

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2020–2021 гг.

Санкт-Петербург
«Наука»
2021

ББК 22.25

Т78

Редакционная коллегия

канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),

канд. физ.-мат. наук, доц. *И. М. Аржинова* (отв. секретарь)

(ВИ(ИТ) ВА МТО),

PhD, Sr. lecturer *Е. И. Атрощенко* (Ун-т Нового Южного Уэльса, Австралия),

д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),

д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН *А. К. Беляев* (ИПМаш РАН),

канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. Б. Воронкова* (СПбГУ),

д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),

д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),

д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),

д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помыткин* (СПб ГУАП),

д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Ун-т Ольборга, Дания),

д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ),

канд. физ.-мат. наук *Д. В. Франц* (Фонд «УниШанс»)

Т78

Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2020–2021 гг. – СПб.: Наука, 2021. – 119 с.

ISSN 2218-7421

ISBN 978-5-02-040494-6

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Издание адресовано исследователям, специализирующимся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды. Семинар проводится математико-механическим факультетом Санкт-Петербургского государственного университета совместно с Институтом проблем машиноведения РАН.

ISSN 2218-7421

ISBN 978-5-02-040494-6

ББК 22.25

© Институт проблем
машиноведения
РАН, 2021

© Редакционно-издательское
оформление. Издательство
«Наука», 2021

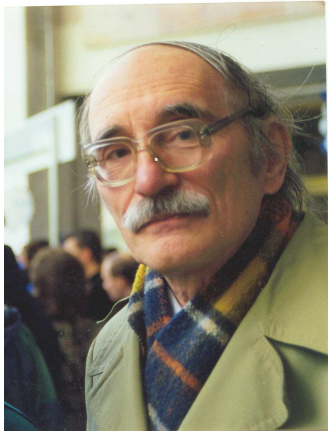


Некоммерческая организация «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс» при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС»



МАВИС
МАШИНОВЕДЕНИЕ

Памяти Петра Евгеньевича Товстика



30 декабря 2020 года на 86-м году жизни скончался доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат Государственной премии Российской Федерации и премии имени М. А. Лаврентьева Российской академии наук, почетный профессор СПбГУ Петр Евгеньевич Товстик.

Петр Евгеньевич был не только выдающимся ученым в области колебаний и устойчивости тонких оболочек и пластин, занимаясь разработкой новых асимптотических методов и решением разнообразных прикладных

задач механики, но и замечательным педагогом.

С первых дней существования семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» Петр Евгеньевич был его активным членом, докладчиком, рецензентом, членом редакционной коллегии и учителем доброй половины участников и руководителей семинара.

Мнение Петра Евгеньевича о работах, представленных на семинаре, всегда было очень глубоким и важным. Меньше чем за месяц до своей кончины он рецензировал одну из статей, публикуемых в этом сборнике, переживал, когда ему показалось, что он нашел ошибку у авторов, и охотно признал, что ошибки нет, когда в переписке с авторами получил разъяснения. Обсуждение статьи оказалось весьма полезным, а иллюстрации, которые предложил сделать Петр Евгеньевич, полностью прояснили сложный вопрос.

С нами навсегда останутся светлые воспоминания о прекрасном учителе, выдающемся ученом и замечательном человеке.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ ОПОР ИЗ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЭФФЕКТОМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ (ЭФФЕКТОМ SD)

Г. В. ПАВИЛАЙНЕН

Применение в гидротехнических сооружениях новых конструкционных материалов требует создания новых математических моделей, учитывающих свойства материалов, а также характер и уровень нагрузок на конструкции. Развитие и освоение нефтяных и газовых месторождений на шельфах Карского и Охотского морей приводит к необходимости дополнительных исследований влияния льда и низких температур на напряженно-деформированное состояние гидротехнических сооружений. Особо следует отметить, что конструкции работают на предельно допустимых нагрузках, когда возможен переход в упругопластическую стадию деформирования, что приводит к необходимости учета специфических физико-механических свойств используемых материалов, например пластической анизотропии (эффект SD).

Предлагаемые в работе новые модели учитывают как отсутствие симметрии в развитии напряжений и пластических деформаций и смещение нейтральной оси при изгибе, так и влияние гидростатического давления окружающей опоры жидкости и вес самой опоры. В результате исследования для некоторых вариантов удается получить аналитические решения, которые могут служить для верификации численных расчетов с использованием современных пакетов ANSYS и COMSOL. Для иллюстрации влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние вертикальных опор при изгибе приводятся примеры численного анализа для конструкций из стали А40Х.

1. ВВЕДЕНИЕ

Строительство морских буровых платформ и других конструкций на шельфе Карского и Охотского морей является актуальной технической и научной задачей. Уточнение известных теорий и рас-

Доклад на семинаре 29 сентября 2020 г.

© Г. В. Павилайнен, 2020

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00208), а также при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ.

четов становится важным фактором обеспечения безопасности прибрежного и шельфового строительства. На рис. 1 показана типичная конструкция буровых платформ, установленных в Мексиканском заливе и в Норвежском море, при создании которых использованы многочисленные вертикальные балочные опоры и горизонтальные несущие перекрытия.



Рис. 1. Примеры буровых платформ с вертикальными опорами.

На конференции в 2001 году К. Н. Шхинеком с коллегами был представлен перечень основных факторов, влияющих на величину ледовой нагрузки. Эти факторы, в частности физико-механические, прочностные, температурные, морфометрические, были учтены в стандарте ISO 19906. Авторы работ по исследованию льда [1–3] фиксируют огромные величины давления ледяных полей и особенно торосов с учетом температуры, возраста льда и времени года.

Примерами конструктивных ошибок при строительстве и эксплуатации являются аварии маяков [4], установленных в Финском и Ботническом заливах, которые либо разрушились, либо потеряли устойчивость под действием ледовых нагрузок (рис. 2).

Событием, предшествовавшим активному началу исследований автором проблем нелинейного изгиба стальных вертикальных опор, стала авария створных знаков в Финском заливе. 6 марта 2013 года произошло разрушение переднего и заднего створных знаков на акватории Морского порта Усть-Луга (рис. 3). Как показали расчеты, если бы армирующие элементы были изготовлены из стальных



Рис. 2. Аварии маяков Ботнического залива. *Слева направо:* маяк Тайнио, маяк Бьернклакен, маяк Кеми-1.

балок достаточной толщины, то аварии можно было избежать.

В работах [5,6] сделана попытка аналитического решения задачи изгиба вертикальных опор гидросооружений с учетом влияния ледового давления, гидростатического бокового обжатия опор и возможности нелинейной деформации при изгибе с учетом пластической анизотропии материала конструкции.

Физико-механические свойства льда согласно документации ISO 19906 принимаются следующими. Модуль упругости льда в диапазоне 1–6 ГПа изменяется в зависимости от температуры льда, при изменении температуры льда от -2 до -20°C значение модуля упругости увеличивается примерно в 2 раза. На величину модуля упругости оказывают влияние и другие параметры, в частности соленость воды, скорость формирования льда, наличие примесей. Значение модуля упругости морского льда может иметь достаточно широкий диапазон значений, а именно 1–10 ГПа. Коэффициент Пуассона для льда в среднем равен $0,33 \pm 0,03$ и зависит от температуры и скорости формирования льда, а также от его возраста для многолетних льдов.

Чрезвычайно важной характеристикой является предел прочности льда. Прочность ледовых образцов на одноосное сжатие достаточно хорошо изучена и во многих исследованиях, например,



Рис. 3. Авария опор створного знака, Финский залив, 2013 г. Фото С. М. Ковалева.

в [6] зафиксирована анизотропия льда при двухосном сжатии (см. диаграммы на рис. 4).

Кривые условия текучести (рис. 4, *а*) определяют пластические свойства льда в плоскости ледового поля при ограничении деформации по оси Z и без такого ограничения. Кривые (диаграмма *б*) показывают существенную разницу в пределах текучести при растяжении для образцов льда, вырезанных в плоскости ледяного поля в направлениях X и Y при ограничении деформации по направлениям Y и X соответственно. Это означает значительную анизотропию льда в плоскости ледового поля. Сравнение кривых на диаграмме (рис. 4, *в*) показывает, что в случае двухосного сжатия лёд демонстрирует свойство пластической анизотропии, когда пределы текучести при одноосном сжатии и при двухосном сжатии существенно различаются, причем во втором случае значительно больше. Аналогичный эффект наблюдается в металлических сплавах и носит название эффекта SD (strength different).

В условиях арктического шельфа статическое воздействие льда, имеющее значение главным образом для сооружений большой про-

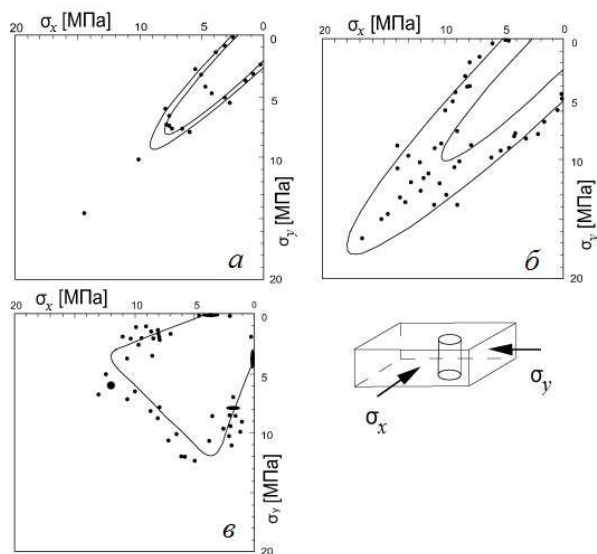


Рис. 4. Результаты исследований пластической анизотропии льда. Эксперименты Тимко и Фредеркинга.

тяженности, несущественно. Наиболее опасно воздействие от движущегося ледяного образования, особенно для отдельно стоящих сооружений. При этом значительным может быть изгиб несущих опор при подходе крупного ледяного поля. Как правило, движение ледяного поля является медленным (1–5 см/ч) и нагрузку, приходящуюся на опорные сооружения, можно считать статической. Наиболее опасным является вариант подхода к сооружению айсберга при большом течении, который моделируется как удар и в данной работе не рассматривается.

Давление айсберга при медленном течении может моделироваться как вариант статического изгиба постоянным моментом (чистый изгиб), а давление ледяного поля или массива битого льда следует моделировать сосредоточенной горизонтальной постоянной силой. Исходя из этих предположений, в дальнейшем будем рассматривать две модели упругопластического изгиба вертикальных

балок — чистый изгиб и боковую сосредоточенную постоянную по величине и направлению нагрузку.

В данном исследовании рассматривается упругопластический изгиб вертикальной металлической опоры, жестко закрепленной на нижнем конце и нагруженной изгибающим моментом или горизонтальной сосредоточенной постоянной нагрузкой на свободном конце. Математическая модель позволяет оценить величины допустимого бокового давления при изгибе, провести расчёты с учетом перехода конструкции в упругопластическую стадию деформирования, получить аналитическое решение при учёте пластической анизотропии материала, определить предельные нагрузки появления пластичности и критические нагрузки образования «пластического шарнира», что означает потерю устойчивости и несущей способности конструкции. Отдельно рассматривается влияние веса и гидростатического давления жидкости при погружении опоры в воду.

Согласно С. П. Тимошенко [7], в задачах изгиба такую конструкцию следует называть балкой или брусом, поскольку при любом изгибе возникают сдвиги и задача рассматривается методами теории упругости. В данной работе деформация сдвига учитываться не будет, поэтому конструкция рассматривается как одномерный стержень.

Основные предположения и гипотезы при исследовании упругопластического изгиба горизонтальных и вертикальных SD балок изложены в работах [8,9], и данная работа является их продолжением.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим призматический брус, прямоугольного сечения толщиной $2h$, шириной b и длиной L , нагруженный на свободном конце постоянным моментом M , который вызывает изгиб бруса в плоскости XOZ . Пусть брус находится в жидкости и на его стенки действует гидростатическое давление $q = \gamma(L - x)$, где γ — удельный вес жидкости, x — вертикальная координата, отсчитываемая от нейтральной оси вниз вертикальной балки. Предположим, что

балка имеет удельный вес γ_1 , нижний конец балки жестко заделан, верхний — свободен. При воздействии на балку значительного изгибающего момента часть её сечения переходит в состояние нелинейного деформирования и образуются области пластичности. На рис. 5 представлена схема рассматриваемой задачи, области балки, которые находятся в пластическом состоянии, заштрихованы.

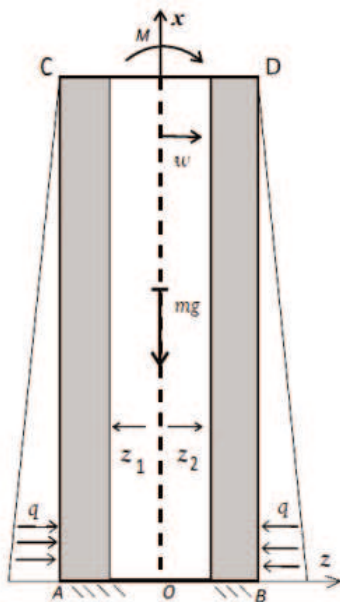


Рис. 5. Схема нагружения постоянным моментом тяжёлой вертикальной балки, погруженной в жидкость.

Для описания эффекта SD введем параметр пластической анизотропии d как отношение предела текучести при одноосном сжатии σ_s к пределу текучести при одноосном растяжении σ_t :

$$d = \frac{\sigma_s}{\sigma_t}.$$

В дальнейшем будем считать, что предел текучести при рас-

тяжении меньше предела текучести при сжатии, т. е. $d \geq 1$. В упругой стадии деформирования считаем материал изотропным и равнопрочным, т. е. модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν постоянны и не меняются при растяжении и сжатии.

Для описания эффекта влияния собственного веса балки на процесс появления и развития пластичности при изгибе введем модифицированный параметр пластической анизотропии d_1 :

$$d_1 = \frac{\sigma_s - \gamma_1 L}{\sigma_t + \gamma_1 L},$$

а для описания воздействия гидростатического обжатия на упруго-пластический изгиб — параметр d_2 :

$$d_2 = \frac{\sigma_s + \gamma L}{\sigma_t - \gamma L}.$$

Считаем в дальнейшем, что балка находится в жидкости по всей длине.

Наконец, введем параметр d_3 , который охватывает все три эффекта — SD, вес балки и гидростатику:

$$d_3 = \frac{\sigma_s - \gamma_2 L}{\sigma_t + \gamma_2 L}, \quad \gamma_2 = \gamma_1 - (1 - \nu)\gamma/\nu.$$

3. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ВЕРТИКАЛЬНОЙ БАЛКИ ПОСТОЯННЫМ МОМЕНТОМ

Существенной особенностью задачи является тот факт, что предположение об эффекте SD балки приводит к нарушению симметрии при появлении пластических деформаций. При растяжении предел текучести по напряжениям ниже, чем при сжатии, следовательно, пластические деформации в области растяжения появляются при меньшем значении изгибающего момента, чем при сжатии, и нейтральная ось смещается по сравнению со средней геометрической. Поэтому введем смещение z_0 и величины z_1, z_2 , которые будут характеризовать расстояния от нейтральной оси до границы раздела упругой и пластической частей балки в областях растяжения и

сжатия. Продольное напряжение при чистом изгибе не зависит от x , поэтому толщина пластических слоев постоянна по длине балки. Если мы будем рассматривать случай с учетом веса, то все введенные выше величины становятся функциями продольной координаты, а интегралы при нахождении момента внутренних сил получают переменные пределы интегрирования.

Рассмотрим сначала случай без учёта веса балки и влияния жидкости. Следуя [10], условие чистого изгиба дает нам возможность найти компоненту продольного напряжения σ_x в упругой стадии согласно закону Гука, а остальными компонентами напряжений мы можем пренебречь:

$$\sigma_x = \frac{M}{EJ}z, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0.$$

В качестве E используем упругий модуль в продольном направлении, напряжениями и деформациями сдвига пренебрегаем, момент инерции сечения равен $J = \frac{2}{3}bh^3$.

В пластической стадии деформирования следуем теории идеальной пластичности без упрочнения ($\sigma_t = \text{const}$, $\sigma_s = \text{const}$) и используем условие пластической несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ — деформации растяжения-сжатия.

Пусть M_t — значение изгибающего момента M при появлении пластических деформаций на боковой поверхности балки в зоне растяжения (согласно рис. 5 — слева), M_* — значение промежуточного момента при появлении пластических деформаций на правой боковой поверхности балки, т. е. в зоне сжатия, и M_k — критическое значение изгибающего момента, при котором вся балка перестает сопротивляться изгибу и полностью переходит в пластическое состояние.

Процесс появления и развития пластичности при чистом изгибе пластически анизотропного бруса происходит следующим образом: при росте изгибающего момента до значения M_t брус деформируется упруго, затем появляется пластический слой на левой поверхности бруса и при $M_t \leq M \leq M_*$ этот слой увеличивается по

толщине, затем появляется слой пластичности на правой поверхности и оба слоя развиваются по толщине при $M_* \leq M \leq M_k$. Процесс заканчивается полным исчерпанием несущей способности балки при переходе её полностью в пластическое состояние, в этот момент $M = M_k, z_1 + z_2 = 0$ (см. рис. 5).

При развитой пластичности ($M \geq M_*$) распределение продольного напряжения по толщине балки в любом сечении x можно представить в виде, предложенном А. Надаи [10]. Без учета влияния веса и гидростатического обжатия

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_t, & -(h + z_0) \leq z \leq -z_1, \\ E\varepsilon_x, & -z_1 \leq z \leq z_2, \\ -\sigma_s, & z_2 \leq z \leq h - z_0, \end{cases}$$

а при их учете мы следуем теории предварительно напряженного бруса [7], дающей напряжения в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + E\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = \gamma(L - x), \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \quad \sigma_0 = -\gamma_2(L - x). \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку $\gamma_1 \geq \gamma$, то предварительное напряжение балки является напряжением сжатия.

Соотношения Надаи следует принять в виде

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_t - \sigma_0, & -(h + z_0) \leq z \leq -z_1, \\ E\varepsilon_x - \sigma_0, & -z_1 \leq z \leq 0, \\ E\varepsilon_x + \sigma_0, & 0 \leq z \leq z_2, \\ -\sigma_s + \sigma_0, & z_2 \leq z \leq h - z_0. \end{cases}$$

Отметим, что в этом случае нахождение нейтральной оси балки становится отдельной задачей.

Равновесие элемента поперечного сечения означает равенство площадей эпюр слева и справа от нейтральной оси (рис. 6). Рассмотрим это равенство для случая ν .

Запишем это равенство, используя новые обозначения a_1, a_2 , характеризующие толщины пластических слоев в зонах растяжения и сжатия соответственно:

$$(2h - a_2 - z_1 - z_2)\sigma_t + 0,5z_1\sigma_t = a_2\sigma_s + 0,5z_2\sigma_s.$$

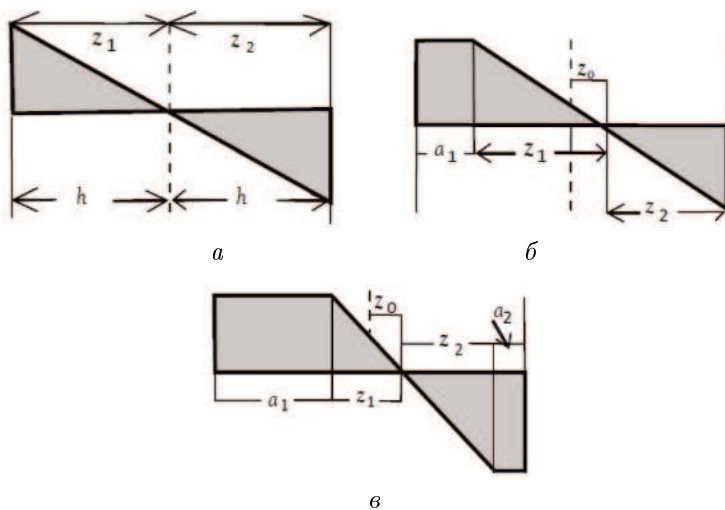


Рис. 6. Эпюры продольного напряжения в разных случаях пластических областей: *a* — $M \leq M_t$, *б* — $M_t < M \leq M_*$, *в* — $M_* < M \leq M_k$.

Из гипотезы ненадавливания слоев следует, что

$$z_1 + a_1 + z_2 + a_2 = 2h.$$

Из подобия треугольников на эпюре имеем $d = z_2/z_1$.

Выразим из предыдущих равенств a_1, a_2 и найдём зависимость толщин пластических областей от величины z_1 :

$$a_2 = \frac{2h}{1+d} - \frac{z_1(1+d)}{2}, \quad a_1 = \frac{2hd}{1+d} - \frac{z_1(1+d)}{2}. \quad (2)$$

Зависимость z_0 от z_1 в случае двух пластических слоев также является линейной. При одном пластическом слое это не так, данная зависимость будет найдена дальше.

Момент начала образования пластической области в зоне растяжения определяется при $z_1 = z_2 = h, E\varepsilon_x = \sigma_t$. Имеем

$$M_t = \frac{2}{3}bh^2\sigma_t. \quad (3)$$

Аналогично можно определить критический момент, когда вся пластина становится пластической. Это происходит при $z_1 = z_2 = 0$. Тогда критический момент равен

$$M_k = \frac{2bdh^2\sigma_t}{d+1}. \quad (4)$$

Найдем промежуточный момент M_* , при котором возникает пластичность в зоне сжатия, а в зоне растяжения она уже есть. Это происходит при

$$z_2 = h - z_0, z_0 = \frac{h(1-d)^2}{(1+d)^2}, z_1 = \frac{4h}{(1+d)^2}. \quad (5)$$

Промежуточный момент M_* равен

$$M_* = \frac{2(3d-1)}{3(d+1)}bh^2\sigma_t \quad (6)$$

или

$$M_* = \frac{(3d-1)}{d+1}M_t.$$

В случае учета веса и гидростатического обжатия в формулах для моментов надо заменить параметр d на d_3 , а при нахождении M_t использовать вместо σ_t выражение $\sigma_t + \sigma_0$.

Найдем зависимость между толщинами пластических слоев и смещением нейтральной оси. Смещение нейтральной оси z_0 связано с толщиной пластического слоя при сжатии равенством

$$h - (a_2 + z_2) = z_0. \quad (7)$$

Пока $M \leq M_t$, смещения нейтральной оси нет и $z_0 = 0$. В диапазоне $M_t \leq M \leq M_*$ зависимость z_0 от z_1 нелинейна:

$$z_0 = (\sqrt{h} - \sqrt{z_1})^2. \quad (8)$$

При $M \geq M_*$ мы имеем линейную зависимость z_0 от z_1 :

$$z_0 = \frac{h(d-1)}{d+1} - \frac{z_1(d-1)}{2}. \quad (9)$$

Воспользуемся условием непрерывности напряжения σ_x на границе упругой и пластических областей $z = z_1$ при растяжении и $z = z_2$ при сжатии

$$\sigma_t = E\varepsilon_x = Ez_1\kappa, \sigma_s = E\varepsilon_x = Ez_2\kappa \quad (10)$$

и выразим z_1 и z_2 :

$$z_1 = \frac{\sigma_t}{E\kappa}, z_2 = \frac{\sigma_s}{E\kappa}. \quad (11)$$

Здесь κ — кривизна нейтральной оси балки.

Запишем момент внутренних сил сперва без учета веса и обжатия, когда в балке имеются пластические области и в зоне растяжения, и в зоне сжатия:

$$M_i = \frac{b\sigma_t}{2} ((h + z_0)^2 - z_1^2) + \frac{b\sigma_s}{2} ((h - z_0)^2 - z_2^2) + \frac{bE}{3}\kappa (z_1^3 + z_2^3). \quad (12)$$

Первое слагаемое в этом выражении относится к пластической области в зоне растяжения, второе — к пластической области в зоне сжатия, а третье — к упругой вставке, в которой продольная деформация является линейной функцией по сечению.

Учет веса и обжатия меняет момент внутренних сил на

$$M_i = \frac{b(\sigma_t - \sigma_0)}{2} ((h + z_0)^2 - z_1^2) + \frac{b(\sigma_s + \sigma_0)}{2} ((h - z_0)^2 - z_2^2) + \frac{bE}{3}\kappa (z_1^3 + z_2^3). \quad (13)$$

Строго говоря, в выражении (13) должен быть дополнительный член, связанный с начальной продольной деформацией сжатия

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E},$$

но, поскольку принято условие, что длина нейтральной оси при изгибе не меняется, этой деформацией следует пренебречь. Что касается начальных напряжений, то они существенно влияют на величину момента появления пластичности и ими пренебрегать нельзя.

Изгибающий момент внешних сил при учёте веса записывается в виде

$$M_v = M + 4wbh(L - x)\gamma_1, \quad (14)$$

где $w = w(x)$ — функция прогиба балки. Заметим, что гидростатическое обжатие балки не создает дополнительного изгибающего момента.

Приравнявая (13) и (14) для внутреннего и внешнего момента и используя выражения (11), заменив в них σ_t на $\sigma_t - \sigma_0$, а σ_s на $\sigma_s + \sigma_0$, получаем уравнение относительно кривизны κ . Это уравнение будет иметь различный вид для разных диапазонов воздействующего момента (см. рис. 6, а, б, в). Найдем в каждом из них кривизну:

при $M \leq M_t$

$$\kappa = \frac{M}{EI},$$

при $M_t < M \leq M_*$

$$\kappa = \left(\frac{2M_t}{M_k(d+1)d^{-1} - M} \right)^2 \cdot \frac{\sigma_t - (L-x)\gamma_2}{Eh},$$

при $M_* < M \leq M_k$

$$\kappa = \left(\frac{2M_t d}{M_k(d+1) - Md} \right)^{\frac{1}{2}} (1+d)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sigma_t - (L-x)\gamma_2}{4Eh}.$$

В этих уравнениях следует положить $d = d_3$. Поскольку аналитически проинтегрировать можно только первое уравнение, далее рассматривается упрощенная задача без учёта веса и обжатия.

Используем соотношение между кривизной оси балки и текущим значением прогиба

$$\kappa = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (15)$$

подставив его в уравнения равновесия. Получим три дифференциальных уравнения второго порядка для трех диапазонов значений момента:

в случае а при $M \leq M_t$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI},$$

в случае б при $M_t \leq M \leq M_*$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left(\frac{2dM_t}{M_k(d+1) - dM} \right)^2 \cdot \frac{\sigma_t}{Eh},$$

в случае в при $M_* \leq M \leq M_k$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left(\frac{M_t(1+d)^3}{M_k - M} \right)^{1/2} \cdot \frac{\sigma_t}{4Eh}.$$

Все эти уравнения легко интегрируются, и общий вид решения для прогиба запишется в виде

$$w(x) = A \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2,$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Для различных интервалов значений M имеем соответственно

$$\begin{aligned} A &= \frac{M}{EI}, \\ A &= \left(\frac{2dM_t}{M_k(d+1) - dM} \right)^2 \cdot \frac{\sigma_t}{Eh}, \\ A &= \left(\frac{M_t(1+d)^3}{M_k - M} \right)^{1/2} \cdot \frac{\sigma_t}{4Eh}. \end{aligned}$$

Использование граничного условия жесткой заделки при $x = 0$ позволяет определить константы интегрирования $c_1 = c_2 = 0$.

В табл. 1 для случая $M \geq M_*$ приведены значения прогиба на конце балки w_L в зависимости от безразмерного параметра пластической анизотропии d и изгибающего момента M . Балка, изготовленная из материала А40Х, имеет размеры $0,1 \times 0,2 \times 10$ (в метрах).

Анализ таблицы позволяет сделать вывод о существенном влиянии пластической анизотропии на снижение прогиба на свободном конце. Однако следует заметить, что прогиб не является малым, а значит, предположение о применении линейной теории упругого изгиба нуждается в дополнительном исследовании.

Как уже было сказано, влияние веса сводится к появлению дополнительного слагаемого в соотношении для внешнего изгибающего момента (14). Оценим вклад каждого слагаемого в этом соотношении. Если принять значение момента M равным моменту

Таблица 1. Значения прогиба w_L в зависимости от величины изгибающего момента M и параметра пластической анизотропии d

$M, \text{Нм} \cdot 10^5$	d					
	1,0	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3
	$w_L, \text{м}$					
1,013	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77
1,1	1,97	1,95	1,94	1,94	1,94	1,94
1,2	2,25	2,21	2,19	2,18	2,13	2,12
1,3	2,72	2,61	2,54	2,49	2,46	2,44
1,50	3,68	3,33	3,13	2,99	2,89	2,83

появления пластичности M_t , а величину прогиба равной половине от максимальной при упругом изгибе, то в середине балки второе слагаемое в формуле (14) на два порядка меньше первого. Однако при рассмотрении балок большой длины, а длина вертикальных опор буровых гидротехнических платформ достигает 100 м, влияние веса существенно увеличивается.

Влияние собственного веса балки на появление пластичности можно учесть, если заменить параметр пластической анизотропии d на модифицированный параметр d_1 . Для совместного учета веса вертикальной опоры и гидростатического обжатия во всех соотношениях следует заменить параметр d на d_3 .

Следует сказать, что гидростатическое давление будет вызывать растяжение в направлении оси балки, поэтому влияние веса и влияние бокового гидростатического обжатия будут несколько компенсировать друг друга. Однако в связи с тем, что удельный вес стали в 8 раз больше удельного веса воды, влияние гидростатического обжатия будет менее существенно, чем влияние веса. В работах М. А. Ильгамова [11] рассматривался вопрос подкрепляющего эффекта гидростатического обжатия при исследовании устойчивости вертикального стержня в жидкости. Аналогичный эффект наблюдается и в рассматриваемом случае.

4. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ВАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Обратимся теперь к задаче об изгибе вертикальной опоры ледовым полем или массивом битого льда. Рассмотрим изгиб под действием боковой постоянной сосредоточенной силы P (рис. 7).

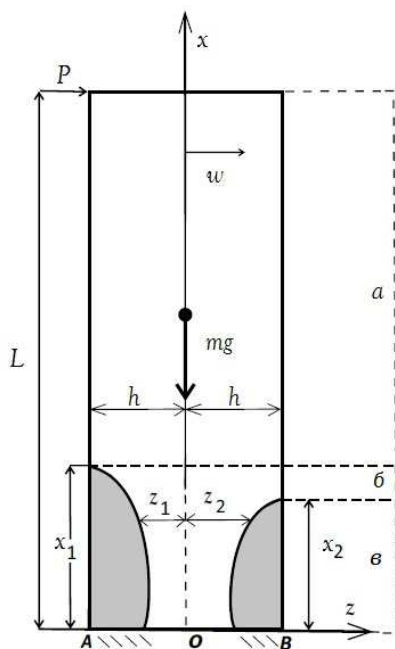


Рис. 7. Схема изгиба балки сосредоточенной силой P .

Существенное отличие данной задачи от рассмотренной выше заключается в принципиальном изменении формы и размеров пластических областей. На рис. 7 они заштрихованы. Переменные z_1 , z_2 , z_0 становятся функциями продольной координаты x . Кроме этого, вводятся ещё две переменные величины — длины пластических областей x_1 в зоне растяжения и x_2 в зоне сжатия. Отметим, что в отличие от предыдущего случая чистого изгиба с одинаковой эпо-

рой напряжений вдоль всей балки в случае изгиба силой момент является линейной функцией текущей продольной координаты x . При этом в различных сечениях балки одновременно существуют различные виды напряженно-деформированного состояния (случаи a , b , $в$ на рис. 7).

Заметим, что в рассматриваемом случае изгиба силой с учетом веса вертикальной опоры соотношения (2)–(9) остаются справедливыми, если заменить параметр d на параметр d_1 , а в соотношениях (10) и (11) σ_t на $\sigma_t + L\gamma_1$, а σ_s на $\sigma_s - L\gamma_1$.

Уравнение равновесия по аналогии с (12) и (14) в любом сечении x имеет вид:

$$P(L-x) + 4wbh(L-x)\gamma_1 = \frac{b(\sigma_t + L\gamma_1)}{2} ((h+z_0)^2 - z_1^2) + \frac{b(\sigma_s - L\gamma_1)}{2} ((h-z_0)^2 - z_2^2) + \frac{bE\kappa}{3} (z_1^3 + z_2^3). \quad (16)$$

Первое слагаемое в правой части (16) соответствует изгибающему моменту в пластической зоне при растяжении, второе – моменту в пластической зоне при сжатии, а третье слагаемое определяет момент в упругой части балки.

Нетрудно видеть, что все изгибающие моменты M_t, M_*, M_k , введенные выше соотношениями (3), (4) и (6), справедливы и в случае изгиба силой, но для учета веса в них надо заменить параметр d на параметр d_1 . Значения этих моментов могут быть выражены через соответствующие значения изгибающей нагрузки. В связи с тем что пластические области возникают в сечении $x = 0$ и выполнено граничное условие $w(0) = 0$, такие нагрузки находятся по формулам

$$P_t = \frac{M_t}{L}, \quad P_* = \frac{M_*}{L}, \quad P_k = \frac{M_k}{L}.$$

Здесь следует напомнить, что при нахождении M_t при учете веса следует заменить σ_t на $\sigma_t + \sigma_0$, где предварительное нагружение σ_0 определено в (1).

В табл. 2 приведены значения критического момента M_k для балки из стали марки А40Х без учета веса ($\gamma_1 = 0$) и при учете веса балки.

Таблица 2. Значения критического момента M_k без учета веса и при учете веса балки для разных значений параметра d_1

$\gamma_1, \text{Н/м}^3 \cdot 10^4$	d_1			
	1,0	1,1	1,2	1,3
	$M_k, \text{МПа м}^3$			
0	1,520	1,592	1,658	1,718
7,8	1,518	1,591	1,657	1,717

Можно сделать вывод о незначительном влиянии дополнительного изгибающего момента, связанного с весом, так как результаты различаются менее чем на 0,1 %. Однако этот вывод справедлив для балки длиной 10 м. Современные гидротехнические опорные сооружения могут достигать длины более 100 м, и влияние веса на изгиб таких опор становится гораздо существеннее.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБА БАЛКИ

Изгибающий момент внешних сил при учете веса равен

$$M_v = P(L - x) + 4wbh(L - x)\gamma_1. \quad (17)$$

Преобразуем соотношение (15) аналогично тому, как это сделано в разделе 3. Получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно прогиба. Это уравнение будет иметь различный вид для разных интервалов значений продольной координаты в зависимости от значения нагрузки P . Будем предполагать, что нагрузка такая, что в балке реализуется случай развитой пластичности с двумя областями вблизи заделки. Выразим в каждой из них кривизну:

в случае a при $x_1 \leq x \leq L$

$$\kappa = \frac{M}{EI},$$

в случае б при $x_2 \leq x \leq x_1$

$$\kappa = \left(\frac{2M_t d_1}{M_k(d_1 + 1) - M d_1} \right)^2 \cdot \frac{\sigma_t - (L - x)\gamma_1}{Eh},$$

в случае в при $0 \leq x \leq x_2$

$$\kappa = \left(\frac{2d_1 M_t (1 + d_1)^3}{M_k(d_1 + 1) - M d_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sigma_t - (L - x)\gamma_1}{4Eh}.$$

Для учета гидростатического обжатия надо использовать d_3 вместо d_1 , M в виде (17) и в вышеприведенных уравнениях заменить член $\sigma_t - (L - x)\gamma_1$ на $\sigma_t - (L - x)\gamma_2$. Воспользуемся соотношением (15) и запишем в окончательном виде дифференциальное уравнение для упругого случая:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{4bw\gamma_2 h(L - x)}{EI} - \frac{P(L - x) - b\gamma_2 h^2(L - x)}{EI} = 0.$$

Решение для уравнений такого вида находится с помощью функций Эйри. Значения прогибов без учета w и с учетом веса w_1 при действующей нагрузке P_t для балок разной длины L приведены в табл. 3.

Таблица 3. Влияние длины тяжелой балки на величину прогиба на свободном конце

L , м	Прогиб, м	
	w	w_1
10	1,195	2,004
15	2,688	2,731
20	4,779	4,957

Нетрудно видеть, что разница прогибов для балки длиной 20 м составляет 0,2 м, т. е. 1%. Поскольку выше было выяснено незначительное влияние веса, то далее задачу будем рассматривать без его учета. В этом случае дифференциальные уравнения упрощаются и допускают аналитическое решение.

Запишем упрощенные дифференциальные уравнения, которые будем решать для каждого интервала по x , начиная с области заделки, а затем объединим решения («склеим»), используя условие гладкости и единственности прогиба.

При $0 \leq x \leq x_2$ имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left(\frac{2M_t}{M_k(d+1)d^{-1} - P(L-x)} \right)^{\frac{1}{2}} (1+d)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sigma_t}{4Eh}.$$

При $x_2 \leq x \leq x_1$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left(\frac{2M_t}{M_k(d+1)d^{-1} - P(L-x)} \right)^2 \cdot \frac{\sigma_t}{Eh}.$$

Наконец, для упругой верхней части балки при $x_1 \leq x \leq L$ имеем

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{P(L-x)}{EI}.$$

Расчеты для стали марки А40Х были проведены в пакете Maple 18.0 и приведены в работе [5]. Для расчета использовались следующие константы: $\gamma_1 = 7,8 \cdot 10^4$ Н/м³, $L = 10$ м, $h = 0,1$ м, $b = 0,2$ м, $E = 212$ ГПа, $\sigma_t = 760$ МПа.

Проиллюстрируем решение первого из трех дифференциальных уравнений, приведенных выше, при двух значениях нагрузок $P_1 = 130000$ Н и $P_2 = 150000$ Н, причем таких, для которых в балке образуются две пластические зоны. На рис. 8 показана та часть балки, в которой имеются пластические зоны. Анализ демонстрирует рост длины пластической области в зоне растяжения и рост прогиба с увеличением нагрузки. Одновременно увеличивается кривизна балки вблизи заделки.

На рис. 9 приведено полное решение задачи, т. е. решение всех трех дифференциальных уравнений и «склейка» решений. Области с разным количеством пластических зон изображены различным цветом. Расчет проведен для указанных ранее значений сосредоточенной силы P на свободном конце балки. Сравнение графиков показывает увеличение прогиба с ростом нагрузки и удлинение пластических областей.

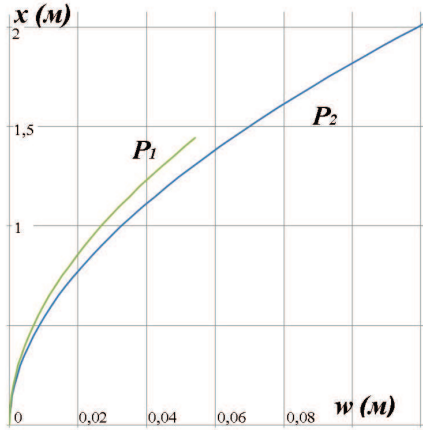


Рис. 8. Прогиб балки вблизи заделки.

6. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Построенная модель позволяет изучить напряженно-деформированное состояние балки прямоугольной формы из сложного по физическим свойствам материала с учетом веса и гидростатического погружения в жидкость.

Оценка влияния веса показала незначительное уменьшение критического момента появления пластического шарнира и подкрепляющий эффект гидростатического погружения.

Одновременно остается нерешенным вопрос о характере развития пластических областей в балке, поскольку напряженно-деформированное состояние в различных сечениях зависит в общем случае от пяти параметров — от параметра пластической анизотропии, веса самой балки, удельного веса жидкости, длины балки и величины внешней нагрузки. Между этими параметрами имеются зависимости, которые при определенных значениях параметров могут кардинально изменить ситуацию, например, пластичность появится не в зоне растяжения, а в зоне сжатия. Отказ от стержневой модели с одним продольным напряжением должен быть следующим шагом

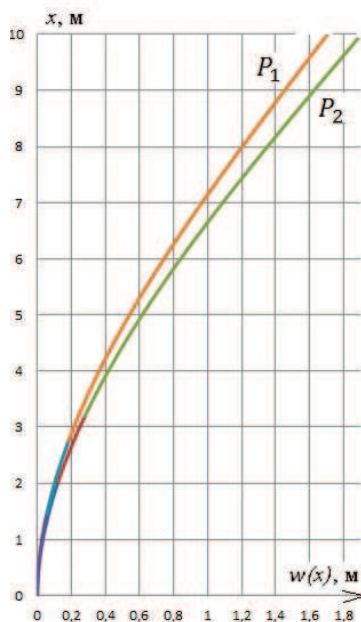


Рис. 9. Изменение прогиба по всей длине балки.

в исследовании. Учёт всех напряжений для длинных балок может существенно изменить напряженное состояние балки в сечениях с максимальными напряжениями и, следовательно, изменить порядок появления и развития пластических областей. Кроме того, возникает вопрос о применимости линейной теории деформирования балки в упругой части, поскольку прогиб будет существенно возрастать с увеличением длины балки и предположение о линейном соотношении между кривизной и прогибом вблизи закрепленного конца балки должно быть дополнительно обосновано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер А. Т. Разработка методов расчета вероятностных характеристик ледовых нагрузок для оценки надежности сооружений континентального шельфа. Владивосток: Изд-во ДГУ, 1998. 453 с.

2. *Политько В. А.* Расчет морских ледостойких сооружений на действие ледовых нагрузок с учетом российских строительных норм / В. А. Политько, И. Г. Кантаржи // Гидротехническое строительство. СПб., 2017. № 1. С. 27–35.
3. *Ковалев С. М.* Инструментальный мониторинг и краткосрочный прогноз явлений сжатия и торошения в морских льдах / В. Н. Смирнов, С. М. Ковалев, В. А. Бородкин, А. А. Ньюбом, А. И. Шушлебин // СПб.: ААНИИ, 2017. 174 с.
4. *Vjerkas M.* Ice actions on offshore structures: PhD thesis / Norwegian University of Science and Technology. Trondheim, 2006. 173 p.
5. *Лачугин Д. В.* Упруго-пластический изгиб разнопрочной вертикальной консоли под действием сосредоточенной нагрузки на свободном конце // Российско-китайский научный журнал «Содружество». Раздел Физико-математические науки. 2016. № 2(2). С. 32–35.
6. *Pavilaunnen G. V.* Elasto-Palstic Deformations of Ribbed Plates. CRM Proceedings and Lecture Notes // Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1993. P. 227–233.
7. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер // М.: Высшая школа, 1979. 624 с.
8. *Павилайнен Г. В.* Пластическая анизотропия стальных вертикальных опор буровых платформ при гидростатическом и ледовом воздействии // Актуальные проблемы прочности / В. А. Андреев [и др.]; Под ред. В. В. Рубаника. Молодечно: ОАО «Типография «Победа», 2020. 453 с.
9. *Pavilaunnen G. V., Naumova N. V.* Elastic-plastic deformations of SD-beams // Proceedings VII Polyachov's Reading, Saint-Petersburg, 2015. Book of Abstract I. P. 239.
10. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: ИЛ, 1954. 648 с.
11. *Ильгамов М. А.* Статические задачи гидроупругости. Казань: Изд-во КГУ, 1992. 354 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ТЯГАЧА С ПРИЦЕПОМ С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

А. С. МУРАВЬЕВ, А. С. СМИРНОВ

Обсуждаются вопросы устойчивости движения тягача с прицепом, который шарнирно присоединен к нему при помощи упругого элемента. С использованием уравнений Феррерса для неголономных систем приводится вывод уравнений движения этой системы в линейной модели при отсутствии диссипативных сил. В ходе анализа данной модели строится область устойчивости движения системы на плоскости безразмерных параметров. Производится последовательно учет сил вязкого трения вследствие установки демпфера сначала в шарнирном сочленении, а затем и параллельно упругому элементу. В результате исследования диссипативных моделей строится область устойчивости в каждом из случаев. На основании этого анализа можно заключить, что область устойчивости в двух изученных моделях имеет принципиально различный качественный характер и может существенно отличаться от аналогичной области, построенной при отсутствии вязкого сопротивления.

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение тягача с одним или несколькими прицепами является одной из наиболее важных задач неголономной механики, в которой отчетливо проявляется такой вопрос, как устойчивость движения. Так, в [1] излагается теория движения автопоезда, где в том числе затрагиваются методы исследования динамических систем на устойчивость и решается ряд прикладных задач в различных постановках. В [2] анализируется задача о движении шарнирной цепочки тележек, следующих за тягачом, который совершает некоторое предписанное движение. В [3,4] обсуждаются условия устойчивости движения тягача с прицепом при наличии упругого сцепления прицепа с тягачом. В [5] эта задача развивается, а именно область устойчивости разделяется на подобласти с различным качественным характером движения. При этом во многих подобных задачах неголономной механики, имеющих в учебной и научной литературе, не производится учет диссипативных сил вязкого трения, ко-

Доклад на семинаре 6 октября 2020 г.

© А. С. Муравьев, А. С. Смирнов, 2020

которые могут присутствовать в различных элементах системы и существенно влиять на область устойчивости. Настоящая статья посвящена исследованию этих эффектов, которые представляют как теоретический, так и практический интерес.

2. ТЯГАЧ С ПРИЦЕПОМ ПРИ ОТСУТСТВИИ СИЛ ТРЕНИЯ

Рассмотрим упрощенную модель прицепа, который представляет твердое тело массой m с центром тяжести в точке C (рис. 1). Обозначим за J момент инерции прицепа относительно оси, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости рисунка. Будем считать, что прицеп шарнирно присоединен к тягачу, который движется в продольном направлении равномерно и прямолинейно со скоростью v , и, кроме того, с помощью пружины с коэффициентом жесткости c учитывается податливое сцепление с тягачом, обусловленное упругостью пневматика автомобиля. Обозначим расстояние от точки C до точки крепления за a , а от оси колес до этой точки — за b .

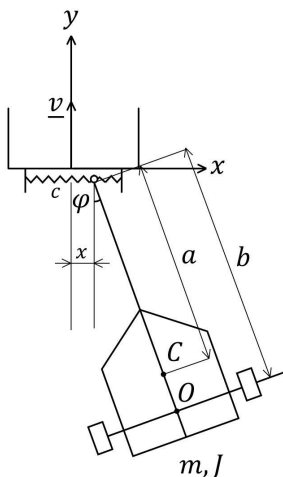


Рис. 1. Модель тягача с прицепом.

Ясно, что для описания поведения системы следует ввести две обобщенные координаты, в качестве которых примем боковое смещение точки крепления прицепа x и угол отклонения прицепа φ . Будем также считать, что колеса прицепа не имеют бокового проскальзывания, а потому имеет место условие связи

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{v}_O = \sigma_x \dot{x}_O + \sigma_y \dot{y}_O = 0, \quad (1)$$

где $\underline{\sigma} = \sigma_x \underline{i} + \sigma_y \underline{j}$ — единичный орт колесной пары, а $\underline{v}_O = \dot{x}_O \underline{i} + \dot{y}_O \underline{j}$ — скорость точки O на оси этой пары, причем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \cos \varphi, & \sigma_y &= \sin \varphi, \\ x_O &= x + b \sin \varphi, & y_O &= vt - b \cos \varphi, \\ \dot{x}_O &= \dot{x} + b \cos \varphi \dot{\varphi}, & \dot{y}_O &= v + b \sin \varphi \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

В результате после подстановки выражений (2) в соотношение (1) получаем условие неголономной связи в виде

$$b\dot{\varphi} + \dot{x} \cos \varphi + v \sin \varphi = q_\varphi \dot{\varphi} + q_x \dot{x} + q = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты связи будут

$$q_\varphi = b, \quad q_x = \cos \varphi, \quad q = v \sin \varphi. \quad (4)$$

Для получения уравнения движения системы воспользуемся известными уравнениями Феррерса для неголономных систем, которые представляют собой видоизмененные уравнения Лагранжа второго рода [6]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \lambda q_\varphi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \lambda q_x, \quad (5)$$

где λ — неопределенный множитель. Для вычисления кинетической энергии следует записать координаты центра масс прицепа и отвечающие им скорости:

$$\begin{aligned} x_C &= x + a \sin \varphi, & y_C &= vt - a \cos \varphi, \\ \dot{x}_C &= \dot{x} + a \cos \varphi \dot{\varphi}, & \dot{y}_C &= v + a \sin \varphi \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Поэтому кинетическая и потенциальная энергии системы будут иметь вид:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \\ = \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + v^2 + (a^2 + r^2)\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi + v \sin \varphi)], \quad \Pi = \frac{1}{2}cx^2, \quad (6)$$

где r — радиус инерции прицепа, через который момент инерции будет выражаться как $J = mr^2$. Подставляя выражения (4) и (6) в уравнения (5), получим два уравнения

$$\begin{cases} m [(a^2 + r^2)\ddot{\varphi} + a\ddot{x} \cos \varphi] = \lambda b, \\ m (\ddot{x} + a\ddot{\varphi} \cos \varphi - a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -cx + \lambda \cos \varphi. \end{cases} \quad (7)$$

из которых остается исключить множитель λ . Ограничиваясь далее изучением лишь малых отклонений системы, т. е. полагая φ и x малыми величинами первого порядка малости и принимая во внимание, что λ при этом также будет иметь первый порядок малости, линеаризуем уравнения (7) и придем к упрощенным уравнениям

$$\begin{cases} m [(a^2 + r^2)\ddot{\varphi} + a\ddot{x}] = \lambda b, \\ m (\ddot{x} + a\ddot{\varphi}) = -cx + \lambda. \end{cases} \quad (8)$$

Исключая отсюда величину λ и объединяя получившееся при этом уравнение с предварительно линеаризованным условием связи (3), получим замкнутую систему

$$\begin{cases} m [r^2 - a(b - a)] \ddot{\varphi} - m(b - a)\ddot{x} - cbx = 0, \\ b\dot{\varphi} + v\varphi + \dot{x} = 0. \end{cases}$$

Ее характеристический полином является кубическим, и он имеет вид:

$$m [r^2 + (b - a)^2] p^3 + m(b - a)vp^2 + cb^2p + cbv = 0. \quad (9)$$

В тех случаях, когда характеристический полином имеет третий порядок, говорят, что система имеет полторы степени свободы [7].

Если говорить более детально, то система обладает одной динамической и одной кинематической степенью свободы. Это происходит ввиду того, что имеет место неголономная связь (3).

Возвращаясь к уравнению (9), преобразуем его к безразмерному виду, удобному для дальнейших действий. С этой целью введем следующие обозначения:

$$\delta = \frac{a}{b}, \quad \rho = \frac{r}{b}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \gamma = \frac{v}{bk}, \quad \lambda = \frac{p}{k}. \quad (10)$$

Поясним их физический и геометрический смысл: δ — безразмерное расстояние от шарнира до центра масс прицепа, ρ — безразмерный радиус инерции прицепа, k — частота колебаний груза массой m на пружине жесткостью c , γ — безразмерная скорость движения тягача, а λ — безразмерный корень характеристического уравнения. Будем считать, что параметры b , m , c (значит, и k) являются заданными, а изменять можно параметры a , r и v . Это означает, что имеются три безразмерных варьируемых параметра — δ , ρ и γ . Перепишем теперь уравнение (9) с учетом введенных параметров (10) в компактной форме:

$$[\rho^2 + (1 - \delta)^2] \lambda^3 + \gamma(1 - \delta)\lambda^2 + \lambda + \gamma = 0. \quad (11)$$

Применяя к этому уравнению критерий Льенара–Шипара [8], получим условия устойчивости в следующем виде:

$$\gamma > 0, \quad \delta < 1, \quad \rho < \sqrt{\delta(1 - \delta)}. \quad (12)$$

Физический смысл этих условий ясен: должна иметь место статическая устойчивость (т. е. движение тягача в указанную на рис. 1 сторону, а не в противоположную ей), центр масс прицепа должен находиться между точкой его крепления и осью прицепа, и, наконец, радиус инерции прицепа не должен быть слишком большим (а именно он должен быть меньше среднего геометрического значений a и $b - a$). Последнее из условий (12) не зависит от γ . Из этого вытекает, что в данной постановке для анализа устойчивости важен лишь сам факт наличия степени свободы по x , но не ее конкретные характеристики. Следует отметить, что это обстоятельство весьма

часто встречается в различных задачах об устойчивости движения. Последнее из неравенств (12) и определяет область устойчивости на плоскости параметров (δ, ρ) , представленную на рис. 2. Видно, что максимально возможное значение $\rho_{\max} = 1/2$ на границе области устойчивости отвечает значению $\delta = 1/2$.

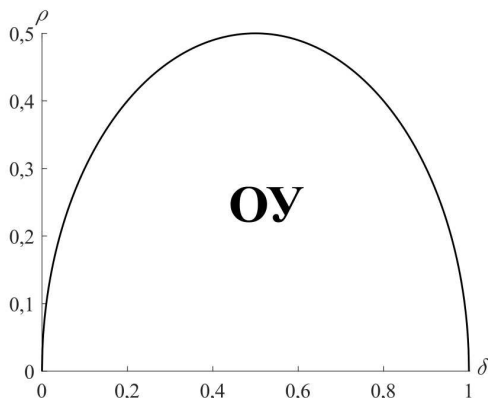


Рис. 2. Область устойчивости при отсутствии трения.

Отметим, что полученная область устойчивости отвечает тому случаю, когда не производится учет диссипативных сил, которые присутствуют в любой реальной механической системе и, кроме того, могут специально вводиться при помощи демпферов. Поэтому представляет интерес и необходимость выявить их влияние на устойчивость движения тягача с прицепом. Рассмотрим далее два случая действия сил вязкого сопротивления.

3. ТЯГАЧ С ПРИЦЕПОМ ПРИ НАЛИЧИИ ДЕМПФЕРА, УСТАНОВЛЕННОГО В ШАРНИРЕ

Предположим сначала, что система испытывает шарнирное вязкое трение с диссипативным коэффициентом β . Для его учета в уравнениях движения следует добавить слагаемое $-\beta\dot{\varphi}$ в правую

часть первого уравнения Феррерса (5), а значит, и в правую часть первого из уравнений (7) и (8). В результате будем иметь систему

$$\begin{cases} m[r^2 - a(b-a)]\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} - m(b-a)\ddot{x} - cbx = 0, \\ b\dot{\varphi} + v\varphi + \dot{x} = 0. \end{cases}$$

Записывая характеристическое уравнение этой системы и сразу приводя его к безразмерному виду с помощью параметров (10), получим

$$[\rho^2 + (1 - \delta)^2] \lambda^3 + [\gamma(1 - \delta) + \nu] \lambda^2 + \lambda + \gamma = 0, \quad (13)$$

где также введен безразмерный диссипативный коэффициент по формуле $\nu = \beta/(mb^2k)$. Видно, что из всех коэффициентов уравнения (13) по сравнению с (11) изменяется только лишь один — при квадратичном слагаемом. Применяя к уравнению (13) критерий Льенара–Шипара, получим следующие условия устойчивости:

$$\delta < 1 + \frac{\nu}{\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \rho < \sqrt{\delta(1 - \delta) + \frac{\nu}{\gamma}}. \quad (14)$$

Видно, что в этой ситуации параметры ν и γ , характеризующие соответственно диссипативные свойства системы и скорость движения тягача, входят в условия устойчивости в виде единого комплекса $\eta = \nu/\gamma = \beta/(m vb)$, который будет характеризовать одновременно и те и другие свойства. Установим область определения последнего из неравенств (14), т. е. выясним, когда подкоренное выражение будет положительным. Это будет происходить при

$$\delta^2 - \delta - \eta < 0. \quad (15)$$

Ясно, что меньший корень этого квадратного неравенства отрицателен и не представляет интереса, т. к. из геометрических соображений $\delta > 0$. Что же касается большего его корня, то можно видеть, что при $\delta = 1$ левая часть неравенства (15) отрицательна, тогда как при $\delta = 1 + \eta$ она положительна. Поэтому искомый корень δ_* удовлетворяет условию $1 < \delta_* < 1 + \eta$, а его точное значение согласно (15) находится следующим образом:

$$\delta_* = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\eta} \right). \quad (16)$$

Таким образом, устойчивость движения может иметь место лишь в диапазоне $0 < \delta < \delta_*$, который является более узким, чем первое неравенство (14). Важно подчеркнуть, что при наличии диссипативных сил устойчиво двигаться может и прицеп, у которого центр масс находится от точки крепления дальше, чем ось колесной пары, поскольку $\delta_* > 1$.

Обратимся теперь к построению границы области устойчивости на плоскости (δ, ρ) по формуле $\rho = \sqrt{\delta(1-\delta) + \eta}$ при $0 < \delta < \delta_*$. Легко видеть, что максимальное значение $\rho_{\max} = \sqrt{1/4 + \eta}$ на этой границе достигается в точке $\delta = 1/2$, как это было и при отсутствии диссипативных сил. Значения же в точках $\delta = 0$ и $\delta = 1$ одинаковы и равны $\sqrt{\eta}$. Границы области устойчивости при различных значениях параметра η представлены на рис. 3, а сама эта область будет расположена ниже указанных границ. Видно, что с увеличением параметра $\eta = \nu/\gamma$ область устойчивости расширяется, что может быть достигнуто как увеличением ν (т. е. путем повышения диссипативного коэффициента), так и уменьшением γ (т. е. путем понижения скорости движения тягача), так что здесь параметр γ уже играет существенную роль.

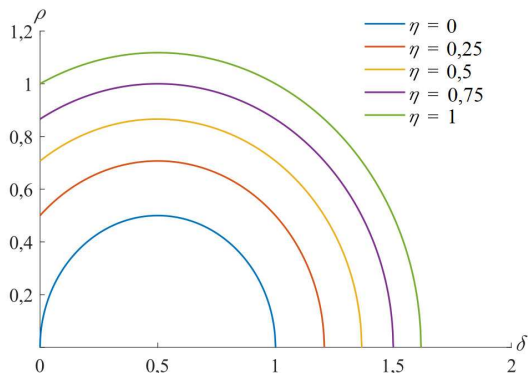


Рис. 3. Область устойчивости при наличии демпфера, установленного в шарнире.

4. ТЯГАЧ С ПРИЦЕПОМ ПРИ НАЛИЧИИ ДЕМПФЕРА, УСТАНОВЛЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЬНО ПРУЖИНЕ

Предположим теперь, что демпфер вязкого трения установлен не в шарнире, а параллельно пружине, причем диссипативный коэффициент обозначим за B . Для его учета в уравнениях движения следует добавить слагаемое $-B\dot{x}$ в правую часть второго уравнения Феррерса (5), а значит, и в правую часть второго из уравнений (7) и (8). В результате получим систему

$$\begin{cases} m[r^2 - a(b-a)]\ddot{\varphi} - m(b-a)\ddot{x} - Bb\dot{x} - cbx = 0, \\ b\dot{\varphi} + v\varphi + \dot{x} = 0. \end{cases}$$

Характеристический полином этой системы в безразмерной форме будет иметь вид:

$$[\rho^2 + (1 - \delta)^2] \lambda^3 + [\gamma(1 - \delta) + \nu] \lambda^2 + (1 + \nu\gamma)\lambda + \gamma = 0, \quad (17)$$

где введен безразмерный диссипативный коэффициент по формуле $\nu = B/(mk)$. Видно, что здесь уже два коэффициента уравнения (17) отличаются от аналогичных коэффициентов уравнения (11), а именно при квадратичном и при линейном слагаемом. Поэтому в данном случае вязкое трение будет оказывать иное влияние на характер области устойчивости движения. Чтобы разобраться в этом, применим критерий Лъенара–Шипара к уравнению (17) и получим

$$\delta < 1 + \frac{\nu}{\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \rho < \sqrt{(\delta + \nu\gamma)(1 - \delta) + \nu^2 + \frac{\nu}{\gamma}}. \quad (18)$$

Заметим, что последнее условие (18) оказывается значительно сложнее, чем аналогичное условие в (14). Важно подчеркнуть, что в отличие от случая вязкого трения в шарнире здесь последнее условие устойчивости зависит как от ν , так и от γ в отдельности, а не только от их отношения $\eta = \nu/\gamma = Bb/(mv)$, что существенно усложняет дальнейший анализ. Выясним теперь, когда подкоренное выражение в последнем условии (18) будет положительным, т. е. решим квадратное неравенство

$$\delta^2 - (1 - \nu\gamma)\delta - \left(\nu^2 + \nu\gamma + \frac{\nu}{\gamma} \right) < 0. \quad (19)$$

Видно, что при $\delta = 1$ левая часть неравенства отрицательна, тогда как при $\delta = 1 + \eta$ она положительна, т. е. опять же больший корень неравенства δ_* удовлетворяет условию $1 < \delta_* < 1 + \eta$, а его точное значение согласно (19) теперь таково:

$$\delta_* = \frac{1}{2} \left[1 - \nu\gamma + \sqrt{(1 + \nu\gamma) \left(1 + \nu\gamma + 4\frac{\nu}{\gamma} \right)} \right]. \quad (20)$$

Поэтому и в данном случае можно сделать вывод о том, что устойчивость может иметь место и при расположении центра масс прицепа за осью колесной пары, хотя верхняя граница интервала $0 < \delta < \delta_*$ здесь уже определяется формулой (20), которая оказывается намного более сложной, чем (16).

Переходя теперь к анализу границы области устойчивости, задаваемой формулой $\rho = \sqrt{(\delta + \nu\gamma)(1 - \delta) + \nu^2 + \nu/\gamma}$ при $0 < \delta < \delta_*$, нетрудно установить, что максимальное значение на этой границе оказывается равным $\rho_{\max} = \sqrt{(1 + \nu\gamma)[\gamma(1 + \nu\gamma) + 4\nu]/(4\gamma)}$ и достигается при $\delta = (1 - \nu\gamma)/2$, которое всегда меньше $1/2$. Ясно, что эта точка попадает в интервал $0 < \delta < \delta_*$ лишь в том случае, когда $\nu\gamma < 1$, т. е. при $\gamma < 1/\nu$, когда γ относительно невелико. Поэтому при заданном значении диссипативного коэффициента ν и при достаточно больших значениях безразмерной скорости γ точка экстремума выходит за пределы диапазона $0 < \delta < \delta_*$ и кривая, отвечающая границе области устойчивости, становится убывающей на всем этом промежутке. Интересно также заметить, что при $\delta = 0$ на границе устойчивости имеем $\rho = \sqrt{\nu^2 + \nu(\gamma + 1/\gamma)}$, откуда вытекает, что при заданном значении ν наименьшее значение этого выражения будет достигаться, очевидно, при $\gamma = 1$, что влечет за собой наиболее узкую зону устойчивости при значениях δ , близких к нулю. На рис. 4 и 5 представлены границы области устойчивости при различных значениях параметров ν и γ , причем в первом случае фиксируется $\gamma = 1$, а ν варьируется, а во втором, наоборот, фиксируется $\nu = 1/2$, а варьируется γ . По ним можно отчетливо проследить все упомянутые выше эффекты. Отметим, что область устойчивости при любых значениях параметров также расположена ниже построенной границы.

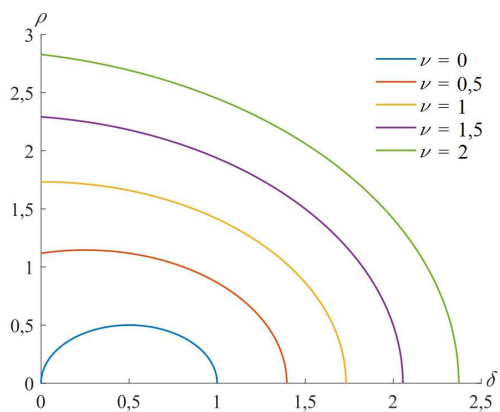


Рис. 4. Область устойчивости при наличии демпфера, установленного параллельно пружине (γ фиксировано, ν варьируется).

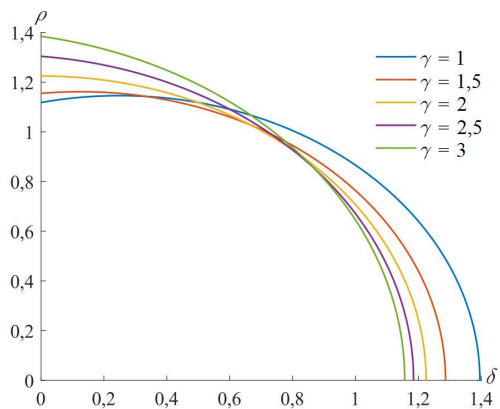


Рис. 5. Область устойчивости при наличии демпфера, установленного параллельно пружине (ν фиксировано, γ варьируется).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ отчетливо демонстрирует, что введение в систему диссипативных сил существенно влияет на область устойчивости, и это обстоятельство следует учитывать на практике. При этом показано, что вязкое трение в каждом из рассмотренных случаев установки демпфера по-разному отражается на характере границы области устойчивости, и это наглядно подтверждается графическими иллюстрациями. Дальнейшее развитие рассмотренной задачи может быть связано с установлением поведения системы в линейной модели и разделением области устойчивости на подобласти с различным качественным характером движения, а также в совместном учете диссипативных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Закин Я. Х.* Прикладная теория движения автопоезда. М.: Транспорт, 1967. 255 с.
2. *Смирнов А. С., Смольников Б. А., Леонтьев В. А.* Принципы неголономной механики в управлении движением группы транспортных роботов // Научно-технические ведомости СПбПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2017. №3. С. 83–91.
3. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
4. *Меркин Д. Р., Бауэр С. М., Смольников Б. А., Смирнов А. Л.* Теория устойчивости в примерах и задачах. М.; Ижевск: РХД, 2007. 208 с.
5. *Муравьев А. С., Смирнов А. С.* Динамика и устойчивость движения тягача с прицепом // Неделя науки СПбПУ. ИПММ, 2019. С. 92–95.
6. *Меркин Д. Р., Смольников Б. А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. 534 с.
7. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
8. Теория автоматического управления. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1986. 367 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПЛАВАЮЩЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ БАРЖИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

М. К. Скалина, А. С. Смирнов

Обсуждаются вопросы плавания прямоугольной баржи или понтона в море. Эта система моделируется при помощи длинного бруса прямоугольного поперечного сечения, погруженного в жидкость. Обсуждается вопрос о количестве степеней свободы системы, в результате чего их число сведено к одному, и в качестве обобщенной координаты принимается угол поворота бруса. Отмечается, что необходимо рассматривать в отдельности случаи одно-, двух- и трехвершинного погружения бруса, обладающие качественными различиями. Проводится глобальный анализ равновесных положений системы и анализируется их устойчивость. В результате выявляется зависимость положений равновесия от двух ключевых безразмерных параметров задачи — отношения сторон бруса и отношения плотностей бруса и жидкости. Помимо этого, строятся и анализируются кривые состояний равновесия, наглядно демонстрирующие полученные зависимости. В заключение приводятся графические иллюстрации бруса в двух различных равновесных положениях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основы статики корабля были заложены известным древнегреческим ученым Архимедом еще в III в. до н. э., после чего почти двадцать столетий эта интереснейшая область механики оставалась практически незамеченной. Большой толчок в развитии учения об устойчивости плавания произошел лишь в XVIII в. благодаря фундаментальным трудам выдающегося ученого Л. Эйлера, а затем и работам его многочисленных последователей.

Данная область механики имеет непосредственное практическое значение, т. к. плавающие тела представляют широчайший спектр самых разнообразных водных транспортных средств, портовых сооружений и подводных конструкций, используемых в различных целях и ситуациях. Естественно, что все эти объекты требуют и тщательного статического исследования, гарантирующего их устой-

чивость во многих режимах эксплуатации, а также при плавном изменении их механических параметров. Именно эти изменения нередко приводят к неожиданной потере устойчивости водного объекта с последующим его опрокидыванием или переворотом на бок [1]. История судостроения и судовождения знает немало примеров подобных коллизий, анализ которых привел к появлению новой ветви современной механики и физики — теории катастроф [2].

К сожалению, в современных учебных руководствах по механике твердых тел и теории устойчивости вопросам гидростатической устойчивости плавающих тел уделено крайне малое внимание, хотя многие задачи не только оказываются интересными в практическом изложении, но и содержат поучительные математические особенности [3]. Эти особенности связаны в первую очередь с глобализацией задачи, где требуется не только ограничиться явно равновесными состояниями, но и заняться полным исследованием произвольно ориентированного тела, т. е. определить все возможные положения равновесия системы и исследовать их устойчивость. Несмотря на малочисленность таких задач, они демонстрируют трудности такой глобализации, даже если рассматриваются только плоские варианты. Это отчетливо видно на примере задачи о глобальном анализе бруса квадратного сечения [4].

Поэтому в настоящей статье авторы рассматривают одну из наиболее наглядных задач на устойчивость равновесия — задачу плавления прямоугольной баржи в море — и проводят полный анализ ее равновесных положений и их устойчивости. Подобная задача была рассмотрена А. П. Фан-дер-Флитом в работах [5, 6], в которых были вычислены некоторые характеристики плавающего прямоугольного понтона при его наклонении и исследованы простейшие вопросы устойчивости этого понтона.

2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЛАВАЮЩЕГО БРУСА

Будем моделировать баржу в море длинным бруском прямоугольного сечения размерами $2a \times 2b$ и плотностью ρ_b (масса на единицу площади), погруженным в жидкость с плотностью ρ_l [7].

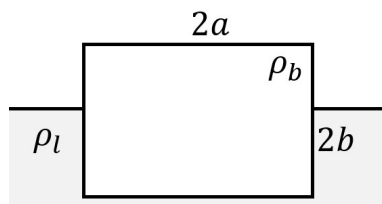


Рис. 1. Плавающий брус в равновесном положении.

Ясно, что в этих условиях можно ограничиться рамками плоской задачи (рис. 1), в которой брус имеет три степени свободы: смещения в горизонтальном и вертикальном направлениях, а также поворот сечения в вертикальной плоскости [8]. При этом горизонтальная координата в статической задаче является циклической и не играет никакой роли, поэтому она может быть отброшена. Что же касается вертикальной координаты, то она также может быть исключена, если рассматривать только равнообъемные наклонения по углу поворота [9], т. е. такие наклонения, при которых вытесненный объем жидкости остается постоянным и равным объему в положении равновесия бруса [10]. Этот прием широко используется в задачах статики плавающих тел [11], и он основан на том факте, что для выпуклого плавающего тела всегда имеет место устойчивость по вертикальной координате. Таким образом, рассматриваемая задача имеет лишь одну степень свободы — угол наклона φ .

Трактуя жидкость как потенциальное поле гидростатических сил, не имеющее собственных степеней свободы, можно заключить, что брус испытывает действие двух потенциальных сил — силы тяжести и силы Архимеда. Их потенциальные энергии есть соответственно $\Pi_b = P_b y_b$ и $\Pi_l = -P_l y_l$, где P_b и P_l — вес бруса и вытесненной жидкости соответственно, а y_b и y_l — координаты центра тяжести бруса и центра тяжести вытесненного объема, которые мы будем отсчитывать от ватерлинии. Ясно, что в положении равновесия $P_l = P_b$. При наклонениях $P_l = \rho_l g S_l = \text{const}$ в силу условия равнообъемности $S_l = \text{const}$, где в рамках плоской задачи S_l — площадь вытесненной жидкости, так что равенство $P_l = P_b$ выполняет-

ся для любого φ . Тогда из условия $\rho_l g S_l = \rho_b g S_b$, где S_b — площадь сечения бруса, имеем $S_l = 4ab\rho$, где $\rho = \rho_b/\rho_l$ — безразмерная плотность, причем из условия плавания $\rho < 1$. Полагая $P_l = P_b = P$, получим суммарную потенциальную энергию [12]

$$\Pi = P(y_b - y_l), \quad (1)$$

которая зависит только от координаты φ , и вопрос о равновесных положениях и устойчивости системы полностью решается путем анализа этой функции. В силу наличия двух осей симметрии у бруса ограничимся далее рассмотрением промежутка $\varphi \in [0, \pi/2]$.

3. АНАЛИЗ ДВУХВЕРШИННОГО ПОГРУЖЕНИЯ

Рассмотрим сначала двухвершинное погружение бруса, представленное на рис. 2.

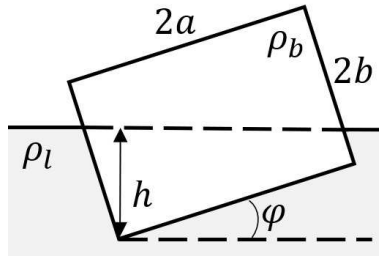


Рис. 2. Двухвершинное погружение бруса.

Нетрудно показать, что в этом случае будем иметь [8]:

$$S_l = \frac{2a(h - a \sin \varphi)}{\cos \varphi} = 4ab\rho, \quad h = a \sin \varphi + 2b\rho \cos \varphi, \quad (2)$$

$$y_b = -h + a \sin \varphi + b \cos \varphi, \quad y_l = -\frac{h^3 - (h - 2a \sin \varphi)^3}{3[h^2 - (h - 2a \sin \varphi)^2]},$$

где h — глубина погружения бруса. В результате приходим к выражению для потенциальной энергии согласно (1):

$$\Pi = \frac{mgb}{12\rho} \left[(12\rho - 12\rho^2 - \delta^2) \cos \varphi + \frac{\delta^2}{\cos \varphi} \right],$$

где $\delta = a/b$ — отношение сторон бруса. Вычисляя производную потенциальной энергии и приравнивая ее нулю

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \frac{mgb}{12\rho} \left[-(12\rho - 12\rho^2 - \delta^2) + \frac{\delta^2}{\cos^2 \varphi} \right] \sin \varphi = 0,$$

находим, что положения равновесия определяются выражениями:

$$\varphi_1 = 0, \quad \cos \varphi_2 = \frac{\delta}{\sqrt{12\rho - 12\rho^2 - \delta^2}}. \quad (3)$$

Ясно, что первое (горизонтальное) равновесие существует всегда, тогда как второе (боковое) — лишь при $\delta < \sqrt{6\rho(1-\rho)}$. Имея в виду дальнейшее построение кривых состояний равновесия (КСР) на плоскости (φ, ρ) при фиксированных значениях δ , разрешим второе из уравнений (3) относительно ρ :

$$\rho = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{12} \sqrt{36 - 12\delta^2 \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)}.$$

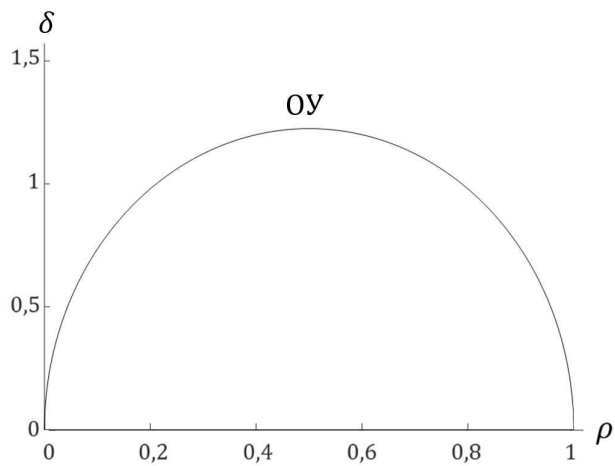
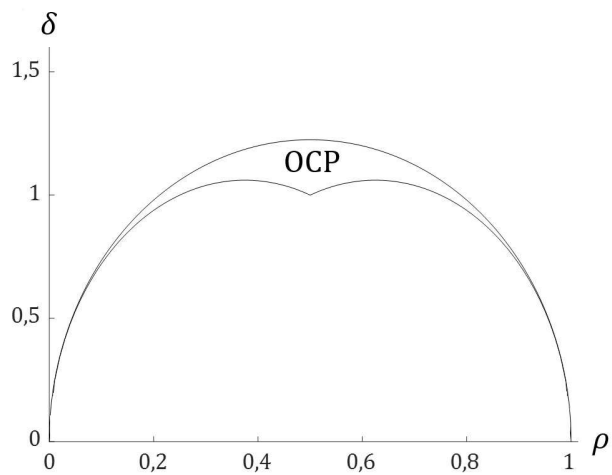
Для исследования устойчивости найденных положений вычислим вторую производную потенциальной энергии [13]:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{mgb}{12\rho} \left[-(12\rho - 12\rho^2 - \delta^2) \cos \varphi + \frac{\delta^2(2 - \cos^2 \varphi)}{\cos^3 \varphi} \right].$$

Подставляя сюда равновесные углы (3), находим

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi_1=0} &= \frac{mgb}{12\rho} [\delta^2 - 6\rho(1-\rho)], \\ \left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_2} &= \frac{mgb}{3\rho\delta} \sqrt{12\rho - 12\rho^2 - \delta^2} [6\rho(1-\rho) - \delta^2]. \end{aligned}$$

Отсюда можно сделать вывод, что равновесие $\varphi_1 = 0$ устойчиво при $\delta > \sqrt{6\rho(1-\rho)}$, и отвечающая этому неравенству область устойчивости (ОУ) на плоскости параметров (ρ, δ) представлена на рис. 3. Что же касается равновесия $\varphi = \varphi_2$, то оно устойчиво всегда, когда оно существует, т. е. при выполнении условия $\delta < \sqrt{6\rho(1-\rho)}$.

Рис. 3. Область устойчивости равновесия $\varphi_1 = 0$.Рис. 4. Область существования равновесия $\varphi = \varphi_2$.

Следует отметить, что полученные результаты для равновесия $\varphi = \varphi_2$ относятся к случаю двухвершинного погружения, для которого следует потребовать выполнение двойного неравенства $2a \sin \varphi_2 \leq h \leq 2b \cos \varphi_2$. С учетом формулы (2) для h оно принимает вид:

$$\frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \varphi_2 \leq \rho \leq 1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (4)$$

Если теперь подставить сюда вторую формулу (3), то можно прийти к условиям существования бокового равновесия $\varphi = \varphi_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \geq \sqrt{2\rho(3-4\rho)}, \\ \rho \leq \frac{1}{2}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \geq \sqrt{2(1-\rho)(4\rho-1)}, \\ \rho \geq \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Отвечающая этим неравенствам область существования равновесия (ОСР) $\varphi = \varphi_2$ на плоскости (ρ, δ) представлена на рис. 4, и, как видно, она является достаточно узкой.

Ясно, что двухвершинная конфигурация будет реализована и в том случае, если отклонять брус от равновесного положения $\varphi = \pi/2$. Нетрудно понять, что если заменить во всех ранее полученных формулах a на b (т. е. δ на $1/\delta$), а φ на $\pi/2 - \varphi$, то мы получим формулы для рассматриваемой конфигурации. Поэтому потенциальная энергия будет иметь вид:

$$\Pi = \frac{mga}{12\rho} \left[(12\rho - 12\rho^2 - \delta^2) \sin \varphi + \frac{1}{\delta^2 \sin \varphi} \right],$$

а отвечающие ей положения равновесия есть:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{(12\rho - 12\rho^2)\delta^2 - 1}}, \quad (5)$$

причем первое из них существует всегда и устойчиво при условии $\delta < 1/\sqrt{6\rho(1-\rho)}$, тогда как второе существует лишь при $\delta > 1/\sqrt{6\rho(1-\rho)}$ и устойчиво. Разрешая второе выражение (5) относительно ρ , получим

$$\rho = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{12} \sqrt{36 - \frac{12}{\delta^2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right)},$$

а геометрические ограничения приведем к двойному неравенству:

$$\frac{1}{2\delta} \operatorname{ctg} \varphi_2 \leq \rho \leq 1 - \frac{1}{2\delta} \operatorname{ctg} \varphi_2,$$

которое аналогично выражению (4).

4. АНАЛИЗ ОДНО- И ТРЕХВЕРШИННОГО ПОГРУЖЕНИЯ

Перейдем теперь к анализу случаев одно- и трехвершинного погружения бруса, представленных на рис. 5 и 6 соответственно, для которых необходимо записать иное выражение для потенциальной энергии.

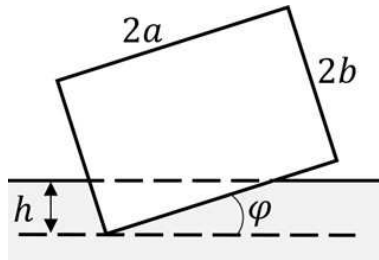


Рис. 5. Одновершинное погружение бруса.

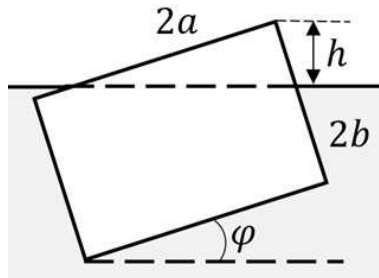


Рис. 6. Трехвершинное погружение бруса.

Сначала рассмотрим первый из этих случаев, отвечающий од-
новершинному погружению бруса. Для него имеем:

$$\begin{aligned} S_l &= \frac{h^2}{\sin 2\varphi} = 4ab\rho, & h &= \sqrt{4ab\rho \sin 2\varphi}, \\ y_b &= -h + a \sin \varphi + b \cos \varphi, & y_l &= -\frac{h}{3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Потенциальная энергия системы в этом случае примет вид:

$$\Pi = mgb \left(\delta \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{4}{3} \sqrt{\delta \rho \sin 2\varphi} \right).$$

Записывая условие равновесия

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = mgb \left(\delta \cos \varphi - \sin \varphi - \frac{4}{3} \sqrt{\delta \rho} \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \right) = 0,$$

разрешим его сразу относительно ρ :

$$\rho = \frac{9(\delta \cos \varphi - \sin \varphi)^2 \sin 2\varphi}{16\delta \cos^2 2\varphi}.$$

Отметим, что условием реализации данной конфигурации яв-
ляется выполнение двух неравенств: $h \leq 2a \sin \varphi$ и $h \leq 2b \cos \varphi$,
которые с учетом формулы (6) для h приводятся к виду:

$$\rho \leq \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \varphi, \quad \rho \leq \frac{1}{2\delta} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (7)$$

Что же касается второго варианта, отвечающего трехвершин-
ному погружению, то геометрически он идентичен предыдущему
случаю, если под h понимать высоту вершины прямоугольника над
поверхностью [4]. Поэтому и в данном случае легко получить вы-
ражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = mgb \frac{1-\rho}{\rho} \left(\delta \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{4}{3} \sqrt{\delta(1-\rho) \sin 2\varphi} \right).$$

Вычисляя по аналогии производную этого выражения по φ , а
затем приравняв ее нулю и разрешая получившееся уравнение
относительно ρ , находим:

$$\rho = 1 - \frac{9(\delta \cos \varphi - \sin \varphi)^2 \sin 2\varphi}{16\delta \cos^2 2\varphi}.$$

Легко видеть, что данный случай симметричен предыдущему с заменой ρ на $1-\rho$. Поэтому мы получим симметричные равновесные положения и графики КСР. Геометрические ограничения в этом случае приводятся к виду:

$$\rho \geq 1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \varphi, \quad \rho \geq 1 - \frac{1}{2\delta} \operatorname{ctg} \varphi,$$

и, конечно, они аналогичны неравенствам (7).

5. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Перейдем теперь к построению серии КСР на плоскости (φ, ρ) при различных значениях параметра δ , пользуясь полученными ранее выражениями при соответствующих ограничениях. На рис. 7–11 представлены КСР для случаев $\delta = 1; 1,01; 1,1; \sqrt{3}/2; 2$, причем устойчивые равновесия помечены кружками, а неустойчивые — крестиками. При этом для любого заданного значения ρ имеет место чередование устойчивых и неустойчивых равновесий.

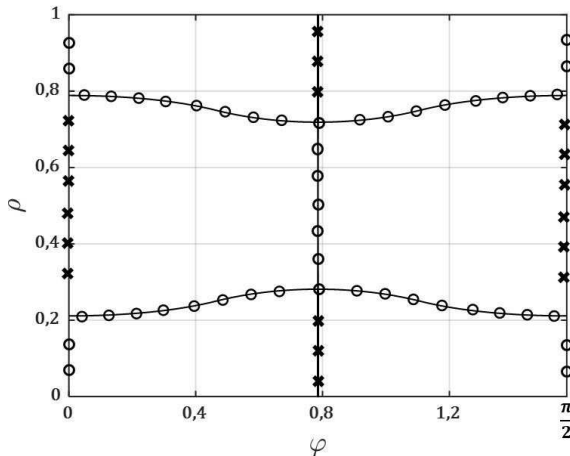


Рис. 7. Кривые состояний равновесия при $\delta = 1$.

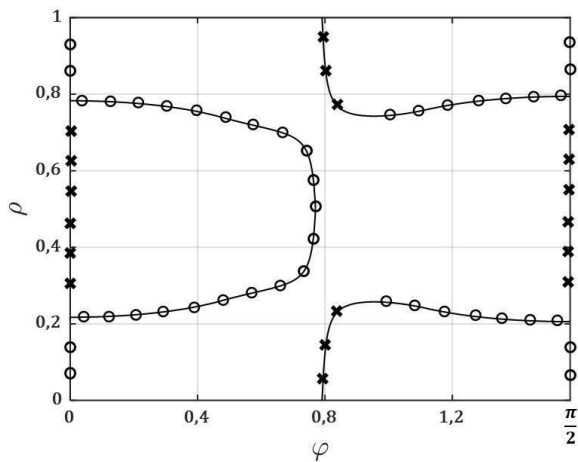


Рис. 8. Кривые состояний равновесия при $\delta = 1,01$.

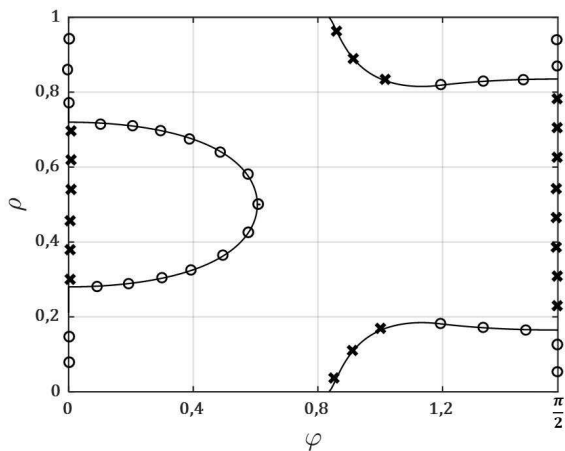
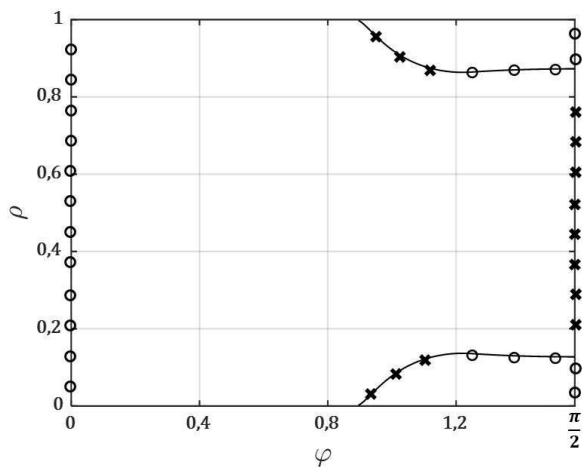
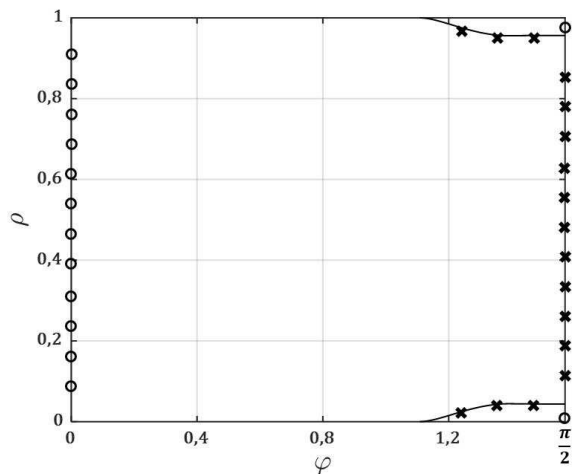


Рис. 9. Кривые состояний равновесия при $\delta = 1,1$.

Рис. 10. Кривые состояний равновесия при $\delta = \sqrt{3/2}$.Рис. 11. Кривые состояний равновесия при $\delta = 2$.

Интересно отметить, что значению $\delta = 1$ отвечает брус квадратного сечения, обладающий двумя дополнительными осями симметрии. Поэтому в данном случае имеет место равновесие $\varphi = \pi/4$ при любом ρ . Однако при незначительном увеличении δ мы получаем гораздо более сложную картину КСР, где ветвь $\varphi = \pi/4$ уже отсутствует. Кроме того, подчеркнем, что значение $\delta = \sqrt{3/2}$ выделено отдельно в связи с тем, что оно является наибольшим значением на границе области устойчивости равновесия $\varphi = 0$, представленной на рис. 3. Поэтому при достижении параметром δ значения $\sqrt{3/2}$ и последующем его увеличении положение равновесия $\varphi = 0$ уже не может быть неустойчивым ни при каком значении ρ .

Из серии построенных КСР можно сделать главный вывод: чем больше значение параметра δ , тем большим будет промежуток, в котором положения равновесия отсутствуют. Отметим также, что количественную проверку полученных результатов можно осуществить, построив графики потенциальной энергии для различных значений параметров δ и ρ : ее минимумы отвечают устойчивым положениям равновесия, а максимумы — неустойчивым.

В завершение разговора о равновесных положениях плавающего бруса прямоугольного сечения проиллюстрируем наглядно два нетривиальных равновесия. Легко представить себе равновесие в случае одновершинного погружения. В самом деле, если величина ρ достаточно мала и в жидкость погружена лишь малая часть бруса, то равновесие достигается, когда центр тяжести бруса оказывается ровно над центром тяжести вытесненной треугольной площади. В этом случае сила веса и архимедова сила действуют вдоль одной линии, уравновешивая друг друга. Эта ситуация представлена на рис. 12, и данное равновесие, конечно, является неустойчивым. Для убедительности здесь также изображены медианы треугольника, на пересечении которых и лежит центр тяжести треугольника.

Несколько более сложно представить равновесное положение в случае двухвершинного погружения. Это связано с тем, что здесь следует аккуратно подойти к подбору параметров задачи ρ и δ , поскольку они должны попадать в ОСР, приведенную на рис. 4. Например, примем $\rho = 1/2$, $\delta = 1, 1$. Первое соотношение означает, что в жидкость погружена ровно половина бруса, и в отклоненном положении площадь «подводной» трапеции также равна площади

«надводной» трапеции, так что центр тяжести бруса при любом отклонении остается на ватерлинии. Теперь нетрудно подобрать такое положение, когда центр тяжести вытесненной трапециевидной площади окажется лежащим ровно под центром тяжести бруса. Эта ситуация представлена на рис. 13, причем рассматриваемое равновесие является устойчивым, как это следует из рис. 9. Для убедительности здесь также изображена линия, соединяющая середины оснований трапеции, на которой и лежит ее центр тяжести.

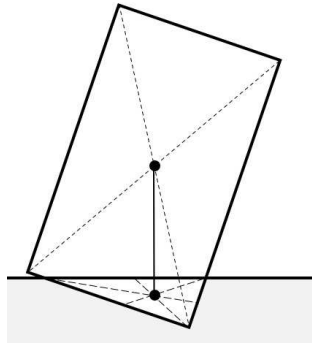


Рис. 12. Равновесие бруса при одновершинном погружении.

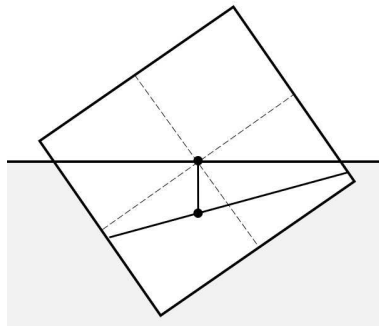


Рис. 13. Равновесие бруса при двухвершинном погружении.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя результаты проведенного исследования, заключаем, что положения равновесия прямоугольного бруса, плавающего в жидкости, существенно зависят от соотношения между его сторонами и соотношения между плотностями бруса и жидкости. Приведенные в работе графики кривых состояний равновесия наглядно демонстрируют эти зависимости, а также иллюстрируют характер устойчивости положений равновесия. В завершение отметим, что полученные результаты представляют как теоретический интерес, так и важное практическое значение в корабельном деле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скалина М. К., Смирнов А. С.* Равновесие и устойчивость прямоугольной баржи со смещенным центром тяжести в жидкости // Неделя науки СПбПУ. ИПММ, 2019. С. 95–98.
2. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложение. М.: Мир, 1980. 607 с.
3. *Гарбарук А. В.* Механика жидкости и газа. Задачи и решения. Ч. 1. СПб.: АРКУШ, 2003. 31 с.
4. *Меркин Д. Р., Смольников Б. А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. 534 с.
5. *Фан-дер-Флит А. П.* Остойчивость прямоугольного понтона при наклоне от 0 до 90° // Изв. СПб. Политехн. ин-та. 1908. Т. 10. С. 281–307.
6. *Фан-дер-Флит А. П.* Начальная остойчивость прямоугольных параллелепипедов // Изв. СПб. Политехн. ин-та. 1908. Т. 10. С. 397–406.
7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1952. 560 с.
8. *Меркин Д. Р., Бауэр С. М., Смольников Б. А., Смирнов А. Л.* Теория устойчивости в примерах и задачах. М.; Ижевск: РХД, 2007. 208 с.
9. Справочник по теории корабля в трех томах. Т. 2. Статика судов. Качка судов / Под ред. Я. И. Войткунского. Л.: Судостроение, 1985. 440 с.
10. *Валле Пуссен Ш.-Ж.* Лекции по теоретической механике. Т. 2. М.: ИИЛ, 1949. 328 с.
11. *Борисов Р. В., Луговский В. В., Мирозин Б. В., Рождественский В. В.* Статика корабля. СПб.: Судостроение, 2005. 256 с.
12. *Ржанецын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955. 476 с.
13. *Авраменко А. А., Архипов В. В., Асланов В. С., Тимбай И. А.* Динамика точки и механической системы: Учебное пособие для курсового проектирования. Самара: СГАУ, 1998. 84 с.

РАСЧЕТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ СХЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ФОРМО- И РАЗМЕРОСТАБИЛЬНОСТЬЮ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е.А. ВАСИЛЬЕВА

В статье на основе решения плоской задачи электроупругости и законов сохранения энергии исследуется возможность использования тканых композитов, состоящих из непрерывных пьезоэлектрических и металлических волокон из сплавов с памятью формы (СПФ) в единой структуре в качестве основного средства для обеспечения формо- и размеростабильности конструкции, выполненной из такого материала. Представлена общая схема управления деформациями, возникающими при внешнем воздействии в тканых композитах, за счет взаимодействия пьезоэлектрических компонент и компонент из СПФ между собой. Выведены определяющие соотношения для расчета основных механических и электрических характеристик пьезоэлектрических компонент. На основе баланса энергий выведены уравнения, связывающие температуру нагрева волокон из СПФ со временем и напряженностью электрического поля, создаваемого в пьезоэлектрическом волокне. Сделаны выводы о возможности применения данной схемы управления формо- и размеростабильностью в реальных тканых композитных структурах с пьезоэлектрическими компонентами и компонентами из СПФ.

1. ВВЕДЕНИЕ

В спутниках связи, космических обсерваториях и спутниках-ретрансляторах используются формо- и размеростабильные антенные отражатели (рис. 1). В настоящее время такие антенны эксплуатируются в диапазоне частот 4–6 и 11–14 ГГц, начинают осваиваться диапазоны 20–30 ГГц, а в ближайшее время планируется увеличить несущую частоту до 60 ГГц. Увеличение несущих частот требует создания крупногабаритных прецизионных зеркальных антенн, к которым предъявляются жесткие требования по стабильности формы и размеров рабочих поверхностей («зеркал»). Например, отклонение точности рабочих поверхностей антенных зеркал для спутников связи на 2 мм приводит к снижению коэффициента

усиления приблизительно на 10%. У лучших современных антенн, предназначенных для диапазона 10–12 ГГц, суммарное отклонение не превышает 0,5 мм. Для радиотелескопов, работающих в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин и имеющих размеры зеркала более 10 м, отклонение рабочей поверхности зеркала не должно превышать 2 мкм.

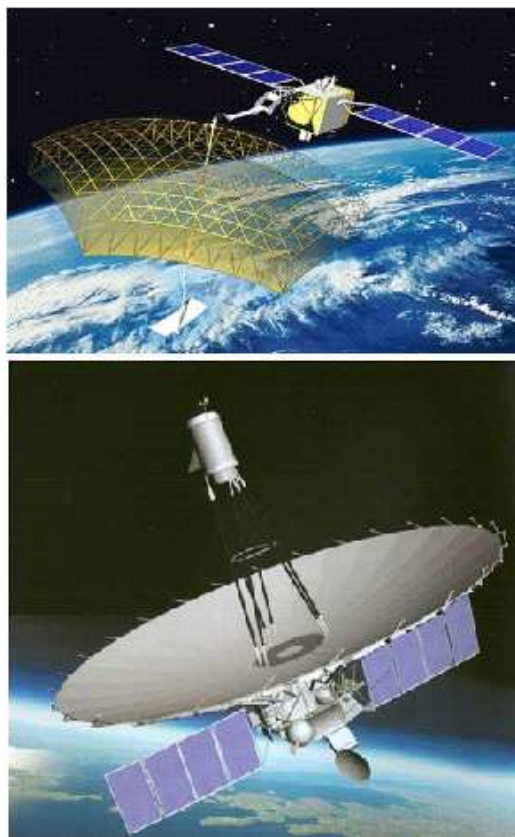


Рис. 1. Формо- и размеростабильные антенные отражатели.

Существенное влияние на формо- и размеростабильность зеркал крупногабаритных антенн и радиотелескопов оказывает внешнее воздействие факторов космического пространства (тепловые потоки, различные виды излучений и т.д.), вибрационные, гравитационные и аэродинамические нагрузки, а также внутренние факторы материала и конструкции (остаточные напряжения, старение материала и т.д.). В связи со значительными нежелательными деформациями, возникающими в процессе внешнего и внутреннего воздействия, остро стоит вопрос контроля и управления деформациями зеркала во время летной эксплуатации.

Особый класс управляемых конструкций — это интеллектуальные конструкции. Под понятием «интеллектуальная конструкция» в данном случае понимается конструкция, мониторинг состояния, а также активное управление прецизионными рабочими поверхностями которой основано на использовании активных элементов управления и мониторинга напряженно-деформированного состояния (НДС) — актуаторов и датчиков из интеллектуальных материалов, внедренных в структуру материала конструкции.

Активные элементы управления и мониторинга НДС могут быть изготовлены из материалов на основе непрерывных или коротких пьезоэлектрических волокон, проволок из сплавов с памятью формы, из диэлектрических эластомеров и пленок из магнестрикционных материалов и т. п.

Сложность проектирования такого рода конструкций обусловлена одновременным проектированием конструкции, самих активных элементов мониторинга и управления НДС, их взаимосвязи с конструкцией, а также проектированием алгоритмов управления активными элементами во время летной эксплуатации. Перечисленные особенности требуют создания специальных методик проектирования, учитывающих особенности функционирования активных элементов, их взаимодействия с материалом конструкции, а также позволяющих выбирать оптимальное положение активных элементов для максимально эффективного управления НДС конструкции, их количество и подаваемое на них активное усилие.

В настоящее время активно разрабатываются методики проектирования и создания интеллектуальных конструкций (например, [1–3]). Одним из выявленных недостатков является то, что при про-

ектировании и создании конструкции, содержащей активные элементы мониторинга и управления НДС, выбор типа материала того элемента осуществляется на начальных этапах проектирования. Изменение типа материала активного элемента требует возврата к начальному этапу проектирования и пересмотру их основных характеристик (таких как мощность, положение, количество и т. п.). Получается, что для активных элементов из различных интеллектуальных материалов нет единой методики проектирования и переход от проектирования конструкций и активных элементов управления, изготовленных из одних материалов, к проектированию из других материалов требуется модифицировать или даже полностью изменять как саму методику проектирования, так и математические модели, лежащие в ее основе.

Существенную роль в выборе подхода к проектированию интеллектуальных материалов и конструкций играет выбор масштаба уровня внутренней структуры, на котором идет проектирование. В зависимости от того, к какому типу относится материал, разделения диапазонов масштаба для внутренней структуры будет разным. Например, для металлов характерно наличие кристаллической решетки конкретного типа. У полимеров, наоборот, как таковой кристаллической решетки нет. Поэтому активно ведутся разработки обобщенных моделей материалов. Например, для описания уровней внутренней структуры предложена обобщенная классификация масштаба внутренней структуры [4]: макро-, мезо-, микро-, наноуровни и уровень тонкой структуры.

Макро- и мезоуровень допускают применение подходов механики сплошной среды, к которому в первую очередь относятся гипотеза сплошности и принцип Сен-Венана. При переходе к следующим структурным уровням сложность математического описания и экспериментальной проверки результатов усложняется на порядки.

На уровне макро- и мезоструктуры большой простор для проектирования интеллектуальных материалов и конструкций дают тканые композитные материалы, основанные на непрерывных волокнах и полимерной или металлической матрице. Основной особенностью тканых композитов является возможность варьировать параметры их внутренней структуры (различные типы переплетения волокон между собой, их физико-механические и геометриче-

ские характеристики) и таким образом получать фактически любые макроскопические свойства материала (физико-механические, тепловые, электрические, магнитные и т.д) в нужных проектировщику направлениях, оставаясь при этом в рамках механики сплошной среды. Примеры различных типов переплетений непрерывных волокон в тканых композитах представлены на рис. 2 [5].

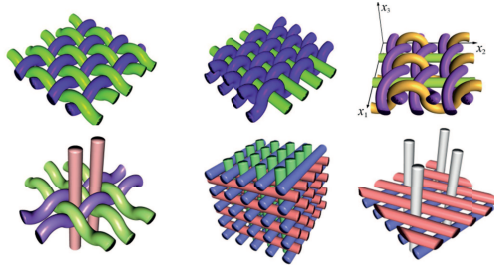


Рис. 2. Примеры переплетений непрерывных волокон в тканых композитах.

В данной работе предпринята попытка объединить в единой внутренней структуре композиционного материала несколько компонент, обладающих интеллектуальными свойствами, для управления формо- и размеростабильностью конструкций при внешнем воздействии за счет внутренних ресурсов материала. Все расчетные соотношения выведены на основе подходов механики сплошной среды.

2. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

На базе анализа основных работ по концепции «интеллектуального материала», представленной в [6,7], автор выделил следующие этапы, которые могут быть положены в основу обобщенного подхода для проектирования интеллектуальных материалов и конструкций:

Этап 0: Подготовка исходных данных, которая включает анализ основных целей и задач, выполняемых конструкцией, анализ опыта эксплуатации аналогичных конструкций, анализ проектных нагрузок и условий эксплуатации конструкции.

Этап 1: Проектирование структурных превращений внутри материала с учетом информации, полученной на этапе 0.

Этап 2: Проектирование внутренней структуры материала на основе этапа 1.

Этап 3: Проектирование конструкции.

Рассмотрим, как применяется описанный выше подход при проектировании формо- и размеростабильных конструкций. Для таких конструкций ключевыми исходными данными будет обеспечение формо- и размеростабильности конструкции при внешнем воздействии, связанным с её легкой эксплуатацией. В качестве алгоритма Этапа 1 выбран алгоритм, позволяющий преобразовывать энергию внешнего воздействия (механического и теплового) внутренней структурой материала таким образом, чтобы обеспечивать формо- и размеростабильность конструкции при эксплуатации исключительно ресурсами самого материала. Алгоритм преобразования такого внешнего воздействия представлен на рис. 3.

На схеме изображены источник энергии, актуатор, датчик и элемент управления и показано, как именно эти элементы взаимодействуют друг с другом.

Материал, который реализовывает данный алгоритм, имеет тканую композитную структуру, представленную на рис. 4. В ее состав входит несколько непрерывных армирующих волокон, связанных в единое целое полимерной матрицей.

Внутренняя структура такого материала имеет периодическую структуру, что позволяет выделить в нем ячейку периодичности (ЕС), состоящую из двух видов волокон (рис. 4). Одни волокна обладают пьезоэлектрическими свойствами, другие изготовлены из сплава с памятью формы. В данном случае матрица не учитывалась ни в геометрической схеме, ни в расчете, но именно матрица связывает компоненты в единую работоспособную структуру, а также участвует в уравнивании гистерезисных явлений, возникающих в активных компонентах материала.

В качестве датчика для тканой структуры, представленной на

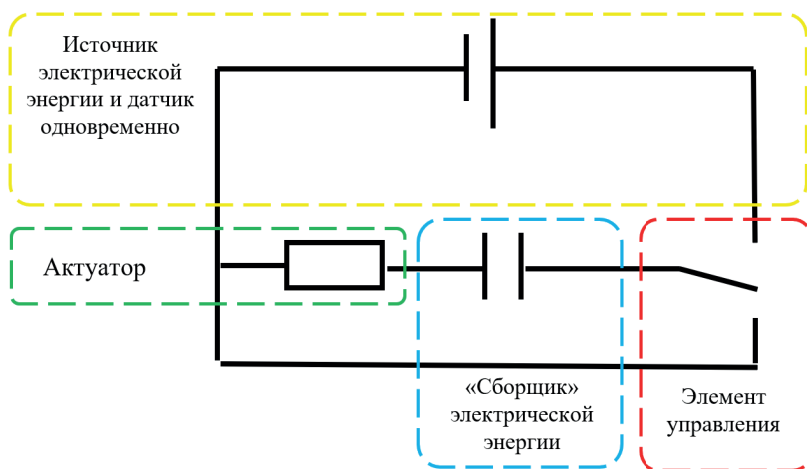


Рис. 3. Схема преобразования энергии.

рис. 4, выступает волокно из пьезоэлектрического материала, в качестве актуатора — волокно с памятью формы, в качестве сборщиков энергии и элементов управления — компактные суперконденсаторы, которые не показаны на рис. 3, т. к. выбор конкретной геометрии и положения данного компонента требует дополнительных исследований, выходящих за рамки данной статьи.

Алгоритм преобразования внешнего воздействия, представленный на рис. 3, будет следующим образом реализовываться внутренней структурой тканого материала. Под действием внешнего воздействия датчик испытывает деформацию $\Delta \epsilon_d$ и в нем появляются напряжения, равные $\Delta \sigma_d$. Изменение напряженно-деформированного состояния датчика приводит к его поляризации ΔP_d , появлению на его поверхности электрического заряда и напряженности электрического поля ΔE_d . За счет подбора расположения таких поверхностей друг относительно друга можно замкнуть линии напряженности электрического поля, выходящие из одной поверхности и входящие в другую, а между этими поверхностями расположить

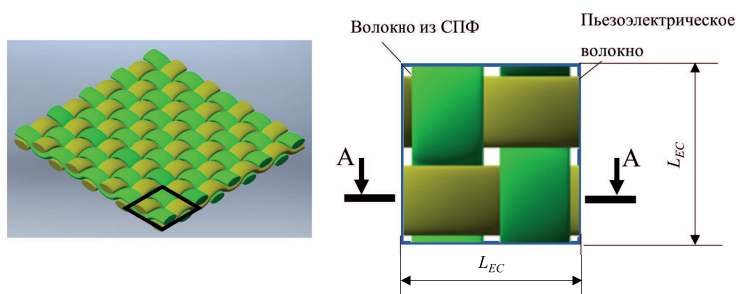


Рис. 4. Ячейка периодичности тканого композита.

металлический проводник из СПФ — актуатор, который будет активироваться при нагревании проходящим через него электрическим током.

Для реализации алгоритма, изображенного на рис. 3, можно подобрать с помощью тканых композитов геометрические и физические характеристики актуатора и датчика таким образом, чтобы датчик генерировал ровно столько электрической энергии (с учетом потерь), сколько нужно актуатору для активации. При этом не понадобятся дополнительные внешние аккумуляторы и/или процессоры для управления формо- и размеростабильностью конструкции.

В результате нагрева металлического проводника появляются дополнительные термдеформации $\Delta\varepsilon_T$, которые вносят вклад в общее значение деформаций и напряжений $\Delta\varepsilon_d$ и $\Delta\sigma_d$ и могут оказать влияние на работоспособность компонент материала, находящихся в непосредственном контакте с нагретым металлическим волокном.

Необходимо сказать несколько слов об элементах для сбора и хранения электрической энергии, представленных на рис. 3. Они введены в алгоритм для аккумуляции энергии, которая возникает от внешнего воздействия, приводящего к деформации меньше допустимого значения и, как следствие, не требующего работы актуатора. Поэтому при деформациях меньше допустимых тканый

материал функционирует как накопитель энергии без активного влияния на напряженно-деформированное состояние конструкции.

Основными результатами этапа проектирования материала будет получение эффективных (макроскопических) характеристик тканого композита. Если в рамках этого этапа удастся подобрать такие геометрические и физические характеристики компонентов ячейки периодичности, которые смогут обеспечить формо- и размеростабильность при внешнем воздействии на уровне ячейки, то можно использовать полученные эффективные характеристики ячейки периодичности как входные данные для поверочного расчета конструкции на этапе проектирования конструкции.

Для расчета напряженно-деформированного состояния датчика рассмотрим расчетную схему, представленную на рис. 5. При внешнем воздействии волокна претерпевают деформации, которые условно можно разделить на деформации растяжения, сжатия и изгиба.

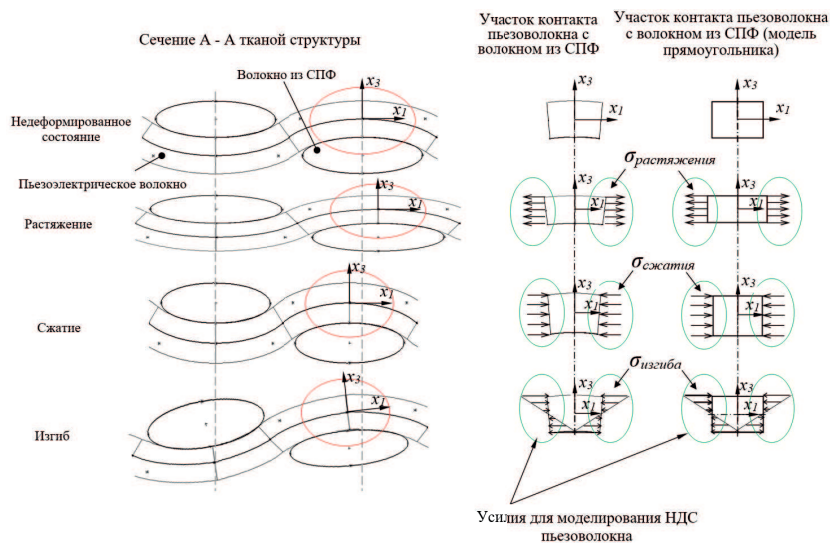


Рис. 5. Расчетная схема тканой структуры.

Слева на рис. 5 представлена картина деформации сечения А–А (см. рис. 4), на котором волокна имеют эллиптическое сечение. Но ввиду того, что контакт между пьезоэлектрическими волокнами и волокнами из СПФ в реальных тканых структурах происходит не по всему периметру эллипса и рабочим участком пьезоэлектрического волокна будет только область, отмеченная на рис. 5 красным овалом, для оценки напряженно-деформированного состояния заменим эллиптическое сечение прямоугольным. На рис. 5 справа изображена картина деформирования в этом случае. Итоговая геометрия пьезоэлектрического компонента для постановки задачи изгиба пьезоэлектрической консоли представлена на рис. 6.

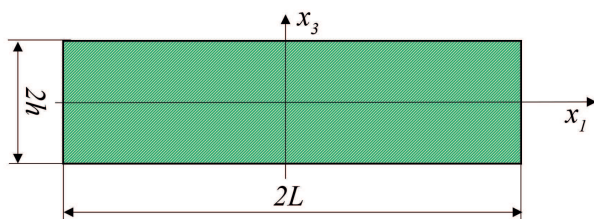


Рис. 6. Геометрическая схема пьезоэлектрической консоли.

Для описания НДС пьезоэлектрического прямоугольника рассмотрим плоскую задачу электроупругости для узкого прямоугольника, поляризованного по оси x_3 . Вдоль оси x_2 область принимается неограниченной, а внешнее воздействие, как электрическое, так и механическое, считается не зависящим от этой координаты. Уравнения электростатики для изгиба прямоугольной консоли таковы [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0, \\ E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad E_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Уравнения Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right).$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}|_{x_1=\pm L} &= \sigma_0 + \sigma_1 \cdot x_3, \\ \sigma_{13}|_{x_1=\pm L} &= \sigma_{33}|_{x_3=\pm h} = \sigma_{13}|_{x_3=\pm h} = 0, \\ \varphi|_{x_3=\pm h} &= \pm U_0, \quad D_1|_{x_1=\pm L} = 0.\end{aligned}$$

где $\sigma_{11}(x_1, x_3)$, $\sigma_{13}(x_1, x_3)$, $\sigma_{33}(x_1, x_3)$ — механические напряжения; $u_1(x_1, x_3)$, $u_3(x_1, x_3)$ — перемещения; $E_1(x_1, x_3)$, $E_3(x_1, x_3)$ — напряженность электрического поля; $D_1(x_1, x_3)$, $D_3(x_1, x_3)$ — индукция электрического поля вдоль оси x_1 и x_3 соответственно; $\varphi(x_1, x_3)$ — потенциал электрического поля; σ_0 и σ_1 — коэффициенты полиномиального уравнения для функции напряжения на границе $\pm L$; U_0 — внешняя разность потенциалов (в данном случае принимается равной нулю).

Решение данной задачи ищется методом, предложенным в [9], согласно которому функция напряжений и потенциал электрического поля представляются в виде полиномов с неопределенными коэффициентами. В качестве внешней нагрузки берется равномерно распределенное напряжение интенсивностью q . В результате получаются соотношения:

$$\begin{aligned}u_1(x_1, x_3) &= \frac{q \cdot S_{11}^E}{2I_{AD}}(1 - k_{31}^2) \left(L^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right) x_3 - d_{31} \frac{U_0}{h} x_1, \\ \sigma_{11}(x_1, x_3) &= \frac{q}{I_{AD}}(L^2 - x_1^2) \cdot x_3, \\ E_3(x_1, x_3) &= -\frac{U_0}{h} - \frac{q \cdot d_{31}}{2I_{AD} \cdot \varepsilon_{33}^\sigma}(L^2 - x_1^2) \cdot x_3,\end{aligned}$$

где S_{11}^E — упругая податливость пьезоэлектрического материала; I_{AD} — момент инерции поперечного сечения балки единичной ширины; $k_{31} = \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \cdot \varepsilon_{33}^\sigma}$ — вспомогательный коэффициент; d_{31} — пьезоэлектрический модуль; ε_{33}^σ — диэлектрическая проницаемость при постоянном механическом напряжении.

Теперь рассмотрим актуатор — металлический компонент из сплава с памятью формы. Часть проводника контактирует с разнополярными поляризованными поверхностями пьезоэлектрического волокна, как это показано на рис. 7. В результате такого контакта по проводнику проходит электрический ток.



Рис. 7. Расчетная схема для металлического компонента.

Нагрев проводника вызван движением зарядов, который определяется через вектор плотности электрического тока \mathbf{J} , который связан с напряженностью электрического поля, $\mathbf{J} = \lambda \cdot \mathbf{E}$.

Для модели проводника, представленного на рис. 7, берется только одна компонента вектора \mathbf{J} , направленная по оси x_{Me} , которая возникает под действием напряженности электрического поля, создаваемого на поверхности пьезоэлектрического волокна $E_3(x_1, \pm h)$.

Тогда уравнение для определения плотности электрического тока $j_{x_{Me}}$ будет выглядеть следующим образом:

$$E_3(x_1)|_{x_3=h} = -\frac{q \cdot d_{31}}{2I_{AD} \cdot \varepsilon_{33}^\sigma} (L^2 - x_1^2) \cdot h,$$

$$j_{x_{Me}} = \lambda \frac{q \cdot d_{31}}{2I_{AD} \cdot \varepsilon_{33}^\sigma} (L^2 - x_1^2) \cdot h,$$

где λ — электрическая проводимость, См/м.

Выражение для баланса энергий, которое позволяет связать температуру нагрева проводника с напряженностью внешнего элек-

трического поля, создаваемого пьезоэлектрическим компонентом, можно записать в следующем виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda \cdot E_3^2 \cdot S \cdot L \cdot dt = c \int_{T_1}^{T_2} dT \int_V \rho \cdot dV,$$

$$\Delta T = (T_2 - T_1) = \frac{\Delta t \cdot \lambda \cdot E_3^2}{c \cdot \rho_{Me}}, \quad \Delta t = (t_2 - t_1),$$

где T_1 — начальная температура проводника, °С; T_2 — конечная температура проводника, °С; ρ_{Me} — плотность материала проводника, кг/м³; V — объем участка проводника, м³; c — теплоемкость материала проводника, Дж/(кг·К); t_1 и t_2 — время, с; S — площадь поперечного сечения проводника, м².

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для расчета напряженно-деформированного состояния пьезоэлектрических компонент в качестве основы для определения геометрических характеристик ячейки периодичности, представленной на рис. 7, берется диаметр D_{PZT} пьезоэлектрических волокон из PZT, изготавливаемых фирмой Smart Materials [10]. Тогда геометрические характеристики тканой структуры будут следующие:

$$L_{EC} = 5 \cdot D_{PZT} + \frac{D_{PZT}}{4}, \quad L = D_{PZT}, \quad h = 0,5 \cdot D_{PZT},$$

где L_{EC} — размер ячейки периодичности (см. рис. 4). Физические параметры пьезоэлектрического компонента таковы [10, 11]:

1. Упругая податливость при постоянном электрическом токе пьезоэлектрических компонент:

$$S_{11}^E = 18,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}.$$

2. Пьезоэлектрические модули:

$$d_{33} = 400 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}, \quad d_{31} = -185 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}, \quad d_{15} = 560 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}.$$

3. Предел прочности при растяжении:

$$\sigma_b = 18,6 \text{ МПа}.$$

4. Точка Кюри:

$$T_c = 335 \text{ К.}$$

5. Плотность:

$$\rho_{PZT} = 7300 \text{ кг/м}^3.$$

6. Диэлектрическая проницаемость при постоянном механическом напряжении:

$$\varepsilon_{33}^\sigma = 1850 \cdot \varepsilon_0,$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная.

Физические параметры металлического компонента [12]:

1. Теплоемкость:

$$c = 392 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

2. Плотность:

$$\rho_{Me} = 6500 \text{ кг/м}^3.$$

3. Электрическая проводимость:

$$\lambda = 1,11 \cdot 10^6 \text{ См/м}.$$

Будем использовать в выражении для механического напряжения $\sigma_{11}(x_1, x_3)$ предел прочности на растяжение для пьезоэлектрической керамики ЦТС $\sigma_b = 18,6$ МПа, ограничивающий сверху значение напряженности электрического поля $E_{\max} = 2,1 \cdot 10^5$ В/м.

В качестве минимального времени, необходимого для нагрева проводника, для расчета выбрано характеристическое время пробега электронов [9], являющееся минимальным временем $\tau = 10^{-10}$ с, за которое электрон с минимально возможной скоростью пройдет путь от области контакта металла с пьезоэлектрическим волокном под напряженностью электрического поля, создаваемого деформируемой пьезокерамикой под предельным напряжением растяжения. В этом случае значение температуры будет равно $1,92$ °С. На графике зависимости температуры от напряженности и времени показано, какая температура достигается при увеличении E_{\max} в пять раз при минимальном времени пробега электронов τ (рис. 8, а).

Значение температуры, на первый взгляд, приемлемое, но такая напряженность поля может привести к разрушению металлического компонента.

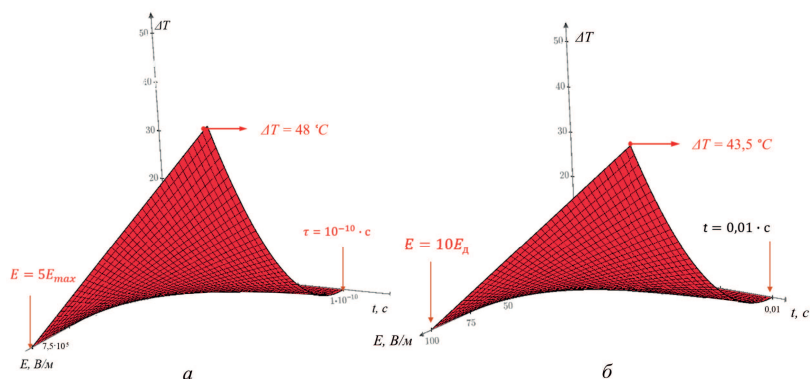


Рис. 8. График зависимости температуры нагрева проводника от времени и напряженности электрического поля.

Допускаемое значение силы тока, проходящего через металлический проводник, составляет примерно 10^7 А/м. Эта сила тока получается уже при напряженности электрического поля $E_d = 10$ В/м. С учетом этого температура проводника за время τ изменится всего на $4 \cdot 10^{-6}$ °С.

На графике зависимости температуры от напряженности и времени показано, какая температура может быть достигнута при увеличении времени протекания тока и допускаемого значения напряженности электрического тока E_d (рис. 8,б).

Таким образом, чтобы не разрушить пьезоэлектрический компонент и компонент из сплава с памятью формы, но при этом получить высокое значение температуры проводника, необходимо увеличить время прохождения электрического тока через проводник (металлический компонент из сплава с памятью формы). Введение в схему на рис. 3 компонент, отвечающих за аккумуляцию электрической энергии внутри материала и передачу этой энергии в заданном количестве в заданное время, можно считать обоснованным. Такие компоненты позволяют накапливать электрическую энергию

в том случае, когда внешнее воздействие не приводит к недопускаемым деформациям конструкции. Предварительный анализ литературных данных позволяет в качестве элемента, накапливающего электрическую энергию, выбрать компактные суперконденсаторы, внедряемые внутрь композиционного материала в качестве одной из компонент внутренней структуры.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Результаты расчетов показывают, что представленную схему перераспределения внешнего воздействия во внутренней структуре интеллектуального материала для обеспечения формо- и размеростабильности конструкции из тканого композиционного материала можно реализовать в реальной тканой структуре. Однако требуются дополнительные расчетные обоснования, учитывающие потери энергии, появление дополнительных термодформаций при активации волокна с памятью формы, а также учет внедрения суперконденсаторов как компактных компонент внутренней структуры композиционного материала.

Дальнейшим развитием данного научного исследования будет постановка оптимизационной задачи, которая позволит подбирать конкретные геометрические и физико-механические параметры компонент тканого материала для обеспечения заданного уровня формо- и размеростабильности конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крахин О. И., Кузнецов А. П., Косов М. Г. Сплавы с памятью формы. Основы проектирования конструкций. Старый Оскол: ТНТ, 2015. 396 с.
2. Уорден К. Новые интеллектуальные материалы и конструкции. Свойства и применение. М.: Техносфера, 2006. 224 с.
3. Молодцов Г. А., Биткин В. Е., Симонов В. Ф., Урмансов Ф. Ф. Формостабильные и интеллектуальные конструкции из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 2000. 352 с.
4. Сироткин О. С. Основы современного материаловедения. М.: Инфра-М, 2019. 364 с.
5. Ефремов Н. С., Митюшов Е. А., Берестова С. А. Параметрическое описание структуры армированных композитов и построение индикатрис их

- упругих свойств // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14, №1. С. 16–34.
6. Kelly A., Davidson R., Uchino K. Smart Composite Materials Systems // Comprehensive Composite Materials. 2000. Vol. 5. P. 469–474.
 7. Голубева Т. А., Короткова В. И., Золкина Т. Г., Гладышева Л. В. Концепция и основные принципы конструирования «интеллектуальных» материалов (Обзор) // Конструкции из композиционных материалов. 1995. №2. С. 3–20.
 8. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильштинский М. Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. 1. Введение в теорию термопьезоэлектричества. М.: URSS, 2010. 312 с.
 9. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Физматлит, 2019. 656 с.
 10. Smart Material Corp. Piezo Ceramic Fibers [Электронный ресурс]. Дата обновления: 2021. URL: <https://www.smart-material.com/PZTFiber-product-main.html> (дата обращения: 15.03.2021).
 11. Справочный каталог «Аврора-ЭЛМ». Таблица №2. Электрофизические параметры пьезоэлектрических материалов. [Электронный ресурс]. Дата обновления: 2020. URL: http://avrora-elma.ru/wp-content/themes/aurora/text/piezo_catalog_2020.pdf (дата обращения: 15.03.2021).
 12. Группа НиТиМет Компани: НиТиМет Компани и ИП Бондарев А.Б. Физико-механические свойства сплавов с памятью формы (Нитинол Ni-Ti). [Электронный ресурс]. Дата обновления: 2020. URL: <http://www.nitimet.ru/niti.php> (дата обращения: 15.03.2021).

ДЕФОРМАЦИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Е. Б. ВОРОНКОВА, В. В. ПОНОМАРЕВА

В работе рассматривается деформация трансверсально-изотропной круглой пластины переменной толщины под действием нормального давления. Разрешающие уравнения для функции прогиба выводятся с использованием теории анизотропных пластин С. А. Амбарцумяна в предположении, что толщина пластины изменяется при движении от центра пластины к её краю. Показано, как изменяется величина прогиба и положение точек перегиба в зависимости от закона изменения толщины.

1. ВВЕДЕНИЕ

При глаукоме атрофия волокон зрительного нерва происходит на уровне решетчатой пластинки (РП) склеры. При увеличении внутриглазного давления (ВГД) решётчатая пластинка прогибается, что приводит к пережатию проходящих сквозь неё нервных волокон, и глаз теряет свои зрительные функции [1–5].

Для построения адекватных математических моделей, описывающих поведение РП при изменении ВГД, требуются данные о механических и геометрических характеристиках как РП, так и других структур глазного яблока. В ряде работ показано, что прогиб РП можно исследовать отдельно от окружающих её склеральной ткани [3]. Ткань РП обладает сложной структурой, в исследованиях отмечается неоднородность и анизотропия РП [5]. В настоящей работе рассматривается РП переменной толщины и исследуется влияние переменной толщины пластины на величину и форму прогиба.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трансверсально-изотропную круглую пластину пе-

Доклад на семинаре 14 сентября 2021 г.

© Е. Б. Воронкова, В. В. Пономарева, 2021

ременной толщины, нагруженную на верхней и нижней поверхностях равномерно распределённым постоянным давлением p^+ и p^- соответственно.

Примем за координатную плоскость срединную плоскость пластины и введём координаты (r, θ, z) , где r, θ — полярные координаты, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, z — расстояние по нормали до срединной плоскости, R — радиус пластины (рис. 1). Предполагается, что толщина пластины меняется при удалении от центра пластины к её краю $h = h(r)$.

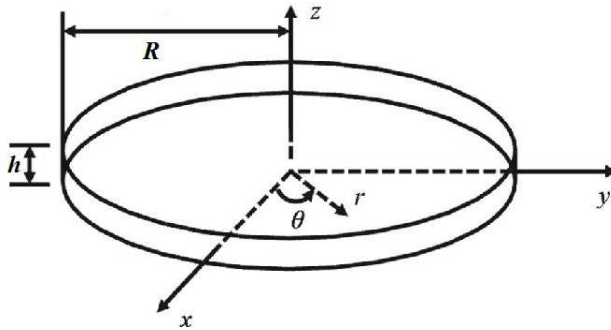


Рис. 1. Круглая пластина.

Материал пластины подчиняется обобщённому закону Гука и имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
 e_r &= \frac{\sigma_r}{E_1} - \frac{\nu}{E_1} \sigma_\theta - \frac{\nu'}{E_2} \sigma_z, & e_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{G'}, \\
 e_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E_1} - \frac{\nu}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu'}{E_2} \sigma_z, & e_{\theta z} &= \frac{\tau_{\theta z}}{G'}, \\
 e_z &= \frac{\sigma_z}{E_2} - \frac{\nu''}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu''}{E_1} \sigma_\theta, & e_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь E_1, E_2 — модули Юнга для направлений в плоскости пластины и перпендикулярных к ней соответственно; ν — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости, ν' — коэффициент Пуассона

на, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном к плоскости изотропии, а ν'' — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, перпендикулярном к плоскости изотропии, при растяжении в плоскости изотропии; G, G' — модули сдвига для плоскости изотропии и плоскостей, нормальных к плоскости изотропии соответственно.

Условия на верхней и нижней поверхностях пластины можно записать в виде (2). Нижняя и верхняя поверхности пластины нагружены равномерно распределенным давлением p^- и p^+ соответственно:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -p^+ & \text{при } z = h/2, \\ \sigma_z &= -p^- & \text{при } z = -h/2, \\ \tau_{rz} &= 0 & \text{при } z = \pm h/2. \end{aligned} \quad (2)$$

Исследование напряженно-деформированного состояния пластины проводится в рамках уточнённой линейной теории С. А. Амбарцумяна. Теория опирается на следующие гипотезы [1]:

1. Нормальное к срединной поверхности перемещение не изменяется по толщине.
2. Касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной поверхности пластины, изменяются по квадратичному закону.

Принятые гипотезы эквивалентны тому, что

$$\begin{aligned} u_z(r, \theta, z) &= w(r), \\ \tau_{rz} &= \frac{\varphi(r, \theta)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad \tau_{\theta z} = \frac{\psi(r, \theta)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_z(r, \theta, z)$ — нормальное перемещение точек пластины, $w(r)$ — нормальное перемещение точек срединной плоскости пластины, $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ — касательные напряжения, а $\varphi(r, \theta), \psi(r, \theta)$ — искомые функции координат r, θ .

Следуя [1] и полагая, что напряженно-деформированное состояние пластины является осесимметричным, выпишем выражения

для внутренних моментов для пластины переменной толщины:

$$\begin{aligned}
 M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) + K_1 \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) + K_2 \varphi + AP, \\
 M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + K_1 \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) + K_2 \nu \varphi + AP, \\
 D &= \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K_1 = \frac{h^2 D}{10G'}, \quad K_2 = \frac{h}{4G'} \frac{dh}{dr}, \\
 A &= \frac{h^2}{10} \frac{E_1 \nu'}{E_2(1-\nu)}, \quad P = -p^+ + p^-.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Система уравнений равновесия, описывающая осесимметричный поперечный изгиб пластинки, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r}{r} &= -P, \\
 \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= N_r,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $N_r = h^3 \varphi(r)/12$ — поперечная сила.

Подставив выражения для моментов (4) в уравнения равновесия (5), получим разрешающую систему дифференциальных уравнений относительно функции нормального прогиба $w(r)$ и функции напряжений $\varphi(r)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} \left(\frac{h^3}{12} \varphi \right) + \frac{h^3}{12} \frac{\varphi}{r} &= -P, \\
 D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{dD}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) - \\
 -K_1 \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} \right) - \frac{dK_1}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) - \\
 -K_2 \left(\frac{d\varphi}{dr} + (1-\nu) \frac{\varphi}{r} \right) - \frac{dK_2}{dr} \varphi - \frac{dA}{dr} P &= -\frac{h^3}{12} \varphi.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Из первого уравнения системы (6) можно получить

$$\varphi(r) = -\frac{6Pr}{h^3}. \tag{7}$$

Подставляя (7) во второе уравнение системы (6), мы получим разрешающее уравнение для нахождения нормального прогиба $w(r)$, которое должно быть дополнено граничными условиями. Считая, что край пластины жёстко защемлён, выпишем граничные условия на краю $r = R$:

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = -\frac{3P}{4G'h} \quad \text{при } r = R, \quad (8)$$

а в центре пластины $r = 0$ полагаем, что $dw/dr = 0$.

Для решения второго уравнения (6) с граничными условиями (8) второго дифференциального уравнения для определения прогиба w использовался прикладной математический пакет Wolfram Mathematica 9.0.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Расчёты напряженно-деформированного состояния круглой пластины, нагруженной нормальным давлением, проводились для пластин с различными законами изменения толщины, но одинаковой массы. Полагая, что материал пластины однородный, условие равенства массы сводится к условию равенства объёмов различных пластин.

Если закон изменения толщины пластины описывается формулой $h(r) = af(r/R) + b$, где a , b — некоторые размерные параметры, а $f(r/R)$ — достаточно гладкая безразмерная функция, определённая на $[0, 1]$, то объём пластины можно найти, используя

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{h(r)}{2} r dr d\theta. \quad (9)$$

Параметры a , b находятся из условия равенства $V = V_0$, где $V_0 = \pi R^2 h_0$ — объём эталонной пластины, и дополнительного условия, связывающего значения толщины в центре пластины и на краю $r = R$.

В работе рассмотрены линейный и квадратичные законы изменения толщины, как возрастающие, так и убывающие, и полага-

лось, что значения толщины в центре и на краю $r = R$ различаются в два раза.

В табл. 1 приведены формулы для нахождения параметров a , b .

Таблица 1. Значения параметров a , b для различных законов изменения толщины

Форма пластины (рис. 2)	Закон изменения толщины пластины	a/h_0	b/h_0
a	$h = ar/R + b$	3/5	3/5
b	$h = b - ar/R$	3/4	3/2
$в$	$h = ar^2/R^2 + b$	2/3	2/3
$г$	$h = b - ar^2/R^2$	2/3	4/3

Схематично форма пластины изображена на рис. 2.

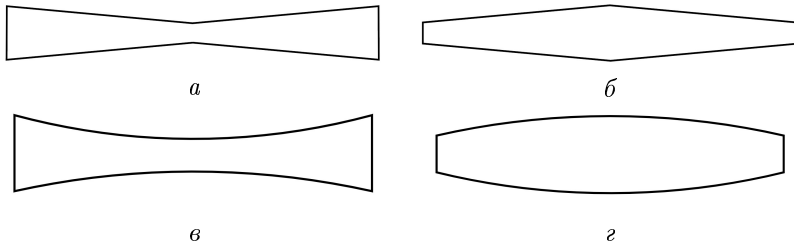


Рис. 2. Форма пластины: $h = ar/R + b$ (a); $h = b - ar/R$ ($б$); $h = ar^2/R^2 + b$ ($в$); $h = b - ar^2/R^2$ ($г$).

При расчётах примем следующие значения параметров пластины [3]: $E_1 = 1,43 \cdot 10^6$ Па, $E_2 = E_1/50$ Па, $\nu = 0,45$, $\nu' = 0,03$, $G' = 0,5 \cdot 10^6$ Па. Будем считать, что к пластине приложено давление $P = -15$ мм рт. ст. или $15 \cdot 133,32$ Па, радиус пластины равен $R = 1$ мм, а толщина эталонной пластины равна $h_0 = 0,1$ мм.

На рис. 3 приведены формы прогиба для пластины, толщина которой изменяется по линейному закону.

Из полученных результатов видно, что прогиб пластины a в центре на 25% больше прогиба пластины постоянной толщины, однако

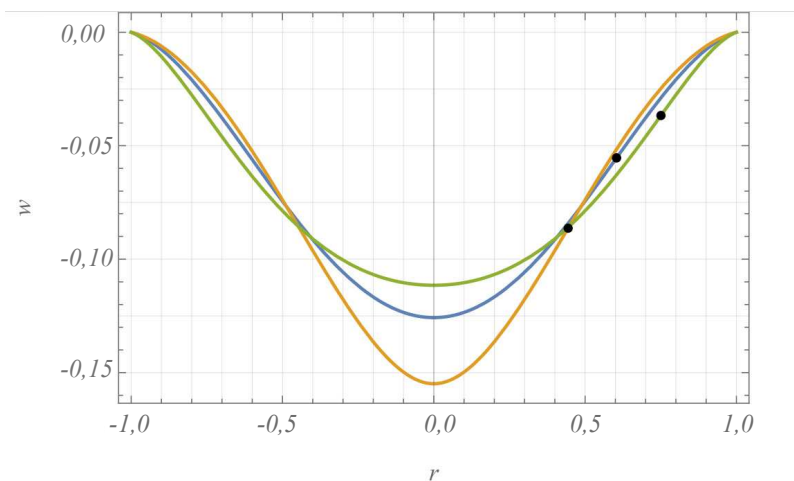


Рис. 3. Сравнение прогибов пластин с линейным законом изменения толщины. *Оранжевая линия* — пластина a ; *синяя линия* — пластина постоянной толщины; *зелёная линия* — пластина b . Отмечены точки перегиба.

вблизи края прогиб пластины a меньше прогиба пластины постоянной толщины. Для пластины b , толщина которой уменьшается от центра пластины к её краю, величина прогиба в центре меньше прогиба пластины постоянной толщины на 13%, а у края — больше по сравнению с пластиной постоянной толщины.

На рис. 3 отмечены также точки перегиба. Показано, что атрофия аксонов зрительного нерва происходит в окрестности точек, в которых производная от функции прогиба меняет знак [3, 6]. Расположение точек перегиба также изменяется в зависимости от того, как меняется толщина пластины. Для пластины a точка перегиба расположена ближе к центру, а в случае пластины b — ближе к краю пластины.

На рис. 4 показаны формы прогиба для пластины, толщина которой изменяется по квадратичному закону.

Видно, что, как и для изменения толщины по линейному закону,

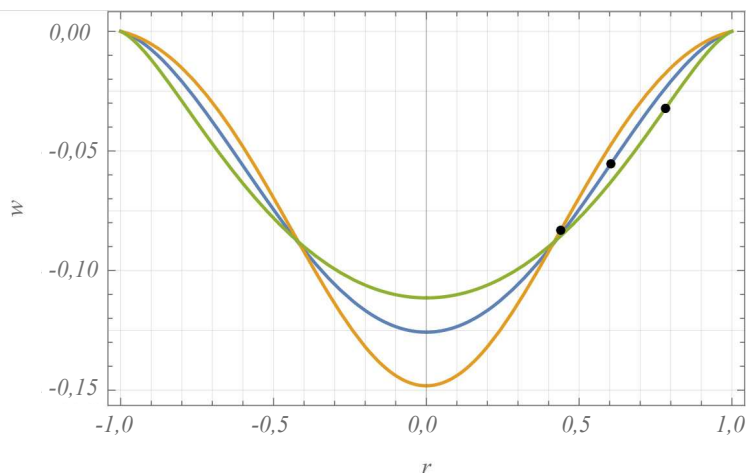


Рис. 4. Сравнение прогибов пластин с квадратичным законом изменения толщины. *Оранжевая линия* — пластина v ; *синяя линия* — пластина постоянной толщины; *зелёная линия* — пластина g . Отмечены точки перегиба.

при увеличении толщины пластины от центра к краю (пластина v), прогиб в центре на 22% больше, чем у пластины постоянной толщины, а в случае уменьшения толщины от центра к краю (пластина g) прогиб, наоборот, меньше на 15%. Точка перегиба пластины v при сравнении с пластиной постоянной толщины расположена ближе к центру, а пластины g — ближе к краю. Как отмечается в [3], при глаукоме точка перегиба смещается к краю.

Учитывая широкий разброс значений механических параметров РП глаза (модуля упругости), а также отсутствие данных о величине модуля сдвига G' и коэффициента Пуассона ν' , было исследовано влияние этих параметров на величину прогиба пластины.

В табл. 2 приведены значения прогибов пластины для различных значений модуля сдвига G' и коэффициента Пуассона ν' . При расчётах полагалось, что $P = -20$ мм рт. ст.

Расчёты показывают, что модуль сдвига G' оказывает суще-

Таблица 2. Зависимость величины прогиба пластины в центре $w(0)$ от модуля сдвига G' и коэффициента Пуассона ν'

	Толщина пластины $h(r)$, мм	G' , МПа	ν'			
			0,07	0,05	0,03	0,01
			$w(0)$, мм			
	0,1	0,5	-0,125	-0,125	-0,125	-0,125
<i>a</i>	$1,2 \cdot 0,05(r+1)$		-0,157	-0,154	-0,152	-0,149
<i>б</i>	$1,5 \cdot (0,1 - 0,05r)$		-0,109	-0,111	-0,113	-0,116
<i>в</i>	$4/3 \cdot 0,05 \cdot (r^2 + 1)$		-0,153	-0,151	-0,148	-0,145
<i>г</i>	$4/3 \cdot (0,1 - 0,05r^2)$		-0,106	-0,108	-0,111	-0,114
	0,1	0,35	-0,134	-0,134	-0,134	-0,134
<i>a</i>	$1,2 \cdot 0,05(r+1)$		-0,166	-0,163	-0,160	-0,158
<i>б</i>	$1,5 \cdot (0,1 - 0,05r)$		-0,118	-0,120	-0,122	-0,124
<i>в</i>	$4/3 \cdot 0,05 \cdot (r^2 + 1)$		-0,162	-0,159	-0,156	-0,153
<i>г</i>	$4/3 \cdot (0,1 - 0,05r^2)$		-0,110	-0,112	-0,115	-0,118
	0,1	0,2	-0,155	-0,155	-0,155	-0,155
<i>a</i>	$1,2 \cdot 0,05(r+1)$		-0,187	-0,184	-0,182	-0,179
<i>б</i>	$1,5 \cdot (0,1 - 0,05r)$		-0,140	-0,142	-0,144	-0,128
<i>в</i>	$4/3 \cdot 0,05 \cdot (r^2 + 1)$		-0,183	-0,180	-0,177	-0,174
<i>г</i>	$4/3 \cdot (0,1 - 0,05r^2)$		-0,120	-0,122	-0,125	-0,128

ственное влияние на величину прогиба пластины: различие в значениях может достигать 40%. Важность определения модуля сдвига отмечалась в работах [3, 5].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о прогибе трансверсально-изотропной пластины переменной толщины. Результаты показали, что переменная толщина пластины оказывает влияние на форму и величину прогиба пластины, а также на положение точек перегиба. При увеличении толщины пластины от края к центру точка перегиба смещается к внешнему краю пластины, в зону, в которой происходит глаукоматозное повреждение аксонов зрительного нерва.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость, колебания). М.: Наука, 1967.
2. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Models of shells and plates in the problems of ophthalmology // *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics.* 2014. Vol. 47, N 3. P. 123–139.
3. *Иомдина Е. Н., Бауэр С. М., Котляр К. Е.* Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. М.: Реальное Время, 2015.
4. *Нестеров А. П., Егоров Е. А.* Глаукоматозная атрофия зрительного нерва. М.: Медицина, 1981.
5. *Киселева О. А., Иомдина Е. Н., Якубова Л. В., Хозиев Д. Д.* Решетчатая пластинка склеры при глаукоме: биомеханические особенности и возможности их клинического контроля // *Российский офтальмологический журнал.* 2018. № 11(3). С. 76–83.
6. *Yan D. B., Flahgan J. D., Farra T., Trope G. E., Ethier C. R.* Study of regional deformation of the optic nerve head using scanning laser tomography // *Current Eye Research.* 1998. Vol. 17, N 9. P. 903–916.

ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХАРОЧНОГО ЗЕРКАЛА БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА

С.М. БАУЭР, В.Е. ВЕЛИЧКО

Рассматривается задача об определении оптимального положения опор для криволинейного двухарочного зеркала, деформирующегося под действием собственного веса и поддерживающегося шестью локальными нагрузками. Зеркало моделируется кольцевой пластиной переменной толщины. Задача разбивается на осесимметричную и циклически-симметричную и решается с использованием теории оболочек средней толщины Паляя-Спиро.

1. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕРКАЛА

Рассматриваемое двухарочное зеркало изображено на рис. 1.

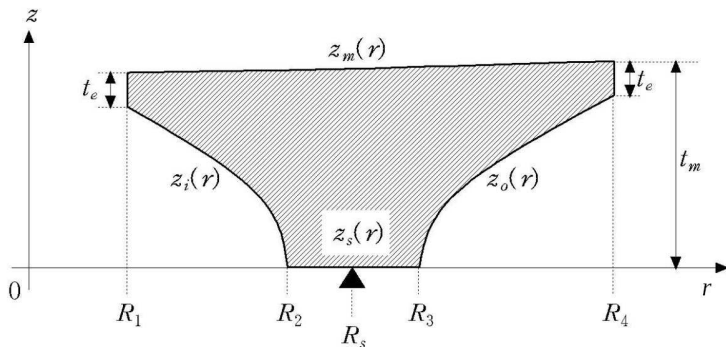


Рис. 1. Модель двухарочного зеркала.

Геометрические параметры зеркала задаются шестью величинами: R_1 — радиус центрального отверстия, R_2 и R_3 — внутренний и внешний радиус опорного кольца, R_4 — радиус зеркала, t_m —

максимальная толщина зеркала, t_e — минимальная толщина.

Профиль отражающей поверхности задается формулой

$$z_m = \frac{r^2/p_m}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_m)(r/p_m)^2}} + z_m(0),$$

где r — расстояние от оси симметрии зеркала до данной точки, p_m — радиус кривизны, k_m — коэффициент асферичности зеркальной поверхности,

$$z_m(0) = t_m - \frac{R_4^2/p_m}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_m)(R_4/p_m)^2}}.$$

Для задней поверхности зеркала

$$\begin{aligned} z_i(r) &= \sqrt{2p_i(R_2 - r)}, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \\ z_s(r) &= 0, \quad R_2 \leq r \leq R_3, \\ z_o(r) &= \sqrt{2p_o(r - R_3)}, \quad R_3 \leq r \leq R_4, \end{aligned} \quad (1)$$

где p_i и p_o — радиусы кривизны внутренней и внешней поверхностей:

$$p_i = \frac{[z_m(R_1) - t_e]^2}{2(R_2 - R_1)}, \quad p_o = \frac{[t_m - t_e]^2}{2(R_2 - R_1)}.$$

Различные конфигурации зеркала представлены на рис. 2.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Введем полярную систему координат:

$$\xi_1 = r, \quad \xi_2 = \varphi, \quad \zeta = z,$$

где ось z совпадает с осью зеркала. Сила тяжести направлена вертикально параллельно оси зеркала. Температурные деформации в зеркале не рассматриваются. Для качества конструкции важны значения поперечных перемещений криволинейной отражающей поверхности зеркала, называемой лицевой поверхностью. Параметры материала (Zerodur), из которого изготовлено зеркало, таковы: модуль Юнга $E = 9,1 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона

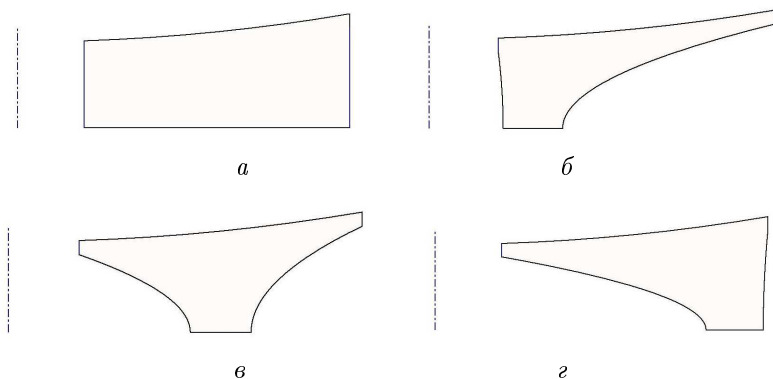


Рис. 2. Зеркала с различными профилями: *a* — цельное зеркало; *б* — $R_s = 0,15$ м; *в* — $R_s = 0,30$ м; *г* — $R_s = 0,45$ м.

$\nu = 0,24$, плотность $\rho = 2530$ кг/м³ [2]. Наружный диаметр зеркала $R_1 = 1$ м, внутренний — $R_2 = 0,2$ м, максимальная толщина зеркала $t_m = 0,17$ м, минимальная толщина $t_e = 0,02$ м, радиус кривизны отражающей поверхности $p_m = 3$ м, коэффициент асферичности $k_m = 0$.

На опорном кольце на равном расстоянии друг от друга расположено шесть опор ($n_{\text{sup}} = 6$), показанных на трехмерной модели зеркала на рис. 3. Опоры имеют размеры d_r и d_φ в радиальном и окружном направлениях соответственно. В рассматриваемом случае $d_r = d_\varphi = 0,04$ м. Радиус окружности расположения опор $R_s = (R_2 + R_3)/2$, ширина опорного кольца $t_s = R_3 - R_2 = 0,08$ м, угловые координаты расположения опор $\varphi_{s_i} = 2 \cdot \pi \cdot i / n_{\text{sup}}$ ($i = 0 \dots (n_{\text{sup}} - 1)$).

Для удобства решения задача разбивается на две [3]. Первая — осесимметричная задача для кольцевой пластины, к которой прикладывается имитирующая силу тяжести нагрузка, распределенная по всей поверхности пластины $\gamma(r)$, и противоположная ей нагрузка, распределенная по кольцу, где расположены опоры $p(r)$.

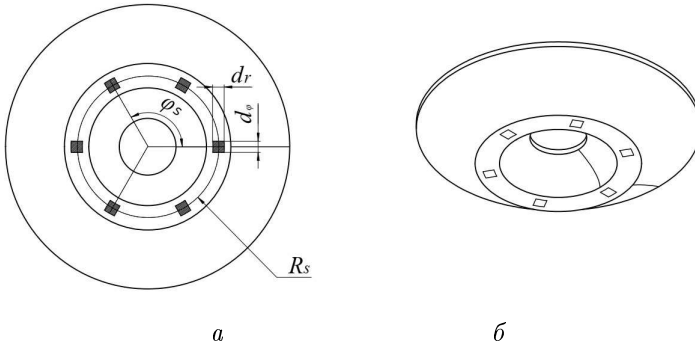


Рис. 3. Расположение опор на зеркале (а) и трехмерная модель зеркала (б) при радиусе опоры $R_s = 0,3$ м.

Суммарная величина нагрузок:

$$q(r) = -\gamma(r) + p(r) = \rho h(r)g + p(r),$$

где $h(r)$ — меняющаяся по координате r толщина пластины, $g = 9,8$ м/с² — ускорение свободного падения.

Вторая — циклично-симметричная задача для кольцевой пластины. В этой задаче отсутствует сила тяжести. Вместо этого к опорному кольцу прикладываются нагрузка $-p(r)$, равная по абсолютной величине нагрузке, введенной для осесимметричного случая, и нагрузки от реакции опор $p(r, \varphi)$:

$$q(r, \varphi) = q(r) = -p(r) + p(r, \varphi).$$

Полное решение задачи — сумма решений первой и второй задач.

Поскольку реальные нагрузки, действующие на зеркало, не сосредоточенные, а распределенные по некоторой площадке, они моделируются с помощью распределения Гаусса вида

$$p(r) = p_0 \frac{n_r}{\sqrt{\pi}} e^{-n_r^2 (r - R_s)^2}$$

и

$$p(r, \varphi) = p_0 \frac{n_r}{\sqrt{\pi}} e^{-n_r^2 (r - R_s)^2} \sum_{i=0}^{n_{sup}} \frac{n_\varphi}{\sqrt{\pi}} e^{-n_\varphi^2 (\varphi - (\varphi_{S_i})^2)}.$$

Здесь p_0 — коэффициент, определяемый из условий равновесия пластины; n_r и n_φ — параметры, определяющие ширину распределения Гаусса, связанные с размерами опоры по формулам $d_r = 2\sqrt{2}/n_r$, $d_\varphi = 2\sqrt{2}/n_\varphi$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПАЛИЯ–СПИРО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения задачи используется теория оболочек средней толщины Палия–Спиро (ПС), которая основана на следующих гипотезах [4]:

- Предполагается, что прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее поверхности приведения до деформации, остаются после деформации также прямолинейными.
- Учитывается изменение длины прямолинейного волокна оболочки.
- Напряжения обжатия по толщине σ_{33} изменяются по линейному закону.

Поверхностью приведения пластины является плоскость (r, φ) при $z = 0$. Возникающие на поверхности приведения пластины перемещения, углы поворота, усилия и моменты показаны на рис. 4. Далее индексы 1, 2, 3 соответствуют координатам r, φ, z .

Здесь T_1, T_2, T_{12} — продольные усилия; N_1, N_2 — поперечные усилия; M_1, M_2, M_{12} — моменты; u, v, w — перемещения точки на поверхности приведения по координатам r, φ и z соответственно; ϑ, ψ — углы поворота прямолинейных волокон пластины относительно координатных осей r и φ соответственно.

Математическая формулировка гипотез теории оболочек Палия–Спиро сводится к следующим равенствам:

$$u^*(z) = u + z\vartheta, \quad v^*(z) = v + z\psi, \quad w^*(z) = w + F(z), \\ \vartheta = \vartheta_0 + \gamma_1, \quad \psi = \psi_0 + \gamma_2,$$

где $u^*(z), v^*(z), w^*(z)$ — перемещения по координатам r, φ и z соответственно точки пластины, расположенной на расстоянии z от

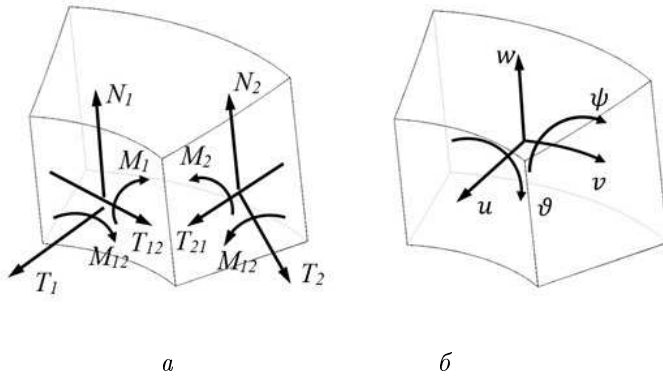


Рис. 4. Силы и моменты (а) и перемещения и углы поворота (б) на поверхности приведения пластины.

поверхности приведения; ϑ_0, ψ_0 — угол поворота нормали вокруг координатных осей r и φ соответственно; γ_1, γ_2 — углы сдвига вокруг координатных осей r и φ соответственно; $F(z)$ — функция, характеризующая изменение прогиба по толщине оболочки с учетом напряжения σ_{33} :

$$F(z) = \int_0^z \frac{\sigma_{33}(1 - \nu - 2\nu^2)}{E(1 - \nu)} dz - \frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - \frac{\nu}{1 - \nu}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{z^2}{2},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — деформации растяжения-сжатия, $\omega = \omega_1 + \omega_2$ — деформация сдвига на поверхности приведения, \varkappa_1, \varkappa_2 — изменения кривизны поверхности приведения, $\tau = 1/2(\tau_1 + \tau_2)$ — кручение поверхности приведения.

Теория ПС учитывает напряжение σ_{33} и изменение длины прямолинейного элемента. Это позволяет находить поперечные перемещения не только на поверхности приведения пластины, но и на отражающей поверхности зеркала.

При преобразовании с учетом заданной поверхности приведения систем уравнений равновесия, уравнений состояния и уравнений, связывающих перемещения и деформации, приведенных в [4],

получена система дифференциальных уравнений 10-го порядка. Решение такой системы дифференциальных уравнений ищется в виде разложения в ряд Фурье по следующим формулам [5]:

$$Q(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[Q_n^{(1)}(r) \sin n\varphi + Q_n^{(2)}(r) \cos n\varphi \right] \quad (2)$$

для $q, T_1, T_2, N_1, M_1, M_2, u, w, \vartheta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2$;

$$Q(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[Q_n^{(1)}(r) \cos n\varphi - Q_n^{(2)}(r) \sin n\varphi \right] \quad (3)$$

для $T_{12}, N_2, M_{12}, v, \psi, \omega_1, \omega_2, \tau_1, \tau_2$.

После подстановки (2) и (3) в систему дифференциальных уравнений ПС она распадается на ряд подсистем обыкновенных дифференциальных уравнений 10-го порядка для фиксированного волнового числа n :

$$\begin{cases} \frac{d(Q_i)_n}{dr} = \sum_{f=1}^5 (a_{if})_n (u_f)_n + \sum_{g=1}^5 (b_{ig}^*)_n Q_g + (a_{i0})_n, & i = \overline{1, 5}, \\ \frac{d(u_j)_n}{dr} = \sum_{f=1}^5 (a_{jf}^*)_n (u_f)_n + \sum_{g=1}^5 (b_{jg})_n (Q_g)_n + (b_{j0})_n, & j = \overline{1, 5}. \end{cases} \quad (4)$$

Усилия на краю пластины отсутствуют. Список основных переменных, используемых в системе уравнений (4), представлен в табл. 1. Остальные переменные, описывающие напряженно-деформируемое состояние, выражаются после решения подсистем через найденные в них неизвестные. Ограничим число решаемых дифференциальных уравнений волновым числом n_{\max} .

Таблица 1. Список неизвестных системы уравнений (4)

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
T_1	T_{12}	N_1	M_1	M_{12}	u	v	w	ϑ	ψ

4. ВЫВОД КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗЕРКАЛА ДЛЯ ЦИКЛИЧНО-СИММЕТРИЧНОГО СЛУЧАЯ

Отклонения отражающей поверхности зеркала обычно характеризуют двумя величинами: размахом (PV) и среднеквадратическим отклонением (RMS) волнового фронта. Размах волнового фронта для циклично-симметричного случая определяется по формуле

$$PV = \max W_{\text{err}} - \min W_{\text{err}}, \quad (5)$$

где W_{err} — ошибка волнового фронта. Ошибкой волнового фронта называют отклонение фронта волны от ближайшей к нему поверхности. Это отклонение измеряется вдоль нормали к контролируемой поверхности, в рассматриваемой задаче — это отражающая поверхность зеркала. Поверхность приведения пластины проходит через опорное кольцо зеркала. Перемещения по нормали к оптической поверхности вычисляются по формуле [6]

$$d_n = w^*(z_m(r))\sqrt{1 - (r\rho)^2} - \frac{r \cos(n\varphi)u^*(z_m(r)) + r \sin(n\varphi)v^*(z_m(r))}{p_m}.$$

Фокус зеркала можно приближенно считать расположенным на расстоянии $p_m/2$ от вершины поверхности. Тогда для угла падения и отражения луча θ при падении на зеркало плоской волны имеем:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{p_m}\right)^2}.$$

При этом ошибка волнового фронта при деформации зеркала вычисляется по формуле:

$$W_{\text{err}} = 2d_n \cos \theta.$$

RMS — более общий критерий отклонения волнового фронта, принимающий во внимание отклонение всей поверхности:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{S} \iint_S (W_{\text{err}} - \overline{W_{\text{err}}})^2 dS}, \quad (6)$$

где $\overline{W}_{\text{err}}$ — средняя арифметическая ошибка волнового фронта, S — площадь отражающей поверхности зеркала.

Поскольку решение представляется в виде ряда Фурье по окружной координате с волновым числом n , то формулу (5) можно записать в виде:

$$PV = \max \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}} (W_{\text{err}})_n \cdot \cos n\varphi \right) - \min \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}} (W_{\text{err}})_n \cdot \cos n\varphi \right),$$

а формула (6) после преобразований будет иметь следующий вид:

$$RMS = \sqrt{\frac{\pi}{S} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \int_{R_1}^{R_4} r (W_{\text{err}})_n^2 dr + \frac{2\pi}{S} \int_{R_1}^{R_4} r ((W_{\text{err}})_{n=0})^2 dr - \overline{W}_{\text{err}}^2},$$

где $(W_{\text{err}})_n$ — ошибка волнового фронта для гармоники с волновым числом n , $(W_{\text{err}})_{n=0}$ — ошибка волнового фронта при осесимметричной нагрузке.

После осреднения по всем гармоникам останется только среднее отклонение ошибки для осесимметричного случая нагрузки:

$$\overline{W}_{\text{err}} = (\overline{W}_{\text{err}})_{\text{осесим}} = \frac{2\pi}{S} \int_{R_1}^{R_4} r (W_{\text{err}})_0 dr.$$

Часто используемым критерием оптического качества поверхности является критерий Релея, согласно которому должны выполняться следующие ограничения: $PV < \frac{\lambda}{4}$, $RMS < \frac{\lambda}{14}$, где λ — длина волны излучения [7]. Из-за того что длина волны оптического диапазона имеет порядок 1 мкм, этот критерий становится жестким ограничением на отклонение оптической поверхности.

Для конечно-разностной модели с учетом циклично-симметричной задачи значения RMS вычисляются по формуле

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{j=1}^N w_j ((W_{\text{err}})_j)_n^2 + \sum_{j=1}^N w_j ((W_{\text{err}})_j)_{n=0}^2 - \overline{W}_{\text{err}}^2},$$

где $(W_{\text{err } j})_n$ — ошибка волнового фронта для j -го узла n -го волнового числа, N — число узлов конечно-разностной модели. Среднее арифметическое ошибки волнового фронта волнового фронта для конечно-разностного метода находится по следующей формуле:

$$\overline{W}_{\text{err}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w_j (W_{\text{err } j})_{n=0},$$

где $w_j = S_j/S$ — вес по площади j -го узла конечно-разностной модели; S_j — поверхностная площадь, ассоциированная с узлом j ; S — общая площадь поверхности.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

При расчете учитывались первые 90 гармоник. Выбор числа гармоник определялся так, чтобы на последней гармонике максимум распределения силы составлял менее 0,01 % от максимума распределения силы на нулевой гармонике:

$$\frac{\max(q(r))}{\max(q(r, n_{\text{max}}))} < 0,01\%.$$

Система уравнений (4) решалась методом прогонки. В связи с тем что при больших значениях волнового числа наблюдалась неустойчивость решения, приходилось проводить ортогонализацию на каждом шаге [5]. Результаты решения для различных радиусов окружности расположения опор R_s показаны в табл. 2, а зависимость RMS от радиуса кольца опор R_s зеркал — на рис. 5.

Оптимальным считается случай, при котором достигаются минимальные значения RMS . В частности, для кривой на рис. 5 оптимальное значение достигается при $R_s^* = 0,35$ м, при этом $RMS = 9,6$ нм.

Допустимыми являются значения качества $RMS < \lambda/14$ при $\lambda = 632,8$ нм, которые достигаются при радиусах опорного кольца в пределах 0,315–0,380 м. При увеличении радиуса опорного кольца масса зеркала увеличивается. Поэтому если мы заинтересованы в уменьшении веса зеркала, то следует взять значение радиуса, совпадающее с левой границей допустимого интервала $R_s = 0,315$ м.

Таблица 2. Значение массы и среднеквадратичной ошибки отклонения по теории Паляя–Спиро.

R_s , м	Масса зеркала, кг	RMS , нм	PV , нм
0,150	100,845	245,436	902,549
0,175	107,993	204,399	767,062
0,200	115,355	170,349	650,47
0,225	122,929	141,191	545,677
0,250	130,718	114,814	446,286
0,275	138,719	89,3015	346,816
0,300	146,935	63,06	242,66
0,325	155,363	35,0341	133,177
0,350	164,005	9,6414	51,0893
0,375	172,861	35,2212	152,536
0,400	181,931	74,9753	307,764
0,425	191,214	120,254	483,129
0,450	200,710	170,994	678,225

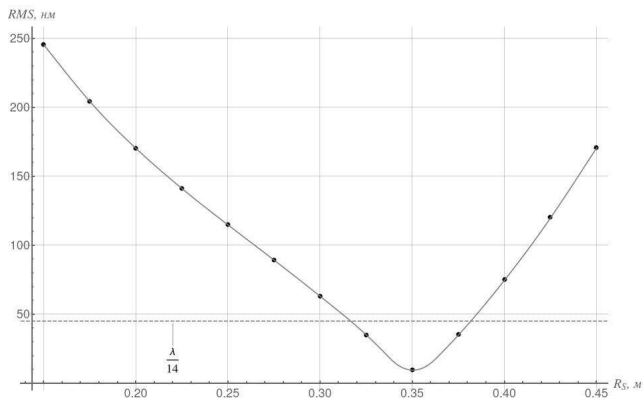
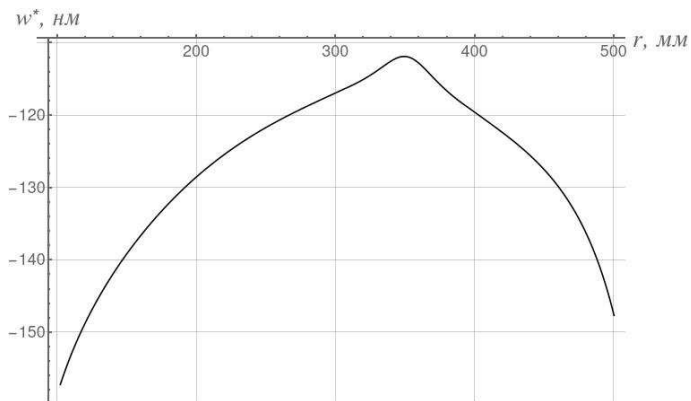
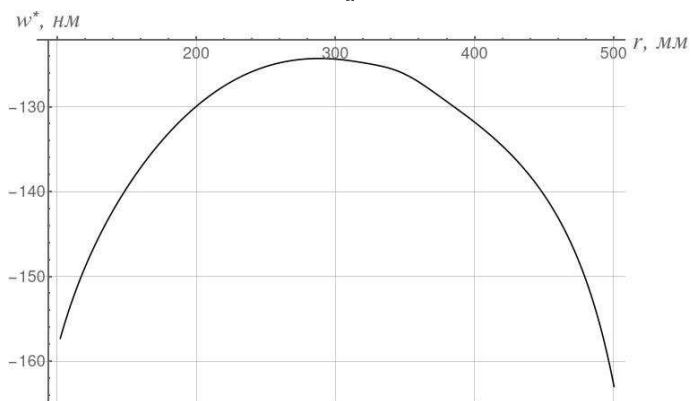


Рис. 5. Зависимость RMS отражающей поверхности от различных конфигураций зеркал, заданных через радиус кольца опоры R_s . Уровнем показано значение $\lambda/14$.



а



б

Рис. 6. Поперечные перемещения отражающей поверхности зеркала при радиусе кольца опор $R_s = 0,35$ м в сечении, проходящем через опору (а), и в сечении, проходящем между опор (б).

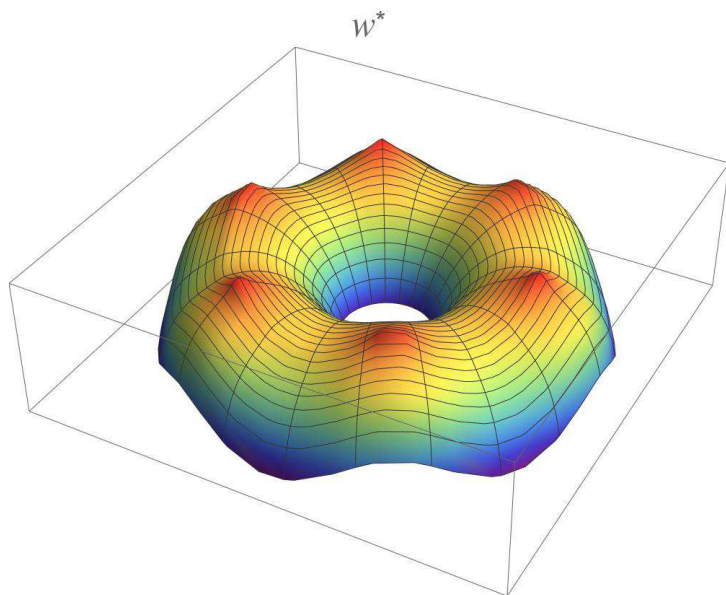


Рис. 7. Трехмерный график поперечных перемещений зеркала при $R_s = 0,35$ м.

Тогда при небольшом ухудшении качества оптической поверхности масса зеркала будет меньше, чем при R_s^* , на 15 кг.

На рис. 6 показаны перемещения (4) по теории ПС на лицевой поверхности в сечении, проходящем через опору ($\varphi = 0$), и в сечении, проходящем между опор ($\varphi = \pi/6$), при оптимальном значении $R_s = 0,35$ м. Как видно, отклонения внутреннего и внешнего края зеркала в среднем равны друг другу. На нижней поверхности зеркала на опорном кольце перемещения w^* отсутствуют. Легко увидеть, что отражающая поверхность зеркала над опорой имеет обжатие по толщине, которое учитывается теорией ПС.

Для этого же случая на рис. 7 представлено трехмерное изображение поперечных перемещений для отражающей поверхности зеркала, на котором выделяются места расположения опор.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривался прогиб отражающей поверхности двухарочного зеркала с заданными ограничивающими геометрическими параметрами под собственным весом. Зеркало расположено на 6 опорах. Задача решалась с помощью теории оболочек средней толщины Палия–Спиро. При этом зеркало рассматривалось как пластина переменной толщины. Решалась параметрическая задача зависимости среднеквадратичного отклонения волнового фронта отражающей поверхности зеркала (по которому оценивалось оптическое качество зеркала) от радиуса кольца опор.

Качество оптической поверхности зеркала определяется среднеквадратичным отклонением волнового фронта RMS. Зависимость качества поверхности от радиуса опорного кольца R_s имеет вид U -образной кривой, минимум которой для рассматриваемого зеркала достигается при $R_s^* = 0,35$. При заданных ограничениях на оптическое качество зеркала допустимый радиус опорного кольца лежит в пределах 0,315–0,380 м. Уменьшая радиус опорного кольца в допустимых пределах, удается уменьшить массу зеркала без значимой потери качества отражающей поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Park S. J., Sim S. H., Chung C. S., Kang E. C., Kim J. K.* Design of primary mirror for laser beam director. ICO20: Optical Design and Fabrication / Eds James Breckinridge, Yongtian Wang // Proc. of SPIE. 2006. Vol. 6034, 60340F.
2. *Viens M. J.* Fracture Toughness and Crack Growth of Zerodur// NASA Technical Memorandum 4185, April 1990. P. 30.
3. *Бауэр С. М., Ковалев А. М., Петров М. Б. и др.* Расчет и оптимизация металлических зеркал телескопов / Под ред. М. И. Улитина. СПб.: Издательство СПбГУ, 1997. 228 с.
4. *Палий О.М., Спиро В.Е.* Анизотропные оболочки в судостроении. Л.: Судостроение, 1977. 392 с.
5. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1981. 544 с.
6. *Doyle K.B., Genberg V.L., Michels G.J.* Integrated optomechanical analysis. Second Edition. Bellingham, Washington, USA: SPIE Press, 2012. P. 383.
7. *Сокольский М. Н.* Допуски и качество оптического изображения. Л.: Машиностроение. Ленинградское отделение, 1989. 221 с.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

К ВОПРОСУ О ВЫВОДЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

С. В. Каштанова, А. В. Ржонсницкий

Доклад на семинаре 8 сентября 2020 г.

В работе предлагается новый аналитический подход к выводу формул для напряжений цилиндрической оболочки с круговым отверстием при растяжении вдоль образующей. Постановка задачи и решение методом разложения по малому параметру β , характеризующим отношение радиуса отверстия, толщины оболочки и радиуса кривизны, принадлежит А. И. Лурье (40-е гг. XX века). Далее всплеск интереса наблюдался в середине 60-х и начале 70-х у зарубежных ученых, нашедших ошибку в граничных условиях у А. И. Лурье и решающих эту задачу либо тем же способом (Murthy, Naghdi, Eringen), либо численным методом коллокаций (Lekkerkerker, Eringen, Naghdi, VanDyke). Нерешенной эту задачу назвать нельзя, однако и решение ее найти трудно. Доступен лишь алгоритм, не обоснованный строго математически, и таблицы для решений при конкретных значениях параметров, полученные методом коллокаций. Решение ищется в виде линейной комбинации функций Ханкеля от комплексной переменной. Для разложенных в ряд коэффициентов этой линейной комбинации получается линейно зависящая система, при этом вопрос разрешимости этой системы не исследуется, вследствие чего приходится применять различные уловки для нахождения одного из приближенных решений. Все это значительно усложняет процедуру.

Авторы нашли решение, построенное на комбинациях функций Ханкеля и Бесселя от комплексных переменных, в другой форме и предложили качественно новый аналитический подход, не применяющий разложение по малому параметру β , а использующий разделение переменных. Система решается алгебраическими методами и позволяет находить решение в диапазоне для β от 0 до 4, в то время как в предыдущих решениях максимальное значение β не превосходило 0,2 (при больших значениях модель не удовлетворяла граничным условиям), т. е. диапазон применимости задачи увеличился в 20 раз. В единственной работе (VanDyke), основанной на методе коллокаций, значения β достигают величины 4, результаты этой работы хорошо согласуются с нашими. Предложенный подход позволяет дать механическую интерпретацию влияния радиуса кривизны оболочки на появление различных частот в конечных формулах для прогиба и напряжений.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОПИСАНИЯ
В ЗАДАЧАХ ГИПЕРВОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ
И ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Д. В. Матяс

Доклад на семинаре 25 сентября 2020 г.

В работе проводится исследование некоторых задач с помощью пространственного описания. В частности, изучаются гиперболические термоупругие волны в твердом теле и газе. Гиперболические волны описываются с помощью математической модели, учитывающей релаксацию теплового потока, благодаря чему тепловое возмущение имеет конечную скорость. Как для твердого тела, так и для газа формулируются интегральные системы уравнений, которые позволяют использовать метод конечных объемов. Кроме того, в работе изучается процесс раскрытия трещины в горной породе под действием внутреннего давления. При пространственном описании давление моделируется объемным усилием, движущимся вместе с берегами трещины. Интегральная формулировка связи полей деформации и скорости позволяет использовать метод конечных объемов. Также в работе исследуется процесс распространения волн на границе раздела сред с разными жесткостями в континууме с вращательными степенями свободы. Варьируется угол падения и тип волны (крутильная, изгибная).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОТОТИПА РАКЕТЫ

Д. А. Анохин

Доклад на семинаре 20 октября 2020 г.

Целью работы является исследование динамики движения ракеты. Области применения результатов исследования являются: ракеты-носители, частный космос, метеоракеты. В работе оптимизируются аэродинамические характеристики (АДХ) летательного аппарата (ЛА), что увеличивает управляемость ракеты, её способность более оперативно изменять собственную траекторию во время полёта. Изначально целью работы было изучение динамики движения ракеты и исследование точности наведения. Но результаты первого моделирования показали, что первоначальные аэродинамические характеристики не обеспечивают эффективное управление ракетой. Была поставлена задача получить такие АДХ ЛА, которые дадут возможность успешного выполнения поставленной задачи, создав алгоритм, позволяющий осознанно менять АДХ.

Другой результат исследования — увеличение точности достижения движущейся цели летательным аппаратом. Моделируя движение объектов и анализируя полученные результаты, была выдвинута гипотеза, позволившая получить формулу, описывающую динамическое изменение одного из двух коэффициентов системы наведения. В частности, при некоторых начальных условиях эта формула помогает существенно уменьшить минимальный промах.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АЛЮМИНИЕВЫХ ЗАГОТОВОК ПРИ ГЛУБОКОМ ПРОДАВЛИВАНИИ

Д. А. СЕРЕБРЯКОВ

Доклад на семинаре 27 октября 2020 г.

Исследование напряженно-деформированного состояния алюминиевых заготовок при глубоком продавливании. В работе методом конечных элементов проведено исследование напряженно-деформированного состояния алюминиевых заготовок при производстве элементов преломляющих линз для рентгеновской оптики методами глубокого продавливания. Построена физико-математическая модель упругопластического поведения при больших степенях деформации технически чистого алюминиевого сплава А0. Вычислительный эксперимент заключался в моделировании одностороннего и двухстороннего продавливания пустот параболической формы в алюминиевых заготовках, имеющих форму шайб. В результате исследования оценена эффективность выбранного метода производства, дана оценка оснастке и технологическим режимам, определены степени пластической деформации при обработке, которые достигают десятков процентов в локальных зонах заготовок.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО УДАРА С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА ПРОГРАММ ЛОГОС

Д. В. ЧЕПЕЛА, Ю. Н. БУХАРЕВ

Доклад на семинаре 10 ноября 2020 г.

Численное моделирование задач высокоскоростных соударений необходимо для обоснования работоспособности космических аппаратов, подвергающихся воздействиям частиц твердых тел.

Разработанный во ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» (г. Саров) пакет программ ЛОГОС предназначен для расчета задач тепломассопереноса, турбулентной гидро-, аэродинамики и распространения тепла на суперЭВМ с массовым параллелизмом. В 2017–2018 гг. сотрудниками и студентами СарФТИ совместно с разработчиками ПП ЛОГОС выполнены НИР по верификации и развитию моделей и методик ПП ЛОГОС для решения задач высокоскоростного (до 10 км/с) удара. Полученные результаты были введены в модернизированную версию ПП ЛОГОС, которая использована в данной работе.

Целью работы является исследование процессов формирования и развития запреградных осколочных потоков при пробитии тонких алюминиевых пластин при воздействии на них сферического алюминиевого ударника с помощью численного моделирования по методикам SPH-3D, 2D ПП ЛОГОС, анализ и обобщение полученных данных в сравнении с экспериментальными результатами, другими расчётными данными.

**ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ
В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ**

А. А. Глушкова, А. А. Папин

Доклад на семинаре 17 ноября 2020 г.

Рассматривается математическая модель совместного движения двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде. Данная модель является обобщением классической модели Маскета–Леверетта (Musket–Leverett), в которой пористость считается заданной функцией пространственной координаты. Учет сжимаемости пористой среды является принципиальным моментом.

В работе изучается квазилинейная система уравнений составного типа, описывающая одномерное нестационарное движение двухфазной смеси в деформируемой пористой среде. Исследована задача об устойчивости стационарного решения и построено точное решение задачи о фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в деформируемой пористой среде.

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ
К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
КОЛОННОГО ГРАФЕНА**

Е. А. Иванов

Доклад на семинаре 2 марта 2021 г.

В докладе рассматривается применение метода молекулярной динамики к исследованию энергетической устойчивости колонного графена при абсорбировании на нем фосфолипидов. Колонный графен может быть использован в качестве водного фильтра или в качестве контейнера для переноса активных веществ в организме живых существ. В ряде работ показано, что в водной среде углеродные наноструктуры имеют тенденцию к агрегированию. Для преодоления этой проблемы обычно применяют поверхностно-активные вещества (ПАВ), к которым относятся фосфолипиды.

В работе построена компьютерная модель элементарной ячейки колонного графена с различными геометрическими параметрами. Проведено численное моделирование системы «колонный графен–фосфолипид(ы)–вода». Построен график зависимости энергетической устойчивости системы от концентрации фосфолипидов.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО
ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ В КАНАЛЕ С ПРЕПЯТСТВИЕМ**

Д. Е. Бабинькин

Доклад на семинаре 13 апреля 2021 г.

Целью работы является проведение расчетов течения воды в канале с препятствием. Такие расчеты необходимы для последующего использования в ка-

честве входных данных виброакустической задачи. Для выполнения поставленных задач используется программный комплекс с открытым исходным кодом OpenFoam. На основе анализа полученных распределений давления исследуется влияние препятствия на течение жидкости в подобных каналах, определяется характер возникновения вихрей, возможные области их возникновения, области с наименьшими и наибольшими значениями давления и скорости.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПРИ ПОДВИЖКАХ ГРУНТА

М. М. Никулина

Доклад на семинаре 27 апреля 2021 г.

Вопросы оценки прочности и долговечности трубопроводов актуальны как с экономической и экологической точек зрения, так и для предотвращения техногенных аварий и катастроф. В работе исследуется напряженное состояние линейной части трубопровода, изогнутого вследствие заданных подвижек грунта. Задача решается в рамках линейной теории упругости с использованием гипотезы плоских сечений и с учетом осевого натяжения, вызванного удлинением трубы. Также исследуется влияние утончения стенки трубы вследствие общей равномерной коррозии на напряженное состояние трубы при фиксированных смещениях и углах наклона концевых сечений. Представлены примеры, иллюстрирующие погрешность известных решений, не учитывающих осевого натяжения в трубе, по сравнению с решением, приведенным в данной работе.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА МЕЗОУРОВНЕ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. Самсонов

Доклад на семинаре 18 мая 2021 г.

В докладе представлены результаты экспериментального исследования динамического нагружения алюминиевого сплава Д16 при помощи газовой пушки и теоретического описания пластического фронта волны с привлечением дислокационных представлений о природе пластической деформации. Наиболее значимой частью работы является проведенный эксперимент по нагружению алюминиевой мишени плоским ударником и фиксирование скорости тыльной поверхности мишени при помощи интерферометра. Подробно обсуждаются постановка эксперимента и его особенности.

ОБ АВТОРАХ

Анохин Дмитрий Александрович — студент первого курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики Санкт-Петербургского государственного университета, выпускник Балтийского государственного технического университета («ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова), специальность — «баллистика и гидроаэродинамика».

E-mail: dima-ano0@yandex.ru

Бабинькин Дмитрий Евгеньевич — студент первого курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: вычислительная гидрогазодинамика. Научный руководитель — доц. А. Г. Карпенко. E-mail: st054448@student.spbu.ru

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физ.-мат. наук, профессор математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: биомеханика, механика тонкостенных конструкций, математическое моделирование. E-mail: s_bauer@mail.ru

Бухарев Юрий Николаевич — доктор технических наук, профессор кафедры «Общетехнические дисциплины и электроника» Саровского ФТИ НИЯУ МИФИ. E-mail: bbyun@yandex.ru

Васильева Екатерина Андреевна — аспирант третьего года обучения математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, направление подготовки: «Механика деформируемого твердого тела», кафедра Теории упругости. Научный руководитель — проф. А. Е. Волков.

E-mail: eavasileva@atomproekt.com

Величко Виктор Евгеньевич — ведущий инженер АО «Раменский приборостроительный завод», аспирант Института проблем машиноведения РАН. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, теория пластин и оболочек, опти-

мизация в механике, теория устойчивости.

E-mail: viktor.velichko@mail.ru

Воронкова Ева Боруховна — кандидат физ.-мат. наук, доцент факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, теория пластин и оболочек, биомеханика. E-mail: e.voronkova@spbu.ru

Глушкова Анна Алексеевна — студентка первого курса магистратуры кафедры теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета, выпускница Алтайского государственного университета (Барнаул), специальность — прикладная математика и информатика. E-mail: anka98-98@mail.ru

Иванов Евгений Александрович — студент первого курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель — доц. Г. В. Павилайнен. Научный руководитель проекта, выполненного в Саратовском государственном университете, — кандидат физ.-мат. наук. А. С. Колесникова. E-mail: ivanov4.1997@gmail.com

Каштанова Станислава Викторовна — старший научный сотрудник ИПМаш РАН, доцент кафедры математики в СПбГТИ(ТУ), кандидат физ.-мат. наук. Научные интересы: пластины и оболочки со вставками и отверстиями, потеря устойчивости, теория упругости. E-mail: kastasya@yandex.ru

Матяс Дмитрий Васильевич — аспирант Высшей школы теоретической механики Института прикладной механики и математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: геомеханика, динамика твердого тела, волновая теплопроводность. Научный руководитель — проф. Е. А. Иванова. E-mail: dvmatyas@gmail.com

Муравьев Александр Сергеевич — студент второго курса магистратуры Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, инженер 1-й категории СУ «Леноргэнергогаз». Область научных интересов: аналитическая механика, теория колебаний, теория устойчивости, оптимизация в механике. Научный руководитель — асс. А. С. Смирнов. E-mail: Muravyoff97@mail.ru

Никулина Мария Максимовна — студентка первого курса магистратуры кафедры теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: механика разрушения твердых тел, вычислительная механика. Научный руководитель — чл.-корр. РАН Ю. В. Петров.

E-mail: manyasha178@mail.ru

Павилайнен Галина Вольдемаровна — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: гидроупругость, нелинейные задачи изгиба балок и пластин из материалов с эффектом SD, влияние льда на прочность опор гидротехнических сооружений. E-mail: g_v_pavilaynen@mail.ru

Папин Александр Алексеевич — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Дифференциальные уравнения» Алтайского государственного университета.

E-mail: papin@math.asu.ru

Пономарева Виктория Вячеславовна — студентка первого курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, биомеханика. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр.

E-mail: st061653@student.spbu.ru

Ржонсницкий Алексей Викторович — старший преподаватель кафедры биоинформатики в СПбАУ РАН, ст. преподаватель кафедры математики СПбГТИ(ТУ). Научные интересы: коммутативная алгебра. E-mail: rzhonsnitskiy@yandex.ru

Самсонов Алексей — аспирант второго курса кафедры физической механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: применение современных технологий в социокультурной сфере, технологии дополненной реальности, Big data. Научный руководитель — проф. В. А. Морозов.

E-mail: samsob@gmail.com

Серебряков Денис Андреевич — студент первого курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, выпускник Томского государственного университета, специальность — прикладная механика. E-mail: den10_5@mail.ru

Скалина Марина Константиновна — студентка второго курса магистратуры Института передовых производственных технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, инженер Инжинирингового центра «Центр компьютерного инжиниринга» (CompMechLab®) СПбПУ. Область научных интересов: аналитическая механика, теория устойчивости, вычислительная механика, компьютерный инжиниринг. Научный руководитель — асс. А. С. Смирнов. E-mail: skalinamk@gmail.com

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, стажер-исследователь Института проблем машиноведения РАН. Область научных интересов: аналитическая механика, теория механических колебаний, динамика твердого тела, устойчивость равновесия и движения, оптимизация механических систем. E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Чепела Даниил Владиславович — студент первого курса магистратуры кафедры теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета, выпускник СарФТИ НИЯУ МИФИ, специальность — прикладная механика. E-mail: daniil.chepela@gmail.com

УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,

ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ в 2020–2021 гг.

Д.В. Матяс — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2021. Научный руководитель — проф. Е. А. Иванова.

Е.Н. Япарова — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2020. Научный руководитель — проф. А. Е. Волков.

SUMMARIES

Pavilaynen G.V. **Mathematical models of hydraulic supports from construction materials with the effect of plastic anisotropy (effect SD).**

The results of studies of the strength of rod and beam structures made of special structural materials open up new possibilities for the design and construction of hydraulic structures, for example, drilling platforms. The mathematical model of elastoplastic bending of such materials, which takes into account plastic anisotropy (SD-effect), beam weight and hydrostatic load, is developed. The problem is solved analytically and numerically. As an example of a material with SD effect the steel alloy A40X is considered. The effect of the hydrostatic compression of the beam and the increase in bending loads are analyzed taking into account the weight of the structure.

MSC class: 70C20

Keywords: elastic-plastic bending, SD-effect, beam, hydrostatic load.

REFERENCES

1. *Becker A. T.* Development of methods for calculating the probabilistic characteristics of ice loads to assess the reliability of structures on the continental shelf. Vladivostok: DGU Publishing House, 1998. 453 p. [in Russian].
2. *Politko V. A.* Calculation of sea ice-resistant structures for the action of ice loads taking into account Russian building codes / V.A. Politko, I.G. Kantarzhii // Hydraulic engineering. SPb. 2017. N 1. P. 27–35 [in Russian].
3. *Kovalev S. M.* Instrumental monitoring and short-term forecast of compression and hummocking phenomena in sea ice / V.N. Smirnov, S.M. Kovalev, V.A. Borodkin, A.A. Nyubom, A.I. Shushlebin. SPb.: AASI, 2017. 174 p. [in Russian].
4. *Bjerkas M.* Ice actions on offshore structures: PhD thesis / Norwegian University of Science and Technology. Trondheim, 2006. 173 p.
5. *Lachugin D. V.* Elastic-plastic bending of a vertical console with different strengths under the action of a concentrated load at the free end // Russian-Chinese scientific journal «Commonwealth». Section: Physical and mathematical sciences. 2016. N 2 (2). P. 32–35 [in Russian].

6. *Pavilaynen G. V.* Elast-o-Palstic Deformations of Ribbed Plates. CRM Proceedings and Lecture Notes // Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1993. P. 227–233.
7. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity (Engineering societies monographs). New York: McGraw-Hill, 1970. 591 p.
8. *Pavilainen G. V.* Plastic anisotropy of vertical steel supports of drilling platforms under hydrostatic and ice action, Molodechno: «Pobeda», 2020. 453 p. [in Russian].
9. *Pavilaynen G. V., Naumova N. V.* Elastic-plastic deformations of SD-beams // Proceedings VII Polyachov's Reading, Saint-Petersburg, Book of Abstract I, 2015. P. 239.
10. *Nadai A.* Theory of flow and fracture of solids (Engineering societies monographs), Vol. 1, Second Edition. New York, Toronto, London, McGraw-Hill, 1950. 572 p.
11. *Ilgamov M. A.* Static problems of hydroelasticity. Kazan: Publishing house of KSU, 1992. 354 p. [in Russian].

***Muravyov A. S., Smirnov A. S.* The motion stability of a tractor with a trailer taking into account the resistance forces.**

The report discusses the stability of the motion of a tractor with a trailer, which is pivotally attached to it using an elastic element. Using the Ferrers equations for nonholonomic systems, the motion equations of this system are derived in a linear model in the absence of dissipative forces. The motion stability area is plotted on the plane of dimensionless parameters during the analysis of this model. The forces of viscous friction are sequentially taken into account due to the installation of the damper, first in the articulated joint, and then parallel to the elastic element. As a result of the study of dissipative models, a stability area is plotted in each of the cases of an elastic element. As a result of the analysis of dissipative models, a stability region is plotted in each of the cases. Based on this analysis, we can conclude that in these two models the stability areas are qualitatively different and may differ from the analogous area plotted in the absence of friction.

MSC class: 70F25

Keywords: tractor, trailer, viscous friction, motion stability.

REFERENCES

1. *Zakin Ya. Kh.* Applied theory of road train motion. Moscow: Transport, 1967. P. 255 [in Russian].
2. *Smirnov A. S., Smolnikov B. A., Leontev V. A.* Principles of nonholonomic mechanics in controlling a transport robot group // St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science, Telecommunications and Control Systems. 2017. Vol. 10, N 3. P. 83–91 [in Russian].
3. *Ziegler H.* Principles of Structural Stability. Waltham, Massachusetts, Toronto, London: Blaisdell Publishing Company, 1968. P. 150.
4. *Merkin D. R., Bauer S. M., Smirnov A. L., Smolnikov B. A.* The theory of stability in examples and problems. Moscow, Izhevsk: R&C Dynamics, 2007. P. 208 [in Russian].
5. *Muravyov A.S., Smirnov A.S.* Dynamics and stability of movement of a tractor with a trailer // Week of Science of SPbPU, IAMM, 2019. P. 92–95 [in Russian].
6. *Merkin D. R., Smolnikov B. A.* Applied problems of the dynamics of a rigid body. St. Petersburg: St. Petersburg University, 2003. P. 534 [in Russian].
7. *Panovko Ya. G., Gubanova I. I.* Stability and oscillations of elastic systems. Moscow: Nauka, 1987. P. 352 [in Russian].
8. Automatic control theory. P. I. Theory of linear systems of automatic control / Ed. by A. A. Voronov. Moscow: Vyshaya shkola, 1986. P. 367 [in Russian].

Skalina M. K., Smirnov A. S. **Stability of equilibrium positions of a floating rectangular barge for a plane problem.**

The report discusses the navigation of a rectangular barge or pontoon in the sea, which is modeled using a long bar of straight-angle cross-section immersed in a liquid. The question of the number of degrees of freedom of the considered system is raised, as a result its quantity is reduced to one as a generalized coordinate and the angle of rotation of the beam is set in its capacity. It is noted that it is necessary to separate the cases of one-, two- and three-nods immersion of the beam, which have qualitative differences. A global analysis of the equilibrium positions of the system is carried out and their stability is analyzed. As a result, the dependence of the equilibrium positions from two key dimensionless parameters of the problem is revealed – the ratio of the sides of the beam and the ratio of the densities of the beam and the

liquid. In addition, the curves of the equilibrium states are constructed and analyzed, which clearly demonstrate the obtained dependencies. In conclusion, graphic illustrations of the beam in two different equilibrium positions are given.

MSC class: 70C20

Keywords: floating beam, stability, static analysis, equilibrium state curves.

REFERENCES

1. *Skalina M. K., Smirnov A. S.* Equilibrium and stability of a rectangular barge with a displaced center of gravity in a liquid // Week of Science of SPbPU, IAMM, 2019. P. 95–98 [in Russian].
2. *Poston T., Stuart I.* Catastrophe theory and its applications. London, San Francisco, Melbourne, Pitman, 1978. P. 491.
3. *Garbaruk A. V.* Mechanics of liquid and gas. Tasks and solutions. P. 1. St. Petersburg: ARKUSH, 2003. P. 31 [in Russian].
4. *Merkin D. R., Smolnikov B. A.* Applied problems of the dynamics of a rigid body. St. Petersburg: St. Petersburg University, 2003. P. 534 [in Russian].
5. *Fan-der-Fleet A. P.* Stability of a rectangular pontoon at an inclination from 0 to 90° // Izvestia of the St. Petersburg Polytechnic Institute. 1908. Vol. 10. P. 281–307 [in Russian].
6. *Fan-der-Fleet A. P.* Initial stability of rectangular parallelepipeds // Izvestia of the St. Petersburg Polytechnic Institute. 1908. Vol. 10. P. 397–406 [in Russian].
7. *Sedov L. I.* Mechanics of Continuous Media. In 2 vol. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1997. P. 1368.
8. *Merkin D. R., Bauer S. M., Smirnov A. L., Smolnikov B. A.* The theory of stability in examples and problems. Moscow, Izhevsk: R&C Dynamics, 2007. P. 208 [in Russian].
9. Handbook of ship theory in three volumes. Vol. 2. Statics of courts. The pitching of ships / Ed. by Ya. I. Voytkunsky. Leningrad: Sudostroenie, 1985. P. 440 [in Russian].
10. *De la Vallé Poussin Ch.-J.* Leçons de mécanique analytique. Tome II. Louvain et Paris, Librairie universitaire et Gauthier-Villars, 1924. P. 315.
11. *Borisov R. V., Lugovsky V. V., Mirokhin B. V., Rozhdestvensky V. V.* Ship statics. St. Petersburg: Sudostroenie, 2005. P. 256 [in Russian].

12. *Rzhanitsyn A. R.* Stability of equilibrium of elastic systems. Moscow, GITTL: 1955. P. 476 [in Russian].
13. *Avramenko A. A., Arkhipov V. V., Aslanov V. S., Timbai I. A.* Point and mechanical system dynamics: a tutorial for course design. Samara: Samara State Aerospace University, 1998. P. 84 [in Russian].

Vasileva E. A. Numerical verification of the control scheme for the shape and size stability of structures made of intelligent materials.

The possibility of using woven composites consisting of continuous piezoelectric and metal fibers made of shape memory alloys (SMA) in a single structure is studied in the paper with the help of the solution of the plane problem of electro-elasticity and the energy conservational law. Such a structure is used for ensuring the shape- and size stability. The scheme for control of deformations under external forces in such structures by means of interaction of piezoelectric components and components made of SMA is proposed. The equations for calculation the main mechanical and electrical characteristics of piezoelectric components are derived. On the basis of energy conservational law, relations between the heating temperature of the SMA fibers and time and the expression for the electric field in an piezoelectric fiber are obtained. The possibility of using this scheme to control the shape and size stability in real woven composite with piezoelectric and SMA components is discussed.

MSC class: 74M05

Keywords: smart materials, intelligent materials, shape and size control of structures, woven composite.

REFERENCES

1. *Krakhin O.I., Kuznetsov A.P., Kosov M.G.* Shape memory alloys. Basic of structural design. Saryi Oskol, 2015. 396 p. [in Russian].
2. *Worden C.* New intelligent materials and structures. Properties and applications. Moscow, 2006. 224 p. [in Russian].

3. *Molodtsov G.A., Bitkin V.E., Simonov V.F., Urmansov F.F.* Shape stability and intelligent structures from composite materials. Moscow, 2000. 352 p. [in Russian].
4. *Sirotkin O.S.* Fundamentals of modern materials science. Moscow, 2015. 364 p. [in Russian].
5. *Efremov N.S., Mityushov E.A., Berestova S.A.* Parametric descriptions of structural reinforces composites and plot of indicatrices their properties // *Mechanic of composite materials and structures.* 2008. Vol. 14, N 1. P. 16–34.
6. *Kelly A., Davidson R., Uchino K.* Smart Composite Materials Systems // *Comprehensive Composite Materials.* 2000. Vol. 5. P. 469–474.
7. *Golubeva T.A., Korotkova V.I., Zolkina T.G., Gladysheva L.V.* Concept and basic principles of construction of intelligent materials (Review) // *Composite structures.* 1995. N 2. P. 3–20.
8. *Bardzokas D.I.* Mathematical Modeling in the Problems of the Mechanics of coupled Fields. Vol. I. Introduction into the theory of thermopiezoelectricity. Moscow, 2010. 312 p. [in Russian].
9. *Sivukhin D.V.* General course of physics. Vol. III. Electrisity. Moscow, 2019. 656 p. [in Russian].
10. Smart Material Corp. Piezo Ceramic Fibers.
URL: <https://www.smart-material.com/PZTFiber-product-main.html>
11. Reference catalog Aurora-ELMA. Table 2. Electrophysical parameters of piezoelectric materials.
http://avrorra-elma.ru/wp-content/themes/aurora/text/piezo_catalog.pdf
12. NiTiMet Company Group: NiTiMet Company and IE Bondarev A. B. Physical and mechanical properties of shape memory alloys.
<http://www.niti-met.ru/niti.php>

Voronkova E. B., Ponomareva V. V. Deformation of circular variable-thickness plates under normal pressure.

The paper considers the deformation of a circular transversely isotropic variable-thickness plate under the normal pressure. The equations are derived with the help of the anisotropic plates theory developed by S. A. Ambartsumyan. It is also assumed that the thickness of the plate depends on the radial coordinate. The dependence of the normal deflection of the plate and the position of the inflection points on the law of thickness variation.

MSC class: 74K20

Keywords: deformation, anisotropic plate, heterogeneity.

REFERENCES

1. *Ambartsumyan S. A.* Theory of anisotropic plates / Transl. from the first Russian ed. by T. Cheron. Stamford: TECHNOMIC Publishing Co., 1970. 255 p.
2. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Models of shells and plates in the problems of ophthalmology // *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics.* 2014. Vol. 47, N 3. P. 123–139.
3. *Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotliar K. E.* Eye Biomechanics: Theoretical Aspects and Clinical Applications. Moscow: Real Time, 2015. 208 p. [in Russian].
4. *Nesterov A. P., Egorov E. A.* Glaucomatous atrophy of the optic nerve. Moscow: Medicine, 1981 [in Russian].
5. *Kiseleva O. A., Iomdina E. N., Yakubova L. V., Khoziev D. D.* Lamina cribrosa in glaucoma: biomechanical properties and possibilities of their clinical control // *Russian ophthalmological journal.* 2018. Vol. 11, N 3. P. 76–83 [in Russian].
6. *Yan D. B., Flanqan J. D., Farra T., Trope G. E., Ethier C. R.* Study of regional deformation of the optic nerve head using scanning laser tomography // *Current Eye Research.* 1998. Vol. 17, N 9. P. 903–916.

Velichko V. E., Bauer S. M. Selection of the support circle radius for a double-arch large diameter mirror.

The deformation of a double-arch primer telescope mirror with the given profile is considered in the paper. The gravity acts along the mirror axis. The mirror is supported at six points located on the support circle. The mirror is considered as a plate of variable thickness. The stress-strain state of the plate is analyzed in the framework of the theory of shell of medium thickness developed by Pali-Spiro. The theory takes into account the transverse shear and compression of the plate. The problem solution is represented in the form of Fourier expansion. Then the optical quality of the mirror is defined and the corresponding optimal value of the radius of the support circle is found.

MSC class: 74K20

Keywords: plates with variable thickness, plate of medium thickness, nonclassical plate theory.

REFERENCES

1. *Park S. J., Sim S. H., Chung C. S., Kang E. C., Kim J. K.* Design of primary mirror for laser beam director. ICO20: Optical Design and Fabrication / Eds James Breckinridge, Yongtian Wang // Proc. of SPIE. 2006. Vol. 6034, 60340F.
2. *Viens M. J.* Fracture Toughness and Crack Growth of Zerodur // NASA Technical Memorandum 4185, April 1990. P. 30.
3. *Bauer S. M., Kovalev A. M., Petrov M. B. et al.* Calculation and optimization of metal mirrors for telescopes. St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 1997 [in Russian].
4. *Palii O. M., Spiro V. E.* Anisotropic Shells in Shipbuilding. Theory and Analysis. Leningrad: Sudostroenie, 1977. 392 p. [in Russian].
5. *Grigorenko Ya. M., Vasilenko A. T.* Methods of calculation of shells. Vol. 4. Theory of shells of variable stiffness. Kiev: N. D., 1981. 544 p. [in Russian].
6. *Doyle K. B., Genberg V. L., Michels G. J.* Integrated optomechanical analysis. Second Edition. Bellingham, Washington, USA: SPIE Press, 2012. P. 383.
7. *Sokolsky M. N.* Tolerances and the quality of the optical image. Leningrad: Mashinostroenie, 1989. 221 p. [in Russian].

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.4: 519.63

Павилайнен Г. В. **Математические модели гидротехнических опор из конструкционных материалов с эффектом пластической анизотропии (эффектом SD)** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2020–2021 гг. С. 5–28.

Современные гидротехнические сооружения работают на предельно допустимых нагрузках, когда возможен переход в упруго-пластическую стадию деформирования, что приводит к необходимости учета специфических физико-механических свойств используемых материалов, например пластической анизотропии (эффект SD).

Предлагаемые в работе математические модели учитывают не только дополнительные факторы отсутствия симметрии в развитии напряжений и пластических деформаций и смещение нейтральной оси при изгибе, но и влияние гидростатического давления окружающей опоры жидкости и вес самой опоры. В некоторых случаях удается получить аналитические решения, которые могут служить для верификации численных расчетов с использованием конечно-элементных пакетов ANSYS и COMSOL. Для иллюстрации влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние вертикальных опор при изгибе рассмотрены численные примеры.

Библиогр. 11 назв. Ил. 9.

Ключевые слова: упругопластический изгиб, SD-эффект, гидростатическая нагрузка.

УДК 531.38

Муравьев А. С., Смирнов А. С. **Устойчивость движения тягача с прицепом с учетом сил сопротивления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2020–2021 гг. С. 29–40.

Обсуждаются вопросы устойчивости движения тягача с прицепом, который шарнирно присоединен к нему при помощи упругого

элемента. С использованием уравнений Феррерса для неголономных систем приводится вывод уравнений движения этой системы в линейной модели при отсутствии диссипативных сил. В результате анализа этой модели строится область устойчивости движения системы на плоскости безразмерных параметров. Производится последовательно учет сил вязкого сопротивления сначала в шарнирном сочленении, а затем и в упругом элементе. В результате исследования диссипативных моделей также строится область устойчивости в каждом из случаев. На основании этого анализа можно сделать вывод, что в этих двух моделях область устойчивости имеет принципиально различный качественный характер и может существенно отличаться от аналогичной области, построенной при отсутствии вязкого сопротивления.

Библиогр. 8 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: тягач, прицеп, вязкое трение, устойчивость движения.

УДК 531.25

Скалина М. К., Смирнов А. С. Устойчивость положений равновесия плавающей прямоугольной баржи в условиях плоской задачи // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2020–2021 гг. С. 41–55.

Рассматриваются вопросы плавания прямоугольной баржи или понтона в море. Эта система моделируется при помощи длинного бруса прямоугольного поперечного сечения, погруженного в жидкость. Обсуждается вопрос о количестве степеней свободы системы, в результате чего их число сведено к одному, и в качестве обобщенной координаты принимается угол поворота бруса. Отмечается, что необходимо рассматривать в отдельности случаи одно-, двух- и трехвершинного погружения бруса, обладающие качественными различиями. Проводится глобальный анализ равновесных положений системы и анализируется их устойчивость. В результате выявляется зависимость положений равновесия от двух ключевых безразмерных параметров задачи – отношения сторон бруса и отношения плотностей бруса и жидкости. Помимо этого, строятся и анализируются кривые состояний равновесия, наглядно демонстрирующие полученные зависимости. В заключение приводятся

графические иллюстрации бруса в двух различных равновесных положениях.

Библиогр. 13 назв. Ил. 13.

Ключевые слова: плавающий брус, устойчивость, статический анализ, кривые состояний равновесия.

УДК 539.3: 539.2

Васильева Е. А. Расчетное обоснование схемы управления формо- и размеростабильностью конструкций из интеллектуальных материалов // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2020–2021 гг. С. 56–72.

В статье на основе решения плоской задачи электроупругости и законов сохранения энергии исследуется возможность использования тканых композитов, состоящих из непрерывных пьезоэлектрических и металлических волокон из сплавов памятью формы (СПФ) в единой структуре в качестве основного средства для обеспечения формо- и размеростабильности конструкции, выполненной из такого материала. Представлена общая схема управления деформациями, возникающими при внешнем воздействии в тканых композитах, за счет взаимодействия пьезоэлектрических компонент и компонент из СПФ между собой. Выведены определяющие соотношения для расчета основных механических и электрических характеристик пьезоэлектрических компонент. На основе баланса энергий выведены уравнения, связывающие температуру нагрева волокон из СПФ со временем и напряженностью электрического поля, создаваемого в пьезоэлектрическом волокне.

Библиогр. 12 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: интеллектуальный материал, тканый композиционный материал, управление формо- и размеростабильностью конструкций.

УДК 539.3

Воронкова Е. Б., Пономарева В. В. Деформация круглых пластин переменной толщины под действием нормального давления // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2020–2021 гг. С. 73–82.

В работе рассматривается деформация трансверсально-изотропной круглой пластины переменной толщины под действием нормального давления. Разрешающие уравнения для функции прогиба выводятся с использованием теории анизотропных пластин С. А. Амбарцумяна в предположении, что толщина пластины изменяется вдоль радиальной координаты. Показано, как изменяется величина прогиба и положение точек перегиба в зависимости от закона изменения толщины.

Библиогр. 6 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: деформация, анизотропная пластина, неоднородность.

УДК 539.3

Величко В. Е., Бауэр С. М. Выбор расположения опорной поверхности двухарочного зеркала большого диаметра // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2020–2021 гг. С. 83–96.

Анализируются отклонения оптической поверхности двухарочного главного зеркала телескопа от первоначальной поверхности при воздействии на зеркало силы тяжести, направленной вдоль оси зеркала, и противоположно направленных поддерживающих локальных нагрузок.

Задача разбивается на две подзадачи: осесимметричную и циклично-симметричную. Предложены параметры, определяющие качество оптической поверхности зеркала для циклично-симметричной задачи: размах волнового фронта и среднеквадратичное отклонение волнового фронта для отражающей деформированной поверхности зеркала. Для определения напряженно-деформированного состояния зеркала используется теория оболочек средней толщины Паляя–Спиро. Для циклично-симметричного случая для каждого номера гармоники задача сводится к системе уравнений 10-го порядка. Находится оптимальное значение радиуса окружности, на которой располагаются опоры.

Библиогр. 7 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: пластины с изменяющейся толщиной, оболочки средней толщины, неклассические теории оболочек.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Г. В. Павилайнен.</i> Математические модели гидротехнических опор из конструкционных материалов с эффектом пластической анизотропии (эффектом SD)	5
1. Введение	5
2. Основные соотношения	10
3. Упругопластический изгиб вертикальной балки постоянным моментом	12
4. Упругопластический изгиб вертикальной балки под действием поперечной сосредоточенной силы	21
5. Решение задачи и определение прогиба балки	23
6. Основные выводы и заключения	26
<i>А. С. Муравьев, А. С. Смирнов.</i> Устойчивость движения тягача с прицепом с учетом сил сопротивления	29
1. Введение	29
2. Тягач с прицепом при отсутствии сил трения	30
3. Тягач с прицепом при наличии демпфера, установленного в шарнире	34
4. Тягач с прицепом при наличии демпфера, установленного параллельно пружине	37
5. Заключение	40
<i>М. К. Скалина, А. С. Смирнов.</i> Устойчивость положений равновесия плавающей прямоугольной баржи в условиях плоской задачи	41
1. Введение	41
2. Общие положения статического анализа плавающего бруса	42
3. Анализ двухвершинного погружения	44
4. Анализ одно- и трехвершинного погружения	48
5. Построение кривых состояний равновесия	50
6. Заключение	55
<i>Е. А. Васильева.</i> Расчетное обоснование схемы управления формо- и размеростабильностью конструкций из интеллектуальных материалов	56
1. Введение	56
2. Расчетная схема и определяющие соотношения	60

3. Численные результаты.....	68
4. Обсуждение результатов и выводы.....	71
<i>Е.Б. Воронкова, В.В. Пономарева. Деформация круглых пластин переменной толщины под действием нормального давления.....</i>	<i>73</i>
1. Введение.....	73
2. Постановка задачи.....	73
3. Результаты численных расчётов и их обсуждение.....	77
4. Заключение.....	81
<i>С.М. Бауэр, В.Е. Величко. Выбор расположения опорной поверхности двухарочного зеркала большого диаметра.....</i>	<i>83</i>
1. Геометрия зеркала.....	83
2. Постановка задачи.....	84
3. Применение теории Паляя–Спиро для решения задачи.....	87
4. Вывод критериев оценки качества зеркала для циклично-симметричного случая.....	90
5. Результаты работы.....	92
6. Заключение.....	96
Резюме докладов, не вошедших в сборник.....	97
Об авторах.....	102
Summaries.....	106
Рефераты.....	114

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2020–2021 гг.

Утверждено к печати

Редакционно-издательским советом

Математико-механического факультета

Санкт-Петербургского государственного университета и

Ученым советом Института проблем машиноведения

Российской академии наук

Редактор *М. В. Орлова*

Художник *П. Э. Палей*

Отпечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать 25.11.2021. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл.-печ. л. 6.98. Уч.-изд. л. 7.5.

Тираж 110 экз. Заказ № 994

ФГУП «Издательство «Наука» 117997 г. Москва, ул. Профсоюзная, 90
тел. +7(495)276-77-35, e-mail: info@naukaran.com, <https://naukapublishers.ru>
<https://naukabooks.ru>

Санкт-Петербургский филиал ФГУП «Издательство «Наука»

199034 г. Санкт-Петербург, 9-я линия В. О., 12/28

тел. +7(812)655-65-01, e-mail: secretspb@naukaran.com