha_m x_i = 0, \\
 & \sum_{m=1}^M (\bar{Y}_{1,y}(\alpha_m, b) w_y^{0,m} + \bar{Y}_{2,y}(\alpha_m, b) \theta_y^{0,m} + \bar{Y}_{3,y}(\alpha_m, b) M_y^{0,m} + \\
 & \quad + \bar{Y}_{4,y}(\alpha_m, b) V_y^{0,m}) \sin \alpha_m x_i + \\
 & \quad + \frac{4q}{D\pi^6} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^{m+n} - (-1)^m - (-1)^n + 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} (-1)^n \beta_n \sin \alpha_m x_i = 0.
 \end{aligned}$$

4. Расчеты и анализ результатов. Была проведена серия вычислительных экспериментов, цель которых — сравнение скорости сходимости и точности получаемых результатов при двух способах удовлетворения граничным условиям защемленной по контуру квадратной ($a = b$) тонкой ($h = 0.001$) изотропной (E, ν) пластинки. В табл. 1 приведены результаты расчета безразмерного прогиба $\bar{w} = \frac{Dw}{qa^4}$ в центре пластины, а также максимальных значений безразмерных изгибающих моментов $\bar{M}_x = \frac{M_x}{qa^2}$, $\bar{M}_y = \frac{M_y}{qa^2}$ и безразмерных перерезывающих сил $\bar{Q}_x = \frac{Q_x}{qa}$, $\bar{Q}_y = \frac{Q_y}{qa}$ (табл. 2) в серединах сторон пластины в зависимости от числа удерживаемых членов в рядах решения (10) и при выбранных двух способах удовлетворения граничным условиям: верхняя цифра — разложение в ряды Фурье (способ 1, см. (12)), нижняя — метод коллокаций (способ 2, см. (13)).

Таблица 1. Максимальные значения компонентов напряженно-деформируемого состояния в зависимости от количества удерживаемых членов в рядах решения (10)

M	$\bar{w} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	$\bar{M}_x \left(0, \frac{b}{2} \right)$	$\bar{M}_y \left(\frac{a}{2}, 0 \right)$	$\bar{Q}_x \left(0, \frac{b}{2} \right)$	$\bar{Q}_y \left(\frac{a}{2}, 0 \right)$
3 (10)	$\frac{0.0012813276}{0.0012823772}$	$\frac{-0.053042756}{-0.051218316}$	$\frac{-0.053042756}{-0.051218316}$	$\frac{0.412648505}{0.395051903}$	$\frac{0.412648505}{0.395051903}$
7 (17)	$\frac{0.0012680633}{0.0012681432}$	$\frac{-0.051712650}{-0.051269641}$	$\frac{-0.051712650}{-0.051269644}$	$\frac{0.425129016}{0.414658611}$	$\frac{0.425129016}{0.414658994}$
21 (36)	$\frac{0.0012654724}{0.0012654726}$	$\frac{-0.051316646}{-0.051337187}$	$\frac{-0.051316647}{-0.051337185}$	$\frac{0.431193072}{0.432595887}$	$\frac{0.431193072}{0.432595790}$
40 (60)	$\frac{0.0012653441}{0.0012653441}$	$\frac{-0.051333979}{-0.051333178}$	$\frac{-0.051333979}{-0.051333179}$	$\frac{0.436223979}{0.436124001}$	$\frac{0.436223979}{0.436123966}$
60 (90)	$\frac{0.0012653265}{0.0012653265}$	$\frac{-0.051333226}{-0.051333484}$	$\frac{-0.051333226}{-0.051333484}$	$\frac{0.437804809}{0.437853462}$	$\frac{0.437804809}{0.437853462}$
190 (270)	$\frac{0.0012653193}{0.0012653193}$	$\frac{-0.051333814}{-0.051333772}$	$\frac{-0.051333814}{-0.051333772}$	$\frac{0.440267847}{0.440243041}$	$\frac{0.440267847}{0.440243041}$
270 (385)	$\frac{0.0012653191}{0.0012653191}$	$\frac{-0.051333780}{-0.051333767}$	$\frac{-0.051333780}{-0.051333767}$	$\frac{0.440565588}{0.440554662}$	$\frac{0.440565588}{0.440554662}$
280 (400)	$\frac{0.0012653191}{0.0012653191}$	$\frac{-0.051333750}{-0.051333761}$	$\frac{-0.051333750}{-0.051333761}$	$\frac{0.440563821}{0.440573693}$	$\frac{0.440563821}{0.440573693}$

Таблица 2. Безразмерные значения \bar{Q}_x перерезывающей силы в угловой точке $(0, 0)$ при разном числе удерживаемых членов в рядах решения (10)

M						
60	100	130	200	280	350	390
0.0091647	0.0093804	0.0035360	0.0008413	-0.0005727	-0.0011681	-0.0013670

Метод начальных функций обладает вычислительной неустойчивостью [44], преодоление которой возможно проведением вычислений с длинной мантиссой. В первом столбце табл. 1 в скобках приведено минимальное значение мантиссы для выполнения устойчивых вычислений при заданном числе членов в тригонометрических рядах общего решения (10).

Максимальное перемещение имеет центральная точка пластины $(a/2, b/2)$. При расчетах с удержанием в рядах до 21 члена ряда при разном способе удовлетворения граничным условиям наблюдаются различия в полученных значениях. Удержание в рядах 40 членов дает одинаковые результаты вплоть до восьми значащих цифр, причем первые пять цифр являются точными. Точный результат с восемью значащими цифрами достигается при удержании в рядах 270 членов ряда.

Максимальные изгибающие моменты в серединах сторон квадратной пластинки становятся одинаковыми для разных способов удовлетворения граничным условиям только при удержании 40 членов в рядах решения, а перерезывающие силы даже при удержании 270 членов ряда дают одинаковые значения только в первых четырех знаках. При удержании в рядах 390 членов ряда максимальные моменты вычисляются с восемью верными знаками $\bar{M}_x\left(0, \frac{b}{2}\right) = \bar{M}_y\left(\frac{a}{2}, 0\right) = -0.051333764$ (последняя восьмая цифра не меняется при удержании большего числа членов в решении), тогда как перерезывающие силы $\bar{Q}_x\left(0, \frac{b}{2}\right) = \bar{Q}_y\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ — только с четырьмя верными знаками: 0.44078643 ($M = 380$) и 0.44076252 ($M = 390$).

Безразмерные перемещения $\frac{wD}{qa^4}$ в сечениях пластины представлены на рис. 1. Максимальное перемещение достигается в центре пластины и совпадает с расчетами других авторов [1]. Отметим точное удовлетворение граничных условий $w = 0$ на сторонах $x = 0$ и $y = 0$.

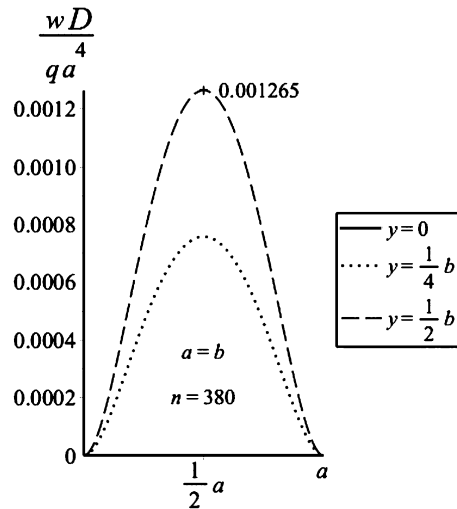


Рис. 1. Безразмерные перемещения $\frac{wD}{qa^4}$ в различных сечениях тонкой квадратной изотропной пластины

Характер изменения изгибающих моментов на сторонах $x = 0, a$ квадратной пластинки, достигающих максимального значения в серединах сторон, показан на рис. 2. В угловых точках момент равен нулю, причем при приближении к ним он меняет знак, принимая очень малое положительное значение (рис. 2, Б).

Перерезывающая сила Q_x на стороне $x = 0$ пластины имеет три экстремальных значения: по центру стороны (максимум) и в окрестностях угловых точек $(0, 0)$ и $(0, b)$ (минимум). На стороне $x = a$ перерезывающая сила принимает противоположные значения $Q_x(a, y) = -Q_x(0, y)$. Судя по рис. 3, А, больше экстремумов у этого компонента напряженно-деформированного состояния нет. Однако, если увеличить масштаб отображения в окрестности угловой точки, то обнаружатся еще один ло-

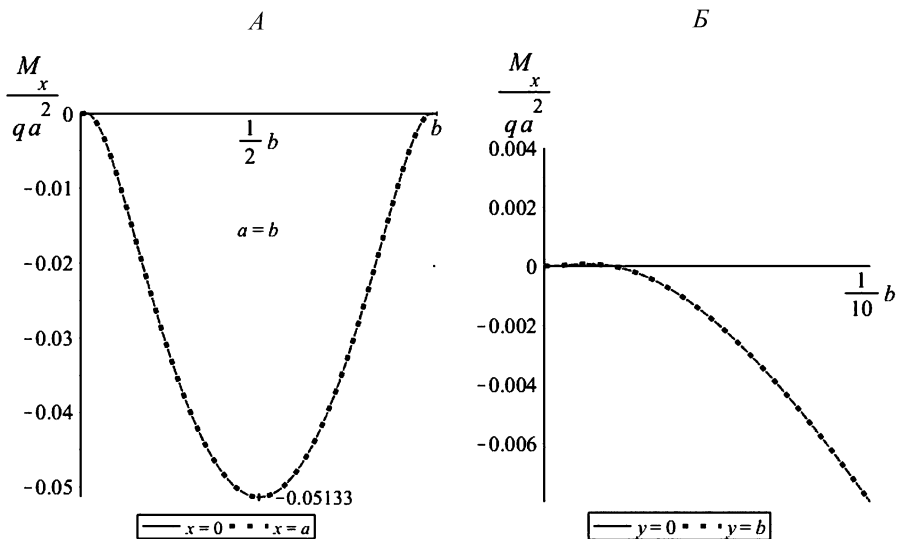


Рис. 2. Изгибающие моменты $\frac{M_x(x, y)}{qa^2}$ на сторонах $x = 0, a$ (А) и в окрестности угловой точки $(0, 0)$ (Б)

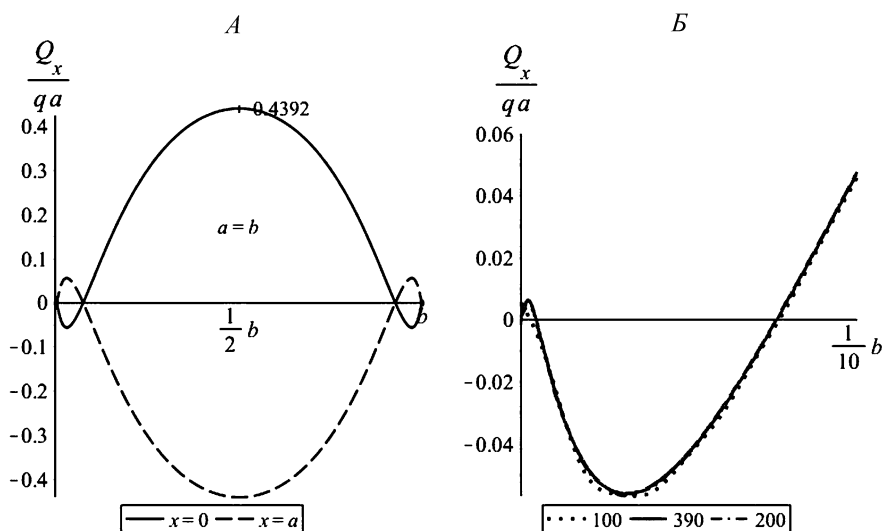


Рис. 3. Перерезывающие силы $\frac{Q_x(0, y)}{qa}$ на сторонах $x = 0, a$ (А) и в окрестности угловой точки $(0, 0)$ (Б) при разном числе удерживаемых членов в рядах решения (10)

кальный положительный максимум для $Q_x(0, y)$ и соответственно один локальный отрицательный минимум для $Q_y(a, y)$: только при удержании более 200 членов в тригонометрических рядах решения (рис. 3, Б).

Увеличив масштаб графика в окрестности угловой точки (рис. 4), можно видеть, что с удержанием большего числа членов в решении перерезывающая сила Q_x в угловой точке оказывается не равной нулю, как отмечается в работе [15]. Она имеет, пусть и малое, но не нулевое значение при удержании 390 членов ряда (см. табл. 2).

Провести вычислительные эксперименты с большим числом членов ряда не представилось возможным в связи с недостаточным для расчетов в системе Maple объемом оперативной памяти компьютера (16 Гб). Можно только предположить, что решение делает еще одно малое колебание и устремится к нулю, а может быть, и к малому ненулевому значению.

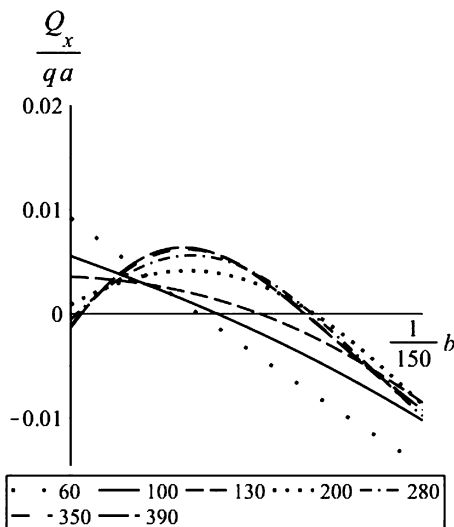


Рис. 4. Перерезывающие силы $\frac{Q_x(0, y)}{qa}$ в окрестностях угловой точки $(0, 0)$ при разном числе удерживаемых членов в рядах решения (10)

4. Заключение. В работе методом суперпозиции на основе двух решений, построенных методом начальных функций, получено общее решение изгиба изотропной тонкой пластинки, позволяющее удовлетворить произвольным граничным условиям на ее сторонах. При удержании в тригонометрических рядах по три члена максимальный прогиб вычисляется с погрешностью 1.25 %, а семь членов обеспечивают точность 0.21 %.

Построенное аналитическое решение позволило провести достоверные расчеты в окрестностях угловых точек не только изгибающих моментов, но и перерезывающих сил. Если вдали от сингулярных точек границы скорости сходимости рядов оказалась достаточной для практических расчетов, то в их окрестности ряды сходятся не столь быстро. Для выявления особенностей поведения компонентов напряженно-деформированного состояния в угловых точках приходилось удерживать более 200 членов в каждом тригонометрическом ряду решения, что приводило к решению систем линейных алгебраических уравнений размерности 1600 и более. К тому же, учитывая вычислительную неустойчивость полученного решения при удержании в нем больших гармоник, расчеты приходилось вести с длинной мантиссой. Все это требовало при реализации решения в системе аналитических вычислений Maple наличия большого объема памяти вычислительного устройства. На компьютере с оперативной памятью 16 Гб удалось провести расчеты для решений не более чем с 390 членами в каждом тригонометрическом ряду.

Литература

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / пер. с англ. Г. С. Шапиро; под ред. И. К. Снятко. М.: Наука, 1966. 636 с. (*Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. 2nd ed.*)
2. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. 2003. Vol. 56. N 1. P. 33–85.
3. Meleshko V. V. Bending of an elastic rectangular clamped plate: exact versus 'engineering' solutions // Journal of Elasticity. 1997. Vol. 48. N 1. P. 1–50.
4. Ceribasi S., Altay G., Cengiz Dokmeci M. Static analysis of superelliptical clamped plates by Galerkin's method // Thin-Walled Structures. 2008. Vol. 46. N 2. P. 122–127.
5. Khan Y., Tiwari P., Ali R. Application of variational methods to a rectangular clamped plate problem // Computers and Mathematics with Applications. 2012. Vol. 63. N 4. P. 862–869.
6. Altunsaray E., Bayer I. Deflection and free vibration of symmetrically laminated quasi-isotropic thin rectangular plates for different boundary conditions // Ocean Eng. 2013. Vol. 57. P. 197–222.
7. Ceribasi S., Altay G. Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method // Journal of Sound and Vibration. 2009. Vol. 319. N 1–2. P. 668–680.
8. Altunsaray E. Static deflections of symmetrically laminated quasi-isotropic super-elliptical thin plates // Ocean Eng. 2017. Vol. 141. P. 337–350.
9. Nwoji C. U., Onah H. N., Mama B. O., Ike C. C. Ritz variational method for bending of rectangular kirchhoff plate under transverse hydrostatic load distribution // Mathematical Modelling of Engineering Problems. 2018. Vol. 5. N 1. P. 1–10.
10. Aginam C. H., Chidolue C. A., Ezeagu C. A. Application of direct variational method in the analysis of isotropic thin rectangular plates // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2012. Vol. 7. N 9. P. 1128–1138.
11. Festus O., Okeke E. T., John W. Strain-displacement expressions and their effect on the deflection and strength of plate // Advances in Science, Technology and Engineering Systems. 2020. Vol. 5. N 5. P. 401–413.
12. Wang X., Yuan Z. Buckling analysis of isotropic skew plates under general in-plane loads by the modified differential quadrature method // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 56. P. 83–95.
13. Ike C. C., Onyia M. E., Rowland-Lato E. O. Generalized integral transform method for bending and buckling analysis of rectangular thin plate with two opposite edges simply supported and other edges clamped // Advances in Science, Technology and Engineering Systems. 2021. Vol. 6. N 1. P. 283–296.
14. Imrak E., Fetvacı C. The deflection solution of a clamped rectangular thin plate carrying uniformly load // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2009. Vol. 37. N 4. P. 462–474.
15. Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A. Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate // Journal of Engineering Mathematics. 2001. Vol. 40. P. 377–398.
16. Matrosov A. V., Suratov V. A. Stress-strain state in the corner points of a clamped plate under uniformly distributed normal load // Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 36. N 1. P. 124–146.
17. Matrosov A. V. An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2022. Vol. 73. N 2. P. 74.
18. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. N 54. P. 2647–2660.
19. Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Метод начальных функций в расчете изгиба защемленной по контуру тонкой ортогонной пластинки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 330–344. <https://doi.org/10.21638.11701/spbu20.2021.402>
20. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости / пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с. (*Lur'e A. I. Three dimensional problems of theory of elasticity.*)
21. Власов В. З. Метод начальных функций в задачах теории упругости // Известия АН СССР. ОТИ. 1955. № 7. С. 46–69.
22. Vlasov V. Z. Method of initial functions in problems of theory of thick plates and shells // Proceedings of 9th Intern. Congress Appl. Mech. 1957. N 6. P. 321–330.
23. Малцев А. С. К выбору функций общего решения в задаче равновесия изотропного упругого тела // Сб. науч. трудов Ленингр. электротехнич. ин-та. 1952. Вып. 4. С. 180–244.
24. Sundara Raja Iyengar K. T., Pandya S. K. Analysis of orthotropic rectangular thick plates // Fibre Sci. Technol. 1983. Vol. 18, N 1. P. 19–36.
25. Galileev S. M., Matrosov A. V. Method of initial functions in the computation of sandwich plates // Intern. Appl. Mech. 1995. Vol. 31. N 6. P. 469–476.

26. *Kovalenko M. D.* The lagrange expansions and nontrivial null-representations in terms of homogeneous solutions // Dokl. Physics. 1997. Vol. 42. N 2. P. 90–92.
27. *Dubey S. K.* Analysis of homogeneous orthotropic deep beams // Journal of Struct. Eng. (Madras). 2005. Vol. 32. N 2. P. 109–116.
28. *Patel R., Dubey S. K., Pathak K. K.* Analysis of RC brick filled composite beams using MIF // Procedia Eng. 2013. N 51. P. 30–34.
29. *Galileev S. M., Tabakov P. Y.* Mathematical foundations of the method of initial functions for the application to anisotropic plates // 2nd Intern. Conference on Mech. Nanotechnol. Cryog. Eng. 2013. P. 59–63.
30. *Patel R., Dubey S. K., Pathak K. K.* Analysis of infilled beams using method of initial functions and comparison with FEM // Intern. Journal of Eng. Sci. Technol. 2014. N 17. P. 158–164.
31. *Matrosov A. V.* A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures // 2014 Intern. Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014. Proceedings. St Petersburg. 2014. P. 104–105. N 6893305.
32. *Matrosov A. V., Shirunov G. N.* Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate // 2014 Intern. Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014. Proceedings. St Petersburg. 2014. P. 96. N 6893300.
33. *Goloskokov D. P., Matrosov A. V.* Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // 2015 Intern. Conference on “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. St Petersburg: Izdatel'skii Dom Fedorovoi G. V., 2015. P. 382–385. N 7342169.
34. *Matrosov A. V.* A superposition method in analysis of plane construction // 2015 Intern. Conference on “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. St Petersburg: Izdatel'skii Dom Fedorovoi G. V., 2015. P. 414–416. N 7342156.
35. *Olodo E. T., Adanhounme V., Hounkonnou M. N.* Exact solution of the harmonic problem for a rectangular plate in flat deformation by the method of initial functions // Intern. Journal of Appl. Mech. Eng. 2017. Vol. 22. N 2. P. 349–361.
36. *Matrosov A. V., Shirunov G. N.* Analyzing thick layered plates under their own weight by the method of initial functions // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 31. N 1–2. P. 36–39.
37. *Asutkar P., Shinde S. B., Patel R.* Study on the behaviour of rubber aggregates concrete beams using analytical approach // Intern. Journal of Eng. Sci. Technol. 2017. N 20. P. 151–159.
38. *Goloskokov D. P., Matrosov A. V.* Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 36. N 1. P. 137–141.
39. *Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G.* On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69. P. 121.
40. *Goloskokov D. P., Matrosov A. V.* Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // AIP Conference Proceedings. American Institute of Physics Publ. 2018. N 070012.
41. *Owczarek S., Owczarek M.* Heat transport analysis in rectangular shields using the Laplace and Poisson equations // Energies. 2020. Vol. 13. P. 1714.
42. *Matrosov A. V., Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P.* Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71. N 1. P. 24.
43. *Lamé G.* Leçon sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris: Bachelier, 1852. 335 p.
44. *Matrosov A. V.* Computational peculiarities of the method of initial functions // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2019. P. 37–51.

Статья поступила в редакцию 8 марта 2022 г.

Статья принята к печати 21 июня 2022 г.

Контактная информация:

Алцыбеев Глеб Олегович — магистр математики; gleb.alcybeev@gmail.com

Голоскоков Дмитрий Петрович — д-р техн. наук, проф.; dpg1954@mail.ru

Матросов Александр Васильевич — д-р физ.-мат. наук, доц.; avmatrosov@mail.ru

The superposition method in the problem of bending of a thin isotropic plate clamped along the contour

G. O. Alcybeev¹, D. P. Goloskokov², A. V. Matrosov¹

¹ St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

² St Petersburg Bonch-Bruевич State University of Telecommunications, 22, pr. Bol'shevikov, St Petersburg, 193232, Russian Federation

For citation: Alcybeev G. O., Goloskokov D. P., Matrosov A. V. The superposition method in the problem of bending of a thin isotropic plate clamped along the contour. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 3, pp. 347–364. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.305> (In Russian)

In this work, the general solution of the differential equation for the bending of a thin isotropic plate under the action of a normal load applied to its plane is constructed by the superposition method. The solutions obtained by the method of initial functions in the form of trigonometric series are taken as two solutions, each of which allows satisfying the boundary conditions on two opposite sides of the plate. Two ways of satisfying the boundary conditions of a clamped plate are studied: the method of expansion into trigonometric Fourier series and the collocation method. It is shown that both methods give the same results and sufficiently fast convergence of the solution at all points of the plate except for small neighborhoods of the corner points. The constructed solution made it possible to study the behavior of the shear force in the corner points. Computational experiments have shown that when keeping 390 terms in the trigonometric series of the solution, the shear force is close to zero, but not identically equal.

Keywords: isotropic plate, bending of a thin plate, clamped plate, method of initial functions, MIF, computer algebra, Maple.

References

1. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. 2nd ed. New York, McGraw-Hill Publ., 1987, 580 p. (Rus. ed.: Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki*. Moscow, Nauka Publ., 1966, 636 p.)
2. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.*, 2003, vol. 56, no. 1, pp. 33–85.
3. Meleshko V. V. Bending of an elastic rectangular clamped plate: exact versus 'engineering' solutions. *Journal of Elasticity*, 1997, vol. 48, no. 1, pp. 1–50.
4. Ceribasi S., Altay G., Cengiz Dokmeci M. Static analysis of superelliptical clamped plates by Galerkin's method. *Thin-Walled Structures*, 2008, vol. 46, no. 2, pp. 122–127.
5. Khan Y., Tiwari P., Ali R. Application of variational methods to a rectangular clamped plate problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 63, no. 4, pp. 862–869.
6. Altunsaray E., Bayer I. Deflection and free vibration of symmetrically laminated quasi-isotropic thin rectangular plates for different boundary conditions. *Ocean Eng.*, 2013, vol. 57, pp. 197–222.
7. Ceribasi S., Altay G. Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, vol. 319, no. 1–2, pp. 668–680.
8. Altunsaray E. Static deflections of symmetrically laminated quasi-isotropic super-elliptical thin plates. *Ocean Eng.*, 2017, vol. 141, pp. 337–350.
9. Nwoji C. U., Onah H. N., Mama B. O., Ike C. C. Ritz variational method for bending of rectangular kirchhoff plate under transverse hydrostatic load distribution. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 2018, vol. 5, no. 1, pp. 1–10.
10. Aginam C. H., Chidolue C. A., Ezeagu C. A. Application of direct variational method in the analysis of isotropic thin rectangular plates. *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2012, vol. 7, no. 9, pp. 1128–1138.
11. Festus O., Okeke E. T., John W. Strain-displacement expressions and their effect on the deflection and strength of plate. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems*, 2020, vol. 5, no. 5, pp. 401–413.

12. Wang X., Yuan Z. Buckling analysis of isotropic skew plates under general in-plane loads by the modified differential quadrature method. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 56, pp. 83–95.
13. Ike C. C., Onyia M. E., Rowland-Lato E. O. Generalized integral transform method for bending and buckling analysis of rectangular thin plate with two opposite edges simply supported and other edges clamped. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems*, 2021, vol. 6, no. 1, pp. 283–296.
14. Imrak E., Fetvacı C. The deflection solution of a clamped rectangular thin plate carrying uniformly load. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2009, vol. 37, no. 4, pp. 462–474.
15. Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A. Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate. *Journal of Engineering Mathematics*, 2001, vol. 40, pp. 377–398.
16. Matrosov A. V., Suratov V. A. Stress-strain state in the corner points of a clamped plate under uniformly distributed normal load. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 36, no. 1, pp. 124–146.
17. Matrosov A. V. An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2022, vol. 73, no. 2, p. 74.
18. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 54, pp. 2647–2660.
19. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Metod nachal'nykh funktsii v raschete izgiba zashchemlennoi po konturu tonkoi ortotropnoi plastinki [Method of initial functions in analyses of the bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 330–344. <https://doi.org/10.21638.11701/spbu20.2021.402> (In Russian)
20. Lur'e A. I. *Three dimensional problems of theory of elasticity*. New York, Wiley Publ., 1964, 495 p. (Rus. ed.: Lur'e A. I. *Prostranstvenny'e zadachi teorii uprugosti*. Moscow, Gostechisdat Publ., 1955, 491 p.)
21. Vlasov V. Z. Metod nachal'nykh funktsii v zadachakh teorii uprugosti [Method of initial functions in problems of the theory of elasticity]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. OTN*, 1955, no. 7, pp. 49–69. (In Russian)
22. Vlasov V. Z. Method of initial functions in problems of theory of thick plates and shells. *Proceedings of 9th Intern. Congress Appl. Mech.*, 1957, no. 6, pp. 321–330.
23. Maliev A. S. K vyboru funktsii obshchego resheniia v zadache ravnovesiia izotropnogo uprugogo tela [On the choice of functions in general solutions of the problem of the equilibrium of an isotropic elastic body]. *Sbornik nauch. trudov Leningrad Elektrotechnical Institute*, 1952, iss. 4, pp. 180–244 (In Russian)
24. Sundara Raja Iyengar K. T., Pandya S. K. Analysis of orthotropic rectangular thick plates. *Fibre Sci. Technol.*, 1983, vol. 18, no. 1, pp. 19–36.
25. Galileev S. M., Matrosov A. V. Method of initial functions in the computation of sandwich plates. *Intern. Appl. Mech.*, 1995, vol. 31, no. 6, pp. 469–476.
26. Kovalenko M. D. The lagrange expansions and nontrivial null-representations in terms of homogeneous solutions. *Dokl. Physics*, 1997, vol. 42, no. 2, pp. 90–92.
27. Dubey S. K. Analysis of homogeneous orthotropic deep beams. *Journal of Struct. Eng. (Madras)*, 2005, vol. 32, no. 2, pp. 109–116.
28. Patel R., Dubey S. K., Pathak K. K. Analysis of RC brick filled composite beams using MIF. *Procedia Eng.*, 2013, no. 51, pp. 30–34.
29. Galileev S. M., Tabakov P. Y. Mathematical foundations of the method of initial functions for the application to anisotropic plates. *2nd Intern. Conference on Mech. Nanotechnol. Cryog. Eng.*, 2013, pp. 59–63.
30. Patel R., Dubey S. K., Pathak K. K. Analysis of infilled beams using method of initial functions and comparison with FEM. *Intern. Journal of Eng. Sci. Technol.*, 2014, no. 17, pp. 158–164.
31. Matrosov A. V. A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures. *2014 Intern. Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014, Proceedings*. St Petersburg, 2014, pp. 104–105, no. 6893305.
32. Matrosov A. V., Shirunov G. N. Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate. *2014 Intern. Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014, Proceedings*. St Petersburg, 2014, p. 96, no. 6893300.
33. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *2015 Intern. Conference on "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov, SCP 2015, Proceedings*. St Petersburg, 'Dom Fedorovoi G. V.' Press, 2015, pp. 382–385, no. 7342169.
34. Matrosov A. V. A superposition method in analysis of plane construction. *2015 Intern. Conference on "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov, SCP 2015, Proceedings*. St Petersburg, 'Dom Fedorovoi G. V.' Press, 2015, pp. 414–416, no. 7342156.
35. Olodo E. T., Adanhoume V., Houkonnou M. N. Exact solution of the harmonic problem for a rectangular plate in flat deformation by the method of initial functions. *Intern. Journal of Appl. Mech. Eng.*, 2017, vol. 22, no. 2, pp. 349–361.

36. Matrosov A. V., Shirunov G. N. Analyzing thick layered plates under their own weight by the method of initial functions. *Materials Physics and Mechanics*, 2017, vol. 31, no. 1–2, pp. 36–39.
37. Asutkar P., Shinde S. B., Patel R. Study on the behaviour of rubber aggregates concrete beams using analytical approach. *Intern. Journal of Eng. Sci. Technol.*, 2017, no. 20, pp. 151–159.
38. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 36, no. 1, pp. 137–141.
39. Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2018, vol. 69, p. 121.
40. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics Publ., 2018, no. 070012.
41. Owczarek S., Owczarek M. Heat transport analysis in rectangular shields using the Laplace and Poisson equations. *Energies*, 2020, vol. 13, p. 1714.
42. Matrosov A. V., Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2020, vol. 71, no. 1, p. 24.
43. Lamé G. *Leçon sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* [*Lectures on the mathematical theory of elasticity of solids*]. Paris, Bachelier Publ., 1852, 335 p.
44. Matrosov A. V. Computational peculiarities of the method of initial functions. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2019, pp. 37–51.

Received: March 8, 2022.

Accepted: June 21, 2022.

A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

Gleb O. Alcybeev — Master of Mathematics; gleb.alcybeev@gmail.com

Dmitriy P. Goloskokov — Dr. Sci. in Engineering Sciences, Professor; dpg1954d@mail.ru

Alexander V. Matrosov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor; avmatrosov@mail.ru