



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА  
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2014–2015 гг.



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
2015

ББК 22.25  
Т78

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),  
канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. Б. Воронкова* (отв. секретарь) (СПбГУ),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),  
проф. *Р. Вайанкур* (Университет Оттавы, Канада),  
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помяткин* (СПб ГУАП),  
д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Университет Ольборга, Дания),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ)

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
математико-механического факультета  
С.-Петербургского государственного университета*

Т78

**Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2014–2015 гг.** — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2015. — 151 с.  
ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов. Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ISSN 2218-7421

**ББК 22.25**

© С.-Петербургский  
государственный  
университет, 2015

Спонсор издания — Некоммерческая организация «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс» при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы "МАВИС"



Спонсор издания — Некоммерческая организация «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс» при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС».

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИММУННОГО ОТВЕТА НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМНОЙ КРАСНОЙ ВОЛЧАНКИ

С. Р. КУЗНЕЦОВ

В работе строится математическая модель иммунного ответа на аутоиммунное заболевание системную красную волчанку. Описаны пролиферация и дифференцировка В-лимфоцитов в лимфоузле, переключение изотипов иммуноглобулинов с IgM на IgG, пролиферация и дифференцировка Th лимфоцитов в три фенотипа Th1, Th2 и Th17, синтез цитокинов IFN- $\gamma$ , IL-2, IL-4 и IL-21. Особенностью модели является использование уравнений в частных производных для “хранения” памяти о количестве делений, пройденных каждым лимфоцитом, что позволяет строить более точные модели иммунного ответа, учитывающие генетические особенности процессов пролиферации, дифференцировки и синтеза цитокинов клетками. Показано применение модели для исследования влияния Th17 типа иммунного ответа на патогенез системной красной волчанки.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В современной иммунологии, поставленной перед вызовами технологического прогресса с его экстраординарным темпом получения точнейших экспериментальных данных, значительно возрос интерес к математическим методам исследования [4]. Новейшие открытия в области иммунологии заставляют пересмотреть традиционные взгляды на строение иммунной системы, выявляют ее нетривиальную сложность, богатый полиморфизм, неоднозначность функций, сложный многоуровневый сигнальный язык ее членов и т.д. Все части иммунной системы глубоко проникают одна в другую, и для построения цельной картины иммунных процессов необходимы мощные инструменты системного подхода, одним из которых является математическое моделирование.

Математическое моделирование в иммунологии, как отдельное направление исследований, зародилось в конце 1960-х — начале 1970-х гг. Одной из первых фундаментальных работ стала модель

---

Доклад на семинаре 11 ноября 2014 г.

© С. Р. Кузнецов, 2014

А. В. Молчанова, описывавшая иммунный ответ, как взаимодействие двух “начал” — иммунного и инфекционного, и состоявшая из 2 обыкновенных дифференциальных уравнений [9]. В 1970 г. О. А. Смирнова и Н. В. Степанова предложили модель иммунного ответа, построенную согласно теории Бернета и Йерне [11]. Модель состояла из 4 обыкновенных дифференциальных уравнений и описывала 3 стадии изменений В-лимфоцитов в ходе иммунного ответа: наивная клетка, зрелая клетка и плазмоцит, синтезирующий антитела. Это направление продолжил Г. И. Марчук, который сначала с помощью введения запаздывания сократил число уравнений системы, а затем по мере накопления новых знаний об иммунной системе расширял модель, впоследствии насчитывавшую уже 12–14 дифференциальных уравнений (часть из них с запаздывающим аргументом) [1, 8].

Одновременно с первыми отечественными моделями Дж. Беллом в США была предложена модель иммунного ответа, содержащая 4 обыкновенных дифференциальных уравнения и описывавшая 4 стадии развития В-лимфоцитов: наивная клетка, зрелая клетка, плазмоцит и клетка памяти. Придерживаясь клонально-селекционной теории, Дж. Белл не ограничился только описанием имевшихся данных, но проверил также некоторые новые гипотезы о природе формирования иммунной памяти [16]. За последующие десятилетия исследователям с помощью математического моделирования удалось пролить свет на некоторые важные вопросы иммунологии. Среди этих работ особую ценность представляют исследования вирусной динамики, перекрестного связывания рецепторов В-лимфоцитов, динамики пролиферации лимфоцитов и др. (см. обзор на эту тему [4]). Данные модели, как правило, представляют собой небольшие системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Слабой стороной существующих моделей является то, что такие ключевые процессы формирования иммунитета, как дифференцировка клеток, в них либо вовсе не рассматриваются, либо рассматриваются на упрощенном уровне, причиной чему является высокая сложность процессов, их малая изученность и отсутствие достаточных экспериментальных данных. С начала XXI века проблема отсутствия точных данных была частично решена, тео-

ретическое понимание процессов также значительно улучшилось, и появилась возможность построить модели, более адекватно отражающие внутренние механизмы дифференцировки.

В данной работе проводится обобщение имеющихся данных о динамике лимфоцитов в лимфоузле с помощью математической модели, позволяющей подробно описать сложные процессы дифференцировки и пролиферации Тh и В-лимфоцитов с помощью уравнений в частных производных. Далее с помощью построенной модели проводится исследование одного из сложнейших аутоиммунных заболеваний — системной красной волчанки. Несмотря на интенсивное изучение этого заболевания в течении нескольких десятков лет и высокий интерес к нему научного сообщества, этиология и патогенез этого заболевания до сих пор до конца не ясны, а процент смертельных случаев остается высоким. Генетические исследования указывают на множество возможных причин, но определить их реальное влияние на возникновение и развитие заболевания крайне сложно, т.к. здесь имеют место динамичные процессы очень высоких порядков: хроническое системное воспаление, активация всех звеньев иммунитета и т.д. В связи с этим проблема адекватного описания процессов пролиферации и дифференцировки встает особенно остро. В основу этой работы легли наши предыдущие исследования [2, 3, 5].

## 2. ОБЩАЯ СХЕМА ИММУННОГО ОТВЕТА

Наиболее общую схему иммунного ответа можно представить следующим образом: антиген (т.е. генетически чужеродные организмы, клетки и молекулы) захватывается антиген-презентирующими клетками, которые перерабатывают его и “в удобной форме” представляют (презентируют) хелперным Тh лимфоцитам. Тh лимфоциты в зависимости от типа антигена и от различных факторов внешней среды “решают”, какой тип иммунного ответа требуется для эффективной нейтрализации антигена. В зависимости от принятого “решения” они в той или иной степени

---

Аутоиммунными называются заболевания, при которых иммунный ответ формируется против собственных тканей, клеток и молекул.

вовлекают в иммунный ответ различные эффекторный механизмы адаптивного иммунитета, из которых наибольшее значение имеют гуморальный и клеточный. Гуморальный иммунный ответ обеспечивают В-лимфоциты, которые в больших количествах синтезируют антитела, нейтрализующие антиген и облегчающие его уничтожение. При этом В-лимфоцитам помогают Тh лимфоциты. Клеточный иммунный ответ обеспечивают главным образом цитотоксические Тс лимфоциты (Т-киллеры), которые находят содержащие антиген клетки (зараженные вирусом, опухолевые и т.п.) и уничтожают их. В нашей модели клеточный иммунный ответ будет представлен только косвенно, т.к. наибольшую роль при СКВ играет гуморальный иммунный ответ, когда синтез критически высоких объемов антител приводит к повреждению собственного организма.

Активация, пролиферация и дифференцировка Тh и В-лимфоцитов может протекать по разным схемам, зависящим от различных факторов иммунного ответа и включающим в себя участие разных типов клеток. В частности, для специфической активации Тh лимфоцитов необходимо присутствие профессиональных антиген-презентирующих клеток. В нашей модели мы взяли за основу одну из схем, описанных в [12], где роль антиген-презентирующих клеток выполняют В-лимфоциты. Это позволило не вводить в модель другие типы клеток, и тем самым сократить число уравнений и упростить процесс. Согласно этой схеме динамика взаимодействия между Тh2 и В-лимфоцитами в лимфоузле может быть разделена на 4 стадий: I — премирование В-клеток, переводящее их в состояние антиген-презентирующей клетки; II — активация Т-клеток в результате встречи с антиген-презентирующими В-лимфоцитами; III — активация В-лимфоцитов через взаимодействие с активированными Тh лимфоцитами; IV — пролиферация и дифференцировка Тh и В-лимфоцитов; V — выход дифференцировавшихся лимфоцитов из лимфоузла и синтез антител В-лимфоцитами (все стадии отображены на рис. 1).

Данная схема далее будет объяснена более подробно по ходу описания модели. Модель будет содержать 20 уравнений, 16 из которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, а 4 — дифференциальными уравнениями в частных производных. При этом обыкновенные дифференциальные уравнения бу-



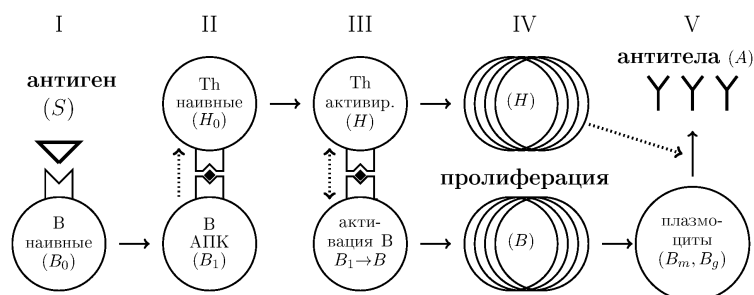


Рис. 1. Взаимодействия между Th2 и В-лимфоцитами: I — премирование В-клеток, переводящее их в состояние антиген-презентирующей клетки (АПК); II — активация Т-клеток в результате встречи с АПК; III — активация В-клеток через взаимодействие с активированными Т-клетками; IV — пролиферация и дифференцировка Т- и В-клеток; V — выход дифференцировавшихся лимфоцитов из лимфоузла и синтез антител В-клетками.

дуг построены с использованием стандартных подходов к моделированию живых систем, когда скорость изменения концентрации описываемого агента пропорциональна концентрации самого агента или других агентов (как в моделях роста биомассы), а также может зависеть от вероятности встречи данного агента с другими агентами (как, например, в уравнении “хищник–жертва” Лотки–Вольтерра) [10]. Для описания процессов пролиферации и дифференцировки будут использованы дифференциальные уравнения в частных производных, специально разработанные нами для этих целей [2, 3, 5].

### 3. ДИНАМИКА АНТИГЕНА

Основное назначение иммунной системы состоит в выявлении антигена и его уничтожении или нейтрализации его патогенного действия. Антиген может иметь как внешнее происхождение (бактерии, вирусы, токсины, лекарственные препараты, медицинские протезы, пересаженные органы и т.п.), так и внутреннее (опухолевые клетки, стареющие собственные ткани, организмы нормальной

микрофлоры и т.п.). В случае СКВ в качестве антигена выступают собственные молекулы организма. Пусть  $S(t)$  описывает среднюю концентрацию антигена в момент времени  $t$ . Тогда уравнение динамики антигена можно описать следующим образом:

$$\frac{dS}{dt} = \hat{\lambda}_s(t) - k \frac{A_m + A_g}{1 + \delta_a(A_m + A_g)} S, \quad (1)$$

где функция  $\hat{\lambda}_s(t)$  описывает рост концентрации антигена, второе слагаемое правой части описывает удаление антигена через элиминацию IgM и IgG антителами ( $A_m$  и  $A_g$ , соответственно),  $k$  является биохимической константой скорости формирования комплекса антиген-антитело (определяет эффективности нейтрализации антигена антителами),  $\delta_a$  — смягчающий коэффициент (стабилизирует динамику модели в случае, когда концентрация антител превышает концентрацию антигена на несколько порядков).

В случае СКВ концентрация антигена как правило растет в ходе иммунного ответа и может достигать очень высоких показателей. Мы использовали экспериментальные данные о концентрации антигена при СКВ, подробно описанные в [6], в результате чего была построена следующая функция роста антигена:  $\hat{\lambda}_s(t) = 1,5 * 10^{-9}t + 10^{-9}$  Мл<sup>-1</sup>день<sup>-1</sup>.

#### 4. ДИНАМИКА НАИВНЫХ В И ТН ЛИМФОЦИТОВ И АНТИГЕН-ПРЕЗЕНТИРУЮЩИХ КЛЕТОК

Патогенез СКВ характерен тем, что гуморальный ответ формируется сразу против нескольких типов антигенов, т.е. формируется многоклональный иммунный ответ. Для подробного описания такого ответа требуется построение сетевой модели (отдельная модель иммунного ответа для каждого клона). Однако для нашего исследования важно было оценить общую концентрацию формирующихся антител без учета их специфичности, поэтому мы описывали концентрацию сразу нескольких клонов одной переменной. При этом мы предположили, что в иммунный ответ разные клоны вовлекаются постепенно (что в общем соответствует экспериментальным данным). Т.о. в модели одновременно с ростом концентрации ан-

тигена постепенно формировались новые аутоспецифичные клоны Th и В-лимфоцитов, которые сразу вовлекались в иммунный ответ, что нашло свое отражение в следующих уравнениях:

$$\frac{dB_0}{dt} = \sigma_b \hat{\lambda}_c(t) - \alpha_s \frac{S}{S + S^* B_0} B_0 - w_b B_0, \quad (2)$$

$$\frac{dH_0}{dt} = \sigma_h \hat{\lambda}_c(t) - \alpha_b \frac{B_1 + B_\sigma}{B_1 + B_\sigma + B^* H_0} H_0 - w_0 H_0. \quad (3)$$

Уравнение (2) описывает динамику наивных В-лимфоцитов: первое и последнее слагаемые — гомеостаз клеток, второе — переход в состояние АПК в результате встречи с антигеном (см. рис. 1, I).  $S^*$  — смягчающий коэффициент, выведенный на основе данных о средней концентрации антигена в виде фрагментов свободной ДНК в крови здоровых людей. Наивные Т-хелперные клетки (3): первое и последнее слагаемые описывают гомеостаз клеток, второе — переход в активированное состояние в результате встречи с АПК и активированными В-клетками (см. рис. 1, II).  $\sigma_b$  и  $\sigma_h$  — скорость естественного прироста специфических клонов В и Th лимфоцитов, соответственно. Вовлечение новых клонов лимфоцитов в иммунный ответ моделируется с помощью функции  $\hat{\lambda}_c(t) = 1 + 0,045 t \text{ л}^{-1} \text{ день}^{-1}$  (т.е. в течении 200 дней в иммунный ответ вовлекаются до 10 различных клонов). Сумма функций  $B_1 + B_\sigma$ , а также константа  $B^*$  характеризуют влияние на наивные Th лимфоциты активированных В-лимфоцитов (функции будут описаны ниже).

Динамика концентрации антиген-презентирующих клеток (в роли которых выступают в нашем случае примированные, т.е. встретившиеся с антигеном В-лимфоциты, см. рис. 1, III) описывается следующим уравнением:

$$\frac{dB_1}{dt} = \alpha_s \frac{S}{S + S^* B_0} B_0 - \alpha_h \frac{H_\sigma}{H_\sigma + H^* B_1} B_1 - w_b B_1, \quad (4)$$

где первое слагаемое — переход в состояние АПК наивных клеток; второе слагаемое — переход в состояние пролиферации в результате встречи с активированными Т-хелперами. Функция  $H_\sigma(t)$  — концентрация пролиферирующих Т-хелперов (будет описана далее). Последнее слагаемое — естественная убыль клеток.

## 5. ОПИСАНИЕ ПРОЛИФЕРАЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИРОВКИ

Описывая динамику иммунного ответа лимфоцитов необходимо учитывать, что наивные клетки после начала активации не сразу становятся эффекторными, но созревают (делятся, дифференцируются, мигрируют) в течении длительного времени (несколько суток), проходя несколько стадий-этапов, на каждом из которых меняется набор синтезируемых ими молекул (цитокиновый профиль) и набор рецепторов на их поверхности [12, 13]. Согласно экспериментальным исследованиям, динамика дифференцировки клетки напрямую связана с числом пройденных клеткой делений [22]. Также и скорость деления зависит от числа пройденных делений [27, 28]. Это побудило нас построить модель, учитывающую количество делений, пройденное каждой клеткой.

На данный момент имеется большое число математических моделей, подробно описывающих пролиферацию иммунных клеток, и предназначенных для интерпретации экспериментальных данных проточной цитометрии [4]. Некоторые из этих моделей, основанные на уравнениях в частных производных, представляли для нас особый интерес [14, 15, 28]. Эти модели являются модификацией структурной популяционной модели, предложенной еще в 1967 г. [17, 31]. Тогда в двух независимых работах была использована одна и та же идея: процесс деления рассматривался как результат непрерывного роста размера (ось  $Ox$ ) отдельных клеток во времени (ось  $Ot$ ). Отличие между указанными работами заключалось в том, что в случае [17] под размером подразумевался объем, а в случае [31] — масса клетки. В момент митоза клетки (разделения на две новых) она пропадала с правой части оси  $Ox$ , а в левой части оси в тот же момент возникало 2 новых клетки. Необходимость использовать массу и объем диктовалась необходимостью интерпретировать соответствующие экспериментальные данные [17]. В современных работах [14, 15, 28] массу и объем заменил показатель флуоресценции красителя CFSE, которым метятся клетки для последующего измерения с помощью проточного цитофлуориметра. В нашей модели, имеющей целью не интерпретации данных, а, собственно, моделирования пролиферации, будет использован несколько другой подход.

Будем моделировать количество делений, пройденное лимфоцитом, точками на числовой прямой, последовательно откладывая несколько идущих друг за другом отрезков единичной длины, соответствующих полному клеточному циклу (т.е. одному полному делению клетки). Любой делящейся клетке на этой прямой соответствует только одна точка, зная координату которой можно точно сказать, какое количество делений пройдено клеткой, и в какой стадии пролиферации клетка находится. Данную прямую назовем прямой пролиферации и будем ассоциировать с осью  $Oz$  декартовой системы координат. Также будем считать, что физическое разделение клетки на две новых происходит в точках  $z_i$ , которые являются натуральными числами. Будем рассматривать пролиферацию не как процесс увеличения числа клеток, а как процесс движения клетки по прямой пролиферации; при этом количество поделившихся клеток будет равно  $2^z N_0$ , где  $N_0$  — начальная концентрация вступивших в деление клеток, а  $z$  — координата на прямой пролиферации.

Начнем с построения уравнения пролиферации Th лимфоцитов в лимфоузле, учитывая, что скорость пролиферации и вероятность апоптоза этих клеток зависят от числа пройденных делений. По завершении дифференцировки клетки мигрируют из лимфоузла, следовательно этот процесс также связан с количеством пройденных делений. Пусть время, уходящее на один клеточный цикл, определяется функцией  $1/\hat{p}_h(z)$ , вероятность апоптоза — функцией  $\hat{w}_h(z)$ , вероятность миграции — функцией  $\hat{m}_h(z)$ . Пусть функция  $H(t, z)$  характеризует концентрацию Th лимфоцитов, находящихся в состоянии  $z$  в момент времени  $t$ . Тогда за время  $\Delta t$  клетки пройдут по прямой пролиферации расстояние, равное  $\hat{p}_h(z)\Delta t$ , и справедлива будет следующая формула:

$$H(t + \Delta t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t) = H(t, z) - (\hat{m}_h(z) + \hat{w}_h(z)) H(t, z)\Delta t.$$

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} & H(t + \Delta t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t) - H(t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t) = \\ & = - (H(t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t) - H(t, z)) - (\hat{m}_h(z) + \hat{w}_h(z)) H(t, z)\Delta t. \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned} & \frac{H(t + \Delta t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t) - H(t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t)}{\Delta t} = \\ & = -\frac{H(t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t) - H(t, z)}{\Delta t} - (\hat{m}_h(z) + \hat{w}_h(z)) \frac{H(t, z)\Delta t}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Пусть  $\Delta z = \hat{p}_h(z)\Delta t$ , тогда:

$$\begin{aligned} & \frac{H(t + \Delta t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t) - H(t, z + \hat{p}_h(z)\Delta t)}{\Delta t} = \\ & = -\hat{p}_h(z) \frac{H(t, z + \Delta z) - H(t, z)}{\Delta z} - (\hat{m}_h(z) + \hat{w}_h(z)) H(t, z). \end{aligned}$$

Если теперь  $\Delta t \rightarrow 0$ , то это выражение аппроксимируется следующим уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\hat{p}_h(z) \frac{\partial H}{\partial z} - (\hat{m}_h(z) + \hat{w}_h(z)) H. \quad (5)$$

Аналогичным образом опишем пролиферацию В-лимфоцитов, учитывая при этом, что на их апоптоз существенное влияние оказывает ИЛ-17, синтезируемый Th17 лимфоцитами (одной из субпопуляций Th лимфоцитов). Клетки Th17 способны в 3–4 раза снижать апоптоз В-лимфоцитов согласно экспериментальным данным [19, 20]:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\hat{p}_b(z) \frac{\partial B}{\partial z} - \left( \hat{m}_b(z) + \frac{\hat{w}_b(z)}{1 + \gamma(H, t, z)} \right) B, \quad (6)$$

где функция  $\gamma(H, t, z) \in [0, 3]$  характеризует влияние со стороны Th17 — она будет описана далее.

Функции  $\hat{p}_{h,b}(z)$ ,  $\hat{m}_{h,b}(z)$  и  $\hat{w}_{h,b}(z)$  определялись эмпирически на основании данных из литературы (см. рис. 2).

Теперь необходимо описать дифференцировку Т-лимфоцитов в три разных фенотипа — Th1, Th2 и Th17. Этот процесс является ключевым в выборе типа иммунного ответа, и значительно влияет на его силу. Имеется ряд работ, посвященных математическому моделированию переключения фенотипов Т-лимфоцитов в ходе

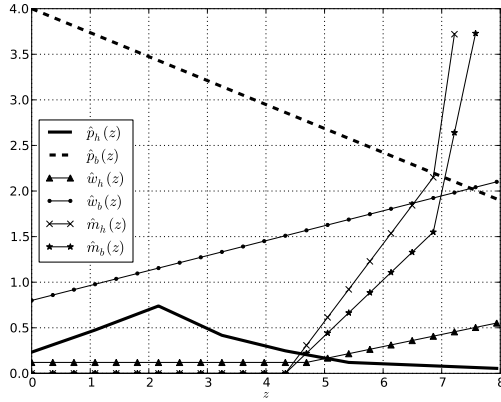


Рис. 2. Графики эмпирических функций скорости пролиферации ( $\hat{p}$ ), миграции ( $\hat{m}$ ) и убыли ( $\hat{w}$ ) для Th ( $h$ ) и В-лимфоцитов ( $b$ ) в зависимости от числа пройденных делений ( $z$ ). Скорости даны в единицах: день<sup>-1</sup>.

дифференцировки [30, 33], однако для нашей модели они не подходят, т.к. во-первых, они рассматривают дифференцировку только на два фенотипа — Th1, Th2, а во-вторых, в них не рассматривается влияние различных цитокинов на выбор фенотипа.

Предрасположенность клеток к трем основным фенотипам дифференцировки (Th1, Th2 и Th17) будем моделировать с помощью точки, движущейся внутри равностороннего треугольника, который будем называть “треугольником дифференцировки” — чем ближе точка к одной из его вершин, тем большая фракция клеток дифференцируется в данном направлении. Фигура треугольника выбрана для того, чтобы при движении к одной из вершин точка при этом обязательно удалялась от двух других.

Как уже говорилось, динамика дифференцировки Т-лимфоцита зависит от того, какие цитокины представлены в окружающей среде, а также от числа пройденных клеткой делений. При появлении во внешней среде цитокинов другого профиля клетка, уже начав-

шаяся дифференцировку по одному из путей, может изменить профиль и пойти по другому пути, но сделать это ей тем труднее, чем большее число делений пройдено; такое явление было названо пластичностью Т-лимфоцитов [22, 24, 29]. Поэтому необходимо, чтобы распределение клеток по фенотипам моделировалось отдельно для клеток, находящихся в разных состояниях клеточного цикла и прошедших разное число делений, т.е. необходимо построение “треугольника дифференцировки” для всех точек прямой пролиферации.

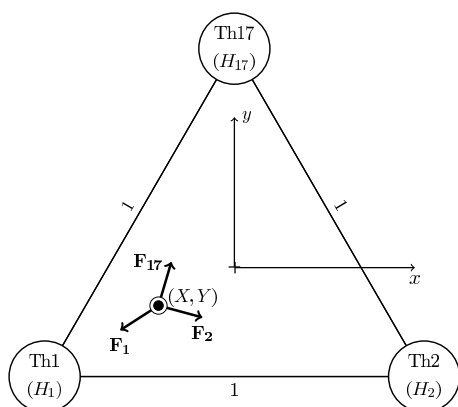


Рис. 3. “Треугольник дифференцировки” Th лимфоцитов. Чем ближе точка к одной из вершин, тем больше клеток соответствующего фенотипа в популяции. Величина сил, действующих на точку, зависит от концентраций соответствующих дифференцировочных факторов (цитокинов).

Рассмотрим равнобедренный треугольник со стороной равной 1, лежащий в плоскости  $Oxy$  декартовой системы координат (см. рис. 3). Пусть центр треугольника совпадает с началом координат, а основание параллельно оси  $Ox$ . Пусть положение искомой точки внутри треугольника в момент времени  $t$  для клеток, находящихся в точке  $z$  прямой пролиферации (прошедших  $[z]$  делений) определяется функциями  $X(t, z)$  и  $Y(t, z)$ . Тогда если пролиферация хелперных Т-лимфоцитов описывается уравнением (5), то изменение распределения по фенотипам можно описать с помощью



следующих уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\hat{p}_h(z) \frac{\partial X}{\partial z} + \hat{b}(z) F_x^*(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_{17}), \quad (7)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -\hat{p}_h(z) \frac{\partial Y}{\partial z} + \hat{b}(z) F_y^*(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_{17}). \quad (8)$$

Здесь используются проекции вектора  $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{17}$ , который характеризует воздействие на точку со стороны дифференцировочных факторов (цитокинов), а кусочно гладкая функция  $\hat{b}(z)$  определяет изменение пластичности Th лимфоцитов в ходе пролиферации.

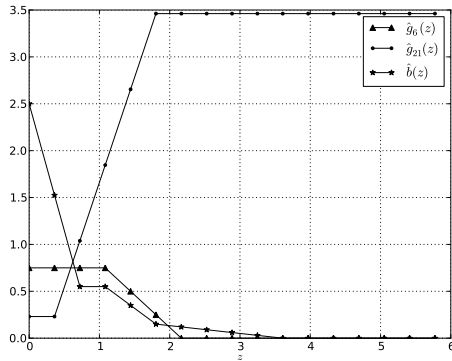


Рис. 4. Функции влияния IL-6 и IL-21 на дифференцировку наивных T-лимфоцитов в сторону Th17 и «функция пластичности»  $\hat{b}(z)$ ; как и ранее  $z$  характеризует число пройденных клеткой делений. Единицы по оси ординат: 1/день.

Выбор конечного фенотипа существенно зависит от того, какие цитокины представлены в окружающей среде. Дифференцировку в сторону Th1 направляет IFN- $\gamma$  и IL-2, а IL-4, наоборот, является ингибитором («тормозом») данной реакции. Дифференцировка Th2 зависит от наличия IL-2 и IL-4 и ингибируется IFN- $\gamma$ . Дифференцировка Th17 направляется IL-6 и IL-21 и ингибируется IL-2 [12]. На

основании имеющихся экспериментальных данных модули вектор-функций  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_{17}$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_1| &= \frac{I_\gamma}{\sum I} \left( 1 + \frac{I_2}{\sum I} \right) h_1(X, Y), \\ |\mathbf{F}_2| &= \frac{I_4}{\sum I} \left( 1 + \frac{I_2}{\sum I} \right) h_2(X, Y), \\ |\mathbf{F}_{17}| &= \left( \frac{I_6}{\sum I} \hat{g}_6(z) + \frac{I_{21}}{\sum I} \hat{g}_{21}(z) \right) h_{17}(X, Y), \end{aligned}$$

$$\sum I = I_\gamma + I_2 + I_4 + I_6 + I_{21}, \quad h_i(X, Y) = 1 - \frac{d_h}{r_i},$$

где  $d_h < 1$  — коэффициент, определяющий расстояние от вершины треугольника дифференцировки, на котором возникает эффект замедления точки при движении к вершине;  $r_i$  — расстояние от точки  $(X, Y)$  до  $i$ -ой вершины “треугольника дифференцировки”, а координаты вершин всегда постоянны:  $\text{Th}1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\text{tg}\frac{\pi}{6})$ ,  $\text{Th}2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\text{tg}\frac{\pi}{6})$ ,  $\text{Th}17(0, \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{\pi}{6})$ .

Функции  $\hat{b}(z)$ ,  $\hat{g}_i(z)$  определялись эмпирически на основании данных из литературы (см. рис. 4). Таким образом уравнения (7–8) описывают множество “треугольников дифференцировки”, по которым движутся точки, а сами треугольники движутся по перпендикулярной им прямой пролиферации (см. рис. 5).

Введем краевые условия первого рода, устанавливающие связь (3) с (5). За промежуток времени  $\Delta t$  в состоянии пролиферации переходит  $\alpha_b \frac{B_1 + B_\sigma}{B_1 + B_\sigma + B^* H_0} \Delta t$  наивных Th лимфоцитов, которые за это время успевают пройти по прямой пролиферации расстояние, равное  $\hat{p}_h(0)\Delta t$ . Согласно нашей модели количество делящихся Th лимфоцитов, в момент времени  $t$  находящихся в состоянии  $z \in [z_1, z_2]$  будет равно  $\int_{z_1}^{z_2} H(t, \zeta) d\zeta$ . Исходя из этого можно записать следующее равенство:

$$H(t, \hat{p}_h(0)\Delta t) \hat{p}_h(0)\Delta t = \alpha_b \frac{B_1 + B_\sigma}{B_1 + B_\sigma + B^* H_0} \Delta t.$$

Откуда следует следующее краевое условие для (5):

$$H(t, z) \Big|_{z=0} = \frac{\alpha_b}{\hat{p}_h(0)} \frac{B_1 + B_\sigma}{B_1 + B_\sigma + B^* H_0}. \quad (9)$$

Аналогичным образом определяются краевые условия для (6):

$$B(t, z) \Big|_{z=0} = \frac{\alpha_h}{\hat{p}_b(0)} \frac{H_\sigma}{H_\sigma + H^* B_1} B_1. \quad (10)$$

Для уравнений (7–8) краевые условия будут выглядеть следующим образом:

$$X \Big|_{z=0} = 0, \quad (11)$$

$$Y \Big|_{z=0} = 0. \quad (12)$$

Условия (11–12) отражают предположение о том, что после активации Th лимфоцит имеет одинаковую предрасположенность к трем основным фенотипам, т.е. ему соответствует точка в центре «треугольника дифференцировки».

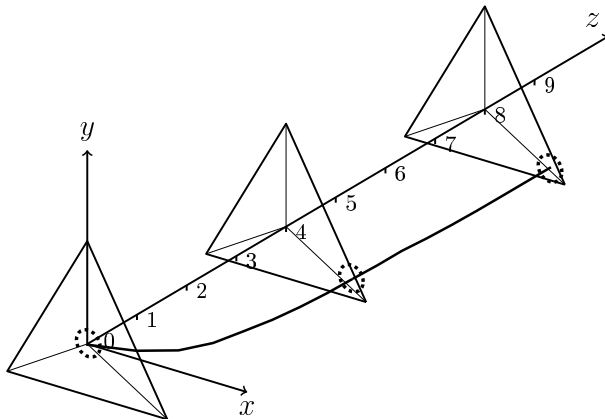


Рис. 5. Модель дифференцировки Th лимфоцитов представляется в виде «треугольника дифференцировки», по которому движется точка, а сам треугольник движется по перпендикулярной ему прямой пролиферации.

## 6. СИНТЕЗ ЦИТОКИНОВ В ЛИМФОУЗЛЕ

Цитокины - это главные медиаторы иммунных реакций. Как описывалось в предыдущем пункте, они оказывают огромное влияние на весь ход процесса дифференцировки лимфоцитов, причем основным источником цитокинов в лимфоузле являются Th лимфоциты. Несмотря на большое количество информации о концентрации и продукции цитокинов, имеющееся в современной литературе, объемы продукции цитокинов *отдельной* клеткой изучены крайне мало. Чаще всего исследователи измеряют уровень цитокина в периферической крови, куда попадает лишь очень малая часть (сотые и тысячные доли) того белка, который синтезируется *in situ* (т.е. в лимфоузле или в очаге воспаления). Интерпретация этих данных представляет большие трудности, т.к. уровень цитокина *in situ*, где происходят очень динамичные процессы, может значительно колебаться в короткий промежуток времени, и число цитокин-синтезирующих клеток также не всегда можно точно определить. Тем не менее на основе ряда работ можно дать некоторые оценки. Большое количество данных по синтезу и скорости распада цитокинов IFN- $\gamma$ , IL-12, IL-10, IL-4 собраны в работе по математическому моделированию туберкулезной инфекции Wigginton and Kirschner [32].

Данные о *динамике* синтеза IL-4, IFN- $\gamma$ , IL-5, IL-13 дифференцирующимися Т-клетками, измеренные в [22] на основе данных об отношении экспрессии молекул цитокинов на поверхности клетки к экспрессии конституционно экспрессируемого белка HPRT, показывают, что скорость синтеза при дифференцировке Т-клетки значительно меняется в зависимости от числа пройденных ею делений и начинает стабилизироваться только после двух (для IL-5 и IL-13) или четырех (для IL-4 и IFN- $\gamma$ ) делений. Динамика синтеза IL-2 Т-клетками исследована в [25, 21, 18].

Также нужно учесть, что различные субпопуляции Th лимфоцитов синтезируют разные цитокины. В частности, IFN- $\gamma$  синтезируют Th1 лимфоциты, IL-4 синтезируют Th2 лимфоциты, IL-2 — Th1 и Th2 одновременно, IL-21 синтезируют Th17 лимфоциты. Тогда для предложенных выше уравнений пролиферации и дифференцировки (5–8) уравнения синтеза цитокинов IFN- $\gamma$ , IL-2, IL-4,

П-21 в лимфоузле в ходе пролиферации будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{dI_\gamma}{dt} = \rho_\gamma \int_0^\nu 2^\zeta H(t, \zeta) f_{h1}(t, \zeta) \hat{s}_\gamma(\zeta) d\zeta - w_\gamma I_\gamma, \quad (13)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \rho_2 \int_0^\nu 2^\zeta H(t, \zeta) (f_{h1}(t, \zeta) + f_{h2}(t, \zeta)) \hat{s}_2(\zeta) d\zeta - w_2 I_2, \quad (14)$$

$$\frac{dI_4}{dt} = \rho_4 \int_0^\nu 2^\zeta H(t, \zeta) f_{h2}(t, \zeta) \hat{s}_4(\zeta) d\zeta - w_4 I_4, \quad (15)$$

$$\frac{dI_{21}}{dt} = \rho_{21} \int_0^\nu 2^\zeta H(t, \zeta) f_{h17}(t, \zeta) \hat{s}_{21}(\zeta) d\zeta - w_{21} I_{21}, \quad (16)$$

где  $\rho_i$  характеризует среднюю скорость синтеза  $i$ -го цитокина соответствующей Th клеткой;  $2^z$  — количество клеток, получаемых в результате  $z$  делений;  $\hat{s}_i(z)$  определяет зависимость скорости синтеза  $i$ -го цитокина от числа пройденных клеткой делений (функции определялись эмпирически на основании описанных выше экспериментальных данных, см. рис. 6);  $w_i$  — скорость деградации  $i$ -го цитокина. Сложная функция  $f_{hi}(t, z)$  определяет долю клеток субпопуляции Th*i*, от числа всех клеток, находящихся в состоянии  $z$  (т.е. прошедших  $z$  делений). Она определяется следующим образом:

$$f_{hi}(t, z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r_i^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_{17}^2} \right),$$

где  $r_i$  — расстояние от  $i$ -ой вершины треугольника до точки  $(X(t, z), Y(t, z))$  (см. комментарии к уравнениям (7–8)). Т.о., функции  $f_{h1}$ ,  $f_{h2}$  и  $f_{h17}$  определяют фракцию делящихся Th лимфоцитов, приходящуюся на Th1, Th2 и Th17, соответственно, причем  $f_{h1} + f_{h2} + f_{h17} \equiv 1$ . Данные функции построены с учетом косвенных данных о динамике дифференцировки Th лимфоцитов, описанных в [22].

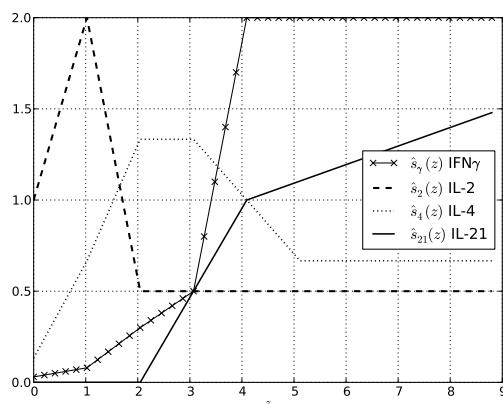


Рис. 6. Динамика синтеза цитокинов в зависимости от числа пройденных делений  $z$ . Функции построены на основе данных, полученных в [22, 25, 21, 18].

Одной из косвенных причин развития СКВ согласно генетическим исследованиям является усиление пролиферации Th17 [23]. Одним из факторов, направляющих дифференцировку Th17 лимфоцитов, является синтез цитокинов IL-6 и TGF $\beta$  другими клетками иммунной системы. Чтобы количественно оценить влияние этого фактора на патогенез СКВ мы добавили в систему внешний источник IL-6:

$$\frac{dI_6}{dt} = \hat{\lambda}_6(t) - w_6 I_6, \quad (17)$$

где первое слагаемое описывает приток цитокина из внешнего источника, второе — убыль цитокина в результате естественного распада. В нашем случае мы предполагали, что с усилением патологического процесса внешний источник цитокина также будет увеличиваться, поэтому в нашем случае  $\hat{\lambda}_6(t) = 100 + 4,5t$  пг л $^{-1}$  день $^{-1}$  линейно возрастает.

## 7. ЗАВЕРШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВКИ ЛИМФОЦИТОВ, ВЫХОД НА ПЕРИФЕРИЮ

Лимфоциты, завершившие дифференцировку, покидают лимфоузел, освобождая место клеткам, только вступающим в процесс пролиферации. Опишем динамику созревших субпопуляций В-лимфоцитов (плазмоцитов), синтезирующих антитела классов IgM и IgG, функциями  $B_m(t)$  и  $B_g(t)$ , соответственно. При этом учтем, что на переключение класса синтезируемых антител влияют дифференцирующиеся Th лимфоциты:

$$\frac{dB_m}{dt} = \left( \int_0^\nu 2^\zeta \hat{m}_b(\zeta) B(t, \zeta) d\zeta + 2^\nu \hat{p}_b(\nu) B(\nu, t) \right) (1 - \theta) - w_m B_m, \quad (18)$$

$$\frac{dB_g}{dt} = \left( \int_0^\nu 2^\zeta \hat{m}_b(\zeta) B(t, \zeta) d\zeta + 2^\nu \hat{p}_b(\nu) B(\nu, t) \right) \theta - w_g B_g, \quad (19)$$

где

$$\theta(t) = \frac{\int_0^\nu 2^\zeta H(t, \zeta) d\zeta}{H_g^* + \int_0^\nu 2^\zeta H(t, \zeta) d\zeta}.$$

Оба уравнения практически идентичны: первый множитель первого слагаемого описывает суммарный приток В-лимфоцитов из лимфоузла, второй множитель — фракцию В-лимфоцитов данной субпопуляции, последнее слагаемое — естественную убыль клеток (при этом нужно отметить, что время жизни IgM-синтезирующих плазмоцитов гораздо меньше, чем у синтезирующих IgG антитела [12]). Интеграл от функции  $H(t, z)$  определяет концентрацию пролиферирующих Th лимфоцитов, выделяющих цитокины, необходимые для переключения изотипа синтезируемых антител с IgM на IgG. Константа  $H_g^*$  характеризует концентрацию Th лимфоцитов в лимфоузле, при которой 50% В-лимфоцитов переключаются на синтез антител класса IgG. Константа  $d$  определяет, после какого деления Th лимфоциты начинают оказывать влияние на дифференцировку В-лимфоцитов.

Следующие уравнения описывают синтез, расход на элиминацию антигена и естественный распад антител IgM и IgG, соответственно:

$$\frac{dA_m}{dt} = \rho_m B_m - k \frac{A_m}{1 + \delta_a A_m} S - w_{a_m} A_m, \quad (20)$$

$$\frac{dA_g}{dt} = \rho_g B_g - k \frac{A_g}{1 + \delta_a A_g} S - w_{a_g} A_g. \quad (21)$$

Теперь опишем динамику созревших Th лимфоцитов (Th1, Th2 и Th17, соответственно) на периферии:

$$\frac{dH_1}{dt} = \int_0^\nu 2^\zeta \hat{m}_h(\zeta) H(t, \zeta) f_{h1}(t, \zeta) d\zeta + 2^\nu \hat{p}_h(\nu) H(\nu, t) f_{h1}(t, \nu) - w_h H_1, \quad (22)$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \int_0^\nu 2^\zeta \hat{m}_h(\zeta) H(t, \zeta) f_{h2}(t, \zeta) d\zeta + 2^\nu \hat{p}_h(\nu) H(\nu, t) f_{h2}(t, \nu) - w_h H_2, \quad (23)$$

$$\frac{dH_{17}}{dt} = \int_0^\nu 2^\zeta \hat{m}_h(\zeta) H(t, \zeta) f_{h17}(t, \zeta) d\zeta + 2^\nu \hat{p}_h(\nu) H(\nu, t) f_{h17}(t, \nu) - w_h H_{17}. \quad (24)$$

Во всех трех уравнениях первые два слагаемых описывают миграцию созревших Th лимфоцитов из лимфузла, а последнее — естественную убыль Th лимфоцитов.

Зададим не определенные ранее функции. Определим  $B_\sigma(t)$ , описывающую в уравнении (3) концентрацию центробластов (в нашем случае фракция пролиферирующих В-лимфоцитов, способных влиять на активацию наивных Th лимфоцитов), и  $H_\sigma$  — общую концентрацию пролиферирующих Th лимфоцитов в уравнении (4):

$$B_\sigma = \int_0^{\nu-c} 2^\zeta B(t, \zeta) d\zeta, \quad H_\sigma = \int_0^\nu 2^\zeta H(t, \zeta) d\zeta,$$



где  $c$  — максимальное число делений В-лимфоцитов, при которых они все еще сохраняют функции антиген-презентирующих клеток.

Определим функцию  $\gamma(H, t, z)$ , описывающую снижение апоптоза В-лимфоцитов в уравнении (6):

$$\gamma(H, t, z) = \delta_h \frac{\left( \int_d^\nu 2^\zeta f_{h17}(t, \zeta) H(t, \zeta) d\zeta \right)^2}{\left( \int_d^\nu 2^\zeta f_{h17}(t, \zeta) H(t, \zeta) d\zeta \right)^2 + (H_{17}^*)^2},$$

где  $H_{17}^*$  — концентрация Th17 лимфоцитов в лимфоузле, при которой их эффективность в плане снижения апоптоза делящихся В-клеток достигает половины от максимально возможной.

Таблица 1. Значения коэффициентов модели.

Коэф.	Значение	Единицы	Коэф.	Значение	Единицы
$\alpha_b$	2	1/день	$\rho_g$	$2,43 \times 10^{-12}$	М/день
$\alpha_h$	5,15	1/день	$\rho_\gamma$	0,043	пг/день
$\alpha_s$	20,25	1/день	$\rho_m$	$1,5 \times 10^{-10}$	М/день
$B_0^*$	8730	1/л	$S_0$	$2,12 \times 10^{-10}$	М/л
$B^*$	5	—	$S^*$	$2,6 \times 10^{-11}$	М
$c$	3,3	циклов	$\sigma_b$	455	1/(л день)
$d$	4	циклов	$\sigma_h$	243	1/(л день)
$\delta_a$	$10^8$	л/М	$w_0$	0,003229	1/день
$\delta_h$	2	—	$w_2$	2,77	1/день
$d_h$	0,82	—	$w_6$	2,77	1/день
$H_0^*$	47420	1/л	$w_4$	2,77	1/день
$H_g^*$	1000	1/л	$w_{21}$	2,77	1/день
$H_{17}^*$	15000	1/л	$w_{a_g}$	0,143	1/день
$H^*$	0,5	—	$w_{a_m}$	0,8	1/день
$k$	$3,54 \times 10^9$	1/(М день)	$w_b$	0,052	1/день
$\nu$	8,3	циклов	$w_g$	0,0083	1/день
$\rho_2$	0,0221	пг/день	$w_\gamma$	4,106	1/день
$\rho_{21}$	0,05	пг/день	$w_h$	0,0051	1/день
$\rho_4$	0,0565	пг/день	$w_m$	0,267	1/день

## 8. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ, ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Начальные условия модели имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 S &= S_0, & B_0 &= B_0^*, & H_0 &= H_0^*, & B_1 &\equiv 0, \\
 H &\equiv 0, & B &\equiv 0, & X &\equiv 0, & Y &\equiv 0, \\
 B_m &\equiv 0, & B_g &\equiv 0, & A_m &\equiv 0, & A_g &\equiv 0, \\
 H_1 &\equiv 0, & H_2 &\equiv 0, & H_{17} &\equiv 0, & I_\gamma &\equiv 0, \\
 I_2 &\equiv 0, & I_4 &\equiv 0, & I_6 &\equiv 0, & I_{21} &\equiv 0,
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Для определения коэффициентов (табл. 1) были использованы данные из литературы (более 20 источников), а также данные анализов 295 пациентов, проходивших лечение в Первом медицинском институте им. И. П. Павлова, в Городском ревматологическом центре, на аллергологическом отделении Городской больницы №26 и в других стационарах Санкт-Петербурга с 1967 по 1988 гг., наблюдавшихся проф., д.м.н., ревматологом В. И. Шишкиным, президентом Ревматологической ассоциации Санкт-Петербурга.

Модель исследовалась численно, были использованы методы 2 порядка точности по обеим координатам. Для решения ОДУ использовался метод Эйлера с пересчетом; для ДУвЧП – метод Лакса-Вендроффа с элементами метода коррекции потоков; интегрирование проводилось с помощью метода трапеций. Имитировалось развитие СКВ в течение 200 дней. Методы были реализованы на языке Python с использованием пакета NumPy, оптимизирующего работу с большими массивами данных, и пакета Matplotlib, с помощью которого осуществлялась визуализация результатов в виде 2D и 3D графиков. Счет производился на ПК с одноядерным процессором тактовой частотой 2,8 ГГц. Шаг по оси  $Ot$  равнялся 0,03; по оси  $Oz$  равнялся 0,35. Среднее время эксперимента: 4 мин. 30 сек.

## 9. РЕЗУЛЬТАТЫ

Было имитировано развитие СКВ в течение 200 суток. Благодаря внешнему источнику IL-6, произошло смещение иммунного ответа в сторону Th17 (см. рис. 1 на вклейке). Чтобы выявить

силу влияния Th17 на гуморальный иммунный ответ, был проведен дополнительный эксперимент с отключенным Th17 фенотипом (см. рис. 2 на вклейке). Для этого была изменена функция  $f_{hi}(t, z)$ :

$$f_{hi}(t, z) = \begin{cases} 1 - \frac{r_i^2}{r_1^2 + r_2^2}, & \text{если } i = 1, 2, \\ 0, & \text{если } i = 17. \end{cases}$$

Из графиков (см. рис. 1 и рис. 2 на вклейке) видно, что суммарная концентрация Th лимфоцитов примерно одинакова в обоих случаях. При этом включение Th17 иммунного ответа приводит к увеличению примерно в 6 раз концентрации плазмоцитов и антител (см. также табл. 2). Это явилось результатом увеличения выживаемости В-лимфоцитов при пролиферации за счет цитокинов Th17 профиля.

**Таблица 2. Общая концентрация Th-лимфоцитов, плазмоцитов (дифференцировавшихся В-лимфоцитов), IgM и IgG антител на 200-й день вычислительного эксперимента по развитию СКВ.**

Тип иммунного ответа	Th лимфоциты, 1/л	Плазмоциты, 1/л	IgM, М/л	IgG, М/л
Th17	$6,9 \times 10^6$	$4,8 \times 10^7$	$2,2 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{-4}$
Th2	$6,8 \times 10^6$	$8,0 \times 10^6$	$3,5 \times 10^{-7}$	$2,15 \times 10^{-5}$

В свете полученных данных становится понятным наличие связи между предрасположенностью к развитию Th17 и риском СКВ: увеличение выживаемости В-лимфоцитов приводит к значительному увеличению концентрации плазмоцитов, следствием чего становится увеличение уровня аутоантител и ухудшение патогенеза СКВ. Полученные результаты были доложены на V международной конференции “Математическая биология и биоинформатика” в Пущино [7].

Данная модель была также использована для исследования динамики формирования иммунных комплексов при СКВ — для этого модель была дополнена пятью обыкновенными дифференциальными уравнениями. В результате была выявлена причина снижения уровня свободного C1q у больных СКВ, а также выявлена роль эритроцитарного рецептора CR1 в процессе элиминации антиге-

на [6]. Полученные данные были затем подтверждены статистически [26].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров Г.А., Марчук Г.И. Прикладные проблемы математического моделирования в иммунологии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 12. С. 1905–1920.
2. Кузнецов С.Р. Математическая модель активации, пролиферации и дифференцировки Т- и В-лимфоцитов при их взаимодействии в лимфоузле с описанием переключения синтеза изотипов иммуноглобулинов IgM и IgG // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Смирнова Н.В., Смирновой Т.Е. СПб.: Издат. дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 339–344.
3. Кузнецов С.Р., Лысков В.М., Орехов А.В., Шишкин В.И. Модель пролиферации и дифференцировки неоднородной клеточной популяции // Математическое и компьютерное моделирование в биологии и химии: III Международная научная Интернет-конференция: материалы конф. (Казань, 25 сентября 2014 г.) / сост. Синяев Д.Н. Казань: ИП Синяев Д.Н., 2014. С. 95–103.
4. Кузнецов С.Р., Шишкин В.И. Математическое моделирование как инструмент теоретических исследований в иммунологии — достижения и перспективы // Цитокины и воспаление. 2012. Т. 11, № 2. С. 5–13.
5. Кузнецов С.Р., Шишкин В.И. Обобщенное представление процессов пролиферации и дифференцировки CD4+ Т-лимфоцитов: математическая модель // Российский иммунологический журнал. 2013. Т. 7(16). № 2–3, С. 176–177.
6. Кузнецов С.Р., Шишкин В.И., Кудрявцева Г.В. Динамика формирования и элиминации иммунных комплексов при системной красной волчанке: опыт вычислительного эксперимента // Цитокины и воспаление. 2014. Т. 13, № 1. С. 23–27.
7. Кузнецов С.Р., Шишкин В.И., Лысков В.М. Влияние Th17 типа иммунного ответа на динамику формирования антител при системной красной волчанке (СКВ): опыт вычислительного эксперимента // Математическая биология и биоинформатика: V Международная конф., г. Пущино, 19–24 октября 2014 г. / под ред. В.Д. Лахно. М.: МАКС Пресс, 2014. С. 154–155.
8. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии: вычислительные методы и эксперименты. Наука, 1991. 299 с.
9. Молчанов А.М. Кинетическая модель иммунитета. № 25. Препринт ИПМ АН СССР, 1970. 22 с.

10. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Биофизическая динамика продукционных процессов. 2 изд. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 464 с.
11. Смирнова О.А., Степанова Н.В. Математическая модель колебаний при инфекционном иммунитете // Колебательные процессы в биологических и химических системах: Труды Второго Всесоюзного симпозиума по колебательным процессам в биологических и химических системах, Пущино-на-Оке, 23–27 ноября 1970 г. Т. 2. Пущино-на-Оке: НЦБИ АН СССР, 1971. С. 247–251.
12. Хаитов Р.М., Пинегин Б.В., Ярилин А.А. Иммунология. Атлас. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2011. 624 с.
13. Anderson P. Post-transcriptional control of cytokine production // Nat. Immunol. 2008. Vol. 9, N 4. P. 353–359.
14. Banks H.T., Charles F., Jauffret M.D., Sutton K.L., Thompson W.C. Label structured cell proliferation models // Appl. Math. Lett. 2010. Vol. 23, N 12. P. 1412–1415.
15. Banks H.T., Sutton K.L., Thompson W.C., Bocharov G., Doumic M., Schenkel T., Argilaguet J., Giest S., Peligero C., Meyerhans A. A new model for the estimation of cell proliferation dynamics using CFSE data // J. Immunol. Methods. 2011. Vol. 373, N 1-2. P. 143–160.
16. Bell G.I. Mathematical model of clonal selection and antibody production // J. Theor. Biol. 1970. Vol. 29, N 2. P. 191–232.
17. Bell G.I., Anderson E.C. Cell growth and division. I. A mathematical model with applications to cell volume distributions in mammalian suspension cultures // Biophys. J. 1967. Vol. 7, N 4. P. 329–351.
18. Busse D., De la Rosa M., Hobiger K., Thurley K., Flossdorf M., Scheffold A., Hofer T. Competing feedback loops shape IL-2 signaling between helper and regulatory T lymphocytes in cellular microenvironments // Proc. Natl. Acad. Sci. U S A. 2010. Vol. 107, N 7. P. 3058–3063.
19. Crispin J.C., Stamatis-Liossis N.C., Kis K., Toth, Lieberman L.A., Kytтары V.C., Juang Y.T., Tsokos G.C. Pathogenesis of human systemic lupus erythematosus: recent advances // Trends. Mol. Med. 2010. Vol. 16, N 2. P. 47–57.
20. Doreau A., Belot A., Bastid J., Riche B., Biemont M.T., Ranchin B., Fabien N., Cochat P., Noble C.P., Trolliet P., Durieu I., Tebib J., Kassai B., Ansieau S., Puisieux A., Eliaou J.F., Berard N.B. Interleukin 17 acts in synergy with B cell-activating factor to influence B cell biology and the pathophysiology of systemic lupus erythematosus // Nat. Immunol. 2009. Vol. 10, N 7. P. 778–785.
21. Feinerman O., Jentsch G., Tkach K.E., Coward J.W., Hathorn M.M., Sneddon M.W., Emonet T., Smith K.A., Bonnet G.A. Single-cell quantification of IL-2 response by effector and regulatory T cells reveals critical plasticity in immune response // Mol. Syst. Biol. 2010. Vol. 6. P. 437.

22. *Grogan J.L., Mohrs M., Harmon B., Lacy D.A., Sedat J.W., Locksley R.M.* Early transcription and silencing of cytokine genes underlie polarization of T helper cell subsets // *Immunity*. 2001. Vol. 14, N 3. P. 205–215.
23. *Guerra S.G., Vyse T.J., Cunninghame-Graham D.S.* The genetics of lupus: a functional perspective // *Arthritis Research Therapy*. 2012. Vol. 14, N 3.
24. *Ham H.J., De Boer R.J.* Cell division curtails helper phenotype plasticity and expedites helper T-cell differentiation // *Immunol. Cell. Biol.* 2012. Vol. 90, N 9. P. 860–868.
25. *Kum W.W., Cameron S.B., Hung R.W., Kalyan S., Chow A.W.* Temporal sequence and kinetics of proinflammatory and anti-inflammatory cytokine secretion induced by toxic shock syndrome toxin 1 in human peripheral blood mononuclear cells // *Infect. Immun.* 2001. Vol. 69, N 12. P. 7544–7549.
26. *Kuznetsov S.R., Shishkin V.I.* Analysis of immune complex (IC) formation dynamics in systemic lupus erythematosus (SLE) require reconsidering the role of blood clearance by the erythrocyte complement receptor 1 (CR1) // 9th International Congresses on Autoimmunity, Nice, France, March 26–30, 2014. Abstracts.
27. *Lee H.Y., Perelson A.S.* Modeling T cell proliferation and death in vitro based on labeling data: generalizations of the Smith-Martin cell cycle model // *Bull. Math. Biol.* 2008. Vol. 70, N 1. P. 21–44.
28. *Luzyanina T., Roose D., Schenkel T., Sester M., Ehl S., Meyerhans A., Bocharov G.* Numerical modelling of label-structured cell population growth using CFSE distribution data // *Theor. Biol. Med. Model.* 2007. Vol. 4. P. 26.
29. *Murphy K.M., Stockinger B.* Effector T cell plasticity: flexibility in the face of changing circumstances // *Nat. Immunol.* 2010. Vol. 11, N 8. P. 674–680.
30. *Severins M., Borghans J.A.M., De Boer R.J.* T-Cell Vaccination / Ed. by J. Zhang, R.R. Cohen. New York: Nova Science Publishers, 2008. P. 139–158.
31. *Sinko J.W., Streifer W.* A new model for age-size structure of a population // *Ecology*. 1967. Vol. 48, N 6. P. 910–918.
32. *Wigginton J.E., Kirschner D.* A model to predict cell-mediated immune regulatory mechanisms during human infection with *Mycobacterium tuberculosis* // *J. Immunol.* 2001. Vol. 166, N 3. P. 1951–1967.
33. *Yates A., Callard R., Stark J.* Combining cytokine signalling with T-bet and GATA-3 regulation in Th1 and Th2 differentiation: a model for cellular decision-making // *J. Theor. Biol.* 2004. Vol. 231, N 2. P. 181–196.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, РАССЧИТАННАЯ ПО МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО–РЕЙССНЕРА

А.В.Зелинская, П.Е.Товстик

Рассматривается устойчивость при осевом сжатии трансверсально изотропной цилиндрической оболочки. Если края оболочки достаточно хорошо закреплены, вмятины при потере устойчивости заполняют всю поверхность оболочки. Если же один из краев свободен или слабо закреплен, вмятины локализуются в окрестности этого края. Для изотропной оболочки указанная задача была решена ранее по модели Кирхгофа–Лява. Здесь, исходя из модели Тимошенко–Рейсснера, рассматривается трансверсально изотропная оболочка с малой жесткостью на поперечный сдвиг. Приведены случаи слабого закрепления края. Для каждого из них найдена зависимость критической нагрузки и формы прогиба от сдвигового параметра. Результаты сравниваются с аналогичными результатами для изотропной оболочки.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование устойчивости круговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии является одним из важных этапов их расчета. Первые экспериментальные работы были выполнены Лилли [1] и Маллоком [2] в 1908 году. Классическая формула для критической нагрузки при потере устойчивости тонкой круговой цилиндрической оболочки средней длины при осевом сжатии была получена Лоренцем [3] и Тимошенко [4]. В дальнейшем устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии была детально исследована в различных постановках. Исследовалось влияние длины оболочки, способа ее закрепления, моментности начального напряженного состояния, начальных несовершенств формы, нелинейных эффектов, динамических и параметрических нагрузок и др. (см. обзоры [5,6]).

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00523), а также при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ.

Доклад на семинаре 25 ноября 2014 г.

© А.В.Зелинская, П.Е.Товстик, 2015

Здесь исследуются локализованные вблизи края формы потери устойчивости, связанные со слабым закреплением края. Ишлинский [7] первым обратил внимание на возможность локализованной потери устойчивости сжатой пластины со свободным краем, сопровождающейся снижением критической нагрузки. При этом снижение нагрузки оказалось незначительным (менее 1 %). Для оболочек со свободным краем снижение нагрузки может быть в 2 раза и более, что впервые установлено в работах Нахбара и Хоффа [8] и Кильчевского [9]. В дальнейшем было показано, что не только свободный, но и слабо закрепленный край порождает локализованную форму потери устойчивости [6, 10-12]. Обнаружено 7 вариантов граничных условий, при которых возможно появление локализованной формы.

Сказанное выше относится к изотропным оболочкам, и упомянутые выше результаты были получены исходя из двухмерной модели Кирхгофа–Лява (КЛ). Оболочки, изготовленные из трансверсально изотропного материала с относительно малым модулем поперечного сдвига, проявляют ряд особенностей при потере устойчивости при осевом сжатии. При этом для получения корректного результата двухмерная модель КЛ оказывается недостаточной, лучшие результаты дает модель Тимошенко–Рейсснера (ТР), учитывающая поперечный сдвиг. Обсуждение погрешности этих моделей содержится в работах [13-15]. Наряду со снижением нагрузки при малой жесткости на поперечный сдвиг возможно появление форм потери устойчивости, локализованных вблизи боковых поверхностей цилиндра, а также потеря устойчивости самого материала [14-16].

В работе [17] построены локализованные формы потери устойчивости трансверсально изотропной цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем. Данная работа в значительной мере повторяет метод исследования работы [17]. В ней построены локализованные вблизи криволинейного края формы потери устойчивости трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Найдены варианты граничных условий, допускающих указанную локализацию.



## 2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ.

Рассмотрим циклически симметричную деформацию тонкой круговой цилиндрической оболочки средней длины радиуса  $R$ , полагая

$$\begin{aligned} & \{u, w, \varphi_1, T_1, T_2, Q_1, M_1, M_2\}(x, \varphi) = \\ & = \{u, w, \varphi_1, T_1, T_2, Q_1, M_1, M_2\}(x) \sin m\varphi, \end{aligned}$$

$$\{v, \varphi_2, S, Q_2, H\}(x, \varphi) = \{v, \varphi_2, S, Q_2, H\}(x) \cos m\varphi.$$

Здесь  $x, \varphi$  — длина дуги образующей и угол в окружном направлении,  $u, v, w$  — проекции перемещения,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы поворота нормальных волокон,  $T_1, S, T_2$  — тангенциальные усилия,  $Q_1, Q_2$  — перерезывающие усилия,  $M_1, M_2, H$  — изгибающие и крутящий моменты.

Для замкнутой в окружном направлении оболочки  $m$  — число волн в окружном направлении ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Для цилиндрической панели с шарнирно опертыми прямолинейными краями  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_0 < 2\pi$

$$m = k\varphi_0/\pi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Уравнения равновесия оболочки таковы

$$\begin{aligned} T_1' - \frac{mS}{R} = 0, \quad S' + \frac{mT_2}{R} = 0, \quad Q_1' - \frac{mQ_2}{R} + \frac{T_2}{R} + q_n = 0, \\ M_1' - \frac{mH}{R} + Q_1 = 0, \quad H' + \frac{mM_2}{R} + Q_2 = 0, \quad ( )' \equiv \frac{d( )}{dx}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $q_n$  — интенсивность внешней нормальной нагрузки. В задаче устойчивости при осевом сжатии усилием  $P > 0$  следует считать

$$q_n = -Pw''. \quad (3)$$

Уравнения (2) имеют один и тот же вид как для модели КЛ, так и для модели ТР. Различие этих моделей появляется в соотношениях упругости, связывающих усилия и моменты с деформациями.

Для модели КЛ соотношения упругости имеют вид:

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), & \{1, 2\}, & & S &= \frac{K(1-\nu)}{2}\omega, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), & \{1, 2\}, & & H &= D(1-\nu)\tau, \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & & & K &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $h$  — толщина оболочки, тангенциальные ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ ) и изгибные ( $\kappa_1, \kappa_2, \tau$ ) деформации равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u', & \varepsilon_2 &= -\frac{mv+w}{R}, & \omega &= v' + \frac{mu}{R}, \\ \kappa_1 &= w'', & \kappa_2 &= -\frac{m^2w}{R}, & \tau &= -\frac{mw'}{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для модели ТР (кроме неизвестных перемещений  $u, v, w$ ) вводятся неизвестные углы поворота нормальных волокон  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , связанные с углами поперечного сдвига  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  по формулам

$$\gamma_1 = \varphi_1 + w', \quad \gamma_2 = \varphi_2 - \frac{mw}{R}. \quad (6)$$

Для модели Кирхгофа–Лява  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . К соотношениям упругости (4) добавляются формулы для перерезывающих усилий

$$Q_1 = G^*h\gamma_1, \quad Q_2 = G^*h\gamma_2, \quad G^* = kG_{13}, \quad k = \frac{5}{6}, \quad (7)$$

где  $G_{13}$  — модуль сдвига в поперечном направлении,  $k = 5/6$  — поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряжений поперечного сдвига по толщине оболочки.

Для модели ТР формулы (4) сохраняют свой вид, однако, при вычислении моментов  $M_1, M_2, H$  кривизны и кручение вместо (5) вычисляются по формулам [17]

$$\kappa_1 = -\varphi_1', \quad \kappa_2 = \frac{m\varphi_2}{R}, \quad 2\tau = -\varphi_2' + \frac{m}{R}\varphi_1. \quad (8)$$

Исследуемая ниже потеря устойчивости порождает форму прогиба с большим показателем изменчивости [12], поэтому формулы (2)–(8) записаны в приближенном варианте [5,18], принятом в теории пологих оболочек и имеющем погрешность порядка относительной толщины оболочки  $h_* = h/R$ .

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.

Введем новые переменные (со значком  $\hat{\cdot}$ ) по формулам

$$\begin{aligned} x &= \frac{R\hat{x}}{\mu}, \quad m = \frac{q}{\mu}, \quad w = R\hat{w}, \quad \{u, v\} = \mu R\{\hat{u}, \hat{v}\}, \\ \varphi_i &= \frac{\hat{\varphi}_i}{\mu}, \quad \{T_i, S\} = Eh\{\hat{T}_i, \hat{S}\}, \quad Q_i = Eh\mu\hat{Q}_i, \quad i = 1, 2, \\ \{M_i, H\} &= Eh\mu^2 R\{\hat{M}_i, \hat{H}\}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad g = \frac{E\mu^2}{G^*}, \\ P &= 2Eh\mu^2\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mu$  — малый параметр относительной толщины,  $g$  — сдвиговой параметр (в модели КЛ считаем  $g = 0$ ),  $\lambda$  — искомый параметр нагружения. В дальнейшем значок  $\hat{\cdot}$  будет опущен. Переменные (9) введены таким образом, чтобы при описании формы потери устойчивости все величины имели порядок единицы по отношению малому параметру  $\mu$ . В частности, коэффициент 2 в выражении для  $P$  введен для того, чтобы классическое критическое значение при потере устойчивости [12] было  $\lambda = 1$ .

После введения функции усилий  $\Phi$  по формулам

$$T_1 = -q^2\Phi, \quad S = -q\Phi', \quad T_2 = w''\Phi$$

первые два уравнения системы (2) будут выполнены.

Исключение перемещений  $u$  и  $v$  из соотношений (4), (5) приводит к уравнению неразрывности

$$\Delta\Delta\Phi + w'' = 0, \quad \Delta(\cdot) = (\cdot)'' - q^2(\cdot), \quad (10)$$

которое является одним и тем же для обеих моделей КЛ и ТР.

Для модели КЛ третье уравнение (2) принимает вид:

$$-\Delta\Delta w - 2\lambda w'' + \Phi'' = 0 \quad (11)$$

и вместе с уравнением (10) образует систему относительно неизвестных функций  $w, \Phi$ .

Для модели ТР вместо углов поворота нормального волокна  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  введем неизвестные функции  $\Psi$  и  $\Theta$  по формулам

$$\varphi_1 = -\Psi' - q\Theta, \quad \varphi_2 = -q\Psi - \Theta'.$$

Тогда уравнение для функции  $\Theta$  отделяется

$$g_1\Delta\Theta - \Theta = 0, \quad g_1 = \frac{(1-\nu)g}{2}, \quad (12)$$

а остальные уравнения дают

$$g^{-1}(\Delta w - \Delta\Psi) + \Phi'' - 2\lambda w'' = 0, \quad w - \Psi + g\Delta\Psi = 0. \quad (13)$$

Уравнения (13) вместе с уравнением (10) образует систему относительно неизвестных функций  $w, \Phi, \Psi$ . При  $g \ll 1$  будет  $w \simeq \Psi$ , и уравнения (13) переходят в уравнение (11), а функция  $\Theta$  является быстро меняющейся и описывает интеграл пограничного слоя.

#### 4. ВНУТРЕННЯЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ.

Здесь по моделям КЛ и ТР рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки по формам прогиба, описываемым двойкой периодическими функциями

$$w(x, \varphi) = w_0 \sin px \cos m\varphi. \quad (14)$$

При этом граничные условия игнорируются. Тот же вид имеют формы прогиба при шарнирном опирании краев  $x = 0$  и  $x = n\pi/l$ , где  $l = L/\mu$  — безразмерная длина оболочки.

Для модели КЛ уравнения (10) и (11) дают

$$\lambda^{\text{КЛ}}(p, q) = \frac{1}{2} \left( \frac{(p^2 + q^2)^2}{p^2} + \frac{p^2}{(p^2 + q^2)^2} \right).$$

Минимизация функции  $\lambda^{\text{КЛ}}(p, q)$  по волновым числам  $p$  и  $q$  приводит к классическому значению критической нагрузки [3,4,12]

$$\lambda_{cl} = 1$$

и соотношению  $p^2 + q^2 \pm p = 0$ , описывающему множество форм потери устойчивости. Среди них есть и осесимметричная форма при  $p = 1, q = 0$ .

Для модели ТР уравнения (10) и (13) приводят к соотношению

$$\lambda^{\text{ТР}}(p, q) = \frac{1}{2} \left( \frac{(p^2 + q^2)^2}{p^2(1 + g(p^2 + q^2))} + \frac{p^2}{(p^2 + q^2)^2} \right). \quad (15)$$

Минимум функции  $\lambda^{\text{ТР}}(p, q)$  достигается при  $q = 0$ , т.е. для осесимметричной формы потери устойчивости.

$$\min_{p, q} \lambda^{\text{ТР}}(p, q) = \min_p \lambda^{\text{ТР}}(p), \quad \lambda^{\text{ТР}}(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{1 + gp^2} + \frac{1}{p^2} \right).$$

При  $g < 1$  минимум функции  $\lambda^{\text{ТР}}(p)$  определяет критическую нагрузку  $\lambda_{cr}^{\text{ТР}}$  по модели ТР и достигается при волновом числе  $p_{cr}$ , причем

$$\lambda_{cr}^{\text{ТР}} = 1 - \frac{g}{2}, \quad p_{cr} = \frac{1}{\sqrt{1-g}}.$$

При  $g \rightarrow 1$  будет  $p_{cr} \rightarrow \infty$ , т.е. длина волны  $\ell$  при потере устойчивости, равная  $\ell = 2\pi/p_{cr}$ , стремится к нулю. Последнее обстоятельство говорит о том, что область применимости модели ТР исчерпана.

Известно [14,15], что условием устойчивости трансверсально изотропного материала при сжатии является неравенство  $-\sigma_{11} < G_{13}$ , которое в рассматриваемой задаче принимает вид

$$\frac{P}{h} < G_{13} \quad \text{или} \quad 2\lambda < \frac{1}{kg}. \quad (16)$$

Анализ устойчивости трансверсально изотропной оболочки при осевом сжатии в случае  $\ell \ll 1$  проведен в [15] исходя из нелинейных уравнений трехмерной теории упругости. Показано, что при

приближении параметра  $g$  к единице и уменьшении длины волны  $\ell$  процесс потери устойчивости проходит две стадии. В первой из них форма потери устойчивости локализуется в окрестности одной из боковых поверхностей цилиндра. При этом неравенство (16) при  $k = 1$ , по-прежнему, выполнено. При дальнейшем росте нагрузки неравенство (16) нарушается и материал теряет устойчивость (по Адамару). Значение  $k = 5/6$  в (7) введено для учета распределения по параболе напряжений поперечного сдвига. При поверхностной потере устойчивости такое распределение напряжений не имеет места, поэтому следует считать  $k = 1$ . Заметим, что при  $k = 1$ ,  $g = 1$  и  $\lambda = \lambda_{cr}^{TP} = 1 - g/2$  неравенство (16) превращается в равенство, т.е. мы выходим на границу области применимости модели ТР.

### 5. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ПО МОДЕЛИ КЛ.

Здесь для удобства сравнения с излагаемыми в п.6 результатами, полученными по модели ТР, приводятся известные результаты [6,12] для модели КЛ. Ищется решение системы (10), (11), локализованное в окрестности края  $x = 0$  и экспоненциально затухающее при удалении от этого края. Решение ищем в виде:

$$Z(x) = \sum_{k=1}^4 C_k z_k e^{r_k x}, \quad \text{Re}(r_k) < 0, \quad (17)$$

где  $Z$  заменяет любую из неизвестных функций ( $u, v, w, \Phi, T_1, S, M_1, H, Q_1$ ), входящих в уравнения (10), (11) и в граничные условия,  $C_k$  — произвольные постоянные,  $z_k$  — известные постоянные, зависящие от выбора функции  $Z$ ,  $r_k$  — корни характеристического уравнения системы (10), (11)

$$(r^2 - q^2)^4 + 2\lambda r^2(r^2 - q^2)^2 + r^4 = 0. \quad (18)$$

При  $\lambda < 1$ ,  $q > 0$  уравнение (18) имеет ровно 4 корня с отрицательной вещественной частью.

В модели КЛ элемент края оболочки имеет 4 степени свободы. Ограничимся рассмотрением 16 вариантов граничных условий,

при которых край закреплен или свободен в соответствующем направлении. Упругую заделку края не рассматриваем. Указанные варианты сведены в таблицу

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u &= 0, & T_1 &= 0, & (0), \\
 (1) \quad v &= 0, & S &= 0, & (0), \\
 (1) \quad w &= 0, & Q_1^* &= 0, & (0), \\
 (1) \quad \varphi_1 &= 0, & M_1 &= 0, & (0),
 \end{aligned} \tag{19}$$

где  $\varphi_1 = -w'$ ,  $Q_1^* = Q_1 + qH + P\varphi_1$ . Слева в (19) стоят обобщенные перемещения, а справа — соответствующие обобщенные усилия. Из каждой строки берется по одному граничному условию, (1) означает закрепление, (0) — его отсутствие (например, через (0000) обозначаем свободный край). Приведем выражения для коэффициентов  $z_k$ , входящих в общее решение (17). Возьмем  $w_k = 1$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 u_k &= \frac{r_k(q^2 + \nu r_k^2)}{(r_k^2 - q^2)^2}, & v_k &= \frac{q((2 + \nu)r_k^2 - q^2)}{(r_k^2 - q^2)^2}, & T_{1k} &= \frac{r_k^2 q^2}{(r_k^2 - q^2)^2}, \\
 S_k &= \frac{r_k^3 q}{(r_k^2 - q^2)^2}, & \varphi_{1k} &= -r_k, & M_{1k} &= r_k^2 - \nu q^2, \\
 Q_{1k}^* &= -r_k(r_k^2 - (2 - \nu)q^2) - 2\lambda r_k.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Теперь критическая нагрузка  $\lambda$  при локализованной вблизи края  $x = 0$  потере устойчивости определяется в результате решения уравнения

$$\Delta_4(\lambda, q) = 0, \tag{21}$$

где  $\Delta_4$  — определитель линейной системы четырех уравнений относительно постоянных  $C_k$ , получающейся при подстановке решения (17) в граничные условия. Например, для свободного края  $T_1 = S = Q_1^* = M_1 = 0$  уравнение (21) имеет вид

$$\Delta_4(\lambda, q) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{13}^* & Q_{14}^* \\ M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{vmatrix} = 0.$$

Из 16 вариантов граничных условий 8 вариантов допускают существование локализованной формы потери устойчивости. Графики функций  $\lambda(q)$  для коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  показаны на рис. 1. В 7 вариантах (0000), (1000), (0100), (0010), (0001), (1100), (1010) при  $q = 0$  имеет место двукратное снижение критической нагрузки по сравнению с классическим значением ( $\lambda(0) = 1/2$ ), а для граничных условий (0101) снижение нагрузки незначительно и составляет 3%. Для трех вариантов функции зависимости  $\lambda(q)$  совпадают (см. рис. 1).

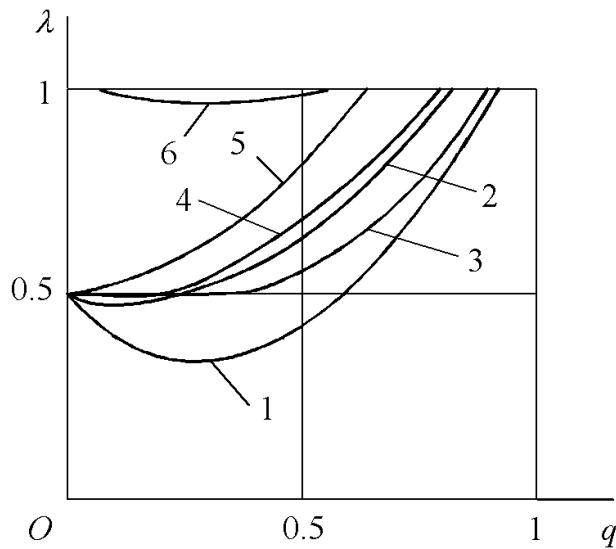


Рис. 1. Функции  $\lambda(q)$  по модели КЛ для различных вариантов граничных условий: 1 — 0000, 2 — 0100, 3 — 1000, 4 — 1100, 5 — 0010, 1010, 0001, 6 — 0101.

Для замкнутой в окружном направлении оболочки критическую нагрузку определяют минимальные по  $q = q_m = t/\mu$  значения функций  $\lambda(q)$ . Для граничных условий (0000), (0100) и (0101) функции  $\lambda(q)$  имеют минимум соответственно при  $q = 0.31, 0.20$  и  $0.36$ , а для условий (1000), (0010), (0001), (1100) и (1010) минимум



достигается при  $q = 0$ .

Для цилиндрической панели с углом раствора  $\varphi_0$  и с шарнирно опертыми прямолинейными краями критическая нагрузка на основании формулы (1) равна минимуму по  $q = q_k = k\varphi_0/(\pi\mu)$  значений функций  $\lambda(q)$ . Поэтому представляют интерес значения этих функций не только для тех  $q$ , вблизи которых  $\lambda(q)$  минимальна.

Для удобства последующего сравнения с результатами по модели ТР введем 4 группы вариантов граничных условий:

*Группа 1* состоит из условий (0000) и (0100) и характеризуется тем, что функция  $\lambda(q)$  имеет минимум при  $q > 0$ , а критическая нагрузка ( $\lambda < 1/2$ ) существенно уменьшается по сравнению со значением  $\lambda = 1$  для хорошо закрепленной оболочки.

*Группа 2* состоит из условий (1000), (0010), (0001), (1100) и (1010), для которых функция  $\lambda(q)$  имеет минимум  $\lambda(0) = 1/2$ .

*Группа 3* состоит из варианта (0101), для которого снижение нагрузки при потере устойчивости незначительно.

*Группа 4* включает остальные варианты граничных условий, для которых локализация формы потери устойчивости вблизи края не имеет места.

## 6. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ФОРМЫ ПО МОДЕЛИ ТР.

Как и для модели КЛ, локализованное решение системы (10), (12), (13) ищем в виде

$$Z(x) = \sum_{k=1}^5 C_k z_k e^{r_k x}, \quad \text{Re}(r_k) < 0, \quad (22)$$

где величины  $r_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  удовлетворяют уравнению

$$(r^2 - q^2)^4 + (2\lambda r^2(r^2 - q^2)^2 + r^4)(1 - g(r^2 - q^2)) = 0, \quad (23)$$

а величину  $r_5$  находим из уравнения (12),

$$r_5 = -\sqrt{q^2 + g_1^{-1}}. \quad (24)$$

В модели ТР элемент края имеет 5 степеней свободы, поэтому рассматриваем 32 варианта граничных условий, вытекающие из

таблицы

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u &= 0, & T_1 &= 0, & (0), \\
 (1) \quad v &= 0, & S &= 0, & (0), \\
 (1) \quad w &= 0, & \hat{Q}_1 &= 0, & (0), \\
 (1) \quad \varphi_1 &= 0, & M_1 &= 0, & (0), \\
 (1) \quad \varphi_2 &= 0, & H &= 0, & (0),
 \end{aligned} \tag{25}$$

где  $\hat{Q}_1 = Q_1 - Pw'$ . По сравнению с таблицей (19) здесь изменилась третья строка, и добавилась пятая.

При  $k = 1, 2, 3, 4$  для функций  $u, v, w, T_1, S$  коэффициенты  $z_k$ , входящие в (22), вычисляются по тем же формулам (20), а остальные коэффициенты равны

$$\begin{aligned}
 \varphi_{1k} &= -\frac{r_k}{1 - g(r_k^2 - q^2)}, & \varphi_{2k} &= -\frac{q}{1 - g(r_k^2 - q^2)}, \\
 H_k &= \frac{(1 - \nu)r_k q}{1 - g(r_k^2 - q^2)}, & M_{1k} &= \frac{r_k^2 - \nu q^2}{1 - g(r_k^2 - q^2)}, \\
 \hat{Q}_{1k} &= -\frac{r_k(r_k^2 - q^2)}{1 - g(r_k^2 - q^2)} - 2\lambda r_k.
 \end{aligned}$$

Для корня  $r_5$  имеем

$$u_5 = v_5 = w_5 = T_{15} = S_5 = 0. \tag{26}$$

Положим  $\Theta_k = 1$  и найдем коэффициенты  $z_5$  в (22)

$$\begin{aligned}
 \varphi_{15} &= -q, & \varphi_{25} &= -r_5, & M_{15} &= r_5 q(1 - \nu), & H_5 &= \frac{1 - \nu}{2}(r_5^2 + q^2), \\
 \hat{Q}_{15} &= \frac{1 - \nu}{2}q(q^2 - r_5^2).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Как и ранее, собственные значения  $\lambda(q, g)$  удовлетворяют уравнению

$$\Delta_5(\lambda, q, g) = 0, \tag{28}$$

где  $\Delta_5$  — определитель пятого порядка, получающийся при удовлетворении 5 граничных условий.

Прежде, чем искать корни уравнения (28), найдем область параметров  $(\lambda, p, g)$ , подлежащую рассмотрению. Корни  $\lambda$  должны быть меньше значений, определяемых из выражения (15), при которых реализуются формы (14) внутренней потери устойчивости. Искомая область состоит из значений

$$\lambda(q, g) = \min_p \lambda^{\text{TP}}(p, q).$$

Для ряда значений параметра  $g$  эта область расположена ниже кривых, показанных на рис. 2.

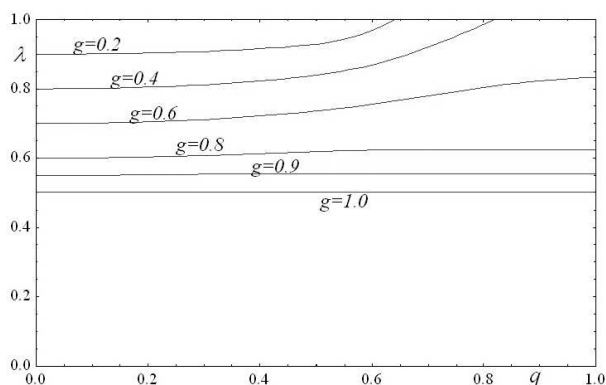


Рис. 2. Область поиска корней уравнения (27).

Варианты 32 граничных условий разобьем на те же 4 группы, что и в п.5.

*Группа 1* включает условия (00000), (01001) и (10000), характерные тем, что при фиксированном значении сдвигового параметра  $g$  минимум параметра нагрузки  $\lambda(q, g)$  достигается при  $q > 0$ . Для условий (00000) и (10000) кривые показаны на рис. 3.

*Группа 2* состоит из 9 вариантов (00001), (00010), (00100), (00101), (10001), (10100), (10101), (11000) и (11001). Для них функция  $\lambda(q, g)$  имеет минимум при  $q = 0$ . Кривые  $\lambda(q, g)$  для (00001) и (10001) приведены на рис. 4.

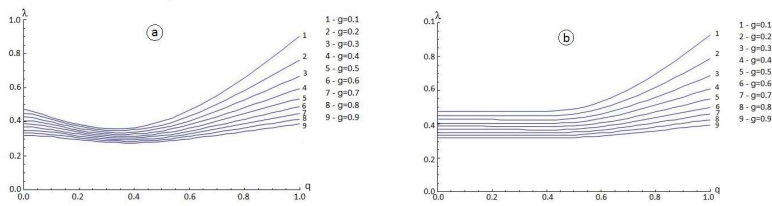


Рис. 3. График зависимости  $\lambda$  от  $q$  при разных  $g$  для варианта граничных условий (а)  $T_1 = S = \dot{Q}_1 = M_1 = H = 0$ , (б)  $u = S = \dot{Q}_1 = M_1 = H = 0$ .

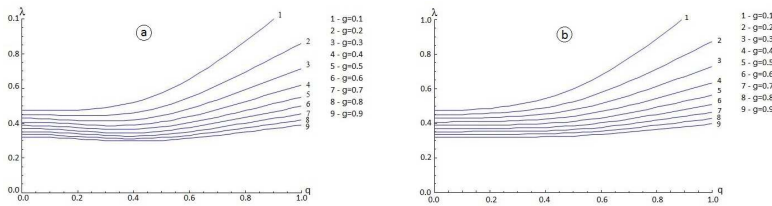


Рис. 4. График зависимости  $\lambda$  от  $q$  при разных  $g$  для варианта граничных условий (а)  $T_1 = S = \dot{Q}_1 = M_1 = \varphi_2 = 0$ , (б)  $u = S = \dot{Q}_1 = M_1 = \varphi_2 = 0$ .

Группа 3 включает условия (00011), (01010) и (11100). Для них кривые  $\lambda(q, g)$  расположены вблизи показанных на рис. 2 границ существования локализованных в окрестности края решений. Поэтому форма прогиба сравнительно медленно затухает при удалении от края из-за того, что характеристическое уравнение (23) имеет корни с малой по модулю вещественной частью (на границах, показанных на рис. 2, вещественная часть равна нулю). Кривые  $\lambda(q, g)$  для (01010) приведены на рис. 5.

Группу 4 образуют варианты, для которых локализация формы потери устойчивости вблизи края не имеет места.

При обсуждении полученных результатов отметим сначала два очевидных факта. Во-первых, с ростом параметра  $g$ , т.е. с уменьшением жесткости на поперечный сдвиг, функция  $\lambda(q, g)$  убывает. Во-вторых, более жесткому граничному условию (что сводится к замене (0) на (1) в шифре варианта) соответствует большее значе-

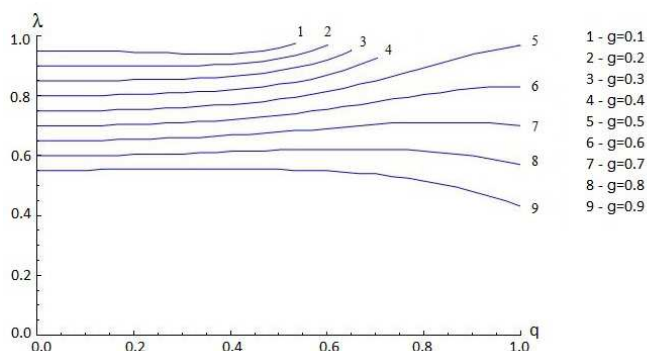


Рис. 5. График зависимости  $\lambda$  от  $q$  при разных  $g$  для варианта граничных условий  $T_1 = v = \dot{Q}_1 = \varphi_1 = H = 0$ .

ние  $\lambda(q, g)$  или переход в группу 4.

Выше рассмотрена локализация формы потери устойчивости вблизи края  $x = 0$  оболочки. При этом нужно иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, рассматриваемый край должен иметь более слабое закрепление, чем противоположный (т.е. ему соответствует меньшее значение функции  $\lambda(q, g)$ ). В противном случае края меняются ролями. Если же значения  $\lambda(q, g)$  совпадают, возможна локальная потеря устойчивости вблизи обоих краев одновременно. Во-вторых, необходимо следить за тем, успеет ли затухнуть форма потери устойчивости до прихода к противоположному краю. В противном случае влиянием второго края нельзя пренебрегать, и нужно решать краевую задачу, удовлетворяя 10 граничным условиям на обоих краях. Для задачи о потере устойчивости цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем по модели КЛ влияние закрепления противоположного края обсуждается в [19].

Два предельных перехода  $g \rightarrow 0$  и  $q \rightarrow 0$  заслуживают отдельного обсуждения и рассматриваются в следующих параграфах.

### 7. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ОТ МОДЕЛИ ТР К МОДЕЛИ КЛ.

Положить  $g = 0$  в формулах п.6 нельзя, ибо при этом  $r_5 = -\infty$ . Поэтому рассмотрим уравнение (28) при  $g > 0$ ,  $g \rightarrow 0$ . Разложим определитель  $\Delta_5(\lambda, q, g)$  по элементам пятого столбца и получим

$$\Delta_5(\lambda, q, g) = A_3 Z_3 + A_4 Z_4 + A_5 Z_5 = 0,$$

где  $A_k$ ,  $k = 3, 4, 5$  — алгебраические дополнения элементов пятого столбца  $Z_k$ . В силу (25), (26) будет  $Z_1 = Z_2 = 0$ , а в зависимости от граничных условий (25) с учетом формул (27), (24) и (12) получаем

$$\begin{aligned} Z_3 = \quad w_5 = 0 & \quad \text{или} \quad \hat{Q}_{15} = \frac{1-\nu}{2} q(q^2 - r_5^2) \sim g^{-1}, \\ Z_4 = \quad \varphi_{15} = -q \sim 1 & \quad \text{или} \quad M_{15} = r_5 q(1-\nu) \sim g^{-1/2}, \\ Z_5 = \quad \varphi_{25} = -r_5 \sim g^{-1/2} & \quad \text{или} \quad H_5 = \frac{1-\nu}{2} (r_5^2 + q^2) \sim g^{-1}. \end{aligned}$$

Наибольшую особенность при  $g \rightarrow 0$  имеют величины  $\hat{Q}_{15}$  и  $H_5$ . Если в числе 5 граничных условий присутствуют условия  $\hat{Q}_1 = H = 0$ , то, заменяя третью строку определителя  $\Delta_5(\lambda, q, g)$  на линейную комбинацию  $Q_1^* = \hat{Q}_1 + qH$  третьей и пятой строк, получаем, что элемент  $H_5$  имеет наибольший порядок, а равенство нулю множителя при нем совпадает с уравнением (21) модели КЛ. Граничные условия, содержащие условия  $w = H = 0$  также приводят к уравнению (21) модели КЛ.

Граничное условие  $\varphi_2 = 0$  в модели КЛ не ставится. Поэтому предельный переход при  $g \rightarrow 0$  в вариантах, содержащих условие  $\varphi_2 = 0$ , приводит к новым результатам, не получающимся из модели КЛ.

### 8. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПРИ $q \rightarrow 0$ .

При  $q = 0$  уравнение имеет две пары нулевых корней, откуда следует, что среди решений в формуле (22) присутствуют незатухающие при удалении от края функции. Для граничных условий

из группы 2 функция  $\lambda(q, g)$  минимальна при  $q = 0$ . Поэтому потеря устойчивости происходит при минимально возможном значении  $q = \mu t$ , а именно, при  $t = 2$ ,  $q = 2\mu$  (случай  $t = 1$  соответствует перемещению сечения, как твердого тела). С другой стороны, при  $t = 2$  точность используемой системы уравнений пологих оболочек недостаточна. Для уточнения второе уравнение (2) нужно заменить на  $S' + mT_2/R + Q_2/R = 0$  и взять в (5) уточненное выражение для кривизны  $\kappa_2 = -(m^2 - 1)w/R$ . Указанные уточнения имеют относительный порядок  $1/m^2$  (равный 0.25 при  $t = 2$ ) и здесь не рассматриваются. Однако сам факт появления локализованных вблизи края форм потери устойчивости, сопровождающихся снижением критической нагрузки, сомнений не вызывает.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Найдена критическая нагрузка и форма потери устойчивости круговой трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Предполагается, что криволинейный край оболочки слабо закреплен или свободен. При этом возможно появление формы потери устойчивости, локализованной вблизи этого края, с одновременным снижением критической нагрузки. Ранее эта задача была решена исходя из двухмерной модели КЛ. Здесь предполагается, что жесткость на поперечный сдвиг мала, и для решения используется модель ТР.

Безразмерная критическая нагрузка  $\lambda(q, g)$  зависит от двух основных безразмерных параметров — параметра волнообразования в окружном направлении  $q$  и параметра поперечного сдвига  $g$ . При волнообразовании внутри оболочки имеет место осесимметричная потеря устойчивости ( $q = 0$ ). При  $g = 0$  имеем классическое значение нагрузки  $\lambda = 1$ , полученное исходя из модели КЛ. С ростом  $g$  (или с уменьшением жесткости на поперечный сдвиг) нагрузка убывает по линейному закону ( $\lambda = 1 - 0.5g$ ) вплоть до значения  $g \approx 1$ . При  $g \geq 1$  материал теряет устойчивость.

Если край оболочки свободен или слабо закреплен, возможна потеря устойчивости по форме, локализованной вблизи этого края. По модели ТР деформация краевого элемента описывается 5-ю

обобщенными координатами, поэтому рассмотрены  $2^5 = 32$  возможных варианта граничных условий в зависимости от того, закреплены или свободны эти координаты. В 15 вариантах возможна локализованная вблизи края потеря устойчивости, и исследовано поведение функций  $\lambda(q, g)$ .

Исследована роль пятого граничного условия в модели ТР, которое отсутствует в модели КЛ. Установлено, что если выполнено граничное условие  $H = 0$ , то при  $g \rightarrow 0$  результаты по модели ТР переходят в аналогичные результаты модели КЛ. Если задано закрепление  $\varphi_2 = 0$ , то модель ТР при  $g \rightarrow 0$  дает новые по сравнению с моделью КЛ результаты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lilly W.E. The design of structures // Engineering. 1908. V. 65. P. 37-40
2. Mallock A. Note on the instability of tubes subjected to end pressure and on the folds in a flexible material // Proc. Roy. Soc. 1908. V. 81. № A549 P. 388-393.
3. Lorenz R. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder // Phys. Z. 1911. V. 12. Nr. 7. S. 241-260.
4. Тимошенко С.П. К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки // Изв. Петрогр. электротехн. ин-та. 1914. Т. 11. С. 267-287.
5. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М: Наука. 1978. 360 с.
6. Bushnell D. Buckling of shells — pitfall for designers // AIAA Journal. 1981. V. 19. № 9. P. 1183-1226.
7. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. Т. 95. №3. С. 77-79.
8. Nachbar W., Hoff N.J. The buckling of free edge of axially compressed circular cylindrical shell // Quart. Appl. Math. 1962. V. 2. № 3. P. 160-172.
9. Кильчевский Н.А. Об осесимметричной форме потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки // Прикл. мех. 1965. Т. 1. № 11. С.1-6.
10. Almorh B.O. Influence of the edge conditions on stability of axially compressed cylindrical shells // AIAA Journal. 1966. V. 4. № 1. P. 134-140.
11. Tovstik P.E. On forms of local buckling of thin elastic shells // Trans CSME. 1991. V. 15. № 3. P. 199-211.
12. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит, 1995.



13. Товстик П.Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. СПбГУ. 2007. № 3. С. 49-54.
14. Tovstik P.E., Tovstik T.P. "On the 2D models of plates and shells including the transversal shear" // ZAMM. 2007. V. 87. № 2.
15. Товстик П.Е. Устойчивость трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Изв. РАН. Механика твёрдого тела . 2009. Т. 44. № 4. С. 552-564.
16. Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity. Amsterdam etc.: North-Holland, 1988.
17. З.Г.Ершова, П.Е.Товстик. Цилиндрическая панель со слабо закрепленным прямолинейным краем, изготовленная из трансверсально изотропного материала. Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2011. № 1. С. 45-56.
18. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414 с.
19. Ершова З.Г. Устойчивость цилиндрических панелей со слабо закрепленным прямолинейным краем // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1993. № 3. С. 78-81.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА БАЛКИ, МАТЕРИАЛ КОТОРОЙ ОБЛАДАЕТ ЭФФЕКТОМ SD

Г. В. ПАВИЛАЙНЕН

Исследована задача упруго-пластического изгиба свободно опертой балки с эффектом SD, деформирующейся под действием постоянного момента. Получено аналитическое решение, которое сравнивается с решением по МКЭ. Исследовано влияния эффекта SD на НДС балки.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Результаты актуальных исследований прочности стержневых и балочных конструкций из особых конструкционных материалов открывают новые возможности для проектирования и возведения экономичных сооружений при одновременном обеспечении их высокой надежности в условиях эксплуатации. К примеру, конструкционные решения при проектировании буровых платформ для шельфовой добычи углеводородов, увеличение мощности и размеров сооружений в судостроении, повышение параметров рабочих давлений и внешних воздействий, в том числе и ледовой нагрузки, существенно сказывается на критериях механической прочности особенно при работе за пределами упругости.

Применение новых конструкционных малокоррозийных материалов, обладающих существенной анизотропией свойств, например, разнопрочных сталей, делает актуальной задачу определения эксплуатационных способностей конструкций при допустимом развитии пластических деформаций и предотвращении хрупкого разрушения [1, 8].

Современные опорные балочные конструкции создаются из но-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00523), а также при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ.

Доклад на семинаре 17 февраля 2015 г.

© Г.В. Павилайнен, 2015

вых анизотропных видов стали, в частности, обладающих разными по величине пределами текучести при одноосном растяжении или сжатии. Этот эффект известен эффект SD [3, 6].

Отечественные и зарубежные экспериментальные исследования [2, 7] показывают, что абсолютная разница в пределах текучести при растяжении и сжатии может достигать 25 – 30 %. Введем в рассмотрение параметр  $d$  как отношение предела текучести при сжатии одномерного образца  $\sigma_s$  к пределу текучести при растяжении  $\sigma_e$ . Далее предполагаем, что  $d \geq 1$ , что характерно для многих видов сталей и металлических сплавов.

Общие подходы к построению методов расчёта заключаются в принятии ряда положений, в том числе гипотезы плоских сечений, одноосности нагружения и схемы идеальной пластичности. Для задач чистого изгиба в упругой стадии и при изотропном упруго-пластическом изгибе эти допущения позволяют построить точные решения, удовлетворяющие уравнениям равновесия и совместности деформаций [9, 10].

Допущение об идеальной пластичности эквивалентно допущению о том, что коэффициент Пуассона  $\nu$  в пластических областях равен 0.5, а в упругих областях он ниже этого значения, чаще всего  $\nu = 0.3$ , следовательно при переходе через линию раздела упругой и пластической области для некоторых составляющих тензора напряжений может нарушаться требование непрерывности, но если рассматривается одноосное нагружение, то имеется одна основная составляющая тензора напряжений, а остальные не влияют на величину изгибающего момента в сечении. При поперечном изгибе, как указывал В.В. Новожилов, «гипотеза плоских сечений не включает в себя никаких предположений о свойствах материала, из которого изготовлен брус» [4].

Рассматриваем задачу об изгибе свободно опертой, горизонтальной SD-балки постоянного прямоугольного сечения в случае изгиба постоянным моментом. В такой постановке задача для изотропной балки без эффекта SD ( $d = 1$ ) рассмотрена Л.М. Качановым [4]. В цитируемой монографии дано описание процесса упруго-пластического изгиба и построена зависимость кривизны изогнутой оси балки от изгибающего момента для случаев чистого изгиба и изгиба сосредоточенной силой.

В нашем случае материал балки обладает эффектом SD и пластические области в зоне растягивающих нагрузок формируются ранее, чем в области сжимающих. При этом мы будем предполагать, что при упругом деформировании характер растяжения и сжатия происходит с одинаковым модулем упругости.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим призматический брус прямоугольного сечения толщиной  $2h$ , шириной  $b$  и длиной  $L$ , нагруженный на торцах общим моментом  $2M$ , который вызывает изгиб бруса в плоскости  $Oxz$ . На

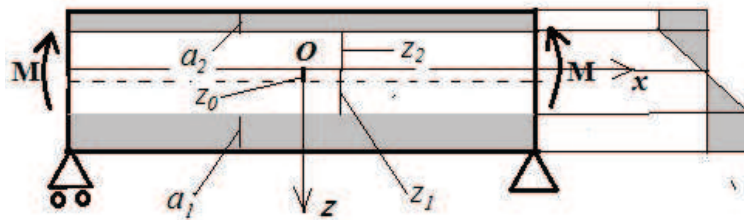


Рис. 1. Схема изгиба балки постоянным моментом.

рис. 1 области балки, которые находятся в пластическом состоянии, заштрихованы. Здесь необходимо сделать некоторые замечания по поводу выбора системы координат. Предположение о наличии эффекта SD материала балки приводит к нарушению симметрии при развитии пластических деформаций, следовательно, имеет место смещение нейтральной оси по сравнению со средней геометрической. Поэтому выберем начало координат в центре балки на нейтральной оси, направление осей указано на рис. 1, а для вычисления отклонения нейтральной оси от средней геометрической введем  $z_0$  и две новые величины  $z_1$ ,  $z_2$ , которые будут характеризовать расстояния от нейтральной оси до границы раздела упругой и пластической части балки в областях растяжения и сжатия. Продольное напряжение при чистом изгибе не зависит от  $x$ , поэтому линии раздела пластических и упругого состояний в вертикальном

сечении балки являются прямыми. На рис. 1 введены также величины  $a_1$  и  $a_2$ , характеризующие толщину пластических слоев, и указано направление изгибающего постоянного момента  $M$ .

### 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ SD-БАЛКИ

Пусть все компоненты напряжения, кроме  $\sigma_x$ , равны нулю, при этом  $\sigma_x$  является только функцией  $z$ . Для упругой балки

$$\sigma_x = \frac{M}{J}z,$$

где  $M$  - изгибающий момент,  $J$  - момент инерции сечения. В нашем случае

$$J = \frac{2}{3}bh^3.$$

При изгибе бруса в упругой стадии, применяя гипотезу плоских сечений, выпишем соотношения для компонентов деформации

$$\varepsilon_x = z\kappa, \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x, \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz},$$

где  $\kappa$  - кривизна изогнутой нейтральной оси балки. Условие чистого изгиба дает нам возможность выписать компоненту продольного напряжения  $\sigma_x$  в упругой стадии согласно закону Гука, остальными компонентами напряжений мы можем пренебречь [4], принимая дополнительно гипотезу о «ненадавливании слоев», которая соответствует требованию  $2h = \text{const}$  при деформировании.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

В качестве  $E$  используем модуль продольной упругости, равный

$$E = \frac{3E_0E_c}{3E_0 + E_c}.$$

Здесь  $E_0$  - модуль Юнга,  $E_c$  - секущий модуль в момент  $\sigma_x = \sigma_e$ . В пластической стадии деформирования следуем теории идеальной пластичности без упрочнения ( $\sigma_e = \text{const}, \sigma_s = \text{const}$ ) и используем условие пластической несжимаемости  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ .

Введем еще некоторые обозначения:  $M_t$  - значение изгибающего момента  $M$  при появлении пластических деформаций на нижней плоскости бруса в области растяжения,  $M_*$  - значение изгибающего момента при появлении пластичности на верхней плоскости бруса в области сжатия,  $M_k$  - критическое значение изгибающего момента, при котором весь брус переходит в пластическое состояние и перестает сопротивляться изгибу.

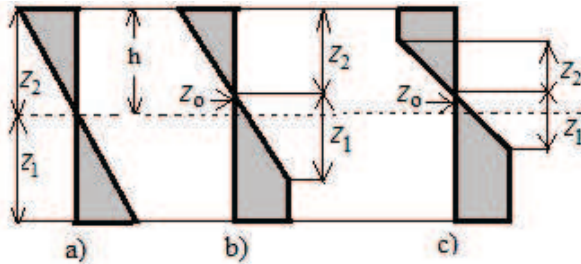


Рис. 2. Эпюры напряжений в разных частях балки

Процесс появления и развития пластичности при чистом изгибе SD-балки происходит следующим образом: при росте изгибающего момента до значения  $M_t$  балка деформируется упруго и распределение напряжения  $\sigma_x$  по толщине происходит по линейному закону (см. рис.2 а), затем появляется пластический слой на нижней поверхности балки и при  $M_t \leq M \leq M_*$  этот слой увеличивается по толщине (см. рис.2 в), далее появляется слой пластичности на верхней поверхности и он развивается по толщине при  $M_* \leq M \leq M_k$  (см. рис.2 с). Процесс заканчивается полным переходом всей балки в пластическое состояние, в этот момент  $M = M_k$ ,  $z_1 + z_2 = 0$ , что означает исчерпание несущей способности балки и ее разрушение.

Запишем это рассуждение в виде формулы для напряжения  $\sigma_x$ .

$$\sigma_e = \begin{cases} \sigma_s, & \text{если } -(h - z_0) \leq z \leq -z_2 \\ E\varepsilon_x, & \text{если } -z_2 \leq z \leq z_1 \\ \sigma_e, & \text{если } z_1 \leq z \leq h + z_0. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим эпюру напряжения  $\sigma_x$  в произвольном сечении  $x$

бруса  $M \geq M_*$  (см. рис.2 с). Равновесие элемента поперечного сечения означает равенство заштрихованных площадей сверху и снизу нейтральной оси. Запишем это равенство

$$(2h - a_2 - z_1 - z_2)\sigma_e + 0.5z_1\sigma_e = a_2\sigma_s + 0.5z_2\sigma_s. \quad (2)$$

Заметим, что между всеми введенными величинами имеет место соотношение, а именно

$$z_1 + a_1 + z_2 + a_2 = 2h,$$

а в случае  $M = M_k$  выполняется  $z_1 = z_2 = 0$ ,  $z_0 = h(d-1)/(d+1)$ . Далее используем соотношение, которое следует из подобия треугольников,  $d = z_2/z_1$ . Выразим  $a_2$  из (2)

$$a_2 = \frac{2h}{1+d} - \frac{z_1(1+d)}{2}. \quad (3)$$

Теперь можно найти толщину пластического слоя в области растяжения, а именно,

$$a_1 = \frac{2hd}{1+d} - \frac{z_1(1+d)}{2}. \quad (4)$$

Толщины пластических областей установлены в зависимости от величины  $z_1$ . Теперь найдем смещение  $z_0$  из равенства

$$h - (a_2 + z_2) = z_0.$$

Откуда

$$z_0 = \frac{h(d-1)}{d+1} - \frac{z_1(d-1)}{2}. \quad (5)$$

Видим, что смещение нейтральной оси  $z_0$  зависит линейно от толщины упругого слоя в области растяжения  $z_1$ .

Воспользуемся условием непрерывности напряжения  $\sigma_x$  на границе упругой и пластических областей при растяжении и сжатии

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Ez_1\kappa = \sigma_e, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = Ez_2\kappa = \sigma_s \quad (6)$$

и выразим  $z_1$  и  $z_2$ ;

$$z_1 = \frac{\sigma_e}{E\kappa}, \quad z_2 = \frac{\sigma_s}{E\kappa}. \quad (7)$$

Запишем момент в любом сечении  $x$ , используя зависимости (1)

$$M = b \left( - \int_{-h+z_0}^{-z_2} \sigma_s z dz + \int_{-z_2}^{z_1} E \varepsilon_x z dz + \int_{z_1}^{h+z_0} \sigma_e z dz \right) \quad (8)$$

Подставим в (8) соотношения (7). После преобразований имеем

$$M = b \sigma_e ((h+z_0)^2/2 - z_1^2/2) + b \sigma_s ((h-z_0)^2/2 - z_2^2/2) + b E \varepsilon (z_1^3/3 + z_2^3/3). \quad (9)$$

Из этого соотношения можно найти момент начала образования пластической области в зоне растяжения. При  $z_1 = z_2 = h$ ,  $E h \varepsilon = \sigma_e$  имеем

$$M_t = \frac{2}{3} b h^2 \sigma_e.$$

Аналогично можно определить критический момент, когда вся пластина становится пластической. Это происходит при  $z_1 = z_2 = 0$ . Тогда из (5) имеем  $z_0 = h(d-1)/(d+1)$  и критический момент равен

$$M_k = \frac{2 b h^2 d \sigma_e}{d+1}.$$

Найдем промежуточный момент  $M_*$ , при котором возникает пластичность в зоне сжатия, а в зоне растяжения она уже есть. Это происходит при

$$z_2 = h - z_0, \quad z_0 = \frac{h(1-d)^2}{(1+d)^2}, \quad z_1 = \frac{4h}{(1+d)^2}, \quad M_* = \frac{3d-1}{d+1} M_t.$$

В диапазоне  $M_t \leq M \leq M_*$  зависимость  $z_0$  от  $z_1$  перестает быть линейной и имеет вид

$$z_0 = (\sqrt{h} - \sqrt{z_1})^2. \quad (10)$$

Напомним, что при  $M \leq M_t$  выполняется  $z_0 \equiv 0$ .

#### 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА SD-БАЛКИ

Переходим к построению дифференциального уравнения для нахождения функции прогиба балки в случае, когда изгибающий



момент достаточно большой и в балке образовались два пластических слоя  $M_* \leq M < M_k$ . Зависимость кривизны от изгибающего момента можно получить из (9), используя (7) и выражение  $d = \sigma_s / \sigma_e$ .

$$\varkappa = \sqrt{\frac{K}{M_k - M}}, \quad (11)$$

где

$$K = \frac{b\sigma_e^3(1+d)^3}{24E^2}.$$

Далее используем известное в линейной теории соотношение между кривизной и прогибом

$$\varkappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (12)$$

Знак «минус» выбран с учетом выбора направления оси  $z$ . В нашем случае функция прогиба является «выпуклой вверх», исходя из направления оси  $z$ , поэтому ее вторая производная, а следовательно и изгибающий момент должны быть отрицательны. Подставим (12) в (11) и проинтегрируем дважды. После интегрирования получим выражение для функции прогиба в виде

$$w = -\sqrt{\frac{K}{M_k - M}} \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2.$$

Постоянные интегрирования определяем из граничных условий свободного опирания

$$w(L/2) = w(-L/2) = 0, \quad M(L/2) = M(-L/2) = M$$

и из условия симметрии задачи при  $x = 0$

$$\frac{dw}{dx} = 0.$$

Имеем

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \sqrt{\frac{K}{M_k - M}} \frac{L^2}{8}.$$

Окончательно выражение зависимости прогиба  $w$  от  $x$  имеет вид

$$w(x) = \sqrt{\frac{K}{M_k - M}} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{8} \right).$$

Определим зависимость  $z_1$  от  $M$ , используя (9)

$$z_1 = \frac{\sigma_e \sqrt{M_k - M}}{E \sqrt{K}}.$$

При изгибе балки без учета эффекта SD, т.е. при  $d = 1$ , решение упрощается. В монографии [4] приведено уравнение связи действующего момента и толщины упругого слоя  $\eta = z_1 = z_2$  в виде

$$\frac{M}{M_k} = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\eta}{h} \right)^2.$$

## 5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР РАСЧЕТА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА

Проиллюстрируем решение задачи численным расчетом и выявим влияние эффекта SD на развитие пластичности, прогиб и смещение нейтральной оси.

Расчет в данной задаче можно проводить непосредственно и обратным способом, предложенным В.В.Соколовским [5] для расчета упруго-пластического изгиба круглой пластины. Мы задаем величины  $M$  и  $d$ , а затем вычисляем все остальные неизвестные, в том числе прогиб  $w(x)$  и смещение  $z_0$  нейтральной оси балки.

Рассмотрим в качестве расчетного примера изгиб балки из стали марки А40Х. Это прочная конструкционная сталь с заметными различиями в пределах текучести при растяжении и сжатии, которая широко используется при строительстве балочных конструкций.

Пусть размеры балки-полоски  $b=1.0$  м,  $h=0.1$  м,  $L=10$  м, а прочностные константы материала  $\sigma_e=760$  МПа,  $E=212$  ГПа. Параметру  $d$  будем придавать различные значения в диапазоне от 1.0 до 1.3 для изучения влияния эффекта SD на НДС балки.

Значения моментов, при которых начинается развитие пластичности и предельного критического момента, когда вся балка становится пластической, в зависимости от значения отношения пределов текучести  $d$  приведены в табл. 1. Значения моментов, входящих в таблицу, соотнесены к моменту появления пластичности  $M_t = 5.07 \text{ МПа} \cdot \text{м}^3$ .

Таблица 1. Влияние параметра  $d$  на величину моментов  $M_*$  и  $M_k$

$d$	1.0	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3
$M_t$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$M_*$	1.0	1.05	1.09	1.14	1.18	1.22	1.26
$M_k$	1.5	1.54	1.57	1.61	1.64	1.66	1.69

Результаты расчета показывают существенное увеличение прочности балки при учете эффекта SD, а именно, при увеличении предела текучести при сжатии на 30% по сравнению с пределом текучести на растяжение критический момент перехода всей балки в пластическое состояние возрастает на 13%.

Перейдем к анализу величины смещения нейтральной оси изогнутой SD-балки, рассчитанные по формуле (5). В табл. 2 на пересечении столбцов и строк указаны значения смещения  $z_0/h$  нейтральной оси относительно средней геометрической. Все величины, входящие в таблицу, приводятся в безразмерном виде.

Таблица 2. Смещение нейтральной оси от средней геометрической

$z_1/h$	$d = 1.05$	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3
0.8	0.0043	0.0076	0.0097	0.0109	0.0111	0.0104
0.7	0.0068	0.0126	0.0172	0.0209	0.0236	0.0254
0.6	0.0093	0.0176	0.0247	0.0309	0.0361	0.0404
0.5	0.0118	0.0226	0.0322	0.0409	0.0486	0.0554
0.4	0.0143	0.0276	0.0397	0.0509	0.0611	0.0704
0.3	0.0168	0.0326	0.0472	0.0609	0.0736	0.0854
0.2	0.0193	0.0376	0.0547	0.0709	0.0861	0.1043
0.1	0.0218	0.0426	0.0622	0.0809	0.0986	0.1154

Анализ табл. 2 показывает, что с ростом параметра  $d$  смещение растет. Максимальное значение составляет 11.5% половины толщины балки. Табл. 2 построена в предположении, что в балке име-

ются пластические слои как в области растяжения, так и области сжатия. В случае одного пластического слоя для расчета следует использовать формулу (10) в узком диапазоне  $z_1$  от  $h$  до  $2h/(1+d)$ .

В табл. 3 приведены расчеты глубин пластических слоев в зонах растяжения и сжатия, а также значение момента, при котором данные размеры реализуются. Параметр  $d = 1.3$ . Момент  $M$ , как и в табл. 1 соотнесен к  $M_t$ .

Таблица 3. Толщины пластических областей

$z_1/h$	$z_2/h$	$z_0/h$	$M$	$a_1/h$	$a_2/h$
0.7	0.91	0.025	1.295	0.33	0.065
0.6	0.78	0.040	1.383	0.44	0.18
0.5	0.65	0.055	1.460	0.55	0.29
0.4	0.52	0.070	1.543	0.67	0.41
0,3	0.39	0.085	1.582	0.79	0.52
0,2	0.26	0.100	1.626	0.90	0.64
0,1	0.13	0.115	1.659	1.015	0.75

В результате сравнения толщин пластических слоев при растяжении и сжатии видно, что они различаются на 26%. Приведем расчеты прогиба балки в зависимости от параметра  $d$  при значении момента  $M = 1.183 \cdot M_t$ . Значения  $x$  и  $w$  указаны в сантиметрах. Значения  $w(x)$  расположены на пересечении строк и столбцов.

Таблица 4. Зависимость прогиба  $w(x)$  от величины эффекта SD

$x$	$d = 1.0$	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3
-500	0	0	0	0	0	0	0
-400	20.3	19.9	19.7	19.6	19.6	19.6	19.7
-300	36.1	35.5	35.1	34.9	34.8	34.8	35.0
-200	47.4	46.5	46.0	45.8	45.7	45.7	45.9
-100	54.1	53.2	52.6	52.3	52.2	52.3	52.5
0	56.4	55.4	54.8	54.5	54.4	54.4	54.6
100	54.1	53.2	52.6	52.3	52.2	52.3	52.5
200	47.4	46.5	46.0	45.8	45.7	45.7	45.9
300	36.1	35.5	35.1	34.9	34.8	34.8	35.0
400	20.3	19.9	19.7	19.6	19.6	19.6	19.7
500	0	0	0	0	0	0	0

Наблюдается небольшое (3–5 %) уменьшение, а затем увеличение прогиба с ростом параметра  $d$ . Очевидно, что эффект SD гораздо существеннее сказывается на величине предельных моментов, чем на величине прогиба.

Рассмотрим еще один вариант расчета прогиба при разных  $d$  и при  $M = M_*$  для каждого случая. Результаты расчета прогиба расположены в пересечении строки и столбца и указаны в сантиметрах.

Таблица 5. Зависимость прогиба  $w(x)$  от  $M_*$

$x$	$d = 1.0$	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3
-500	0	0	0	0	0	0	0
-400	16.1	17.0	17.8	18.7	19.5	20.4	21.3
-300	28.7	30.1	31.6	33.2	34.7	36.3	38.0
-200	37.7	39.6	41.5	43.5	45.6	47.7	49.8
-100	43.0	45.2	47.4	49.8	52.1	54.5	56.9
0	44.8	47.1	49.4	51.8	54.3	56.8	59.3
100	43.0	45.2	47.4	49.8	52.1	54.5	56.9
200	37.7	39.6	41.5	43.5	45.6	47.7	49.8
300	28.7	30.1	31.6	33.2	34.7	36.3	38.0
400	16.1	17.0	17.8	18.7	19.5	20.4	21.3
500	0	0	0	0	0	0	0

Анализ таблиц показывает существенное влияние  $d$  на величину момента появления второй зоны пластичности в области сжатия и на рост прогиба в центре балки от 45 до 59 см, т.е. на 31%.

Для наглядного представления о влиянии эффекта SD на рисунке 1 на вклейке приведены графики  $w(x)$  при различных  $d$  и для одинакового значения момента  $M = 1.183 \cdot M_t$ .

Отметим, что зависимость прогиба в центре балки, иначе говоря, стрелы прогиба от величины изгибающего момента является существенно нелинейной, что подтверждается результатами расчета, представленными в виде рис. 3.

Таким образом задача об изгибе постоянным моментом балки, обладающей эффектом SD, может быть решена аналитически. Интересно сравнить это решение с решением МКЭ, которое проведено с применением пакета ANSYS 13.1. На рисунке 2 на вклейке

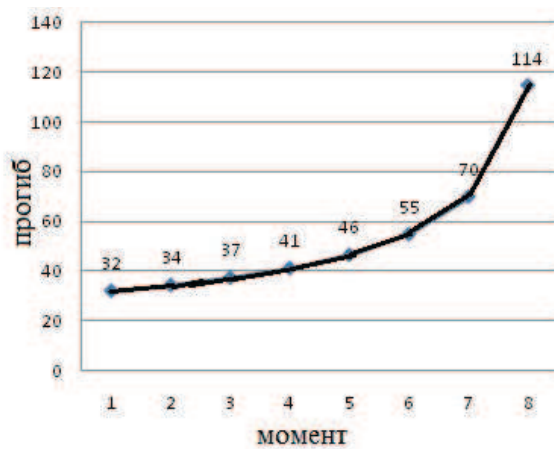


Рис. 3. Зависимость стрелы прогиба SD-балки от изгибающего момента

показано распределение напряжений по толщине балки, а на рисунке 3 на вклейке показан прогиб балки для значения  $d = 1.3$  и  $M = 1.183 \cdot M_t$ .

Сравнение теоретических расчетов и расчетов в пакете ANSYS показывает хорошее совпадение, что подтверждает справедливость и адекватность предложенной математической модели описания эффекта SD. В частности, расхождение по расчету прогиба составляет менее 2%.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализируя результаты и метод решения поставленной задачи можно сделать вывод об успешном сочетании теоретической математической модели изгиба балки из сложного по физическим свойствам металлического сплава и возможности его численной реализации. Решение простейшей задачи чистого изгиба и хорошее совпадение расчета по аналитическим формулам и методом МКЭ позволяет рассматривать более сложные условия опирания и нагру-

жения с достаточной достоверностью получаемых решений даже в тех случаях, когда теоретическое решение в виде конечных формул является практически недостижимой задачей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука. 1982. 567 с.
2. *Ohashi Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behaviour of metals // Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University. 1982. Vol. 34. N1. P.1-76.
3. *Рыбакина О. Г.* Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. // Вестн. Ленингр. ун-та. Исследования по упругости и пластичности. 1982. №14. С. 132–142.
4. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат. 1956. 324 с.
5. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.:Высшая школа. 1969. 607 с.
6. *Vackofen Walter A.* Deformation processing. Addison-Wesley Pub. Co. 1972. 326 p. (Русский перевод: Бекофен В. Процессы деформации. М: Металлургия. 1977. 288 с.)
7. *Трещев А.А.* Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов. М. Тула: РААСН.ТулГУ. 2007. 160 с.
8. *Morozov E.M., Parton V.Z.* Elastic-plastic Fracture Mechanics. Translated from Russian Hardcover, January 1, 1978, 427 pp.
9. *Pavilaaynen G.V.* Elasto-Plastic Deformations of Ribbed Plates. CRM Proceedings and Lecture Notes. Amer.Math.Soc.,Providence, R.I.,1993, pp.227–233.
10. *Pavilaaynen G.V.* Elastic-plastic deformations of a beam with the SD-effect. AIP Conf. Proc. 1648, 300007 (2015); PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS 2014 (ICNAAM-2014). Rhodes, Greece

# НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УСТРОЙСТВ ФИКСАЦИИ КОСТНЫХ ПЕРЕЛОМОВ

М. В. АРТЕМОВА, Д. А. МОРЩИНИНА

В данной работе рассматриваются математические модели устройств фиксации переломов шейки бедренной кости и длинных трубчатых костей. В первом случае фиксация осуществляется посредством специальных винтов. Во втором — с помощью упругой вставки. Анализ напряженно-деформированного состояния конструкций проведен на основе теории изгиба балок.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Переломы костей опорно-двигательного аппарата являются распространенным повреждением. Довольно часто требуется оперативное вмешательство для их фиксации. При сращении сложных переломов выполняют остеосинтез — хирургическое сопоставление и соединение отломков до полного их срастания [1]. При этом фиксацию осуществляют при помощи специальных аппаратов, винтов, пластин или стержней; выбор зависит от характера и локализации травмы [2].

В настоящей статье рассматриваются два типа травм: перелом шейки бедра и длинных трубчатых костей. При повреждениях шейки бедра принято осуществлять репозицию при помощи введения трех спонгиозных винтов, каждый из которых представляет собой стержень (длиной 25–100 мм) с резьбовой частью (длиной 16–32 мм) диаметром 4,5–6,5 мм. Как правило, винты изготавливаются из титановых сплавов [2].

По типам фиксации длинных трубчатых костей остеосинтез делят на несколько видов: наружный чрескостный компрессионно-дистракционный и погружной [1]. В первом случае используют специальные конструкции, например, аппарат Г. А. Илизарова (1951 г.) [1]. Во втором применяют пластины с шурупами и винтами или гвозди [3]. В данной статье рассматривается фиксация перело-

---

Доклад на семинаре 17 марта 2015 г.

© М. В. Артемова, Д. А. Морщнина, 2015



мов длинных трубчатых костей с помощью упругой вставки.

На основе теории изгиба балок проводится анализ напряженно-деформированного состояния фиксаторов [4, 5].

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВИНТА, ПРИМЕНЯЕМОГО ПРИ ФИКСАЦИИ ПЕРЕЛОМОВ ШЕЙКИ БЕДРЕННОЙ КОСТИ

В качестве математической модели фиксатора рассмотрим балку в декартовой системе координат  $XYZ$  длиной  $l$  с круговым сечением диаметра  $d$ , нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q_1$  или  $q_2$  (рис. 1).

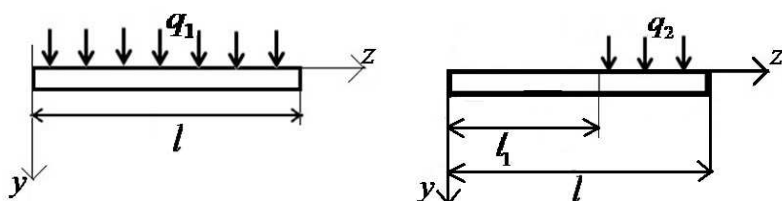


Рис. 1. Балка нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и краевые условия в каждом случае имеют вид [5]:

$$EIv_1^{(4)}(z) = q_1, \quad v_1(0) = v_1'(0) = v_1''(l) = v_1'''(l) = 0, \quad (13)$$

$$EIv_2^{(4)}(z) = q_2e(z - l_1), \quad v_2(0) = v_2'(0) = v_2''(l) = v_2'''(l) = 0. \quad (14)$$

где  $v_1, v_2$  — прогибы;  $M$  — проекция изгибающего момента в точке  $z$  на ось  $oX$ ;  $I$  — момент инерции площади поперечного сечения балки относительно его центральной оси, параллельной  $oX$ ;  $E$  — модуль Юнга;  $e(z - l_1)$  — единичная функция или функция Хевисайда [6].

Интегрируя уравнение (13), получаем функцию прогиба в первом случае:

$$v_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{q_1 z^4}{24} + A \frac{z^3}{6} + B \frac{z^2}{2} + Cz + D \right).$$

С учетом краевых условий, имеем

$$v_1 = \frac{q_1 z^2 l^2}{24EI} \left( \frac{z^2}{l^2} - \frac{4z}{l} + 6 \right).$$

Нормальное напряжение выражается равенством [5]:

$$\sigma = \frac{M_1 y}{I}. \quad (15)$$

Максимальные напряжения определяются по формуле [7]:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{1\max}}{W}, \quad (16)$$

где  $W$  — момент сопротивления сечения при изгибе.

На основе равенств (15), (16) находим выражения для напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{16q_1 l^2 \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2}{\pi d^3}, \\ \sigma_{1\max} &= \frac{16q_1 l^2}{\pi d^3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим теперь балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q_2$  на отрезке  $[l_1, l]$  (рис. 1). Найдём решение (14) методом интегральных преобразований Лапласа [8]. Для этого введём функцию

$$V_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v_2(z) dt,$$

где  $p$  — комплексная, а  $t$  — вещественная переменная. Тогда уравнение (14) в изображениях  $V_2(p)$  будет иметь вид

$$V_2(p) = \frac{v_2(0)}{p} + \frac{v_2'(0)}{p^2} + \frac{v_2''(0)}{p^3} + \frac{v_2'''(0)}{p^4} + \frac{1}{EI} \frac{q_2}{p^5} e^{-p(l-l_1)}.$$

Этому выражению соответствует оригинал

$$v_2(z) = v_2(0) + v_2'(0)z + \frac{v_2''(0)z^2}{2!} + \frac{v_2'''(0)z^3}{3!} + \frac{1}{EI} \frac{q_2}{4!} (z - l_1)^4 e^{-(z-l_1)}.$$

Принимая во внимание краевые условия (14) и осуществляя необходимые преобразования, находим:

$$v_2(z) = \frac{q_2}{24EI} \left( (z - l_1)^4 e(z - l_1) - 4z^3(l - l_1) + 6z^2(l^2 - l_1^2) \right).$$

Согласно [5], напряжения, возникающие в сечении балки, будут определяться по формуле

$$\sigma_2 = \frac{16q_2 \left( (z - l_1)^2 e(z - l_1) - 2z(l - l_1) + (l^2 - l_1^2) \right)}{\pi d^3}.$$

Проведем сравнительный анализ решений рассмотренных задач (рис. 1). Для этого введем функции:  $v_1^*(z) = \frac{24EI}{q_1 l} v_1(z)$ ,  $v_2^*(z) = \frac{24EI}{q_2(l-l_1)} v_2(z)$ ,  $\sigma_1^*(z) = \frac{\sigma_1(z)}{q_1 l}$ ,  $\sigma_2^*(z) = \frac{\sigma_2(z)}{q_2(l-l_1)}$ . Полагая в них  $l_1 = \frac{l}{b}$ ,  $q_2 = bq_1$ , имеем

$$v_1^*(z) = z^2 l \left( \frac{z^2}{l^2} - \frac{4z}{l} + 6 \right),$$

$$v_2^* = \frac{1}{(bl-l)} \left( \left( z - \frac{l}{b} \right)^4 e \left( z - \frac{l}{b} \right) - 4z^3 \left( l - \frac{l}{b} \right) + 6z^2 \left( l^2 - \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right) \right),$$

$$\sigma_1^*(z) = \frac{16l \left( 1 - \frac{z}{l} \right)^2}{\pi d^3},$$

$$\sigma_2^*(z) = \frac{16 \left( (z - l_1)^2 e(z - l_1) - 2z(l - l_1) + (l^2 - l_1^2) \right)}{b(l - l_1) \pi d^3}.$$

На рис. 6 на вклейке представлены графики функций  $v_1^*(z)$ ,  $v_2^*(z)$ ,  $\sigma_1^*(z)$ ,  $\sigma_2^*(z)$ .

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что максимальные значения прогиба балки достигаются на ее конце  $z = l$ , на противоположном ( $z = 0$ ) возникают наибольшие напряжения, причем их величины во втором случае ( $q_2$ ) больше, чем в первом ( $q_1$ ). При  $l_1 \rightarrow l$  различия между графиками функций уменьшаются, а при увеличении длины (диаметра винта) наблюдается рост (убывание) их значений.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ВИНТОВ, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ПРИ ПЕРЕЛОМАХ ШЕЙКИ БЕДРА, В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАГРУЗКИ

Согласно Х. А. Янсону [9], показатели нагрузки на тазобедренный сустав в различных случаях имеют следующие значения:

- 1) при опоре на обе ноги —  $0,3P$ ;
- 2) при опоре на оперированную ногу —  $2,4P$ ;
- 3) при передвижении в обычном темпе по ровной поверхности —  $2P$ ;
- 4) при подъеме и спуске по наклонной поверхности —  $2,5P$ ;
- 5) при быстрой ходьбе —  $4,3P$ .

Здесь  $P$  — вес тела без опорной конечности. Учитывается, что система бедро+голень+стопы составляет примерно 36% массы человека [10].

Определим диаметр винта  $d$ , применяемого при фиксации вертельного перелома бедренной кости, исходя из характеристик материала. Наиболее предпочтительным для изготовления фиксаторов является титановый сплав  $\sigma_{pr} = 900$  МПа [2]. В соответствии с формулой (17) для максимальных напряжений получаем:

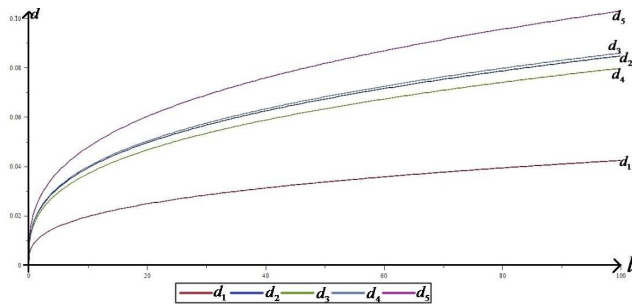
$$d = \left( \frac{16Pl}{\sigma_{pr}\pi} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad P = ql.$$

На рис. 3 приведены графики зависимости диаметра винта  $d$  от его длины  $l$  в случаях 1-5.

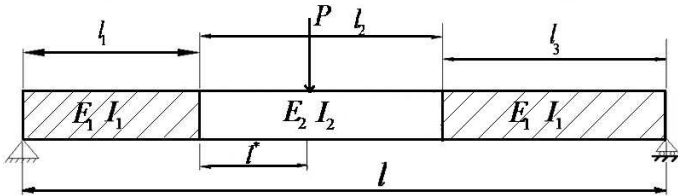
На основе полученных результатов следует отметить, что при фиксации вертельного перелома бедренной кости необходимо учитывать индивидуальные особенности пациента (различные типы нагрузки). При высокой активности или большой массе рекомендуется использовать винт большего диаметра.

### 4. АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УСТРОЙСТВА ПРИ ФИКСАЦИИ ПЕРЕЛОМОВ ДЛИННЫХ ТРУБЧАТЫХ КОСТЕЙ

В качестве математической модели рассмотрим свободно опертую балку длиной  $l$ , состоящую из трех частей, характеризующих-

Рис. 3. Зависимость диаметра винта  $d$  от его длины  $l$ 

ся разными модулями Юнга ( $E_1, E_2$ ) и моментами инерции ( $I_1, I_2$ ), нагруженную сосредоточенной силой  $P$  (рис. 4).

Рис. 4. Свободно опертая балка длиной  $l$ , нагруженная сосредоточенной силой

Согласно [5], дифференциальное уравнение изгиба балки и краевые условия имеют вид:

$$EIy^{(4)}(x) = q, \quad y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0, \quad (18)$$

где  $y$  — прогиб.

Для решения задачи последовательно рассматриваются три участка балки.

I. Дифференциальное уравнение изгиба для первого участка имеет вид

$$E_1 I_1 y_1^{(4)}(x_1) = 0. \quad (19)$$

Найдем решение (19) методом интегральных преобразований Лапласа [8]. Получаем уравнение (19) в изображениях

$$Y_1(p_1) = \frac{y_1(0)}{p_1} + \frac{y_1'(0)}{p_1^2} + \frac{y_1''(0)}{p_1^3} + \frac{y_1'''(0)}{p_1^4}.$$

Сделаем замену:  $A = y_1(0)$ ,  $B = y_1'(0)$ ,  $C = y_1''(0)$ ,  $D = y_1'''(0)$ . Принимая во внимание краевые условия, находим

$$y_1(x_1) = Bx_1 + D\frac{x_1^3}{3!}.$$

II. Рассмотрим второй участок, на котором действует сосредоточенная сила  $P$ . В этом случае получаем

$$E_2 I_2 y_2^{(4)}(x_2) = P\delta(x_2 - l^*).$$

Осуществляя аналогичные преобразования, находим:

$$y_2(x_2) = y_2(0) + y_2'(0)x_2 + y_2''(0)\frac{x_2^2}{2} + y_2'''(0)\frac{x_2^3}{3!} + \frac{P}{E_2 I_2} \frac{(x_2 - l^*)^3}{3!} e(x_2 - l^*).$$

Учитывая условия совместности,  $y_1(l_1) = y_2(0)$ ,  $y_1'(l_1) = y_2'(0)$ ,  $E_1 I_1 y_1''(l_1) = E_2 I_2 y_2''(0)$ ,  $E_1 I_1 y_1'''(l_1) = E_2 I_2 y_2'''(0)$ , имеем

$$y_2(x_2) = Bl_1 + D\frac{l_1^3}{3!} + \left(B + D\frac{l_1^2}{2}\right)x_2 + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} D l_1 \frac{x_2^2}{2} + D\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \frac{x_2^3}{3!} + \frac{P}{E_2 I_2} \frac{(x_2 - l^*)^3}{3!} e(x_2 - l^*).$$

III. Для третьего участка дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид:

$$E_1 I_1 y_3^{(4)}(x_3) = 0.$$

Аналогично предыдущим случаям получаем

$$\begin{aligned}
 y_3(x_3) = & Bl_1 + D \frac{l_1^3}{3!} + \left( B + \frac{Dl_1^2}{2} \right) l_2 + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} D l_1 \frac{l_2^2}{2} + \\
 & + D \frac{E_1 I_1 l_2^3}{E_2 I_2 3!} + \frac{P}{E_2 I_2} \frac{(l_2 - l^*)^3}{3!} + \\
 + & \left( B + D \frac{l_1^2}{2} + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} D l_1 l_2 + D \frac{E_1 I_1 l_2^2}{E_2 I_2 2} + \frac{P}{E_2 I_2} \frac{(l_2 - l^*)^2}{2} \right) x_3 + \\
 & + \frac{\left( D(l_1 + l_2) + \frac{P}{E_1 I_1} (l_2 - l^*) \right) x_3^2}{2} + \frac{\left( D + \frac{P}{E_1 I_1} \right) x_3^3}{3!}.
 \end{aligned}$$

Из краевых условий  $y_3(l_3) = y_3'(l_3) = 0$  окончательно находим коэффициенты  $B$  и  $D$ :

$$\begin{aligned}
 B = & -\frac{D}{l} \left( \frac{l_1^3 + l_3^3}{3!} + \frac{l_1^2 l_2 + l_1^2 l_3 + l_1 l_2^2 + l_2 l_3^2}{2} \right) - \\
 & -\frac{D}{l} \left( \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \left( \frac{l_1 l_2^2 + l_2^2 l_3}{2} + \frac{l_2^3}{3!} + l_1 l_2 l_3 \right) \right) - \\
 - & \frac{P}{l E_2 I_2} \left( \frac{(l_2 - l^*)^3}{3!} + \frac{(l_2 - l^*)^2 l_3}{2} \right) - \frac{P}{l E_1 I_1} \left( \frac{l_3^3}{3!} + (l_2 - l^*) \frac{l_3^2}{2} \right), \\
 D = & -\frac{P}{E_1 I_1 l} (l - l_1 - l^*).
 \end{aligned}$$

Введем обозначение:  $k = \frac{E_1}{E_2}$ ,  $m = \frac{l_1}{l_2}$ . На рис. 5 представлены графики функции прогиба при следующих значениях параметров:  $l = 100$  мм,  $l_1 = 50$  мм,  $l_2 = 10$  мм,  $l_3 = 40$  мм,  $l^* = 7$  мм,  $E_1 = 112 \cdot 10^6$  МПа,  $d = 6$  мм,  $P = 900$  Н.

Кривые 1–5 соответствуют  $k$  и  $m$ :

- 1)  $k = 6$ ,  $m = 1$ ; 2)  $k = 12$ ,  $m = 1$ ; 3)  $k = 1$ ,  $m = 5$ ; 4)  $k = 5$ ,  $m = 5$ ; 5)  $k = 3$ ,  $m = 7$ .

При действии на балку сосредоточенного момента  $M$  получены аналогичные результаты (рис. 6, рис. 7).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, методом интегральных преобразований Лапла-

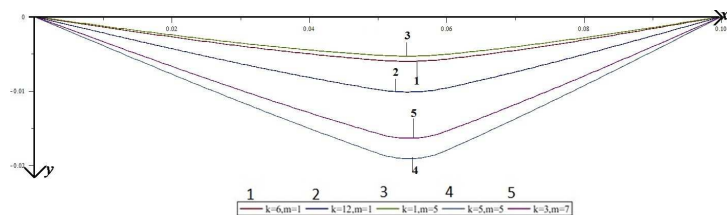


Рис. 5. График функции прогиба балки, нагруженной сосредоточенной силой, от длины  $l$  в случаях 1–5

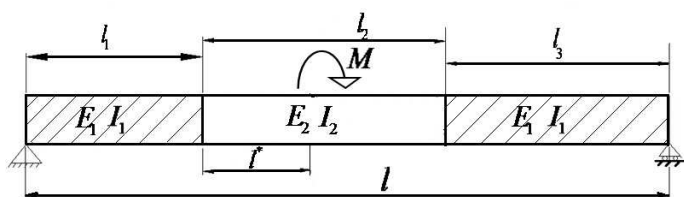


Рис. 6. Свободно опертая балка длиной  $l$ , нагруженная сосредоточенным моментом

са найдено решение задачи об изгибе свободно опертой балки, состоящей из трех частей, на которую действует сосредоточенная сила  $P$  и момент  $M$  (рис. 4, рис. 6). На основе построенных графиков (рис. 5, рис. 7), можно сделать следующие выводы:

- 1) максимальное значение прогиба балки достигается на втором участке с модулем упругости  $E_2 < E_1$  и моментом инерции  $I_2 < I_1$ ;
- 2) с ростом значений параметров  $k$  и  $m$  величина прогиба увеличивается.

Авторы выражают благодарность Ю. М. Далю и А. А. Морщиной за советы и помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сергеев С.В., Загородний Н.В. Современные методы остеосинтеза костей при острой травме опорно-двигательного аппарата. М.: РУДН, 2008. 222



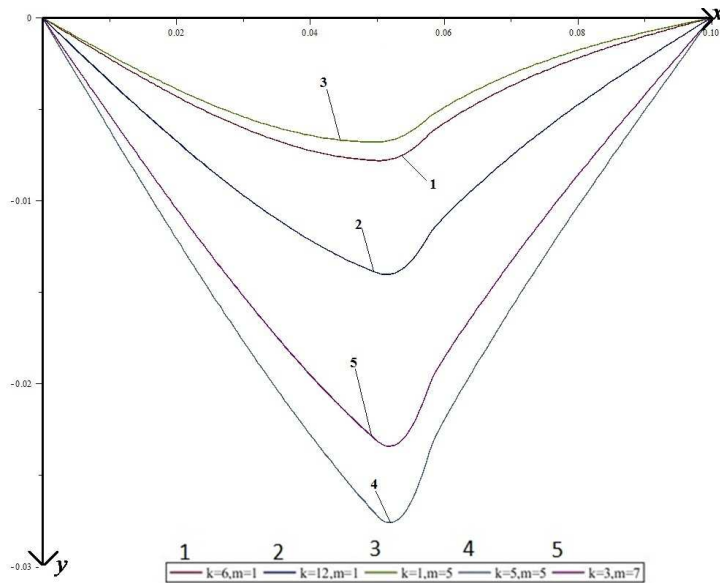


Рис. 7. График функции прогиба балки, нагруженной сосредоточенным моментом, от длины  $l$  в случаях 1–5

с.

2. Анкин Л.Н., Анкин Н.Л. Травматология. Европейские стандарты. М.: Медэкспресс-информ, 2005. 496 с.
3. Ревенко Т.А., Гурьев В.Н., Шестерня Н.А. Атлас операций при травмах опорно-двигательного аппарата. М.: Медицина, 1979. 568 с.
4. Папкович П.Ф. Труды по строительной механике корабля. Л.: Судпрогиз, Том 1, 1962. 576 с.
5. Короткий Я.И., Локшин А.З., Сиверс Н.Л. Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем (строительная механика корабля). М.: Машгиз, 1953. 517 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 737 с.
7. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1965. 856 с.
8. Даль Ю.М. О решении некоторых дифференциальных уравнений механики операционным методом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. При-

кладная математика. Информатика. Процессы управления, 2013, Вып. 4, С. 3–9

9. Янсон Х.А. Биомеханика нижней конечности человека. Рига: Зинатне, 1975. 324 с.
10. Дубровский В.И., Федорова В.Н. Биомеханика: учебник для средних и высших учебных заведений. М.:ВЛАДОС-ПРЕСС, 2003. 672 с.

# АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ РАСТЯНУТОГО СТЕРЖНЯ АНАЛИТИЧЕСКИМ И АСИМПТОТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

А.К.БАБИН

Рассматривается задача о колебании растянутого жестко заделанного стержня. При числе волн равном 1 и 5 получено численное решение, решение по первому и второму приближению метода Вишика и Люстерника и решение по методу динамического краевого эффекта. На основе полученных данных проводится оценка области применимости первого и второго приближения метода Вишика и Люстерника и метода динамического краевого эффекта. Для большего числа волн получено уменьшение области применимости метода Вишика и Люстерника, и увеличение области применимости метода динамического краевого эффекта.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается задача о колебании растянутого жестко закрепленного стержня. На основе этой задачи, имеющей известное численное решение, проводится оценка области применимости методов Вишика и Люстерника и динамического краевого эффекта.

Уравнение колебаний стержня имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь  $E$  — модуль упругости стержня,  $J$  — момент инерции сечения,  $EJ$  — жёсткость на изгиб,  $\rho$  — плотность материала,  $S$  — площадь поперечного сечения,  $T$  — сила натяжения,  $w$  — прогиб. Решение линейной задачи ищется в виде:

$$w(x, t) = X(x) \sin \omega t.$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-06311).

Доклад на семинаре 28 апреля 2015 г.

© А.К.Бабин, 2015

После разделения переменных можно получить уравнение для  $X(x)$ :

$$EJX^{IV} - \omega^2 \rho SX - TX'' = 0. \quad (1)$$

Граничные условия имеют вид:

$$X(0) = X(l) = X'(0) = X'(l) = 0,$$

где  $l$  — длина стержня.

Примем  $\bar{x} = x/l$ , и перейдем к безразмерному виду. В дальнейшем изложении будем использовать обозначение  $x$  вместо  $\bar{x}$ . В этом случае задача имеет вид:

$$\begin{cases} X^{IV} - \omega^2 \frac{\rho S l^4}{EJ} X - \frac{T l^2}{EJ} X'' = 0, \\ X(0) = X(1) = X'(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$$

## 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ.

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1) имеет вид

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left( \frac{T l^2}{EJ} \right) - \frac{\rho S \omega^2 l^4}{EJ} = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{T l^2 / EJ + \sqrt{T^2 l^4 / (EJ)^2 + 4 \rho S \omega^2 l^4 / EJ}}{2}, \\ -\lambda_2^2 &= \frac{T l^2 / EJ - \sqrt{T^2 l^4 / (EJ)^2 + 4 \rho S \omega^2 l^4 / EJ}}{2}. \end{aligned}$$

Решение можно представить в виде

$$X(x) = C_1 \sin \lambda_2 x + C_2 \cos \lambda_2 x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_1 x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_1 x,$$

Константы могут быть определены из граничных условий

$$X(0) = 0 \implies C_3 = -C_2.$$

$$X'(0) = 0 \implies C_4 = -C_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

$$X(1) = 0 \implies C_1 \sin \lambda_2 + C_2 \cos \lambda_2 - C_2 \operatorname{ch} \lambda_1 + C_4 \operatorname{sh} \lambda_1 = 0.$$

$$X'(1) = 0 \implies \lambda_2 C_1 \cos \lambda_2 - \lambda_2 C_2 \sin \lambda_2 - \lambda_1 C_2 \operatorname{sh} \lambda_1 - \lambda_1 C_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{ch} \lambda_1 = 0.$$

Тогда

$$C_2 = C_1 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{sh} \lambda_1 - \sin \lambda_2 \right) / (\cos \lambda_2 - \operatorname{ch} \lambda_1)$$

И для существования нетривиального решения необходимо, чтобы

$$2\lambda_2 \lambda_1 (1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0.$$

Таким образом, частоты колебаний растянутого жёстко закреплённого стержня определяется из следующего уравнения

$$\begin{cases} \frac{2l^2 \omega}{\sqrt{EJ}} \sqrt{\rho S} (1 - \cos \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_1) + \frac{Tl^2}{EJ} \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{l^2 T}{2EJ} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\omega^2 \rho S E J}{T^2}} \right], \\ \lambda_2^2 = \frac{l^2 T}{2EJ} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4\omega^2 \rho S E J}{T^2}} \right]. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим два случая: когда отношение  $EJ/l^2 T$  меньше и больше 1. Введём 2 безразмерных параметра  $\mu$  и  $\varepsilon$ , каждый из которых меняется в промежутке  $[0, 1]$ :  $\mu^2 = EJ/l^2 T$ ,  $\varepsilon = 1/\mu$ . Обозначим  $\Lambda = \rho S \omega^2 l^2 / T$ , тогда уравнение (2) можно переписать в следующем виде

$$\begin{cases} 2\sqrt{\Lambda} (1 - \cos \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_1) + \frac{1}{\mu} \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{1}{2\mu^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + 4\Lambda \mu^2} \right], \\ \lambda_2^2 = \frac{1}{2\mu^2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 4\Lambda \mu^2} \right]. \end{cases} \quad (3)$$

Для  $\varepsilon^2 = l^2 T / EJ$ , при  $A = \rho S \omega^2 l^4 / EJ$ , получим

$$\begin{cases} 2\sqrt{A}(1 - \cos \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_1) + \varepsilon^2 \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{\varepsilon^4}} \right], \\ \lambda_2^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{\varepsilon^4}} \right]. \end{cases} \quad (4)$$

Частоты колебаний можно найти при численном решении уравнений (3) и (4).

### 3. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА.

Метод динамического краевого эффекта был разработан В.В. Болотиным [3, 4, 5, 6]. Предполагается, что решается уравнение, в котором все члены имеют одинаковый асимптотический порядок.

Рассмотрим сначала упрощённую постановку задачи, т.е. уравнение (1) при  $T = 0$  [7]:

$$X^{IV} - a^2 \omega^2 X = 0, \quad (5)$$

здесь  $a^2 = \frac{S \rho l^4}{EJ}$ .

Известно, что задача для шарнирно опертого стержня имеет точное решение

$$X_n(x) = \sin \pi n x.$$

В этом случае безразмерная длина волны, соответствующая  $n$ -ой форме колебаний, составляет  $1/n$ .

Естественно предположить, что вдали от границ форма прогиба для жестко опертого стержня будет мало отличаться от формы для шарнирно опертого стержня, поэтому будем искать решение задачи о колебаниях жестко закрепленного стержня (5) в виде  $X = X_1 + X_2$ , где

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + a\omega X_1 = 0 \quad \frac{d^2 X_2}{dx^2} - a\omega X_2 = 0$$

При этом функция  $X_1$  описывает основные колебания

$$a\omega = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2, \quad X_1(x) = \sin \frac{\pi(x-x_0)}{\lambda_x}.$$

Здесь  $x_0$  — неизвестный сдвиг по фазе,  $\lambda_x$  — длина волны.

Уравнение

$$\frac{d^2 X_2}{dx^2} - \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2 X_2 = 0,$$

используем для построения интегралов краевого эффекта:

$$X_2 = C_1 e^{-\pi x/\lambda_x} + C_2 e^{-\pi(x-l)/\lambda_x},$$

Граничные условия позволяют определить неизвестные константы.

$$x = 0: \quad X_1(0) + X_2(0) = X_1'(0) + X_2'(0) = 0,$$

$$x = 1: \quad X_1(1) + X_2(1) = X_1'(1) + X_2'(1) = 0,$$

То есть при  $x = 0$

$$C_1 - \sin\left(\frac{\pi x_0}{\lambda_x}\right) = 0, \quad C_1 - \cos\left(\frac{\pi x_0}{\lambda_x}\right) = 0,$$

а при  $x = 1$

$$C_2 + \sin\left(\frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x}\right) = 0, \quad C_2 + \cos\left(\frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x}\right) = 0.$$

Получаем 4 уравнения относительно 4 неизвестных:  $\lambda_x, x_0, C_1, C_2$ . Из первых двух уравнений имеем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_0}{\lambda_x}\right) = 1$$

$$\frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad \text{или} \quad x_0 = \lambda_x \left(\frac{1}{4} + k\right);$$

Аналогично из граничных условий на правом конце стержня получаем:

$$\frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} = \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \frac{1}{\lambda_x} - \frac{1}{4} - n = \frac{1}{4} + k;$$

или

$$\lambda_x = \frac{1}{1/2 + m},$$

где  $m = k + n$ .

Таким образом, частота колебаний стержня может быть определена из равенства

$$\omega_n = \frac{\pi^2 (n + 1/2)^2}{al^2}.$$

Теперь пусть  $T \neq 0$ , в этом случае уравнение (1) принимает вид

$$X^{IV} - \varepsilon^2 X'' - a^2 \omega^2 X = 0,$$

где  $a^2 = S\rho l^4/(EJ)$ .

Соответствующее характеристическое уравнение в этом случае имеет корни

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{4} + a^2 \omega^2}.$$

а частоты колебаний шарнирно опёртого стержня имеют вид

$$\omega_n^2 = \frac{EJ \pi^4 n^4}{\rho S l^4} + \frac{T}{EJ} \frac{EJ \pi^2 n^2}{\rho S l^2} = \frac{EJ \pi^4 n^4}{\rho S l^4} \cdot \left(1 + \frac{T l^2}{EJ n^2}\right).$$

Форма колебаний в этом случае имеет вид

$$X = \sin \lambda x, \quad \lambda = \pi n.$$

В случае жестко опёртого стержня основное решение ищем, как и раньше, в виде  $X = X_1 + X_2$

$$X_1 = \sin \frac{\pi(x - x_0)}{\lambda_x}.$$

Введём обозначения  $\lambda_1^2 > 0$ , а  $\lambda_2^2 = -\bar{\Lambda}^2 < 0$ , тогда

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + \lambda_1^2 X_1 = 0, \quad \frac{d^2 X_2}{dx^2} + \lambda_2^2 X_2 = 0.$$



$$X_2 = C_1 e^{-\bar{\Lambda}x} + C_2 e^{\bar{\Lambda}(x-1)},$$

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2, \quad \frac{\varepsilon^2}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + a^2 \omega_n^2} = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2,$$

или

$$a^2 \omega_n^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^4 - \varepsilon^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2.$$

Выражения для  $\bar{\lambda}_x, C_1, C_2, x_0$  найдём из граничных условий.

На левом краю

$$X(0) = C_1 - \sin \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = 0, \quad X'(0) = -C_1 \bar{\Lambda} + \frac{\pi}{\lambda_x} \cos \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = 0,$$

и таким образом,

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{\lambda_x} \cdot \frac{1}{\bar{\Lambda}},$$

а из условий справа

$$C_2 - \sin \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} = 0, \quad C_2 \bar{\Lambda} - \frac{\pi}{\lambda_x} \cos \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} = 0,$$

Таким образом, для безразмерной длины волны  $\lambda_x$  и сдвига по фазе  $x_0$  имеем 2 уравнения:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{\lambda_x} \cdot \frac{1}{\bar{\Lambda}}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} = \frac{\pi}{\lambda_x} \cdot \frac{1}{\bar{\Lambda}}. \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) можно получить

$$\frac{1-x_0}{\lambda_x} = \frac{x_0}{\lambda_x} + k \Rightarrow 1 - 2x_0 = k\lambda_x,$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \left( \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_x^2}{\pi^2}} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{\varepsilon^2 \lambda_x^2}{2\pi^2}.$$

При увеличении числа волн длина волны колебаний становится малой величиной, поэтому  $(\varepsilon^2 \lambda_x^2) / \pi^2 \ll 1$  и приведённое выше уравнение можно решать асимптотическим методом [2].

В нулевом приближении

$$\frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{4} + \pi m \implies \frac{x_0}{\lambda_x} = \frac{1}{4} + m.$$

Если представить  $\pi x_0 / \lambda_x$  в виде  $\pi x_0 / \lambda_x = \pi/4 + \delta$ , то тогда можно получить, что  $\delta = -\varepsilon^2 \lambda_x^2 / 4\pi^2$ .

Для частоты стержня в этом случае имеем

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4 EJ}{\rho l^4} \left( \frac{1}{2} + n \right)^4 + \frac{\pi^2 T}{EJ} \left( \frac{1}{2} + n \right)^2.$$

Для уравнения

$$-\mu^2 X^{IV} + X'' + \Lambda X = 0,$$

получаем решение

$$\Lambda = \mu^2 \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)^4 + \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2. \quad (8)$$

#### 4. РЕШЕНИЕ ПО МЕТОДУ ВИШИКА И ЛЮСТЕРНИКА.

Метод Вишика и Люстерника помогает определять собственные значения и функции в случае сингулярно-возмущённого дифференциального уравнения.

Схема решения задачи по методу Вишика и Люстерника приведена в [2].

Для задачи  $A_\mu$ :

$$-\mu^2 X^{IV} + X'' + \Lambda X = 0, \quad (9)$$

$$X(0) = X(1) = X'(0) = X'(1) = 0,$$

дополнительное характеристическое уравнение имеет вид

$$-\lambda^2 + 1 = 0.$$

Невозмущённая задача  $A_0$  имеет вид:

$$\frac{d^2 X_0}{dx^2} + \Lambda_0 X_0 = 0, \quad X_0(0) = X_0(1) = 0.$$

$$X = A \sin \sqrt{\Lambda} x + B \cos \sqrt{\Lambda} x.$$

$$\Lambda_0 = n^2 \pi^2, \quad X_0 = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение задачи  $A_\mu$  в нулевом приближении по методу Вишика и Люстерника можно искать в виде

$$X(x) = X_0(x) + \mu Z_0^{(1)}\left(\frac{x}{\mu}\right) + \mu Z_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\mu}\right),$$

Граничные условия при  $x = 0$ :  $X(0) = 0$ ;  $X'(0) = 0$ , тогда  $X_0'(0) + Z_0^{(1)'(0)} = 0$ , т.е.  $\pi n + Z_0^{(1)'(0)} = 0$ . Подставляя значения производных от  $X$  в (9), и, приравнявая члены при наименьших степенях  $\mu$ , получим:

$$\frac{1}{\mu} Z_0^{(1)''''}(\eta_1) + \frac{1}{\mu} Z_0^{(1)''}(\eta_1) = 0, \quad \text{где } \eta_1 = \frac{x}{\mu}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Z_0^{(1)}(\eta_1) = C_1 + C_2 \eta_1 + C_3 e^{\eta_1} + C_4 e^{-\eta_1}.$$

Константы  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , так как

$$Z_0^{(1)}(\eta_1) \rightarrow 0, \quad \text{при } \eta_1 \rightarrow \infty,$$

Из граничного условия  $X'(0) = 0$  следует, что  $C_4 = \pi n$ . Аналогично, используя условия для  $\eta_2 = (1-x)/\mu$ , получим:

$$Z_0^{(1)}(\eta_1) = \pi n e^{-\eta_1}, \quad Z_0^{(2)}(\eta_2) = (-1)^{n+1} \pi n e^{-\eta_2}.$$

Если подставить  $\Lambda = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1$  и  $X(x) = X_0(x) + \mu X_1(x)$  в уравнение (9), оставить только члены при  $\mu$ , то получаем уравнение

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + \Lambda_0 X_1 = -\Lambda_1 X_0, \quad \text{где } X_0(x) = \sin n\pi x, \quad \Lambda_0 = n^2 \pi^2.$$

Решение однородной задачи  $X_{1 \text{ одн}}(x) = C_1 \sin \pi n x + C_2 \cos \pi n x$ .  
Частное решение  $X_{1 \text{ част}}(x) = \Lambda_1 x \cos \pi n x / 2\pi n$ . Тогда  $X_1(x) = X_{1 \text{ одн}}(x) + X_{1 \text{ част}}(x)$ .

Из граничных условий получаем

$$X(0) = 0 \Rightarrow X_1(0) + Z_0^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \pi n = 0 \Rightarrow C_2 = -\pi n.$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow X_1(1) + Z_0^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow \Lambda_1 = 4\pi^2 n^2.$$

А составляющая  $X_1(x)$  равна

$$X_1(x) = -\pi n \cos \pi n x + 2\pi n x \cos \pi n x.$$

Собственное число  $\Lambda$  в первом приближении

$$\Lambda = n^2 \pi^2 + 4\mu n^2 \pi^2. \quad (10)$$

Собственная функция, удовлетворяющая всем граничным условиям в первом приближении, имеет вид

$$X(x) = \sin \pi n x + \mu (-\pi n \cos \pi n x + 2\pi n x \cos \pi n x) + \mu \pi n e^{-\eta_1} + \mu (-1)^{n+1} \pi n e^{-\eta_2} + O(\mu^2).$$

Рассмотрим второе приближение метода Вишика и Люстерника. Решение в этом случае можно искать в виде

$$X(x) = X_0(x) + \mu X_1(x) + \mu Z_0^{(1)}\left(\frac{x}{\mu}\right) + \mu Z_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\mu}\right) + \mu^2 Z_1^{(1)}\left(\frac{x}{\mu}\right) + \mu^2 Z_1^{(2)}\left(\frac{1-x}{\mu}\right),$$

Из граничных условий при  $x = 0$   $X'(0) = 0$ , тогда  $X_1'(0) + Z_1^{(1)'}(0) = 0$ , т.е.  $2\pi n + Z_0^{(1)'}(0) = 0$ . Подставляя значения производных от  $X$  в (9), и, приравнявая члены при наименьших степенях  $\mu$ , получим:

$$\frac{1}{\mu} Z_1^{(1)''''}(\eta_1) + \frac{1}{\mu} Z_1^{(1)''}(\eta_1) = 0, \quad \text{где } \eta_1 = \frac{x}{\mu}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Z_1^{(1)}(\eta_1) = C_1 + C_2\eta_1 + C_3e^{\eta_1} + C_4e^{-\eta_1}.$$

Константы  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , так как

$$Z_1^{(1)}(\eta_1) \longrightarrow 0, \quad \text{при } \eta_1 \longrightarrow \infty,$$

Из граничного условия  $X'(0) = 0$  следует, что  $C_4 = 2\pi n$ . Аналогично, используя условия для  $\eta_2 = (1-x)/\mu$ , получим:

$$Z_1^{(1)}(\eta_1) = 2\pi ne^{-\eta_1}, \quad Z_1^{(2)}(\eta_2) = (-1)^{n+1}2\pi ne^{-\eta_2}.$$

Если представить  $\Lambda$  в виде  $\Lambda = \Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \mu^2\Lambda_2$  и  $X(x) = X_0(x) + \mu X_1(x)$  в уравнение (9), оставить только члены при  $\mu^2$ , то получаем уравнение

$$\frac{d^2 X_2}{dx^2} + \Lambda_0 X_2 = -\Lambda_2 X_0 - \Lambda_1 X_1 + \frac{d^4 X_0}{dx^4}, \quad (11)$$

где  $X_0(x) = \sin n\pi x$ ,  $\Lambda_0 = n^2\pi^2$ ,  $X_1(x) = -\pi n \cos \pi n x + 2\pi n x \cos \pi n x$ ,  $\Lambda_1 = 4\pi^2 n^2$ .

Ищем решение уравнения (11) в виде

$$X_2(x) = C_1 \sin \pi n x + C_2 \cos \pi n x + C_3 x^2 \sin \pi n x + C_4 \sin \pi n x + \\ + C_5 x \cos \pi n x + C_6 x^2 \cos \pi n x.$$

Подставляя  $X_2(x)$ ,  $X_1(x)$ ,  $X_0(x)$ ,  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_1$  в уравнение (11) можно получить

$$C_6 = 0, \quad C_3 = -2\pi^2 n^2, \quad C_4 = 2\pi^2 n^2, \quad C_5 = \frac{\Lambda_2}{2\pi n} - \frac{\pi^3 n^3}{2} - 2\pi n.$$

Из граничных условий

$$X(0) = 0 \Rightarrow X_2(0) + Z_1^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + 2\pi n = 0 \Rightarrow C_2 = -2\pi n.$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow \Lambda_2 = 12\pi^2 n^2 + \pi^4 n^4.$$

Уравнение для  $X_2(x)$  имеет вид

$$X_2(x) = 2\pi^2 n^2 (x - x^2) \sin \pi n x + \pi n (2x - 1) \cos \pi n.$$

И собственное число  $\Lambda$  во втором приближении равно

$$\Lambda = n^2 \pi^2 + 4\mu n^2 \pi^2 + \mu^2 (12n^2 \pi^2 + n^4 \pi^4). \quad (12)$$

## 5. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ ЧИСЛЕ ВОЛН $n=1$ И $n=5$ .

В таблицах 1 и 2 и на рис. 1 приведены сравнения частот, полученных численно, методом динамического краевого эффекта и методом Вишика и Люстерника, для разных  $\mu$  при  $n=1$  и  $n=5$ .  $\Lambda_{\text{числ}}$  — частота, полученная при решении системы уравнений (3),  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$  — частота, полученная при решении уравнения (10),  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  — частота, полученная при решении уравнения (12),  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  — частота, полученная при решении уравнения (8).  $\Lambda = \rho S \omega^2 l^2 / T$ ,  $\mu^2 = EJ / l^2 T$ .

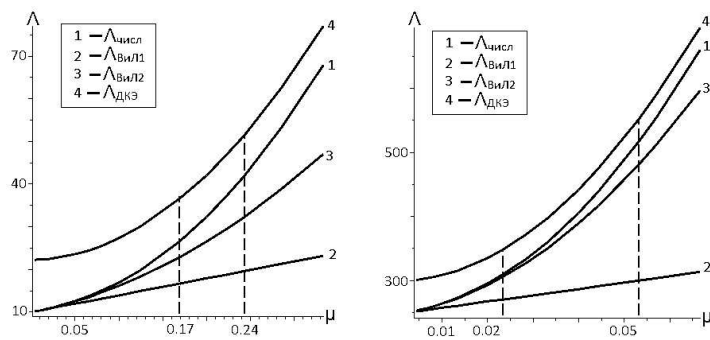


Рис. 1. Зависимость частот колебаний  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  от  $\mu = 0 \dots 0.7$  при числе волн  $n=1$  (слева) и  $n=5$  (справа)

Если рассматривать только первое приближение решения по методу Вишика и Люстерника, то можно отметить, что при  $n=1$  и

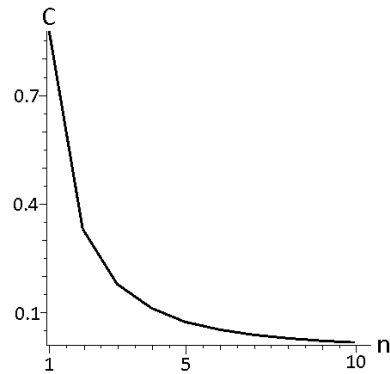


Рис. 2. Зависимость относительной погрешности метода динамического краевого эффекта от числа волн  $n$  при  $\mu = 0.005$ .

$\mu < 0.17$  ближе к точному это решение, а при  $\mu > 0.17$  более точным является решение по методу динамического краевого эффекта. При  $\mu = 0.17$  погрешности как решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 37.44%.

Если учитывать второе приближение решения по методу Вишика и Люстерника, то можно отметить, что при  $n = 1$  и  $\mu < 0.24$  ближе к точному это решение, а при  $\mu > 0.24$  более точным является решение по методу динамического краевого эффекта. При  $\mu = 0.17$  погрешности как решения, построенного по второму приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 22.89%.

При  $n = 5$  и  $\mu = 0.02351$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта равны 12.6%.

При  $n = 5$   $\mu = 0.0533$  погрешности, и решения, построенного по второму приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта равны 7.9%.

Расчёты проводились и для других значений  $n$ . Вводя обозна-

Таблица 1. Сравнение частот колебаний при  $n = 1$ , полученных численно, по методу Вишика и Люстерника и методом динамического краевого эффекта.

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	10.073	10.067	10.072	22.219
0.00625	160	10.125	10.116	10.125	22.226
0.01	100	10.288	10.264	10.286	22.256
0.02	50	10.752	10.659	10.746	22.404
0.04	25	11.847	11.449	11.794	22.996
0.08	12.5	14.837	13.028	14.409	25.363
0.1	10	16.804	13.818	15.976	27.138
0.125	8	19.759	14.804	18.177	29.912
<b>0.17</b>	<b>5.895</b>	<b>26.485</b>	<b>16.568</b>	22.781	<b>36.402</b>
<b>0.24</b>	<b>4.1075</b>	<b>41.855</b>	19.481	<b>32.274</b>	<b>51.435</b>
0.4	2.5	92.347	25.661	60.196	101.108

Таблица 2. Сравнение частот колебаний при  $n = 5$ , полученных численно, по методу Вишика и Люстерника и методом динамического краевого эффекта.

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	253.308	251.675	253.271	300.784
0.008	125	258.872	254.636	258.722	304.261
0.01	100	263.286	256.609	262.994	307.469
<b>0.02351</b>	<b>42.535</b>	<b>308.883</b>	<b>269.943</b>	305.23	<b>347.822</b>
0.04	25	404.782	286.219	388.365	441.172
0.05	20	485.679	296.088	455.692	521.394
<b>0.0533</b>	<b>18.75</b>	<b>516.531</b>	299.378	<b>480.969</b>	<b>552.093</b>
0.067	15	659.552	312.537	596.278	694.713

чение  $C = (\Lambda_{\text{ДКЭ}} - \Lambda_{\text{числ}}) / \Lambda_{\text{числ}}$ , получим зависимость отношения относительной погрешности ( $C$ ) от числа волн ( $n$ ) при  $\mu = 0.05$ , представленную на рис. 2.

Видно, что относительная погрешность решения, полученного методом динамического краевого эффекта, с ростом числа волн уменьшается.

Надо отметить, что все соотношения, представленные в работе, справедливы, если длина волны существенно больше размеров поперечного сечения, т.е. при  $1/n \gg \sqrt{S/l^2}$ .



## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Рассмотрена задача о колебании растянутого жёстко закрепленного стержня. Для данной задачи при числе волн  $n = 1$  и  $n = 5$  сравниваются

- 1) численное решение,
- 2) решение по первому и второму приближению метода Вишика и Люстерника,
- 3) решение по методу динамического краевого эффекта.

Проведена оценка области применимости первого и второго приближения метода Вишика и Люстерника и метода динамического краевого эффекта.

Как и следовало ожидать при малом  $\mu$  лучше работает метод Вишика и Люстерника, созданный для решения сингулярно-возмущённых уравнений, но при увеличении  $\mu$  метод Вишика и Люстерника работает всё хуже по сравнению с методом динамического краевого эффекта. Преимущество метода Вишика и Люстерника заключается в том, что можно получать в теории сколь угодно точное приближение, но, как было показано выше, сложность получения того или иного приближения значительно повышается. Чем больше число волн  $n$ , тем в более широком диапазоне параметров более точным является решение, полученное по методу динамического краевого эффекта.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Теория Механических колебаний, М., Высшая школа, 1980, 408.
2. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике твёрдого тела, М.-И.: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований 2007. 360
3. Болотин В.В. Асимптотический метод в теории колебаний упругих пластин и оболочек, Тр. конф. по теории пластин и оболочек 1961, выпуск 1, 21–25
4. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при колебаниях пластинок. Инж. сборн., т.31, Изд. АН СССР, 1960.
5. Болотин В.В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. Прикл. матем. мех., т.24, №5 Изд. АН СССР, 1960.

- 
6. *Кудрявцев Е.П.* О влиянии сдвигов и инерции вращения на изгибные колебания упругих стержней. Известия АН СССР, ОТИ, Механика и машиностроение, №5, 1960.
  7. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций, М.,Машиностроение, 1991, 429.

## РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

### **ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ОРТОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ.**

А.Л. Смирнов и С.М. БАУЭР

Доклад на семинаре 9 сентября 2014 г.

Рассматривается трехмерная задача о деформации трансверсально изотропного сферического слоя, находящегося под действием нормального давления. Такая модель может быть использована, например, для описания изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при введении внутриглазных инъекций. Для изотропного сферического слоя эта задача известна как задача Ламе. Для трансверсально изотропного слоя аналитическое решение было получено ранее, но формулы, описывающие деформации, оказываются довольно громоздки и для анализа влияния параметров слоя на его напряженно-деформированное состояние удобнее использовать асимптотическое решение задачи. Асимптотические соотношения показывают, что при деформации сферического слоя под действием внутреннего давления, его относительная толщина меняется тем больше, чем меньше толщина слоя. Изменение толщины склеральной оболочки при увеличении внутриглазного давления, как один из результатов представленного моделирования, согласуется с имеющимися данными о том, что при глаукоме, глазном заболевании, сопровождающимся, как правило, повышенным уровнем внутриглазного давления, также наблюдается уменьшение толщины склеры. Зная относительное изменение толщины сферического слоя при увеличении внутреннего давления, например, при введении внутриглазных инъекций, можно оценить отношение радиального и тангенциального модулей упругости склеральной оболочки.

### **НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ РОЛИКАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

М.В. Забиякин

Доклад на семинаре 7 октября 2014 г.

Рассматриваются малые свободные колебания замкнутой вращающейся цилиндрической оболочки конечной длины, подкрепленной по образующим жесткими цилиндрическими роликами. Для определения низших частот колебаний используется полубезмоментная теория оболочек. Решение ищется в виде ряда Фурье по окружной координате. Увеличение числа членов ряда Фурье  $N$  усложнило алгоритм расчета, но позволило найти дополнительные частоты,

которые не были найдены в предыдущих работах, где число  $N$  предполагалось равным числу роликов. Особенно важно, что для тонких оболочек среди этих дополнительных частот оказались низшие частоты, представляющие наибольший интерес для приложений. Разработан алгоритм аналитического определения частот и форм колебаний.

Проведены вычисления частот и форм колебаний методом конечных элементов. Частоты и формы колебаний найденные по аналитическим формулам сравниваются с результатами численных расчетов. Установлено, что при достаточно больших значениях  $N$  полубезмоментную теорию можно использовать для оценки первых двух-трех частот.

#### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ ПОСЛЕ ИНЪЕКЦИЙ**

Е.Б. Воронкова

Доклад на семинаре 30 октября 2014 г.

В докладе обсуждается влияние геометрических параметров (длина переднезадней оси, диаметр глаза, толщина) и свойств тканей глаза на изменение внутриглазного давления после введения дополнительного объема жидкости. Также рассмотрены некоторые аспекты моделирования этой задачи в пакете Comsol Multiphysics.

#### **ДИНАМИКА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТОКСИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ НА ПОВЕРХНОСТИ И В ТОЛЩЕ ВОДЫ**

А.Н.Бестужева и А.Л.Смирнов

Доклад на семинаре 9 декабря 2014г.

Рассматривается двумерная задача о распространении диффундирующего вещества на водной поверхности. Такая модель может быть использована, например, для изучения времени жизни «пятна» токсичных веществ на поверхности воды. Для изотропной среды математическая модель представляет собой краевую задачу для уравнения диффузии, аналитическое решение которой может быть получено с помощью метода Фурье с последующим разложением произвольной функции по функциям Бесселя. В работе построенное аналитическое решение сравнивается с численными решениями краевой задачи, полученными в пакетах Mathematica и MatLab. Исследована зависимость размера «пятна» загрязнения от времени, а также влияние геометрических и физических параметров на величину радиуса «пятна».

Также рассматривается пространственная задача о распространении токсичных веществ, попавших на плоское дно. Определена область, где концентрации токсичных веществ выше предельно допустимой и исследована динамика этой области.

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ  
ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

И.А. Адамович, С.Б. Филиппов

Доклад на семинаре 3 марта 2015 г.

Рассматривается устойчивость под действием внешнего давления цилиндрической оболочки, подкрепленной одинаковыми круговыми стержнями (шпангоутами) с прямоугольными поперечными сечениями, и гладкой оболочки имеющей такие же размеры срединной поверхности и изготовленной из того же материала. Предполагается, что подкрепленная и гладкая оболочки теряют устойчивость при одинаковом критическом давлении. Для определения критического давления используются асимптотические формулы. В явном виде получены формулы для вычисления приближенных значений оптимальных параметров подкрепленной оболочки, которым соответствует минимальное значение отношения массы подкрепленной оболочки к массе гладкой оболочки. Показано, что при увеличении отношения ширины шпангоута к его толщине, отношение масс уменьшается. Проведен расчет оптимальных параметров. Результаты работы могут быть использованы при проектировании тонкостенных конструкций.

**Влияние внешней среды и структуры стенки трубки  
на течение жидкости в углеродных нанотрубках**

Н.А. Рейнберг, А.К. Абрамян, Н.М. Бессонов, Л.В. Миранцев

Доклад на семинаре 31 марта 2015 г.

Проведено исследование течения полярной и неполярной жидкостей в нанотрубках, помещенных в различные среды, методом молекулярной динамики. Обнаружено, что структура нанотрубок оказывает сильное влияние не только на скорость течения, но и на его вид. Траектории молекул жидкости приобретают винтовую форму. В работе продемонстрировано, что течение жидкости в нанотрубке отличается от классического. Обнаружен переходный режим движения между неподвижной и текущей жидкостью. Выявлена ненулевая сила страгивания для жидкости в этих условиях. Обнаружена зависимость параметров течения от полярности жидкости. Показано, что для многослойных трубок влияние окружающей жидкости на течение внутри трубки заметно ниже, чем в случае однослойных трубок.

**Динамика мобильных роботов на омни-колесах.**

Е.Р. Маликов

Доклад на семинаре 14 апреля 2015 г.

В настоящей работе исследуется поведение мобильной робототехнической платформы на роликонесущих колесах, т.н. омни-колесах. Рассматриваются

случаи трех и четырех колес. Предполагается, что движение каждого колеса в продольном направлении происходит без проскальзывания, что порождает собой систему с неголономными связями. На основании уравнений Маджи построены математические модели движения аппаратов. Произведено численное решение уравнений движения omnimobильных роботов для различных случаев управляющих моментов, а также решена прямая задача для некоторых видов движений.

## ХРОНИКА

### 27-й СЕМИНАР СЕВЕРНЫХ СТРАН ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

23–24 октября 2014 г. в Стокгольме (Швеция) прошел 27-й семинар Северных стран по вычислительной механике. Организатором семинара являлась Северная ассоциация вычислительной механики (NoACM, <http://www.noasm.org/>), представляющая интересы Международной ассоциации вычислительной механики (IASM). Первый подобный ежегодный семинар прошел в 1988 г. в Гётеборге (Швеция). В семинаре традиционно участвуют представители стран Северной Европы: Дании, Финляндии, Исландии, Норвегии, Швеции и Прибалтики (Эстония, Латвия и Литва).

Семинар проводился на базе Королевского технического университета (Royal Institute of Technology, КТН) и был посвящен вопросам, связанным с развитием вычислительных методов и их использованию для решения широкого класса задач механики. Председателем оргкомитета был Gunnar Tibert (КТН, Sweden). С пленарными докладами выступили Gunilla Efraimsson (КТН, Sweden), Henrik K. Rasmussen (DTU, Denmark), Arja Saarenheimo (VTT, Finland), Joakim Sundnes (Simula, Norway).

Постоянные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” С.М. Бауэр и А.Л. Смирнов вели заседания секций "Biomechanics" and "Fluid and Biomechanics" соответственно. Е.Б. Воронкова выступила с докладом на секции "Fluid and Biomechanics" а А.Л. Смирнов — на секции "Biomechanics".

Научный уровень докладов был очень высоким, атмосфера на семинаре — творческой и дружественной, чему способствовали комфортные условия для общения, равноправие участников, отсутствие барьеров для обмена мнениями, обсуждение актуальных задач и перспективы партнерства по итогам конференции.

Следующий, 28-й семинар прошел 22-23 октября 2015 г. в Таллине (Эстония).

*С.М. Бауэр и А.Л. Смирнов*

**Х ВСЕРОССИЙСКАЯ ШКОЛА–СЕМИНАР  
"МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
БИОМЕХАНИКА В СОВРЕМЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ"**

25–30 мая 2015 г. в поселке Дивноморское на базе Южно-федерального университета прошла юбилейная X Всероссийская школа-семинар "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете": [www.biomechanics.ru](http://www.biomechanics.ru). Организатором ежегодной школы-семинара являются Южный федеральный университет и Донской государственный университет, Южный научный центр РАН. Основными целями школы-семинара являются обсуждение современных направлений и тенденций научных исследований в области математического моделирования применительно к новым задачам механики и биомеханики. В частности, обсуждались результаты моделирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, проблемы вычислительной механики, идентификации параметров для материалов со сложными физико-механическими свойствами (пористость, разномодульность, микроструктура, пьезоэффект), задачи моделирования, функционирования и роста различных биологических тканей и систем. С приглашенными лекциями (60 мин) выступили Бауэр С.М. "Модели деформируемого тела в задачах биомеханики глаза" и ведущий научный сотрудник МГУ Цатурян А.К. "Континуально-кинетическая модель сердечной мышцы." В работе школы-семинара приняли участие ученые из Армении, Латвии, Германии. Среди Российских ученых можно отметить доклады Нигматулина Р.И., Манжирова А.В., Ватульяна А.О., Устинова Ю.А., Игумнова Л.А. Санкт-Петербургский университет представляли Бауэр С.М., Зимин Б.А., Судьенков Ю.А., Семенов Б.Н.

*С.М. Бауэр*

**XI ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ И  
ШКОЛА-СЕМИНАР ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ**

1–4 декабря 2014 года в Перми прошла XI Всероссийская конференция с международным участием и школа-семинар для молодых



ученых. Организатором конференции является министерство образования и науки Российской Федерации и Пермский национальный исследовательский политехнический университет. В конференции с пленарным докладом "Модели теории оболочек и пластин в задачах офтальмологии представленным в соавторстве с Воронковой Е.Б., выступила Бауэр С.М. Доклад Л.А. Венатовской, посвященный механической модели, оценивающей изменение напряженно-деформированного состояния глаза после операций Intralasek и Lasik, был отмечен как лучший доклад молодого ученого. Следующая XII Всероссийская конференция состоится на базе курорта Усть-Качка в Перми в июне 2016 года.

*С.М. Бауэр*

## ОБ АВТОРАХ

**Абрамян Андрей Карэнович** — доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории гидроупругости ИПМаш РАН. E-mail: abramian@math.ipme.ru

**Адамович Ирина Аркадьевна** — студентка 5 курса кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Научные интересы — механика тонкостенных конструкций.  
E-mail: adamovich.ira@gmail.com

**Артемова Мария Владиславовна** — студентка 4 курса кафедры Вычислительных методов механики деформируемого тела СПбГУ. Научные интересы: теория упругости.  
E-mail: amashav@gmail.com

**Бабин Александр Константинович** — студент магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — колебания стержней, теория оболочек. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр. E-mail: babin.85@bk.ru

**Бауэр Светлана Михайловна** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры гидроупругости СПбГУ. Область научных интересов — биомеханика и механика деформируемого твердого тела. E-mail: s\_bauer@mail.ru

**Бессонов Николай Михайлович** — доктор физико-математических наук, заведующий сектором вычислительной механики ИПМаш РАН. E-mail: bessonov@bess.ipme.ru

**Бестужева Алла Николаевна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики ПГУПС. Автор статей, посвященных задачам о волновых движениях жидкости в области переменной глубины, опубликованных в журналах “Оке-

аналогия”, “Прикладная математика и механика”, “Прикладная математика и техническая физика” и др. E-mail: bes\_alla@inbox.ru

**Воронкова Ева Боруховна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования энергетических систем факультета прикладной механики — процессов управления СПбГУ, автор статей по вопросам биомеханики и механики твердого тела. E-mail: e.voronkova@spbu.ru

**Забиякин Макар Владимирович** — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики. Область научных интересов — исследование колебаний оболочечных конструкций аналитическими и численными методами. Научный руководитель — проф. С.Б. Филиппов. E-mail: zabiyaikin.makar@gmail.com

**Зелинская Анна Владимировна** — студентка магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — механика твердого тела. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик. E-mail: anna\_zelinskaya@inbox.ru

**Кузнецов Сергей Романович** — аспирант кафедры диагностики функциональных систем факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ. Область интересов: математическое моделирование живых систем, теоретическая иммунология. Научный руководитель — проф. В.И. Шишкин. E-mail: abxy01@yandex.ru

**Маликов Евгений Русланович** — студент магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — робототехника. Научный руководитель — доц. В.Г. Быков. E-mail: yumv2@inbox.ru

**Миранцев Леонид Владимирович** — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории микромеханики смазочного действия ИПМаш РАН. E-mail: miran@microm.ipme.ru

**Морщинина Диана Алексеевна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Вычислительных методов механики деформируемого тела СПбГУ. Научные интересы: теория упругости, механика разрушения. E-mail: diana\_morshinina@mail.ru

**Павилайнен Галина Вольдемаровна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры гидроупругости СПбГУ. Научные интересы — нелинейная механика деформированного твердо-

го тела, в частности, теория пластичности материалов со сложными свойствами. E-mail: g\_v\_ravilaynen@mail.ru

**Рейнберг Наталья Андреевна** — студентка магистратуры кафедры теории упругости СПбГУ.

E-mail: reinberg.natalia@gmail.com

**Смирнов Андрей Леонидович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ, автор публикаций по вопросам механики тонкостенных конструкций. E-mail: a\_l\_smirnov@mail.ru

**Товстик Петр Евгеньевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики СПбГУ. Автор многочисленных публикаций по широкому кругу вопросов механики сплошной среды и теоретической механики. E-mail: peter.tovstik@mail.ru

**Филиппов Сергей Борисович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Научные интересы — механика тонкостенных конструкций, асимптотические методы. E-mail: s\_b\_filipov@mail.ru

#### УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА, ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ в 2011–2014 гг.

**Груничева Екатерина Викторовна** — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2011. Научный руководитель — проф. Г. И. Курбатова.

**Ермолаева Надежда Николаевна** — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2011. Научный руководитель — проф. Г. И. Курбатова.

**Тулкина Анна Николаевна** — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2011. Научный руководитель — доц. В. Я. Павилайнен.

**Яковчук Михаил Сергеевич** — канд. техн. наук, ВГТУ «Военмех», 2012. Научный руководитель — проф. В. Н. Емельянов.

**Гаврилов Дмитрий Николаевич** — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2013. Научный руководитель — проф. С. А. Зегжда.

## SUMMARIES

### *S. R. Kuznetsov. Mathematical model of the immune response in the case of systemic lupus erythematosus.*

A mathematical model of key mechanisms of the immune response is described. Original approach was introduced, considering the dependence of proliferation and differentiation processes on the number of divisions passed by T- and B-lymphocytes. Such approach gives a consolidated view of immune processes in cellular, molecular and genetic scales, described by simple partial differential equations and ordinal differential equations. The dynamics of Th1, Th2 and Th17 subpopulations and IFN $\gamma$ , IL-2, IL-4, IL-21 cytokines synthesis were accurately modelled. B cells antibodies isotype switching from IgM to a more effective IgG class was also modelled. The model was used to investigate a specific immunological problem relating to severe autoimmune disease pathogenesis. A number of simulations of systemic lupus erythematosus development were made, showing that Th17 immune response significantly increases the level of autoantibodies, comparing to Th2 response.

Keywords: systems immunology, autoimmunity, SLE, lymphocytes, interleukins, proliferation, differentiation, Th17, IgM, IgG.

#### REFERENCES

1. *Bocharov G.A., Marchuk G.I.* Applied problems of mathematical modelling in immunology // *Comput. Math. Math. Phys.* 2000. Vol. 40, N 12. P. 1905–1920. (in Russian).
2. *Kuznetsov S.R.* Mathematical model of activation, proliferation and differentiation of T- and B- lymphocytes in process of their interactions in lymph node describing switching of synthesis immunoglobulin isotypes IgM and IgG // *The XLIV Annual International Conference Control Processes and Stability (CPS'13)*, St. Petersburg, 1–4 April 2013. St. Petersburg: The publishing house of St. Petersburg State University, 2013. P. 339-344. (in Russian).
3. *Kuznetsov S.R., Lykosov V.M., Orekhov A.V., Shishkin V.I.* Model of proliferation and differentiation precesses in nonhomogenous population // *Proceedings of the 3th International Internet-Conference on mathematical and computer modelling in biology and chemistry (Kazan, September 25, 2014)*. Kazan: IP Sinyaev D.N., 2014. P. 95–103. (in Russian).

4. *Kuznetsov S.R., Shishkin V.I.* Mathematical modelling as a tool for theoretical research in immunology: advances and perspectives // Cytokines and inflammation. 2012. Vol. 11, N 2. P. 5–13. (in Russian).
5. *Kuznetsov S.R., Shishkin V.I.* A consolidated view of proliferation and differentiation processes of CD4+ T-lymphocytes: a mathematical model // Russian Journal of Immunology. 2013. Vol. 7, N 2-3. P. 176–177. (in Russian).
6. *Kuznetsov S.R., Shishkin V.I., Kudriavtseva G.V., Lykosov V.M.* Investigation of the dynamics of immune complex formation and elimination in systemic lupus erythematosus by mathematical modelling tools // Cytokines and inflammation. 2012. Vol. 13, N 1. P. 23–27. (in Russian).
7. *Kuznetsov S.R., Shishkin V.I., Lykosov V.M.* The effect of Th17 immune response on the antibodies formation dynamics in systemic lupus erythematosus (SLE): a computational modeling experience // Proceedings of the 5th International Conference on Mathematical Biology and Bioinformatics, Pushchino, Russia, 2014. Moscow: MAKS Press, 2014. P. 154–155. (in Russian).
8. *Marchuk G.I.* Mathematical Modeling in Immunology. Moscow: Nauka, 1991. 299 p. (in Russian).
9. *Molchanov A.M.* Kineticheskaja model' immuniteta (Kinetic model of the immunity). N 25. Preprint IAM, Academy of Sciences of the USSR, 1970. 22 p. (in Russian).
10. *Riznichenko G.Yu., Rubin A.B.* Biofizicheskaja dinamika produkcionnyh processov (Biophysical dynamics of production processes). Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science, 2004. 464 p. (in Russian).
11. *Smirnova O.A., Stepanova N.V.* Mathematical model of oscillations under infection's immunity // Proceedings of the Second All-Union Symposium on Oscillatory Processes in Biological and Chemical Systems, Pushchino on Oka, 1970. Pushchino: SCBR Academy of Sciences of the USSR, 1971. P. 247–251. (in Russian).
12. *Khaitov R.M., Yarilin A.A., Pinegin B.V.* Immunologia. Atlas (Atlas of Immunology). Moscow: Geotar-Media, 2011. 624 p. (in Russian).
13. *Anderson P.* Post-transcriptional control of cytokine production // Nat. Immunol. 2008. Vol. 9, N 4. P. 353–359.
14. *Banks H.T., Charles F., Jauffret M.D., Sutton K.L., Thompson W.C.* Label structured cell proliferation models // Appl. Math. Lett. 2010. Vol. 23, N 12. P. 1412–1415.
15. *Banks H.T., Sutton K.L., Thompson W.C., Bocharov G., Doumic M., Schenkel T., Argilaguet J., Giest S., Peligero C., Meyerhans A.* A new model for the estimation of cell proliferation dynamics using CFSE data // J. Immunol. Methods. 2011. Vol. 373, N 1-2. P. 143–160.
16. *Bell G.I.* Mathematical model of clonal selection and antibody production // J. Theor. Biol. 1970. Vol. 29, N 2. P. 191–232.

17. *Bell G.I., Anderson E.C.* Cell growth and division. I. A mathematical model with applications to cell volume distributions in mammalian suspension cultures // *Biophys. J.* 1967. Vol. 7, N 4. P. 329–351.
18. *Busse D., De la Rosa M., Hobiger K., Thurley K., Flossdorf M., Scheffold A., Hofer T.* Competing feedback loops shape IL-2 signaling between helper and regulatory T lymphocytes in cellular microenvironments // *Proc. Natl. Acad. Sci. U S A.* 2010. Vol. 107, N 7. P. 3058–3063.
19. *Crispin J.C., Stamatis-Lioassis N.C., Kis K. Toth, Lieberman L.A., Kyttaris V.C., Juang Y.T., Tsokos G.C.* Pathogenesis of human systemic lupus erythematosus: recent advances // *Trends. Mol. Med.* 2010. Vol. 16, N 2. P. 47–57.
20. *Doreau A., Belot A., Bastid J., Riche B., Biemont M.T., Ranchin B., Fabien N., Cochat P., Noble C.P., Trolliet P., Durieu I., Tebib J., Kassai B., Ansieau S., Puisieux A., Eliaou J.F., Berard N.B.* Interleukin 17 acts in synergy with B cell-activating factor to influence B cell biology and the pathophysiology of systemic lupus erythematosus // *Nat. Immunol.* 2009. Vol. 10, N 7. P. 778–785.
21. *Feinerman O., Jentsch G., Tkach K.E., Coward J.W., Hathorn M.M., Sneddon M.W., Emonet T., Smith K.A., Bonnet G.A.* Single-cell quantification of IL-2 response by effector and regulatory T cells reveals critical plasticity in immune response // *Mol. Syst. Biol.* 2010. Vol. 6. P. 437.
22. *Grogan J.L., Mohrs M., Harmon B., Lacy D.A., Sedat J.W., Locksley R.M.* Early transcription and silencing of cytokine genes underlie polarization of T helper cell subsets // *Immunity.* 2001. Vol. 14, N 3. P. 205–215.
23. *Guerra S.G., Vyse1 T.J., Cunninghame-Graham D.S.* The genetics of lupus: a functional perspective // *Arthritis Research Therapy.* 2012. Vol. 14, N 3.
24. *Ham H.J., De Boer R.J.* Cell division curtails helper phenotype plasticity and expedites helper T-cell differentiation // *Immunol. Cell. Biol.* 2012. Vol. 90, N 9. P. 860–868.
25. *Kum W.W., Cameron S.B., Hung R.W., Kalyan S., Chow A.W.* Temporal sequence and kinetics of proinflammatory and anti-inflammatory cytokine secretion induced by toxic shock syndrome toxin 1 in human peripheral blood mononuclear cells // *Infect. Immun.* 2001. Vol. 69, N 12. P. 7544–7549.
26. *Kuznetsov S.R., Shishkin V.I.* Analysis of immune complex (IC) formation dynamics in systemic lupus erythematosus (SLE) require reconsidering the role of blood clearance by the erythrocyte complement receptor 1 (CR1) // 9th International Congresses on Autoimmunity, Nice, France, March 26–30, 2014. Abstracts.
27. *Lee H.Y., Perelson A.S.* Modeling T cell proliferation and death in vitro based on labeling data: generalizations of the Smith-Martin cell cycle model // *Bull. Math. Biol.* 2008. Vol. 70, N 1. P. 21–44.

28. *Luzyanina T., Roose D., Schenkel T., Sester M., Ehl S., Meyerhans A., Bocharov G.* Numerical modelling of label-structured cell population growth using CFSE distribution data // *Theor. Biol. Med. Model.* 2007. Vol. 4. P. 26.
29. *Murphy K.M., Stockinger B.* Effector T cell plasticity: flexibility in the face of changing circumstances // *Nat. Immunol.* 2010. Vol. 11, N 8. P. 674–680.
30. *Severins M., Borghans J.A.M., De Boer R.J.* T-Cell Vaccination / Ed. by J. Zhang, R.R. Cohen. New York: Nova Science Publishers, 2008. P. 139–158.
31. *Sinko J.W., Streifer W.* A new model for age-size structure of a population // *Ecology.* 1967. Vol. 48, N 6. P. 910–918.
32. *Wigginton J.E., Kirschner D.* A model to predict cell-mediated immune regulatory mechanisms during human infection with Mycobacterium tuberculosis // *J. Immunol.* 2001. Vol. 166, N 3. P. 1951–1967.
33. *Yates A., Callard R., Stark J.* Combining cytokine signalling with T-bet and GATA-3 regulation in Th1 and Th2 differentiation: a model for cellular decision-making // *J. Theor. Biol.* 2004. Vol. 231, N 2. P. 181–196.

*A.V. Zelinskaya, P.E. Tovstik* **Buckling under axial compression of a transversely isotropic cylindrical shell with the weakly supported curvilinear edge.**

The critical load and the buckling modes of a transversely isotropic circular cylindrical shell under axial compression are found. It is assumed that the shell curvilinear edge is free or weakly supported. In these cases the buckling mode is localized near this edge and the critical load is lower than in the case of the clamped edges. Previously, this problem for isotropic shell is solved based on the 2D Kirchhoff - Love (KL) model. Here it is assumed that the transversely shear modulus is small, hence, the solution is based on the Timoshenko - Reissner (TR) model.

The non-dimensional critical load depends on two basic non-dimensional parameters - the wave parameter  $q$  and the shear parameter  $g$ . If the buckling mode occupies the entire shell surface then this mode is axisymmetric buckling ( $q = 0$ ). If  $g = 0$ , then according to the KL model we get the classical value of critical load. With the increase of  $g$  (or with the decrease of the shear modulus), the critical load decreases up to the point  $g$  approximately 1. At the point  $g$  greater than 1 or equals it, the material loses its stability.

Keywords: shell buckling, transversely isotropic cylindrical shell.



## REFERENCES

1. *Lilly W.E.* The design of structures // Engineering, 1908, V. 65, P. 37–40
2. *Mallock A.* Note on the instability of tubes subjected to end pressure and on the folds in a flexible material // Proc. Roy. Soc. 1908, V. 81, № A549 P. 388–393.
3. *Lorenz R.* Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder // Phys. Z. 1911, V. 12, Nr. 7, S. 241–260.
4. *Timoshenko S. P.* "To the Strain Problem and Stability of Cylindrical Shell", Vestnik Obshch. Tekhnol. 11, 267–287 (1914).
5. *Grigolyuk E. I., Kabanov V. V.* Stability of Shells, Nauka, Moscow, 1978, p. 360. (in Russian).
6. *Bushnell D.* Buckling of shells — pitfall for designers // AIAA Journal. 1981, V. 19, №9, pp. 1183–1226.
7. *Ishlinskiĭ A. Yu.* On a Limit Transition in the Theory of Stability of Elastic Rectilinear Plates, Soviet Math. Dokl., 1954, Vol. 95(3), pp. 477–479.
8. *Nachbar W., Hoff N.J.* The buckling of free edge of axially compressed circular cylindrical shell // Quart. Appl. Math. 1962, V. 2, № 3, P. 160–172.
9. *Kil'chevskii N.A., Nikulinskaya S.N.* "An Axisymmetric Bulking Mode of a Circular Cylindrical Shell", Prikl. Mekh. 1965, Vol. 1(11), pp. 1–6.
10. *Almorth B.O.* Influence of the edge conditions on stability of axially compressed cylindrical shells, AIAA Journal. 1966, Vol. 4(1), pp. 134–140.
11. *Tovstik P. E.* On forms of local buckling of thin elastic shells, Trans CSME. 1991, Vol. 15(3), pp. 199–211.
12. *Tovstik P.E., Smirnov A.L.* Asymptotic methods in the buckling theory of elastic Shells. World Scientific Publishing Co Ltd., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001. 347 p.
13. *Tovstik P.E.* On the Asymptotic Nature of Approximate Models of Beams, Plates, and Shells // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2007, Vol. 40 (3), pp. 188–192.
14. *Tovstik P. E., Tovstik T.P.* On the 2D models of plates and shells including the transversal shear, ZAMM. 2007, Vol. 87(2).
15. *Tovstik P.E.* Stability of a Transversally Isotropic Cylindrical Shell under Axial Compression, Mech. Solids. 2009, Vol. 44(4), pp. 552–564.
16. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity. Amsterdam etc.: North-Holland, 1988.
17. *Ershova Z.G., Tovstik P.E.* The cylindrical panel with a weakly supported rectilinear edge made of a transversely isotropic material, Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1. 2011, Issue 1, pp. 45–56.
18. *Agalovian L.A.* Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Nauka, Moscow, 1997, pp. 414 (in Russian).

19. *Ershova Z.G.* The cylindrical panel with a weakly supported rectilinear edge, Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 1993. Issue 3. pp. 78–81 (in Russian).

***G.V. Pavilainen* Mathematical modeling of elastic-plastic bending of a beam made of material with the SD-effect.**

A simply supported plastically anisotropic beam under uniform bending moment is considered. The material of the beam is assumed to be with the strength difference effect (SD-effect). The problem is complicated by asymmetry in developing of plasticity in the compressive and tensile domains. It necessitates introducing three unknown functions to define the size of the plastic zones and displacement of the neutral axis of the beam. For analytical solution of the problem the standard Bernoulli–Euler hypotheses for beams and the model of perfect plasticity are used. The analytical solution is compared with the numerical solution obtained with FEM. As an example the beam made of steel A40X is examined. It is revealed that solutions obtained with different method well agree. The approximate solution method may also be used for analysis of bending under other types of loads.

Keywords: elasto-plastic bending, SD beams.

**REFERENCES**

1. *Donnell L.H.* Beams, plates and shells. McGraw-Hill, New-York, 1976, 774 p.
2. *Ohashi Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behaviour of metals. Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University. 1982. Vol. 34. N1. pp. 1-76.
3. *Rybakina O.G.* Anisotropic with SD effect materials yield criterium, Vestnik Leningad.Univ. Elastic and Plastic Chellendge, 1982, N14, pp. 132–142.
4. *Kachanov L.M.* Fundamentals of the Theory of Plasticity. Courier Corporation, 2013.
5. *Sokolovsky V.V.* "Plasticity Theory," Vysshaya Shkola, Moscow, 1969. 1969. 607 p. (in Russian).
6. *Backofen W.A.* Deformation processing. Addison-Wesley Pub. Co., Boston, 1972, 326 p.
7. *Treshchev A.A.* Anisotropic plates and shells of different-strengths materials. Tula State Univ., 2007 (in Russian).

8. *Morozov E.M., Parton V.Z.* Elastic-plastic Fracture Mechanics. Mir Publishers, Moscow, 1978, 427 p.
9. *Pavilaynen G.V.* Elasto-Palstic Deformations of Ribbed Plates. CRM Proceedings and Lecture Notes. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1993, pp. 227–233.
10. *Pavilaynen G.V.* Elastic-plastic deformations of a beam with the SD-effect. AIP Conf. Proc. 1648, 300007 (2015); Proceedings of the International conference on numerical analysis and applied mathematics 2014 (ICNAAM-2014).

*M.V.Artemova, D.A.Morshchinina* **Mathematical models of fracture fixation.**

Fractures of support-motor apparatus are widespread injuries. People fairly often need surgery for fixation of bone fragments. In this work, mathematical models of osteosynthesis of fractures of the femoral neck and long bones are considered. In the first case, the fixation was done by special screws. Secondly, elastic fixing is used. It is proposed to carry out the analysis of stress-strain state of structure on the basis of the theory of beam bending.

Keywords: beam bending, fracture fixation, osteosynthesis.

**REFERENCES**

1. *Sergeev S.V., Zagorodniy N.V.* Modern methods of bone fixation in acute injuries of the musculoskeletal system. Moscow: RUDN, 2008. (in Russian)
2. *Ankin L.N., Ankin N.L.* Practical traumatology (European standards for diagnosis and treatment). Moscow: Kniga-plyus; 2002: 479 (in Russian).
3. *Revenko T.A., Gurjev V.N., Shesternya N.A.* Atlas operations for injuries of the musculoskeletal system. Moscow: Medicine, 1979. (in Russian)
4. *Papkovich P. F.* Works in structural mechanics of ships. Leningrad: Sudpromgiz, 1962. Vol.1. (in Russian)
5. *Korotkin Ya.L, Lokshin A.Z., Sivers N.L.* Bending and stability of bars and bar systems, Mashgiz, Moscow: Mashgiz, 1953. (in Russian)
6. *Lavrentiev, M. A., Shabat, B. V.* Methods of Complex Function Theory. Nauka, Moscow, 1987, (in Russian)
7. *Belyaev N.M.* Strength of Materials. Moscow: MIR Publishers, 1979
8. *Dal' Yu.M.* Vestnik of Saint-Petersburg University, series 10, 2013, No.4, pp. 3 - 9. (in Russian)

9. *Yanson H.A.* Biomechanics of the lower limb human. Riga, 1975. Riga: Zinatne, 1975. (in Russian)
10. *Dubrovsky V.I., Fedorov V.N.* Biomechanics: A textbook for secondary and higher educational institutions - M.: VLADOS PRESS, 2003. - 672 p. (in Russian)

***A.K. Babin* Analysis of vibrations of stretched beams by analytical and asymptotic methods.**

Vibrations of stretched beams with clamped ends are analyzed. The numerical solution, asymptotic solution (as the first and second approximations of the Vishik and Lyusternik method) and solution with the help of dynamic edge effect method for wavenumbers 1 and 5 are found. The obtained results are used to examine the applicability of the approximations of the Vishik and Lyusternik method and dynamic edge effect method.

If the vibrations of non-absolutely flexible string are considered then the equation of vibrations is singularly perturbed (since it contains small parameter  $\mu$  at the higher derivative). For that case the Vishik and Lyusternik method gives better approximation for frequencies than the dynamic edge effect method, but for higher wavenumbers the domain for parameter  $\mu$ , where the first method provides better result, becomes smaller.

Keywords: vibrations of stretched beam, the Vishik and Lyusternik method, the dynamic edge effect method.

**REFERENCES**

1. *Biderman V.L.* Theory of mechanical vibrations. 1980. Vyshaya Shkola, Moskow, p. 408.
2. *Bauer S.M., Filippov S.B., Smirnov A.L., Tovstik P.E, Vaillancourt R.* Asymptotic Methods in Mechanics of Solids, Springer, 2015.
3. *Bolotin V.V.* An asymptotic method for the study of the problem of eigenvalues of rectangular regions. Problems of Continuum Mech., SIAM, Philadelphia, 1961, pp. 56–58.
4. *Bolotin V.V.* Dynamic edge effect in the. elastic vibrations of plates. Inshen. Sbornik., vol. 31, 1961, pp. 3–14. (In Russian)
5. *Bolotin V.V.* The edge effect in the oscillations of elastic shells. Appl. Math. Mech. 1960. Vol. 24, pp. 1257–1272.

6. *Kudryavtsev E.P.* On the effect of shifts and inertia of rotation on bending vibrations of elastic beams. *Izvestiya AS USSR, Mechanics and engineering*, №5, 1960.
7. *Obraztsov I.F., Nerubailo B.V., Andrianov I.V.* *Asymptotic Methods in the Structural Mechanics of Thin-Walled Structures*. Mashinostroenie, Moscow, 1991. (in Russian).

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>С.Р. Кузнецов</i> <b>Математическая модель иммунного ответа .</b>	3
1. Введение . . . . .	3
2. Общая схема иммунного ответа . . . . .	5
3. Динамика антигена . . . . .	7
4. Динамика наивных В и Th лимфоцитов и АПК . . . . .	8
5. Описание пролиферации и дифференцировки . . . . .	10
6. Синтез цитокинов в лимфоузле . . . . .	18
7. Завершение дифференцировки лимфоцитов . . . . .	21
8. Начальные условия, параметризация и численные методы . . . . .	24
9. Результаты . . . . .	24
<i>А.В. Зелинская и П.Е. Товстик</i> <b>Устойчивость при осевом сжатии трансверсально изотропной цилиндрической оболочки со слабо закрепленным криволинейным краем . . . . .</b>	29
1. Введение . . . . .	29
2. Уравнения равновесия . . . . .	31
3. Преобразование системы уравнений . . . . .	33
4. Внутренняя потеря устойчивости . . . . .	34
5. Локализованные формы потери устойчивости в окрестности края по модели КЛ . . . . .	36
6. Локализованные формы по модели ТР . . . . .	39
7. Предельный переход от модели ТР к модели КЛ . . . . .	44
8. Предельный переход при $q \rightarrow 0$ . . . . .	44
9. Заключение . . . . .	45
<i>Г.В. Павилайнен</i> <b>Математическое моделирование упруго-пластического изгиба балки, материал которой обладает эффектом SD . . . . .</b>	48
1. Введение . . . . .	48
2. Постановка задачи . . . . .	50
3. Основные соотношения при изгибе SD-балки . . . . .	51
4. Дифференциальное уравнение изгиба SD-балки . . . . .	54
5. Численный пример расчета упруго-пластического изгиба . . . . .	56
6. Заключение . . . . .	60
<i>Артемова М.В., Морцигина Д.А.</i> <b>Математические модели фиксации переломов . . . . .</b>	62

1. Введение .....	62
2. Определение напряженно-деформированного состояния винта, применяемого при фиксации переломов шейки бедренной кости .....	63
3. Определение геометрических параметров винтов, используемых при переломах шейки бедра, в зависимости от нагрузки .....	66
4. Анализ деформированного состояния устройства при фиксации переломов длинных трубчатых костей .....	66
5. Заключение .....	69
<b>А.К. Бабин Анализ колебаний жёстко закреплённого растянутого стержня аналитическим и асимптотическими методами .....</b>	<b>73</b>
1. Постановка задачи .....	73
2. Численное решение .....	74
3. Метод динамического краевого эффекта .....	76
4. Решение по методу Вишика и Люстерника .....	80
5. Сравнение результатов при числе волн $n=1$ и $n=5$ .....	86
6. Заключение .....	87
<b>Резюме докладов, не вошедших в сборник .....</b>	<b>89</b>
<b>Хроника .....</b>	<b>93</b>
<b>Об авторах .....</b>	<b>96</b>
<b>Summaries .....</b>	<b>99</b>

## РЕФЕРАТЫ

УДК 51-76:517.95

*Кузнецов С.Р.* Математическая модель иммунного ответа на примере системной красной волчанки // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2014–2015 гг. С. 3–28.

Работа посвящена построению математической модели, подробно описывающей центральные процессы формирования иммунного ответа, протекающие в ходе пролиферации и дифференцировки Th и В-лимфоцитов в лимфоузле. Модель включает описание гуморального звена иммунного ответа с учетом переключения изотипов иммуноглобулинов с IgM на IgG, а также дифференцировку Th лимфоцитов в три фенотипа Th1, Th2 и Th17. Особенностью модели является использование уравнений в частных производных для описания процессов пролиферации и дифференцировки лимфоцитов с сохранением памяти о количестве делений, пройденных каждой клеткой, что позволяет строить более точные модели иммунного ответа, учитывающие генетические особенности динамики процессов пролиферации и дифференцировки, а также синтеза сигнальных молекул — цитокинов. С помощью модели было проведено исследование влияния Th17 иммунного ответа на патогенез тяжелого аутоиммунного заболевания — системной красной волчанки. Было установлено, что снижение апоптоза В-лимфоцитов, вызванное цитокином IL-17, синтезируемым Th17 лимфоцитами, может приводить к увеличению концентрации плазмочитов и аутоантител в 6 раз.

Ключевые слова: математическое моделирование, пролиферация, дифференцировка, цитокины, интерлейкины, Th17, антитела.

Библиогр. 33 назв. Ил. 7. Табл. 2.

УДК 539.3531(075)

*А.В.Зелинская и П.Е.Товстик* Устойчивость при осевом сжатии трансверсально изотропной цилиндрической оболочки со слабо закрепленным криволинейным краем //



Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2014–2015 гг. С. 5–47.

В работе найдены критическая нагрузка и форма потери устойчивости круговой трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Предполагается, что криволинейный край оболочки слабо закреплен или свободен. При этом возможно появление формы потери устойчивости, локализованной вблизи этого края, с одновременным снижением критической нагрузки. Ранее эта задача была решена исходя из двухмерной модели Кирхгофа-Лява (КЛ). Здесь предполагается, что жесткость на поперечный сдвиг мала, и для решения используется модель Тимошенко-Рейсснера (ТР).

Безразмерная критическая нагрузка зависит от двух основных безразмерных параметров — параметра волнообразования в окружном направлении  $q$  и параметра поперечного сдвига  $g$ . При волнообразовании внутри оболочки имеет место осесимметричная потеря устойчивости ( $q = 0$ ). При  $g = 0$  имеем классическое значение нагрузки, полученное исходя из модели КЛ. С ростом  $g$  (или с уменьшением жесткости на поперечный сдвиг) нагрузка убывает по линейному закону вплоть до значения  $g = 1$ . При  $g$  большем или равном 1 материал теряет устойчивость.

Библиогр. 19 назв. Ил. 5.

*Ключевые слова:* устойчивость оболочек, трансверсально изотропная цилиндрическая оболочка

УДК 539.3:519.63

*Г.В. Павилайнен* Математическое моделирование упруго-пластического изгиба балки, материал которой обладает эффектом SD // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2014–2015 гг. С. 101–108.

Рассматривается задача изгиба постоянным моментом свободно опертой горизонтальной балки в упруго-пластической стадии деформирования. Материал балки предполагается обладающим разнотвердым эффектом (эффектом SD). В рамках классической теории идеальной пластичности и гипотез Кирхгофа-Лява задачу удастся решить аналитически и сравнить результаты решения с численным решением по МКЭ. Численный пример расчета для ста-

ли А40Х демонстрирует хорошее совпадение решений, полученных разными способами. Предложенный метод решения может быть использован для анализа изгиба при других нагрузках.

Библиогр. 10 назв. Табл. 5. Ил. 6.

*Ключевые слова:* Упруго пластический изгиб, SD-балки.

УДК 539.3

*Артемова М.В., Морщанина Д.А. Математические модели фиксации переломов* // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2014–2015 гг. С. 109–121.

Переломы костей опорно-двигательного аппарата являются распространенным повреждением. Довольно часто требуется оперативное вмешательство для фиксации отломков. В данной работе рассматриваются математические модели остеосинтеза переломов шейки бедренной кости и длинных трубчатых костей. В первом случае фиксация осуществляется посредством специальных винтов. Во втором — с помощью упругой вставки. Анализ напряженно-деформированного состояния конструкций проведен на основе теории изгиба балок.

Библиогр. 10 назв. Ил. 8.

*Ключевые слова:* изгиб балок, остеосинтез переломов

УДК 539.3

*А.К. Бабин Анализ колебаний жёстко закреплённого растянутого стержня аналитическим и асимптотическими методами.* // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2014–2015 гг. С. 90–100.

Рассматривается задача о колебании растянутого жестко заделанного стержня. Получены точное численное решение, численные решения по первому приближению метода Вишика и Люстерника и по методу динамического краевого эффекта при числе волн 1 и 5. На основе полученных результатов проведена оценка областей применимости первого приближения метода Вишика и Люстерника и метода динамического краевого эффекта. Для тех областей, где указанные методы дают решения максимально далекие от точного, найдены относительные погрешности приближенных решений.

Библиогр. 7 назв. Табл. 2. Ил. 2.

*Ключевые слова:* колебания балки, метод динамического краевого эффекта, метод Вишика и Люстерика.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

**2014–2015 гг.**

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*  
Корректор *Н. В. Ермолаева*  
Компьютерная верстка *А. М. Вейцторт*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

---

Подписано в печать . . . 2014. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл.-печ. л. . . Тираж 123 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21.

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22.

E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21.

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76.

E-mail: post@unipress.ru

---

Типография Издательства СПбГУ.  
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

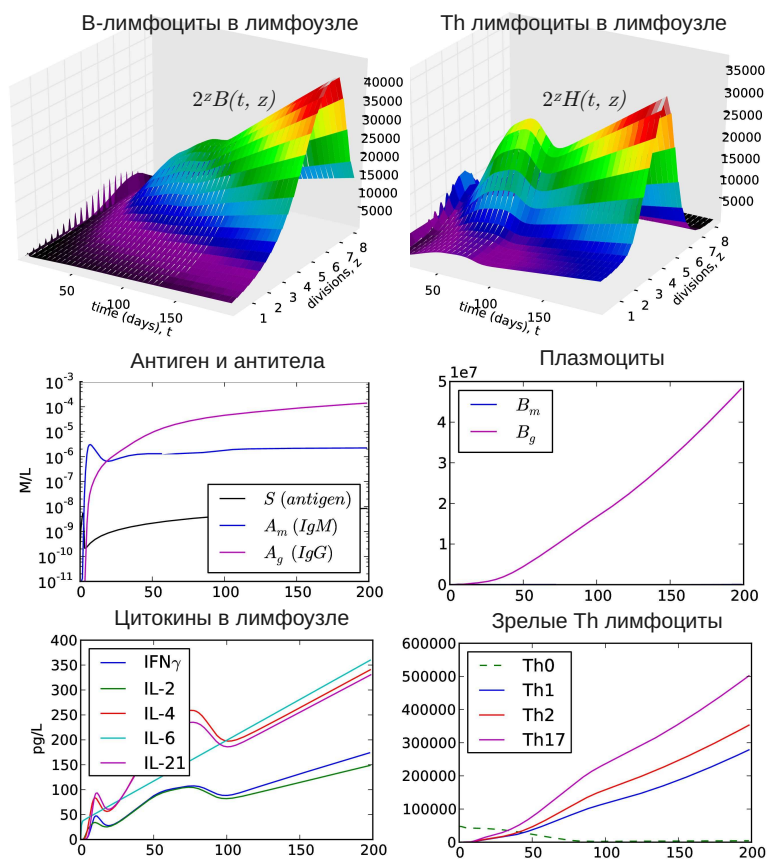


Рис. 1. Моделирование развития системной красной волчанки в течение 200 дней в случае Th17 иммунного ответа.

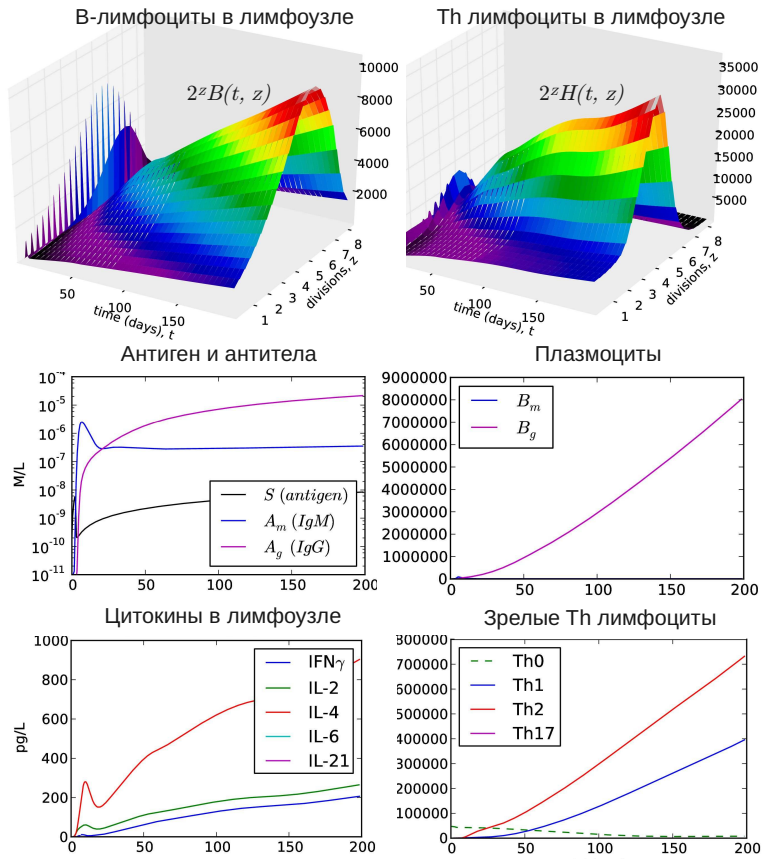


Рис. 2. Моделирование развития системной красной волчанки в течении 200 дней в случае Th2 иммунного ответа.

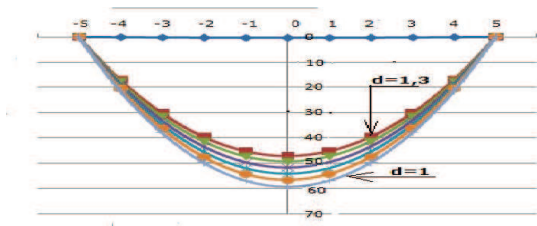


Рис. 3. Прогиб балки в зависимости от эффекта SD (к статье Г.В. Павилайнен)

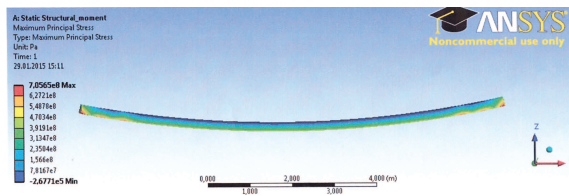


Рис. 4. Распределение напряжений в SD-балке (к статье Г.В. Павилайнен)

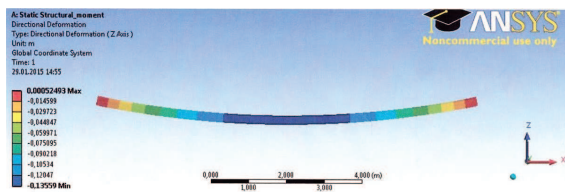


Рис. 4. Прогиб SD-балки (к статье Г.В. Павилайнен)

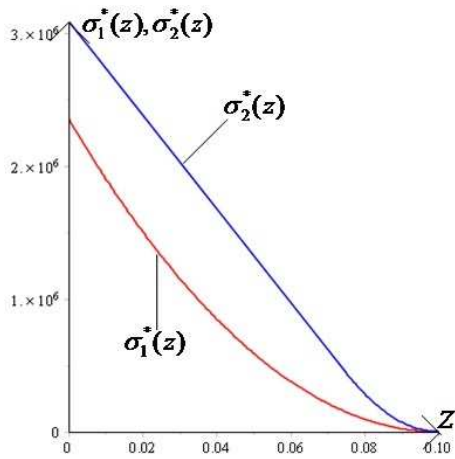
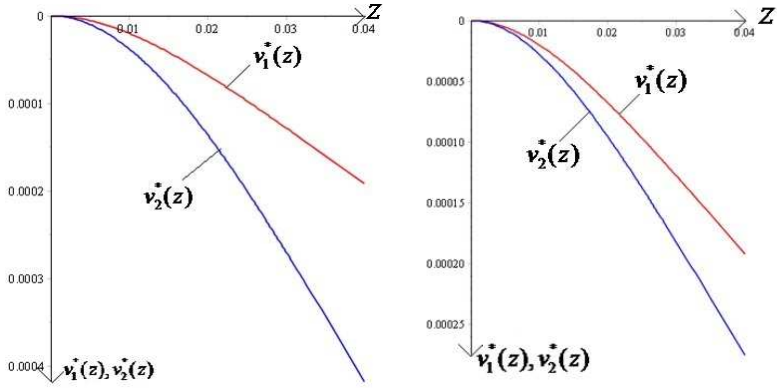


Рис. 6. Графики функций  $v_1^*(z)$ ,  $v_2^*(z)$ ,  $\sigma_1^*(z)$ ,  $\sigma_2^*(z)$  от  $z$  при  $b = \frac{4}{3}$  (к статье М. В. Артемовой и Д. А. Морщиной)