

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2011–2012 гг.



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012

ББК 22.25
Т78

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук *Е. Б. Воронкова* (отв. секретарь) (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
проф. *Р. Вайанкур* (Университет Оттавы, Канада),
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),
д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Т78

**Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2011–2012 гг. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. — 116 с.
ISSN 2218-7421**

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ISSN 2218-7421

ББК 22.25

© С.-Петербургский
государственный
университет, 2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНТУРОВ ТЕКУЧЕСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

И.В. ЕФИМОВ

Статья посвящена актуальным вопросам обработки экспериментальных исследований. Цель — построение различного вида контуров текучести конструкционных материалов, имеющих сложную реологию. Задача сводится к нахождению минимума целевой функции коэффициентов контура и является классической задачей регрессионного анализа.

Рассматриваются три метода построения контура текучести по экспериментальным данным: ручной подбор, метод покоординатного спуска, метод наискорейшего спуска. На их основе предложена методика, позволяющая с наименьшей погрешностью достичь результата. Разработана программа, реализующая данную методику.

1. ВВЕДЕНИЕ

С каждым годом человечество ставит перед собой все более сложные задачи при проектировании и строительстве. Обычные материалы и сплавы порой не могут справиться с возложенными на них функциями. На замену им приходят новые материалы, полученные различными методами и прошедшие специфические обработки. Изучение поведения и сопротивляемости таких материалов в конструкциях затрудняется различными видами анизотропии: эффект разносопротивляемости (SD), ортотропия, области с внутренними напряжениями.

Особый интерес представляет выявление критериев текучести материалов, поскольку они позволяют судить о том, какие нагрузки того или иного рода выдерживает материал, прежде чем начать необратимые деформации [1].

Многие прикладные задачи механики деформируемого твердого тела, так или иначе, сводятся к задачам двухосного напряженного состояния, когда напряжения вдоль одной из осей либо отсутствуют, либо пренебрежимо малы. Например, изгиб различных

Доклад на семинаре 19 октября 2010 г.

© И.В. Ефимов, 2012

пластин под равномерной нагрузкой, испытания тонкостенных оболочек внешним или внутренним давлением. В этих случаях поверхность, задаваемая критерием текучести, сводится к контуру текучести в плоскости. В настоящее время предложено множество различных видов уравнений для описания контуров текучести различных материалов. В современной практике возникает необходимость не только выявления вида этих уравнений, но и определения конкретных значений их коэффициентов по различным экспериментальным данным. В частности, в качестве экспериментальных данных могут быть использованы пределы текучести материала для различных видов нагрузок. Однако для большинства существующих критериев текучести не существует способа определения коэффициентов по таким данным.

Целью данной работы является разработка общего метода определения коэффициентов для различных моделей контуров текучести по данным пределам текучести материала, полученным из эксперимента.

2. ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Более ста лет назад вопрос начала пластической деформации был изучен Треска и опубликован в работе, которая ознаменовала начало научных исследований пластичности. Треска пришёл к простому выводу: пластическое течение начинается, когда наибольшее касательное напряжение достигает критической величины τ_Y [2] (рис. 1, слева). Согласно этому условию, для начала пластической деформации необходимо выполнение равенства

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_Y. \quad (1)$$

В 1948 г. Хиллом было предложено условие текучести для трансверсально-изотропных материалов, которое в случае плоского напряжённого состояния принимает вид

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - A\sigma_1\sigma_2 = B, \quad (2)$$

где A и B — параметры, определяемые свойствами конкретного материала [2]. Это равенство определяет контур Мизеса с той раз-

нищей, что он может “вытягиваться” вдоль прямой, в зависимости от параметров A и B (рис. 1, справа).

Дальнейшим развитием является теория О.Г. Рыбакиной [3], которая предложила критерий текучести вида

$$\sqrt{F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2} + \frac{\alpha_1\sigma_1}{3} + \frac{\alpha_2\sigma_2}{3} + \frac{\alpha_3\sigma_3}{3} = 1. \quad (3)$$

В случае плоского напряжённого состояния он в преобразованном виде представляет следующее равенство:

$$a_{11}\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{22}\sigma_2^2 + a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{33} = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= G + H - \frac{\alpha_1^2}{9}, & a_{22} &= F + H - \frac{\alpha_2^2}{9}, \\ a_{12} &= 2\frac{\alpha_1\alpha_2}{9} - 2H, & a_{13} &= 2\frac{\alpha_1}{3}, \\ a_{23} &= 2\frac{\alpha_2}{3}, & a_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношение (4) определяет кривую второго порядка, геометрической интерпретацией которой, с учётом физического смысла, является произвольный действительный эллипс, содержащий внутри себя начало координат (рис. 2, слева).

Последний критерий текучести подходит для описания свойств текучести ортотропных материалов с эффектом разнсопротивляемости, имеющих ненулевые начальные напряжения.

В ряде работ предлагается определять критерий текучести материала в зависимости от функции вида напряженного состояния. Например, в работах А.А. Трещева [7] предлагается новое условие пластичности в следующем виде:

$$F(\sigma_{ij}) = \tau f(\xi) = k_\tau, \quad (6)$$

где $f(\xi)$ — функция вида напряженного состояния, $k_\tau = \sqrt{2/3}\tau_s$ (τ_s — предел текучести при чистом сдвиге). Параметр ξ автор условия (6) предлагает определять следующим образом: $\xi = \sigma/S_0$, где

$S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, σ — среднее напряжение, или нормальное октаэдрическое, τ — касательное октаэдрическое напряжение.

А.А. Трещевым рассматривается несколько аппроксимаций функций вида напряженного состояния:

1. линейная функция: $f(\xi) = 1 + A_1\xi$
2. кусочно-линейная функция: $f(\xi) = 1 + (A_1 + A_2 \text{sign}\xi)\xi$
3. экспоненциальная функция: $f(\xi) = e^{A_1\xi}$
4. кусочно-экспоненциальная функция: $f(\xi) = e^{(A_1 + A_2 \text{sign}\xi)\xi}$

График контуров текучести в этом случае принимает вид, изображенный справа на рис. 2.

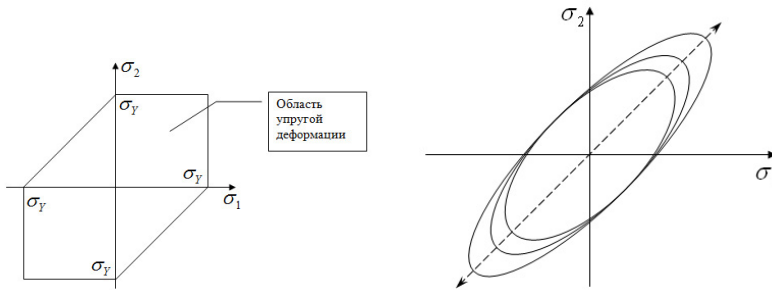


Рис. 1. Критерий Треска и критерий Хилла.

На этом список критериев и контуров не заканчивается. Так же наиболее известными являются поверхности текучести Мора–Кулона, Друкера–Прагера, Бреселя–Пистера и других.

В общем случае границей текучести является поверхность в пространстве напряжений, отделяющая область пластичности от области упругой деформации. В работе рассматривается случай плоского напряжённого состояния, поэтому в главных осях поверхность сводится к контуру текучести, заданному следующим уравнением:

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = 0. \quad (7)$$

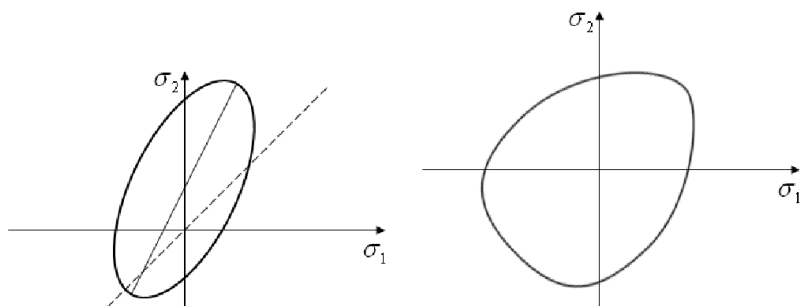


Рис. 2. Критерий О.Г.Рыбакиной и критерий А.А. Трещева.

Функция Φ также зависит от нескольких коэффициентов k_1, \dots, k_M , где их количество M определяется выбором того или иного критерия:

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, k_1, \dots, k_M) = 0. \quad (8)$$

Пусть известен вид функции Φ , а также заданы результаты измерений — набор точек на плоскости напряжений, каждая из которых соответствует пределу текучести в направлении её радиус-вектора. Задача заключается в проведении контура текучести, наиболее близкого к полученным точкам, после чего можно будет судить о пределе текучести материала при нагрузках во всех направлениях.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Задача построения кривой определённого вида, наиболее близкой к некоторому фиксированному набору точек, является задачей регрессионного анализа и решается путём минимизации некоторой целевой функции E . В данном случае целевая функция задается следующим равенством:

$$E = \sum_{i=1}^N l_i^2, \quad (9)$$

где l_i — расстояние от точки, полученной из i -го эксперимента, до

контура пластичности. Таким образом, целевая функция E , подлежащая минимизации, при фиксированном наборе точек является функцией M коэффициентов контура (4) (рис. 3).

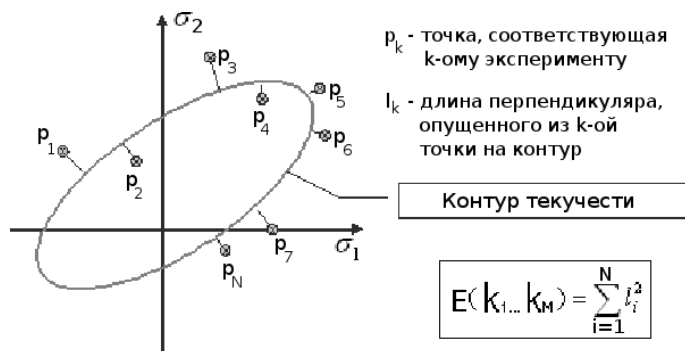


Рис. 3. Определение целевой функции.

Задача заключается в нахождении таких коэффициентов k_1, \dots, k_M , при которых целевая функция E , определённая равенством (9), будет минимальна.

4. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

В общем случае, когда вид контура текучести заранее неизвестен, для нахождения расстояния до него от точек на плоскости целесообразно применить численные методы вместо аналитических вычислений.

4.1. Алгоритм построения контура при известных коэффициентах

Существует множество способов построения графиков неявных зависимостей. В данном случае заранее планировались построение и перерисовка контуров в реальном времени, поэтому при разработке алгоритма ключевым фактором, кроме точности, играло время работы, поэтому исключаются всевозможные переборы точек по

двум осям, а также различные градиентные методы.

Исходя из физического смысла, начало координат всегда находится внутри контура текучести. Все зависимости (8) основных критериев преобразуются в полярные координаты R, α с центром в начале координат к виду,

$$R = \Psi(\alpha). \quad (10)$$

Например, так выглядит критерий А.А. Трещева в полярных координатах:

$$R = \frac{3\sqrt{3}k_2}{\sqrt{2 - 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha (\sqrt{3} + k_1(\sin \alpha + \cos \alpha))}}. \quad (11)$$

Критерий О.Г. Рыбакиной в полярных координатах после преобразований сдвига центра в начало координат и поворота полуосей вдоль координатных осей записывается следующим равенством:

$$R = \sqrt{1/(\cos \alpha \cdot \sin \alpha / k_1^2) + \sin^2 \alpha / k_2^2}. \quad (12)$$

Таким образом, для построения контура текучести необходимо преобразовать его критерий в полярные координаты, выбрать шаг угла и пробежать все значения от 0 до 2π , а при вычислении конкретных координат точек графика следует учесть преобразования сдвига и поворота координатных осей, если такие преобразования имели место, как в случае с критерием О.Г. Рыбакиной.

После того как получен массив точек, лежащих на контуре, для вычисления приблизительного значения целевой функции E из (9) достаточно пройти по всему полученному массиву и для каждой точки (эксперимента) p_i выбрать ближайшую на графике и вычислить расстояние.

Такой способ позволяет вычислять значения целевой функции с точностью до 0,0001% и построить контур текучести за несколько миллисекунд в зависимости от аппаратных возможностей ЭВМ.

4.2. Методы подбора коэффициентов контура

В данной работе рассматриваются три метода подбора коэффициентов k_i контура пластичности: метод ручного подбора, метод

покоординатного спуска, метод наискорейшего спуска.

Для их реализации разработана программа на языке Delphi для ОС Windows, в которой реализованы необходимые алгоритмы, и предоставлены в виде визуального интерфейса нужные инструменты для осуществления каждого из рассматриваемых методов и фиксирования результатов. Ввиду многомодульности и громоздкости каждого из модулей исходный код программы к работе не прилагается.

Программа предполагает наличие: ОС Windows 95 или выше, библиотеки OpenGL, процессора Pentium 166 МГц или более, 128 mb оперативной памяти, 64 mb видео памяти.

4.3. Построение методом подбора вручную

Для реализации первого метода в представленной программе предусмотрены различные визуальные инструменты. На рис. 4 изображено главное окно с графиками и примером экспериментальных данных. Цифрами отмечены основные группы инструментов: 1 — средства изменения и добавления экспериментальных данных; 2 — средства ручного подбора коэффициентов, перетаскивание, масштабирование, поворот контура; 3 — поле отображения текущего значения целевой функции; 4 — кнопки запусков численных методов подбора коэффициентов; 5 — панель изменения коэффициентов k_i ; 9 — область отображения контуров текучести с заданными наборами точек и отрезками перпендикуляров, опущенных из точек на контур.

4.4. Построение методом покоординатного спуска

Суть этого способа заключается в поочередном фиксировании одного из M коэффициентов и поиске минимума целевой функции E как функции от одной переменной $E(k_i)$, где k_i — единственный не зафиксированный коэффициент, модифицированным методом дихотомии. Этот метод иллюстрирован на рис. 5.

В достаточно большом интервале с шагом da осуществляется выбор наименьшего значения целевой функции $E(a_0)$.

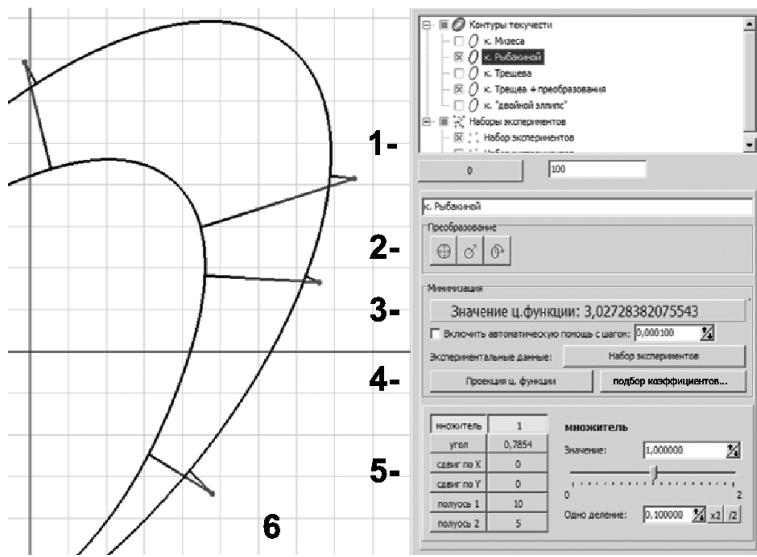


Рис. 4. Визуальные инструменты для построения контура текучести.

Далее, в интервале $[k_0 - \frac{dk}{2}; k_0 + \frac{dk}{2}]$ осуществляется метод дихотомии. Таким образом избегаются все локальные минимумы, и коэффициент k_i получает новое значение.

Процесс подбора коэффициентов повторяется до тех пор, пока изменение целевой функции E не станет меньше заданной точности.

4.5. Построение методом наискорейшего спуска

Суть этого метода заключается в движении в пространстве коэффициентов контура в сторону, обратную вектору градиента целевой функции E [6]. Градиент определяется равенством,

$$\Delta E(a_{ij}) = \left(\frac{\partial E}{\partial k_1}, \dots, \frac{\partial E}{\partial k_M} \right) \quad (13)$$

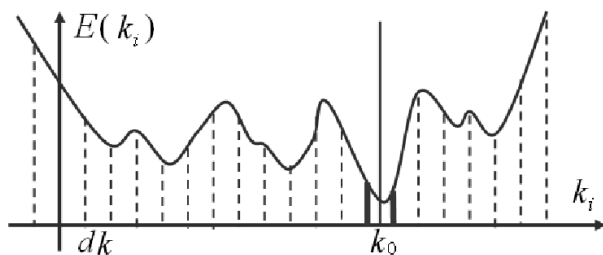


Рис. 5. Модифицированный метод дихотомии.

и направлен в сторону наибольшего роста функции E .

Сначала выбираются начальные значения коэффициентов, т.е. вектор \vec{k}_i , затем вычисляется вектор градиента $\Delta E(\vec{k}_i)$, затем — новые значения коэффициентов по формуле:

$$\vec{k}_i = \vec{k}_i - \lambda \Delta E, \quad (14)$$

где λ — заранее заданное число, определяющее скорость спуска.

Процесс повторяется до тех пор, пока изменение целевой функции E не станет меньше заданной точности.

В результате метод приводит к точке \vec{k}_i , которая сообщает функции E локальный минимум, на “склоне” которого находилась отправная точка алгоритма.

5. СРАВНЕНИЕ РАССМОТРЕННЫХ МЕТОДОВ

Первый метод — метод построения контура текучести путем ручного подбора полностью зависит от исследователя, что одновременно является как положительной стороной данного метода, так и отрицательной.

Второй метод — метод покоординатного спуска отличается простотой реализации, несмотря на которую, он почти всегда уверенно находит глобальный минимум. Однако вследствие того, что метод реализует спуск по поверхности только поочередно вдоль каждой из осей, существуют случаи, когда метод останавливается в точке,

находящейся рядом с глобальным минимумом, но не соответствующей ему.

Третий метод — метод наискорейшего (градиентного) спуска отличается гарантированной сходимостью к локальному минимуму, выбор которого, зависит от начальной точки, которая принимается при запуске алгоритма.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагается следующая последовательность действий для построения контура на основе рассмотренных методов: сначала проводятся эксперименты, результаты которых в виде набора точек в пространстве напряжений передаются первому методу — методу построения контура текучести вручную. Результатом работы первого метода является контур текучести, близкий к искомому, который и передаётся во второй метод — метод подбора коэффициентов по одному, который использует его в качестве начальной точки в своём алгоритме и уточняет его. Полученный контур, наконец, передаётся третьему методу — методу наискорейшего спуска, который приводит к искомому глобальному минимуму целевой функции E .

В представленной программе указанный метод реализован для следующих известных видов контуров текучести:

- Л. Мизеса,
- О.Г. Рыбакиной,
- А.А. Трещева.

Кроме того, предложены обобщения контуров, которые позволяют уменьшить значения целевой функции за счет увеличения числа коэффициентов k_i : для контура О.Г. Рыбакиной — контур, составленный из двух эллипсов (рис. 6, слева); для контура А.А. Трещева — добавление трех степеней свободы: сдвиги вдоль двух осей и поворот вокруг центра (рис. 6, справа).

Указанным способом, по экспериментальным данным, приведенным в диссертации В.Ш. Пачулий [4], построены контуры текучести для сплавов Цирколой-1 и Цирколой-2. Учет ортотропии, эффекта SD и начальных напряжений позволил точнее построить

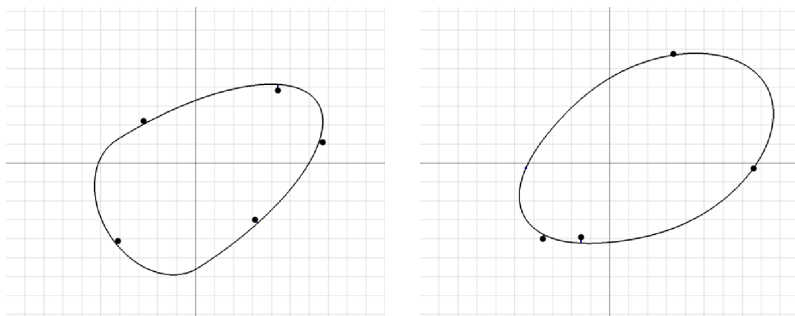


Рис. 6. Обобщение контура О.Г. Рыбакиной и обобщение контура А.А. Трещева.

контур и уменьшить значение целевой функции на 88% для сплава Циркалой-1 и на 98% для сплава Циркалой-2 [5].

Также, по экспериментальным данным, предоставленным Фрайбургским институтом конструкционных материалов [8], были построены все рассматриваемые виды контуров текучести. Достигнуты следующие значения целевой функции: для контура Мизеса — $E = 21000 \text{ МПа}^2$, для контура Рыбакиной — $E = 14000 \text{ МПа}^2$, для контура Трещева — $E = 20000 \text{ МПа}^2$, для обобщения контура Трещева — $E = 18400 \text{ МПа}^2$, для обобщения контура Рыбакиной — $E = 13100 \text{ МПа}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэкоффен В.* Процессы деформации. М: Металлургия, 1977.
2. *Унксов Е.П., Овчинников А.Г.* Теория пластических деформаций металлов. М.: Машиностроение, 1983.
3. *Рыбакина О.Г.* Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. Исследования по упругости и пластичности. // Вестн. Ленингр. ун-та. 1982. №14. С.132-142.
4. *Пачулий В.Ш.* Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Некоторые осисимметричные задачи теории идеальной пластичности анизотропного материала. Тула, 1983.
5. *Ефимов И.В., Павилайнен Г.В.* Выбор критерия текучести текстурированных сплавов. // В документах международной научной конференции

- „Нелинейная механика на рубеже тысячелетия“, посвященная столетию со дня рождения Н.А. Ляпунова. СПб. 2006.
6. *Батталов Н.С.* Численные методы. 2 изд. М.: Наука, 1975.
 7. *Забелин А.Н.* Упруго-пластический изгиб тонких пологих оболочек положительной гауссовой кривизны из разносопротивляющихся материалов при больших прогибах, Тверь 2010.
 8. *D. Kulawinski, K. Nagel, S. Henkel, P. Hubner, H. Fischer, M. Kuna, H. Biermann* Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load ratios. *Engineering Fracture Mechanics* 78 (2011). 1684–1695.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТОННЕЛЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПОЕЗДА

А. Н. Новиков

В данной работе с помощью пакета ANSYS Fluent было смоделировано движение высокоскоростного поезда по тоннелю. При этом рассматривалось, как на величину перепадов давления в тоннеле влияют такие параметры, как длина тоннеля, отношение площадей поперечного сечения поезда и тоннеля, форма головной части и скорость движения поезда. Также были получены графики для силы сопротивления и подъемной силы поезда.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все большее развитие получают высокоскоростные поезда. Аэродинамика поезда не менее сложна, чем аэродинамика самолета, и здесь есть свои вопросы, требующие решения. Одним из таких вопросов является проблема волн давления, возникающих при прохождении высокоскоростного поезда через тоннель [1, 2]. При въезде поезда в тоннель градиент давления перед головной частью поезда увеличивается, образуется волна сжатия, которая распространяется со скоростью звука по тоннелю. Достигнув противоположного конца тоннеля, волна сжатия отражается от свободной поверхности в виде волны разрежения и движется навстречу поезду. Таким образом, возникает сложный колебательный процесс распространения волн сжатия и расширения от одного конца тоннеля к другому. При этом волны отражаются от стен тоннеля и от движущегося поезда, что порождает все новые волны. Волны давления в тоннеле приводят к перепаду давления по длине поезда и могут вызвать слуховой дискомфорт пассажиров. Чтобы избежать этого, нужно выяснить, какие факторы наибольшим образом влияют на величину этих перепадов. Такими факторами являются скорость поезда, отношение площади поперечного сечения

Доклад на семинаре 20 сентября 2011 г.

© А. Н. Новиков, 2012

поезда и тоннеля, длина тоннеля, форма головной части поезда. Также важен естественный перепад давления в тоннеле, который возникает, в случае, если вход и выход из него расположены на разных высотах, а значит, на концах тоннеля атмосферное давление будет различаться. А если тоннель двухпутный, то максимальный перепад давления будет при встрече двух поездов внутри тоннеля. Кроме этого, есть множество других факторов, но они, вероятно, менее значимы. В данной работе рассмотрено, как на величину перепадов давления влияют такие параметры, как скорость поезда, отношение площади поперечного сечения поезда и тоннеля, длина тоннеля, форма головной части поезда.

2. Постановка задачи

Для расчета были построены различные геометрии, отличающиеся длиной тоннеля, его поперечной площадью, а также типом поезда. В работе рассмотрены две модели поездов. Одна модель типа японского поезда Fastech 360, который отличается очень вытянутой носовой частью. Вторая модель типа европейского поезда Eurostar. Следует оговориться, что данные модели весьма приближенные и лишь по форме напоминают указанные поезда. В моделях отсутствуют зазоры между вагонами, окна и двери, а также колеса и механизмы под днищем поезда. Эти допущения оправданы, поскольку данная работа не ставит целью получить значения измеряемых параметров, в точности совпадающих с реальными. В работе проводится лишь качественная оценка исследуемых процессов в зависимости от интересующих параметров. Говоря о моделях, следует указать, что длина каждого из поездов составляет 200 м, это примерная длина 8 вагонов. Площадь поперечного сечения того и другого поезда — 11.24 м². Длины тоннелей — 1 и 2 км, площадь поперечного сечения тоннелей — 40 и 60 м². Расчеты проводились для скорости поезда 250 и 300 км/ч.

Математическая модель представляет собой следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

— уравнение неразрывности;

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho F - \nabla \mathbf{p}$$

— уравнение импульсов;

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \epsilon$$

— уравнение энергии.

Для расчета турбулентности применялась модель $k - \epsilon$:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t S^2 - \rho \epsilon; S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}},$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{k} (C_{1\epsilon} \mu_t S^2 - \rho C_{2\epsilon} \epsilon),$$

где

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

— турбулентная вязкость.

3. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Поставленная задача решалась численным моделированием с использованием динамических сеток, предусмотренных в пакете ANSYS Fluent. Идея динамических сеток заключается в том, что при их использовании происходит физическое перемещение сетки одной зоны относительно другой. Из-за этого задача с таким подходом может быть решена только в нестационарной постановке. Поэтому основными недостатком использования динамических сеток являются значительные ресурсы компьютера и продолжительное время расчета. В рассматриваемой задаче исследуемое тело (поезд) окружен сеткой, которая при движении тела будет перемещаться вместе с ним. В области перед телом сетка будет сжиматься, и сжатые ячейки будут объединяться, а в области за телом ячейки будут растягиваться и вследствие чего разделяться, образуя новые.

Объемы подвижной, деформируемой и неподвижной сетки нужно разделить поверхностью интерфейса. При этом шаг по времени подобран таким образом, чтобы обеспечивать полное совпадение узлов подвижной и неподвижной расчетных сеток (рис. 1).

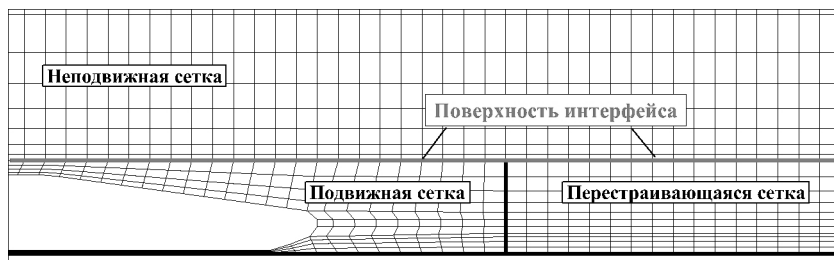


Рис. 1. Схема динамической сеточной области.

Задача решалась на гексаэдральной структурированной сетке с количеством элементов порядка 280000.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

На вклейке на рис. 1 показаны контуры распределения давления вокруг поезда в момент, когда он полностью вошел в тоннель. В рассматриваемом случае скорость поезда 250 км/ч, площадь поперечного сечения тоннеля 40 м². Хорошо видно, что перед носом поезда давление повышено. За хвостом поезда давление равно давлению окружающей среды. А по длине поезда давление падает от первого вагона к последнему, где возникает зона разряжения.

На вклейке на рис. 2 представлены контуры распределения скорости и вектора скорости при движении поезда по тоннелю. Видно, что непосредственно перед носом поезда присутствует некая область, в которой скорость потока близка к нулю. Эта область разделяет воздух в тоннеле на ту часть, которая толкается поездом, как поршнем, вперед по движению состава, и ту часть, которая течет в противоположном направлении со скоростью 25–30 м/с. За последним вагоном наблюдается область завихренности, в которой

встречаются два потока: спутный за поездом и встречный, текший между поездом и тоннелем.

На вклейке на рис. 3 можно наблюдать распределение избыточного давления в различных местах тоннеля в зависимости от времени. В данном случае площадь тоннеля составляет 60 м^2 , площадь поезда — 11.24 м^2 (отношение площадей составляет 0.187), скорость поезда — 250 км/ч , длина тоннеля — 1000 м . Рассматривая кривые $L=0 \text{ м}$ и $L=1000 \text{ м}$ интересно отметить, что интервал времени между тем, как волна давления зародилась в начале тоннеля (черная кривая, время 2.3 с) и моментом ее подхода к выходу из тоннеля (розовая кривая, время 5.4 с), составляет около 3 секунд. Получается, что скорость волны давления в тоннеле составляет порядка 330 м/с . Это подтверждает то, что волны давления распространяются со скоростью звука. Как видно, перепады давления на входе и выходе незначительны, а при продвижении к середине тоннеля перепады увеличиваются и составляют порядка 3.4 кПа на расстояние 500 м от въезда в тоннель.

На рис. 2 показано изменение избыточного давления в тоннеле для площадей тоннеля 40 м^2 и 60 м^2 , измеренного на расстоянии 100 м от входа в тоннель. Как видно, максимальные значения перепадов давления в тоннеле площадью 40 м^2 больше, чем в тоннеле с площадью 60 м^2 на 83% . Это очень существенная разница.

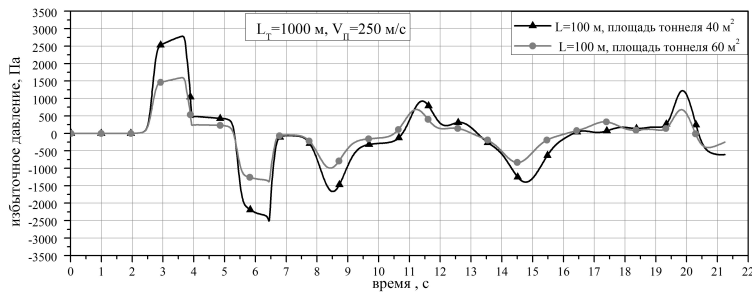


Рис. 2. Изменение избыточного давления в тоннеле для различных площадей тоннеля (на расстоянии 100 м от входа в тоннель).

В данной статье не приведены все графики, полученные в ходе работы, поэтому далее сравнение будет словесное. В случае для различных головных частей поезда получаем, что абсолютные значения перепадов давления в тоннеле для рассматриваемых поездов отличаются незначительно. Так, при прохождении поезда Eurostar максимальные перепады давления на 5.6% выше, чем у поезда типа Fastech 360. При увеличении скорости характер кривых изменения давления не меняется, хотя все процессы происходят быстрее и с большими амплитудами. Так, максимальный перепад давления в тоннеле при скорости поезда 250 км/ч составляет порядка 5,5 кПа, а при скорости 300 км/ч — 8 кПа, что на 45% больше. Для различной длины тоннеля (1 и 2 км) получаем, что вначале кривые изменения давления в тоннеле совпадают, а после некоторого времени появляются различия. Совпадение кривых вначале можно объяснить тем, что при въезде поезда в тоннель возникают волны сжатия, интенсивность которых зависит от скорости поезда и отношения поперечных сечений поезда и тоннеля. А различия получаются из-за того, что в тоннеле длиной 1 км волны быстрее дойдут до противоположного выхода, отразятся и вернуться в точку измерения.

На рис. 3 показано изменение силы сопротивления, действующей на поезд в тоннеле для различных головных частей поезда. Интересно, что сила сопротивления в тоннеле по сравнению с движением на открытом пространстве увеличивается в 3.83 раза как для поезда типа Fastech 360, так и для поезда типа Eurostar, хотя на открытом пространстве сила сопротивления первого поезда на 20% меньше, чем у второго. Это можно объяснить более вытянутой аэродинамически обтекаемой головной частью поезда Fastech 360.

Также в работе сравниваются силы сопротивления, действующей на поезд при движении по тоннелю с площадью 40 и 60 м². Сила сопротивления поезда в тоннеле по сравнению с движением на открытом пространстве увеличивается в 2.7 раза (для тоннеля 60 м²) и в 3.83 раза (для тоннеля 40 м²). Величина максимальной силы сопротивления для тоннеля с поперечной площадью 40 м² больше, чем для тоннеля с площадью 60 м² на 51%. Если рассматривается движение поезда в тоннеле различной длины, то в начале тоннеля силы совпадают, а после подхода отраженной волны к по-

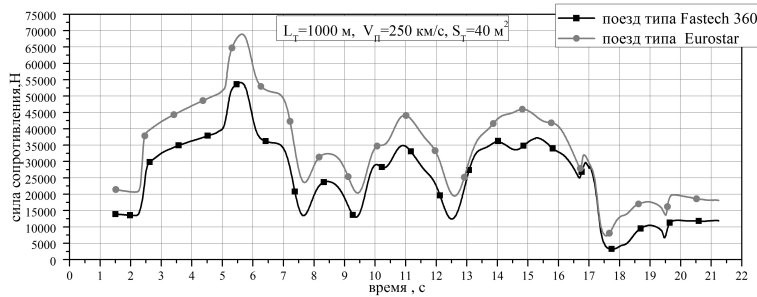


Рис. 3. Изменение силы сопротивления действующей на поезд в тоннеле для различных головных частей поезда.

езду графики расходятся. Но после выезда поезда из тоннеля сила сопротивления становится такой же, как до въезда в него. Для скоростей поезда 250 и 300 км/ч получаем следующее. Сила сопротивления поезда при движении на открытой местности со скоростью 250 км/ч составляет 15 кН, а при увеличении скорости до 300 км/ч сила возрастает на 40%. При движении в тоннеле сила сопротивления поезда для скорости 250 км/ч увеличивается в 3,83 раза и равна 57,5 кН, а для скорости 300 км/ч эта величина на 43% больше.

На рис. 4 представлен график изменения силы сопротивления и подъемной силы, действующих на поезд в тоннеле. Видно что до въезда в тоннель и в первые секунды после входа на поезд действует прижимная сила порядка 2,5 кН, что вполне логично учитывая аэродинамическую форму поезда. Момент времени 5 с соответствует положению, когда хвост поезда полностью входит в тоннель, после чего реализуется распределение давления, показанное на рис. 2. В этом случае избыточное давление над поездом уменьшается, что приводит к увеличению подъемной силы действующей на поезд.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы были получены данные о том, как меняется давление в тоннеле при прохождении по нему высо-

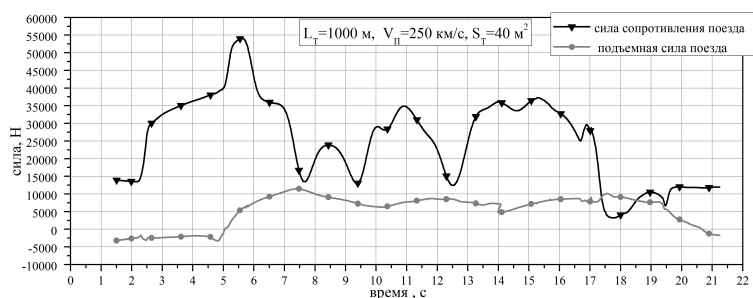


Рис. 4. Изменение силы сопротивления и подъемной силы действующей на поезд в тоннеле.

коскоростного поезда. Было выяснено, что форма головной части поезда слабо влияет на максимальные перепады давления в тоннеле (различие 5,6 %) и умеренно влияет на силу сопротивления поезда (различие 20%). Длина тоннеля не влияет на величину максимальных перепадов давления и силы сопротивления. Впрочем, может быть при увеличении длины тоннеля появятся новые эффекты, которые в данной работе не были рассмотрены. Скорость поезда также оказывает влияние на исследуемые процессы. Так при увеличении скорости поезда с 250 км/ч до 300 км/ч максимальная величина перепадов давления в тоннеле увеличивается на 45%, а сила сопротивления поезда увеличивается на 43%. Площадь поперечного сечения тоннеля оказывает значительное влияние. Было показано что уменьшение площади поперечного сечения тоннеля с 60 до 40 м² приводит к увеличению максимального перепада давления в тоннеле на 83%, и увеличению силы сопротивления на 51%. В заключении следует отметить, что результаты данной работы можно использовать лишь для качественного описания исследуемых процессов. Для получения результатов сравнимых с опытными данными необходимо использовать более подробную сетку, уточнить модель поезда и строения внутри тоннеля, учитывать материал внутренних стен тоннеля. Также в работе не рассматривалось, каким образом волны давления в тоннеле влияют на перепады дав-

ления внутри поезда. Также не учитывались автоколебательные процессы корпуса поезда и колебания последнего вагона состава при движении в тоннеле. Не рассматривались случаи нарушения герметичности поезда. Эти задачи еще предстоит решить.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bopp R., Hagenah B.*. Aerodynamics, ventilation and tunnel safety for high speed rail tunnels // Konferenz "Sicherheit und Beluftung von Tunnelanlagen". Viena. 2008. — www.gruner.at
2. *Bopp R., Langner V., Burghart M.*. Climate in very long railway tunnels // Konferenz "Sicherheit und Beluftung von Tunnelanlagen". Graz. 2010. — www.gruner.at

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ ОБЛИЦОВКИ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

А. К. Кузин

Рассматривается задача о концентрации напряжений в окрестности угла крепления облицовки к основанию. Сингулярное напряженно-деформированное состояние описывается асимптотическими формулами, определяемыми геометрией окрестности и свойствами материала. Информация о нагрузках вдали от угла сосредоточена в масштабном множителе — коэффициенте интенсивности напряжений (КИН).

Для оценки прочности соединения используется известный в механике разрушения силовой критерий, применительно к задаче с углом сводящийся к требованию попадания КИН внутрь диапазона допустимых значений.

Предложен метод численного определения КИН, основанный на применении теоремы взаимности работ в окрестности угловой точки. Метод допускает обобщение для случая температурных воздействий

1. СИЛОВОЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ

При оценке прочности крепления облицовки особое место занимает анализ НДС в окрестности границы прилегания плиток. Линейная теория упругости дает на ребре сингулярное решение. Для таких областей эффективны методы механики трещин. НДС в окрестности фронта трещины описывается универсальными асимптотическими формулами

$$\underline{\tau}(r, \theta) = Kr^\lambda \underline{T}(\theta), \quad \underline{u}(r, \theta) = Kr^{\lambda+1} \underline{U}(\theta), \quad (1)$$

в классической задаче о трещине $\lambda = -1/2$. Универсальность асимптотических формул состоит в том, что функции \underline{T} и \underline{U} и пока-

затель степени λ полностью определяются геометрией и свойствами материала окрестности фронта и не зависят от приложенных нагрузок и особенностей геометрии вдали от фронта. Формой конструкции и нагрузками определяется масштабный множитель K — коэффициент интенсивности напряжений (КИН).

Известный в механике трещин силовой критерий прочности [1] требует, чтобы значение КИН не превышало предельной величины — трещиностойкости:

$$K < K_*.$$

Если КИН меньше K_* , трещина не растет, а потому не опасна. Асимптотическое НДС в окрестности ребра облицовки также имеет вид (1). Поэтому силовой критерий в этом случае также применим, но требует изменения формулировки

$$K_*^- < K < K_*^+, \quad K_*^- \leq 0, \quad K_*^+ \geq 0. \quad (2)$$

В задаче о трещине это было излишне из-за свойств четности решений.

Механика трещин рассматривает и энергетический критерий прочности [1], требующий, чтобы величина трещиноподвижной силы не превышала критического значения. Однако применение энергетического критерия для ребра облицовки встречает сложности. Понятие трещиноподвижной силы, основанное на представлениях аналитической механики, не может быть введено из-за отсутствия возможности виртуального продвижения фронта.

Универсальность асимптотических формул предоставляет возможность априорной оценки прочности соединений на основании экспериментальных данных с тестовыми образцами. Для выбранных образцов по известной разрушающей нагрузке F_* находится критическое значение K_* (K_*^- или K_*^+). Эти же значения КИН рассматриваются как критические и для исследуемой конструкции.

Нахождение КИН представляет собой отдельную нетривиальную проблему, поскольку требует учета НДС во всем теле, а не только в окрестности точки сингулярности. КИН может быть найден непосредственно при решении задачи методом конечных элементов с помощью введения специальных сингулярных элементов в окрестности фронта трещины (угловой точки) [1, 3]. Возможен

подход, при котором для тела с угловой точкой формулируется вариационная постановка с КИН как независимой переменной [2]. Наконец, КИН может быть найден, исходя из результатов конечно-элементных расчетов на обычных элементах [4]. Излагаемый в настоящей работе подход, основанный на применении теоремы взаимности работ в окрестности угловой точки, был ранее описан в [6]. Предпосылки этого метода можно найти в [5]. Он позволяет определить КИН по известному конечно-элементному решению задачи упругости и допускает обобщение на случай температурных воздействий. Подробнее о способах вычисления КИН можно узнать из работы [7].

2. РЕШЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОГО ВЫРЕЗА

В плоскости, нормальной к ребру границы между плиткой и основанием, введем локальную систему координат x_1x_2 . Оси ориентированы так, как показано на рис. 1. Сектор 1 — облицовка, сектор 2 — основание. Ось x_3 направлена вдоль ребра границы и перпендикулярна плоскости рисунка.

Материалы секторов линейно-упругие, изотропные с модулями сдвига $\mu^{(\alpha)}$ и коэффициентами Пуассона $\nu^{(\alpha)}$, $\alpha = 1..2$. Здесь и далее верхний индекс в скобках указывает, к какому сектору относится величина.

НДС в окрестности ребра — суперпозиция состояний плоской и антиплоской деформаций.

Рассмотрим сначала более простой случай антиплоской деформации. Вектор перемещений направлен вдоль ребра:

$$\underline{u} = u(x_1, x_2) \underline{e}_3, \quad (3)$$

тензоры деформаций и напряжений имеют структуру

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla u \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \nabla u), \quad (4)$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{e}_3 \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{e}_3, \quad \underline{\tau} = \underline{e}_1 \tau_1 + \underline{e}_2 \tau_2, \quad \underline{\tau} = \mu \nabla u.$$

Введен ∇ — набла-оператор на плоскости:

$$\nabla \equiv \underline{e}_\alpha \partial_\alpha, \quad \alpha = 1..2. \quad (5)$$

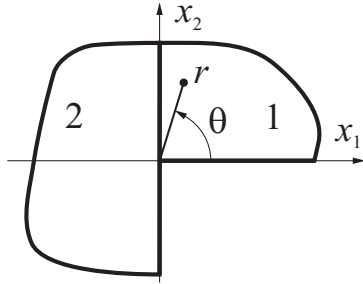


Рис. 1. Окрестность края границы облицовка/основание.

Объемные силы отсутствуют, поэтому

$$\nabla \cdot \underline{\tau} = 0 \iff \underline{\tau} = \mu \nabla \psi \times \underline{e}_3, \quad (6)$$

где ψ — неизвестная функция напряжений. Согласно (4) и (6), u и ψ связаны условиями Коши–Римана:

$$\nabla u = \nabla \psi \times \underline{e}_3. \quad (7)$$

и задача определения НДС сводится к нахождению одной регулярной функции комплексной переменной:

$$\begin{aligned} f(z) &= u + i\psi, & z &\equiv x_1 + ix_2 = re^{i\theta}, \\ u &= \operatorname{Re}(f), & \tau_1 - i\tau_2 &= \mu f'(z), \end{aligned} \quad (8)$$

где i — мнимая единица.

Решение ищем в виде

$$f(z) = Cz^{\lambda+1}, \quad (9)$$

где C , λ — неизвестные числа: C — комплексное, λ — вещественное. Из (8) следует:

$$\begin{aligned} \mu u &= r^{\lambda+1} (A \cos(\lambda+1)\theta - B \sin(\lambda+1)\theta), \\ \tau_1 &= (\lambda+1)r^\lambda (A \cos \lambda\theta - B \sin \lambda\theta), \\ \tau_2 &= -(\lambda+1)r^\lambda (A \sin \lambda\theta + B \cos \lambda\theta). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь A и B — неизвестные вещественные константы. Параметр λ должен удовлетворять условию

$$-1 < \lambda < 0. \quad (11)$$

Неравенство справа следует из требования ограниченности напряжений на бесконечности, слева — из условия ограниченности потенциальной энергии деформации в окрестности угловой точки.

В секторах 1 и 2 решение определяется асимптотическими формулами (10) со своими коэффициентами $A^{(k)}, B^{(k)}$, $k = 1..2$. Показатель степени λ в обоих секторах один и тот же. Для нахождения $A^{(k)}, B^{(k)}$ и λ имеем однородные граничные условия на сторонах выреза:

$$\tau_2^{(1)} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \tau_1^{(2)} \Big|_{\theta=3\pi/2} = 0 \quad (12)$$

и условия непрерывности перемещений и напряжений на границе материалов:

$$\left(u^{(1)} - u^{(2)} \right) \Big|_{\theta=\pi/2} = 0, \quad \left(\tau_1^{(1)} - \tau_1^{(2)} \right) \Big|_{\theta=\pi/2} = 0. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует система линейных однородных алгебраических уравнений для коэффициентов $A^{(k)}, B^{(k)}$. λ находится из условия обращения в 0 ее определителя. Единственно возможный корень на интервале $(-1; 0)$:

$$\lambda = -\frac{1}{\pi} \arccos \frac{m}{m+1}, \quad (14)$$

где

$$m \equiv \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}}. \quad (15)$$

Коэффициенты асимптотических формул $A^{(k)}, B^{(k)}$ не могут быть определены однозначно. В общем случае, при λ , равном (14), ранг матрицы системы понижается на 1 и столбец коэффициентов может быть определен с точностью до масштабного множителя — коэффициента интенсивности напряжений:

$$\left(A^{(1)}, B^{(1)}, A^{(2)}, B^{(2)} \right)^T = KY, \quad \|Y\| = 1. \quad (16)$$

Y — собственный вектор матрицы системы, соответствующий нулевому собственному значению. Можно показать, что

$$Y = \sqrt{\frac{2}{3+m}} \left(1, \quad 0, \quad \frac{3m+1}{2(m+1)}, \quad \frac{(1-m)\sqrt{2m+1}}{2(m+1)} \right)^T. \quad (17)$$

Коэффициент интенсивности напряжений K неизвестен, для его нахождения необходимо знать НДС вдали от угловой точки.

В случае плоской деформации

$$\underline{u} = u_\alpha(x_1, x_2) e_\alpha, \quad \alpha = 1..2. \quad (18)$$

Тензоры деформаций и напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \nabla \underline{u}^S = \varepsilon_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta, \\ \underline{\tau} &= \underline{\tilde{\tau}} + \sigma_3 e_3 e_3, \quad \underline{\tilde{\tau}} \equiv \tau_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta \end{aligned} \quad (19)$$

и связаны законом Гука:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\tau}} &= 2\mu \left(\underline{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \underline{\tilde{E}} \right), \quad \sigma_3 = \nu \tilde{\tau}, \\ \underline{\tilde{E}} &= e_\alpha e_\alpha, \quad \varepsilon = \varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \tilde{\tau} = \tau_{\alpha\alpha}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\underline{\tilde{E}}$ — единичный тензор в плоскости $x_1 x_2$.

При отсутствии объемных нагрузок решение плоской задачи теории упругости определяется бигармонической функцией Эри:

$$\underline{\tilde{\tau}} = -e_3 \times \nabla \nabla \Phi \times e_3, \quad \Delta \Delta \Phi = 0, \quad (21)$$

где $\Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2$ — двумерный оператор Лапласа.

В плоской задаче эффективны методы теории функции комплексной переменной. Введем $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} \equiv x_1 - ix_2$. Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad x_2 = \frac{i}{2}(\bar{z} - z), \\ \partial_1 &= \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \quad \partial_2 = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}), \\ \Delta &= (\partial_1 + i\partial_2)(\partial_1 - i\partial_2) = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегрирование бигармонического уравнения с использованием (22) ведет к формуле Гурса:

$$\Phi = \operatorname{Re}(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)) = \frac{1}{2} \left(\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \right), \quad (23)$$

где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — регулярные функции. Напряжения и перемещения определяются формулами Колосова—Мусхелишвили:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= 2(\varphi' + \overline{\varphi'}), & \sigma_2 - \sigma_1 + 2i\tau_{12} &= 2(\overline{z}\varphi'' + \psi'), \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= (3 - 4\nu)\varphi - z\overline{\varphi'} - \psi', \\ \psi &\equiv \chi', & \sigma_1 &\equiv \tau_{11}, & \sigma_2 &\equiv \tau_{22}. \end{aligned} \quad (24)$$

Разыскивая решение в виде

$$\varphi = Az^{\lambda+1}, \quad \psi = Bz^{\lambda+1}, \quad (25)$$

где A, B — комплексные постоянные, λ — вещественная, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= r^\lambda(\lambda+1) \left\{ \lambda(-A_1 \cos(\lambda-2)\theta + A_2 \sin(\lambda-2)\theta) + \right. \\ &\quad \left. + (2A_1 - B_1) \cos \lambda\theta - (2A_2 - B_2) \sin \lambda\theta \right\}, \\ \sigma_2 &= r^\lambda(\lambda+1) \left\{ \lambda(A_1 \cos(\lambda-2)\theta - A_2 \sin(\lambda-2)\theta) + \right. \\ &\quad \left. + (2A_1 + B_1) \cos \lambda\theta - (2A_2 + B_2) \sin \lambda\theta \right\}, \\ \tau_{12} &= r^\lambda(\lambda+1) \left\{ \lambda(A_1 \sin(\lambda-2)\theta + A_2 \cos(\lambda-2)\theta) + \right. \\ &\quad \left. + B_1 \sin \lambda\theta + B_2 \cos \lambda\theta \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= r^{\lambda+1} \left\{ (3-4\nu)(A_1 \cos(\lambda+1)\theta - A_2 \sin(\lambda+1)\theta) - \right. \\ &\quad \left. - (\lambda+1)(A_1 \cos(\lambda-1)\theta - A_2 \sin(\lambda-1)\theta) - \right. \\ &\quad \left. - B_1 \cos(\lambda+1)\theta + B_2 \sin(\lambda+1)\theta \right\}, \\ 2\mu u_2 &= r^{\lambda+1} \left\{ (3-4\nu)(A_1 \sin(\lambda+1)\theta + A_2 \cos(\lambda+1)\theta) + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda+1)(A_1 \sin(\lambda-1)\theta + A_2 \cos(\lambda-1)\theta) + \right. \\ &\quad \left. + B_1 \sin(\lambda+1)\theta + B_2 \cos(\lambda+1)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 — неизвестные вещественные константы, параметр λ , как и в случае антиплоской деформации, должен удовлетворять неравенству

$$-1 < \lambda < 0. \quad (28)$$

Границы сектора свободны от нагрузок:

$$\begin{aligned} \theta = 0 : & \quad \sigma_2^{(1)} = 0, \quad \tau_{12}^{(1)} = 0, \\ \theta = \frac{3\pi}{2} : & \quad \sigma_1^{(2)} = 0, \quad \tau_{12}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

На границе материалов — условия непрерывности перемещений и напряжений:

$$\theta = \frac{\pi}{2} : \quad \underline{u}^{(1)} = \underline{u}^{(2)}, \quad \sigma_1^{(1)} = \sigma_1^{(2)}, \quad \tau_{12}^{(1)} = \tau_{12}^{(2)}. \quad (30)$$

Подстановка асимптотических формул (26)–(27) в (29) и (30) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $A_\alpha^{(\beta)}, B_\alpha^{(\beta)}$, всего 8 уравнений для 8 неизвестных. Из требования равенства нулю определителя системы следует характеристическое уравнение для нахождения λ :

$$\chi(\lambda, m, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}) = 0. \quad (31)$$

Явное выражение этого уравнения при необходимости может быть в обозримом виде получено средствами компьютерной математики. Коэффициенты асимптотических формул определены с точностью до масштабного множителя K — коэффициента интенсивности напряжений:

$$\begin{aligned} \left(A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)} \right)^T &= KY, \\ \|Y\| &= 1, \end{aligned} \quad (32)$$

где Y — собственный вектор матрицы системы, соответствующий нулевому собственному числу, при λ , равном наименьшему корню уравнения (31) на интервале $(-1; 0)$.

3. МЕТОД РАСЧЕТА КИН НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Рассмотрим окрестность ребра границы прилегания облицовки, ограниченную контуром L и лучами на осях x_1 и x_2 (рис. 2). В области реализуется плоская деформация с полями перемещений \underline{u} и напряжений $\underline{\tau}$, объемными силами \underline{f} и поверхностными \underline{p} . НДС таково, что при приближении к углу оно определяется асимптотическими формулами с неизвестным КИН:

$$\underline{u} \sim K\underline{U}, \quad \underline{\tau} \sim K\underline{T}, \quad (33)$$

где \underline{U} и \underline{T} — асимптотические решения, соответствующие единичному КИИ. Они определяются соответственно формулами (27) и (26), в которых $A_\alpha^{(\beta)}$, $B_\alpha^{(\beta)}$ заменены на компоненты нормированного вектора Y из формулы (32).

Мысленно вырежем из области окрестность угла, ограниченную дугой окружности C радиуса a . К области F , ограниченной кривыми C , L и соединяющими их отрезками осей L_1 и L_2 , применим теорему взаимности работ:

$$A_{12} \equiv \int_F \underline{f}_1 \cdot \underline{u}_2 dF + \int_{L \cup L_1 \cup L_2 \cup C} \underline{p}_1 \cdot \underline{u}_2 dl = A_{21} \quad (34)$$

— работа сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе сил второго состояния на перемещениях первого. В качестве первого состояния возьмем НДС, обусловленное нагрузками \underline{f} и \underline{p} :

$$\underline{u}_1 = \underline{u}, \quad \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}, \quad \underline{f}_1 = \underline{f}, \quad \underline{p}_1 \Big|_{L \cup L_1 \cup L_2} = \underline{p}. \quad (35)$$

Радиус a мал настолько, что на C уже справедливы асимптотические формулы, поэтому

$$\underline{p}_1 \Big|_C = -e_r \cdot K \underline{T} \Big|_{r=a}. \quad (36)$$

Во втором состоянии во всей области НДС определяется асимптотическими формулами с $K = 1$:

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 = \underline{U}, \quad \underline{\tau}_2 = \underline{T}, \quad \underline{f}_2 = 0, \quad \underline{p}_2 \Big|_{L_1 \cup L_2} = 0, \\ \underline{p}_2 \Big|_C = -e_r \cdot \underline{T} \Big|_{r=a}, \quad \underline{p}_2 \Big|_L = \underline{n} \cdot \underline{T} \Big|_L. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставив (35)–(37) в (34), получим

$$K = \frac{J}{J_0}, \quad (38)$$

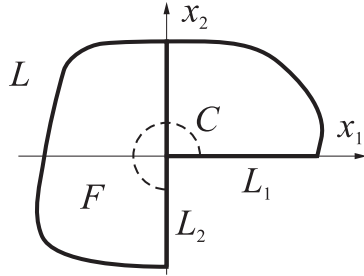


Рис. 2. Область для теоремы взаимности.

где

$$J = \int_{L \cup L_1 \cup L_2} \underline{p} \cdot \underline{U} dl + \int_F \underline{f} \cdot \underline{U} dF - \int_L \underline{n} \cdot \underline{T} \cdot \underline{u} dl + \int_C \underline{\varepsilon}_r \cdot \underline{T} \cdot \underline{u} dl, \quad (39)$$

$$J_0 = \int_C \underline{\varepsilon}_r \cdot \underline{T} \cdot \underline{U} dl. \quad (40)$$

Формула (38) может использоваться для определения КИН. Для вычисления по ней необходимо знать поле перемещений \underline{u} , создаваемое приложенными нагрузками. Эта задача может быть решена методом конечных элементов. Асимптотические решения \underline{U} и \underline{T} полностью определяются геометрией и свойствами материала окрестности угла. Точное значение КИН может быть достигнуто при $a \rightarrow 0$: только в этом случае условие (36) выполняется точно.

Формула (38) допускает обобщение на случай температурных деформаций. Действительно, система уравнений линейной термоупругости имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\tau} + \underline{f} &= 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\tau} \Big|_{O_1} = p, \quad \underline{u} \Big|_{O_2} = \underline{u}_0, \\ \underline{\tau} &= 2\mu \left(\underline{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \underline{E} \right) - 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \Theta \underline{E}, \\ \underline{\varepsilon} &= \nabla \underline{u}^S, \quad \varepsilon = \varepsilon_{\alpha\alpha}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь Θ — температура, α — коэффициент линейного расширения. На O_1 заданы условия в напряжениях, на O_2 — в перемещениях. Полная поверхность тела — объединение O_1 и O_2 . Представив тензор напряжений в виде

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_\varepsilon + \underline{\underline{\tau}}_\Theta, \quad \underline{\underline{\tau}}_\Theta \equiv -2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Theta \underline{\underline{E}}, \quad (42)$$

получим задачу линейной теории упругости с модифицированными нагрузками:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}}_\varepsilon &= 2\mu \left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \underline{\underline{E}} \right), \quad \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_\varepsilon + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_\Theta + \underline{\underline{f}} = 0, \\ \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\tau}}_\varepsilon \Big|_{O_1} &= \underline{\underline{p}} - \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\tau}}_\Theta \Big|_{O_1}, \quad \underline{\underline{u}} \Big|_{O_2} = \underline{\underline{u}}_0. \end{aligned} \quad (43)$$

Применив к этой задаче (38), получим обобщение (39) на случай температурных воздействий:

$$\begin{aligned} J &= \int_{L \cup L_1 \cup L_2} \left(\underline{\underline{p}} - \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\tau}}_\Theta \right) \cdot \underline{\underline{U}} dl + \int_F \left(\underline{\underline{f}} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_\Theta \right) \cdot \underline{\underline{U}} dF - \\ &\quad - \int_L \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{u}} dl + \int_C \underline{\underline{e}}_r \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{u}} dl. \end{aligned} \quad (44)$$

В изложенных выше построениях выбор контура L не регламентирован. Для практических расчетов в качестве L удобно брать дугу окружности радиуса R . Тогда единственным произволом метода остается отношение радиусов $\eta = a/R$. Так как контур L обычно не совпадает с границами тела, то вектор поверхностных нагрузок на нем определяется по найденному численно полю напряжений.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий изложенную методику. Плитка и основание свободны от внешних нагрузок и нагреты до равномерной температуры Θ . Материалы плитки и основания одинаковы: $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} \equiv \mu$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} \equiv \nu$, $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \equiv \alpha$. Задача рассматривается в условиях плоской деформации. Имеем деформированное состояние без напряжений:

$$\underline{\underline{u}} = \alpha (1 + \nu) \Theta r \underline{\underline{e}}_r, \quad \underline{\underline{\tau}} = 0. \quad (45)$$

При этом тензоры $\underline{\tau}_{\varepsilon}$ и $\underline{\tau}_{\Theta}$ нулю не равны. Очевидно, что КИН в этой задаче равен 0. Характеристическое уравнение для λ :

$$\left(\cos \frac{3\pi\lambda}{2} + \lambda + 1\right) \left(\cos \frac{3\pi\lambda}{2} - \lambda - 1\right) = 0. \quad (46)$$

Наименьший корень на интервале $(-1; 0)$: $\lambda = -0.4555$. Вычислим КИН по формулам (38), (40) и (44), взяв в качестве кривой L дугу окружности радиуса R . После ряда преобразований получим

$$K = \frac{2\mu(1+\nu)\alpha\Theta I_1}{(1-2\nu)I_0} a^{-\lambda}, \quad (47)$$

где

$$I_0 = \int_0^{3\pi/2} \underline{e}_r \cdot \underline{\tilde{T}} \cdot \underline{\tilde{U}} d\theta, \quad I_1 = \int_0^{3\pi/2} \underline{e}_r \cdot \underline{\tilde{U}} d\theta, \quad (48)$$

$$\underline{\tilde{U}} \equiv \underline{U} \Big|_{r=1}, \quad \underline{\tilde{T}} \equiv \underline{T} \Big|_{r=1}.$$

Примечательно, что результат не зависит от R . Однако, достигается это взаимным сокращением интегралов по дуге L , и при численных расчетах выбор R может повлиять на результат.

Также важно, что $K(a)$ при $a \rightarrow 0$ имеет бесконечную производную. Это может создавать сложности при численных расчетах.

4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим задачу определения параметров асимптотических формул в угловой точке образца, изображенного на рис. 3 (точка D). Материалы плитки (I) и основания (II) линейно-упругие:

$$\begin{aligned} E_I &= 306 \text{ ГПа}, & \nu_I &= 0.1, & \alpha_I &= 1.156 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1} \\ E_{II} &= 128 \text{ ГПа}, & \nu_{II} &= 0.33, & \alpha_{II} &= 1.672 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}. \end{aligned} \quad (49)$$

Размеры:

$$AB = 25 \text{ мм}, \quad AC = 8 \text{ мм}, \quad CF = 8 \text{ мм}, \quad DE = 20 \text{ мм}. \quad (50)$$

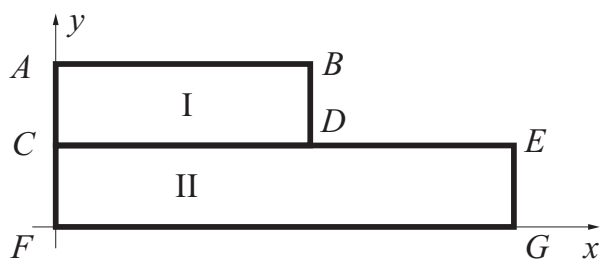


Рис. 3. Расчетная область.

Образец симметричен относительно оси y , на рисунке изображена только его правая половина. Задача рассматривается в условиях плоской деформации.

В окрестности точки D справедливы асимптотические формулы (26) и (27). Их параметры определяются свойствами материалов и геометрией, поэтому сразу могут быть вычислены из соответствующей линейной однородной алгебраической системы:

$$\lambda = -0.478, \\ Y = (0.231, 0.528, -0.351, 0.253, 0.177, 0.489, -0.422, 0.181)^T. \quad (51)$$

Для нахождения КИН необходимо знать НДС образца, обусловленное конкретным способом нагружения. Рассмотрим некоторые из них.

Нормальный отрыв. К грани AB приложена равномерно распределенная нормальная нагрузка $p_y = 100$ МПа. Закреплен образец следующим образом:

$$AF : u_x = 0, \quad FG : u_y = 0, \quad EG : u_x = \text{const}. \quad (52)$$

При таких граничных условиях величины u_y, σ_x, σ_y — четные функции x , а u_x, τ_{xy} — нечетные.

По результатам решения задачи теории упругости методом конечных элементов КИН вычисляется по описанной в предыдущем параграфе методике. В качестве контура L берется дуга окружности. За значение КИН был принят результат расчетов для радиуса

дуги C $a = 0.005$ мм:

$$K = 35.9.$$

Равномерный нагрев. Внешние нагрузки отсутствуют, способ закрепления такой же, как и в предыдущем примере. Образец равномерно нагрет на $T = 10$ К относительно температуры недеформированного состояния. Свойства материала от температуры не зависят, асимптотические формулы характеризуются параметрами (51). В этом примере КИН при тех же условиях

$$K = 22.7.$$

Сдвиг. К грани AB приложена равномерно распределенная касательная нагрузка $p_x = 100$ МПа. Способ закрепления следующий:

$$AF : u_y = 0, \quad FG : u_y = 0, \quad EG : u_x = 0. \quad (53)$$

Величины u_y, σ_x, σ_y — нечетные функции x , а u_x, τ_{xy} — четные. Значение КИН в этом случае

$$K = 658.5.$$

Так как во всех трех примерах параметры асимптотических формул одни и те же, то найденные КИН можно сравнивать. В частности, равномерный нагрев образца на 1 градус создает такое же асимптотическое НДС, что и приложение нормальной нагрузки в 6.3 МПа или сдвиговой нагрузки в 0.345 МПа.

5. Выводы

Силовой критерий оценки прочности крепления облицовки требует введения асимптотических формул, определяющих НДС в окрестности ребра плитки. Это может быть успешно сделано рассмотрением задачи об окрестности входящего угла. Для исследуемых объектов решение может быть построено в форме степенной функции r^λ , где λ — вещественное число в интервале $(-1; 0)$.

Наиболее трудоемкой задачей остается проблема вычисления КИН. Рассматриваемый в работе подход позволяет это сделать по

результатам конечно-элементного анализа, в том числе для случая температурных воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.
2. *Елисеев В.В.* Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 336 с.
3. *Lin K.Y., Tong P.* Singular finite elements for the fracture analysis of V-notched plate//Int. J. Numer. Meth. Eng. 1980. 15(9). P. 1343–1354.
4. *Costabel M., Dauge M., Yosibash Z.* A quasi-dual function method for extracting edge stress intensity functions//SIAM J. Math. Anal. 2004. 35(5). P. 1177–1202.
5. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
6. *Елисеев В.В., Кузин А.К.* Математическое моделирование и оценка прочности линейно-упругого тела в окрестности углового выреза//Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2011. 5(133). С. 68–73.
7. *Helsing, J., Jonsson A.* On the computation of stress fields on polygonal domains with V-notches//International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2002. 53. P. 433–453.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ

В. В. Платонов

Для сжатой в продольном направлении пластинки, находящейся в канале с жесткими стенками, получены критические значения сжимающего напряжения и длины прямых участков налегания на каждом этапе нагружения по классической теории и теории Тимошенко–Рейсснера. Проведен анализ результатов, полученных при аналитическом решении и при использовании трехмерной теории упругости в пакете ANSYS. Для трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии на основе теории С.А. Амбарцумяна получена критическая нагрузка, проведено сравнение с результатами, полученными по теории Тимошенко–Рейсснера.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современных конструкциях в качестве конструкционных материалов широко используются композитные, синтетические и другие неметаллические материалы. Отличительной особенностью этих материалов является повышенная податливость на межслоевой сдвиг. Для них даже небольшие по величине касательные напряжения существенно влияют на общую деформацию. Поэтому расчет пластин и оболочек из таких материалов с использованием теории Кирхгофа–Лявы может приводить к большим погрешностям.

В качестве элементов конструкций все чаще используются нанообъекты, и одной из задач наномеханики является необходимость расчета деформации, прочности, устойчивости нанообъектов. Проблема состоит в том, что свойства наноразмерных структурных эле-

Доклад на семинаре 29 ноября 2011 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00623а.

© В. В. Платонов, 2012

ментов отличаются от свойств в классической континуальной механике. Эти различия зависят от размера структурного элемента.

Для расчета напряженно-деформируемого состояния, решения задач устойчивости нанообъектов точность классической теории пластин и оболочек становится недостаточной. В связи с этим используются неклассические теории, построенные, как и классическая теория, методом гипотез, но менее жестких, чем гипотезы Кирхгофа–Лявы.

В статье рассматриваются некоторые задачи устойчивости пластин и оболочек на основе неклассических теорий: теории изгиба пластин Тимошенко–Рейсснера, теории анизотропных оболочек С.А. Амбарцумяна.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ НАНОГОФРИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Постановка задачи

В настоящий момент развитие науки позволило создать двумерные микро- и наноструктуры. Для некоторых квантовых приборов, например квантовых компьютеров, необходимы строго периодические квантовые системы. Особый интерес представляют системы, состоящие из одинаковых элементов одного и того же размера, которые расположены в двух или трех измерениях с высокой периодичностью. Перспективы развития нанотехнологии предполагают возможность создания квантовых структур из отдельных молекулярных слоев, молекул и атомов.

Современная молекулярно-лучевая эпитаксия позволяет из отдельных монослоев, монослой за монослоем, создавать сложные гетероструктуры из полупроводников GaAs, InAs, AlAs и т.д., твердых растворов на их основе, металлов, диэлектриков. С помощью данного подхода были созданы: наногофрированные квантовые системы, квантовые точки, молекулы из квантовых точек, сверхрешетки, кристаллы, нановолокна и композиционные материалы. Упрощенная последовательность формирования выпуклой InAs-пленки, освобожденной от связи с InP-подложкой в локальной области длиной L , схематично показана на рис. 1. Исходная сжатая пленка при ее освобождении от связи с подложкой упруго релакси-

рует, увеличивает свою длину и выпучивается. При создании дан-

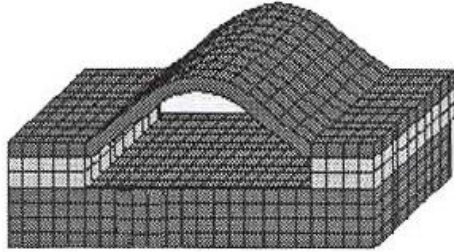


Рис. 1. Селективное удаление жертвенного слоя.

ных наноструктур для отсоединения пленки от подложки могут использоваться жертвенные слои (AlAs) и напряженные псевдоморфные InGaAs-слои, выращенные на GaAs-подложке [9, 13]. Движущей силой отсоединения пленки от подложки является упругая деформация сжатия, вызванная несоответствием параметров решеток пленки и подложки. Для отсоединения пленки от подложки используются жертвенные слои толщиной 1–10 нм. Напряженные пленки, отсоединяясь от подложки, изменяют свою форму, двигаются и вступают во взаимодействие с соседними слоями. Освобождение напряженных пленок от связи с подложкой, у которых запасена упругая энергия порядка 0.5 эВ на атом, позволяет формировать наноструктуры различных форм. Достигнув размеров, характерных для данной пленки, оболочка становится устойчивой к дальнейшему травлению.

На рис. 2 показана простейшая конструкция, содержащая гофрированную пленку (напряженный InGaAs-слой расположен между двумя жертвенными AlAs-слоями). Справа — фотография, сделанная электронным микроскопом. Селективное удаление жертвенных слоев приводит к освобождению и гофрированию InGaAs-слоя. Движущей силой формирования этой гофрированной пленки также являются упругие напряжения, существующие в исход-

ных структурах из-за несоответствия параметров решеток пленки и подложки. Постоянные решетки материалов InAs- и GaAs-слоев различаются значительно ($\Delta a/a = 7,2\%$), внутренние упругие напряжения могут достигать 1 ГПа. Таких напряжений достаточно для формирования гофрировок с нанопериодом. Период и амплитуда задаются расстоянием между подложкой и верхним слоем.



Рис. 2. Гофрировка с фиксированной амплитудой и периодом. Справа — фотография, сделанная электронным микроскопом.

В параграфе 2 исследуется устойчивость пластинки, показанной на рис. 2. Конструкция моделируется тонкой пластинкой длиной a , защемленной между двумя жесткими основаниями с зазором Δ . Пластинка сжимается в продольном направлении напряжением σ_x . При достижении напряжением первого критического значения пластинка теряет устойчивость и начинает прогибаться. После соприкосновения с основанием начинается образовываться участок налегания пластинки к жесткому основанию. Когда участок налегания становится достаточно большим, он тоже теряет устойчивость. Пластинка "процелкивается" второй раз и образуются три зоны налегания пластинки к основаниям. При последующем нагружении участки налегания также теряют устойчивость. По такому алгоритму получается гофрированная система (см. рис. 2).

2.2. Решение по теории Кирхгофа–Лявы

Рассмотрим пластинку, сжатую в продольном направлении оси Ox). Размеры пластинки $a \times b$, толщина h . Края пластинки $x = 0$ и $x = a$ защемлены. Величина зазора между пластинкой и основаниями равна Δ (рис. 3). В рассматриваемом случае считается, что прогиб пластинки при $x = \text{const}$ один и тот же, т.е. он не зависит

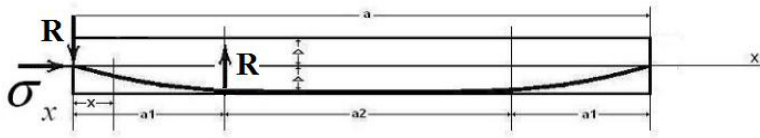


Рис. 3. Схематическое изображение сжатой пластинки.

от y . Решается двухмерная задача. Пользуясь известным дифференциальным уравнением изгиба жестких пластинок [3], получим

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - q^0 = 0,$$

где в нашем случае $q^0 = - \left(\sigma_x \frac{d^2 w}{dx^2} \right) h$ — фиктивная поперечная нагрузка [4], $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки. Общий интеграл уравнения может быть представлен в следующем виде:

$$w(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C + C_1 x, \quad \alpha^2 = \frac{\sigma_x h}{D}.$$

Для жестко защемленных краев пластинки граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w &= 0, & x &= 0, a, \\ \frac{dw}{dx} &= 0, & x &= 0, a. \end{aligned}$$

Пользуясь этими условиями, получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} B + C &= 0, \\ A\alpha + C_1 &= 0, \\ A \sin \alpha a + B \cos \alpha a + C + C_1 a &= 0, \\ A\alpha \cos \alpha a - B\alpha \sin \alpha a + C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Для постоянных A и B система из 4 уравнений преобразуется в систему двух уравнений:

$$A(\sin \alpha a - \alpha a) + B(\cos \alpha a - 1) = 0,$$

$$A(\cos \alpha a - 1) - B \sin \alpha a = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение, когда ее дискриминант равен нулю. Из этого условия получаем следующее уравнение:

$$\sin \frac{\alpha a}{2} \left(\sin \frac{\alpha a}{2} - \frac{\alpha a}{2} \cos \frac{\alpha a}{2} \right) = 0.$$

Приравнявая нулю первый множитель, получим

$$\alpha a = 2\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Наименьшее возможное значение αa равно 2π . Если же приравнять нулю выражение, стоящее в скобках, то наименьший корень будет $\alpha a \cong 8,99$. Таким образом, для определения критического напряжения необходимо положить $\alpha a = 2\pi$. Тогда, учитывая выражение для α^2 , имеем

$$\sigma_x^{kr_1} = \frac{4\pi^2 D}{ha^2}. \quad (1)$$

Примем, что при $\sigma_x > \frac{4\pi^2 D}{ha^2}$ существует зона a_2 плотного прилегания пластинки к основанию. Составим уравнение срединной линии пластинки на участке $0 \leq x \leq a_1$:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - q^0 = Rx.$$

Решение ищем в виде

$$w(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{R}{\sigma_x} x, \quad \alpha^2 = \frac{h\sigma_x}{D}.$$

Граничные условия:

$$w(0) = 0, \quad w(a_1) = \Delta, \quad w'(a_1) = 0,$$

откуда

$$B = 0,$$

$$A \sin \alpha a_1 + \frac{R}{\sigma_x} a_1 = \Delta,$$

$$A \alpha \cos \alpha a_1 + \frac{R}{\sigma_x} = 0.$$

На участке a_2 пластинка остается прямой. Это означает, что $M_i = 0$. Поэтому

$$\sigma_x \Delta - R x_1 + R(x_1 - a_1) = 0.$$

Из этих уравнений определяем:

$$\begin{aligned} R &= \sigma_x \frac{\Delta}{a_1}, \quad A = \frac{\Delta}{\pi}, \\ a_1 &= \frac{\pi}{\alpha}, \quad \sigma_x = \frac{4\pi^2 D}{h a_1^2}, \\ w(x) &= \frac{\Delta}{\pi} (\sin \alpha x + \alpha x). \end{aligned} \quad (2)$$

Из выражения (2), в частности, следует, что при значении $a_1 = \frac{a}{2}$ напряжение будет

$$\sigma_x = \frac{16\pi^2 D}{h a^2}. \quad (3)$$

Это означает, что в случае

$$\frac{4\pi^2 D}{h a^2} \leq \sigma_x \leq \frac{16\pi^2 D}{h a^2}$$

пластинка соприкасается с основанием только по одной прямой.

Примем, что при нагрузке $\sigma_x > \frac{16\pi^2 D}{h a^2}$ образуется зона плотного налегания пластинки к жесткому основанию [12]. Обозначим длину этого участка вдоль оси Ox $a_2 = a - 2a_1$. Этот участок остается прямым. Когда прямой участок станет достаточно большим, на нем тоже произойдет потеря устойчивости. Критическое напряжение для среднего участка будет $\sigma_x = \frac{16\pi^2 D}{h a_2^2}$. Но, с другой стороны,

$\sigma_x = \frac{4\pi^2 D}{ha_1^2}$. Приравнивая выражения для напряжений, находим:

$$a_1 = \frac{a}{4}, \quad \sigma_x^{kr_2} = \frac{64\pi^2 D}{ha^2}. \quad (4)$$

После того как средний участок изогнется, a_1 скачком изменит свое значение и станет равным $\frac{a}{6}$ (нужно провести аналогичные рассуждения, взяв только $a_2 = \frac{a}{2} - a_1$). Рассматривая теперь каждую треть пластинки как новую самостоятельную пластинку, мы можем сохранить полученные выше уравнения (1)–(4), заменив в них a на $\frac{a}{3}$. Выражение (3) при этом даст:

$$a_1 = \frac{a}{6}, \quad \sigma_x = \frac{144\pi^2 D}{ha^2}.$$

Это означает, что при

$$\sigma_x > \frac{144\pi^2 D}{ha^2}$$

начинается снова прилегание пластинки к основаниям по участкам, При

$$\frac{64\pi^2 D}{ha^2} \leq \sigma_x \leq \frac{144\pi^2 D}{ha^2}$$

пластинка соприкасается с основаниями по трем прямым. В Табл. 1 представлены интервалы изменения напряжения при нагрузке, при различных параметрах пластинки. На рис. 4 показаны основные формы равновесия пластинки, в Табл. 2 представлены интервалы изменения напряжения при нагрузке.

Таблица 1. Интервалы изменения напряжения при нагрузке

$\sigma_x, \frac{h}{a} = \frac{1}{20}$	$\sigma_x, \frac{h}{a} = \frac{1}{40}$	$\sigma_x, \frac{h}{a} = \frac{1}{80}$
$[0, 0.24 \cdot 10^{-2}]$	$[0, 0.61 \cdot 10^{-3}]$	$[0, 0.15 \cdot 10^{-3}]$
$[0.24 \cdot 10^{-2}, 0.98 \cdot 10^{-2}]$	$[0.61 \cdot 10^{-3}, 0.24 \cdot 10^{-2}]$	$[0.15 \cdot 10^{-3}, 0.61 \cdot 10^{-3}]$
$[0.98 \cdot 10^{-2}, 0.39 \cdot 10^{-2}]$	$[0.24 \cdot 10^{-2}, 0.98 \cdot 10^{-2}]$	$[0.61 \cdot 10^{-3}, 0.24 \cdot 10^{-2}]$
$[0.39 \cdot 10^{-2}, 0.88 \cdot 10^{-1}]$	$[0.98 \cdot 10^{-2}, 0.22 \cdot 10^{-1}]$	$[0.24 \cdot 10^{-2}, 0.55 \cdot 10^{-2}]$
$[0.88 \cdot 10^{-1}, 0.35 \cdot 10^{-1}]$	$[0.22 \cdot 10^{-1}, 0.88 \cdot 10^{-1}]$	$[0.55 \cdot 10^{-2}, 0.22 \cdot 10^{-1}]$

2.3. Теория Тимошенко–Рейсснера

Рассмотрим ту же задачу, исходя из уточненной теории пластин Тимошенко–Рейсснера, но без учета поперечного обжатия [5]. Иными словами, будем считать, что прогиб не меняется по толщине пластинки. Пластинка сжата в продольном направлении. Края пластинки защемлены, величина зазора между пластинкой и основаниями равна Δ (см. рис. 3). Будем считать, что прогиб пластинки при $x = \text{const}$ один и тот же, т.е. он не зависит от координаты y . Как и раньше, решаем двухмерную задачу.

В рассматриваемом случае разрешающее дифференциальное уравнение теории Тимошенко–Рейсснера для прогиба [5] имеет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q^0 + \frac{h^2}{10} \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \frac{d^2 q^0}{dx^2}, \quad (5)$$

где $q^0 = - \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) h$ – фиктивная поперечная нагрузка, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu)}$ – цилиндрическая жесткость пластинки. Для защемленных краев граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} w &= 0 & x &= 0, a, \\ \frac{dw}{dx} &= 0 & x &= 0, a. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной, введя безразмерную координату $\tilde{x} = \frac{x}{a}$. С учетом этой замены уравнение (5) для прогиба принимает вид

$$\frac{d^4 w}{d\tilde{x}^4} \left(1 - \frac{h^3 \sigma_x (2 - \nu)}{10D(1 - \nu)} \right) + \frac{h \sigma_x a^2}{D} \frac{d^2 w}{d\tilde{x}^2} = 0. \quad (6)$$

Введем дополнительные обозначения:

$$\alpha^2 = \frac{\sigma_x a^2 h}{D}, \quad \beta = \frac{h^2}{a^2} \frac{(2 - \nu)}{10(1 - \nu)},$$

которые позволяют уравнение (6) записать в следующем виде:

$$\frac{d^4 w}{d\tilde{x}^4} + \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha^2 \beta)} \frac{d^2 w}{d\tilde{x}^2} = 0.$$

Интеграл этого уравнения можно представить как

$$w(\tilde{x}) = A \cos \bar{\alpha} \tilde{x} + B \sin \bar{\alpha} \tilde{x} + C + C_1 \tilde{x}, \quad \bar{\alpha}^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2 \beta}.$$

После подстановки значения для величины прогиба $w(\tilde{x})$ в граничные условия получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} B + C &= 0, \\ A\bar{\alpha} + C_1 &= 0, \\ A \sin \bar{\alpha} + B \cos \bar{\alpha} + C + C_1 &= 0, \\ A\bar{\alpha} \cos \bar{\alpha} - B\bar{\alpha} \sin \bar{\alpha} + C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Для постоянных A и B система из 4 уравнений преобразуется в систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} A(\sin \bar{\alpha} - \bar{\alpha}) + B(\cos \bar{\alpha} - 1) &= 0, \\ A(\cos \bar{\alpha} - 1) - B \sin \bar{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет нетривиальное решение при равенстве дискриминанта нулю. Из этого условия получаем следующее уравнение:

$$\sin \frac{\bar{\alpha}}{2} \left(\sin \frac{\bar{\alpha}}{2} - \frac{\bar{\alpha}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}}{2} \right) = 0.$$

Решая его так же, как для случая классической теории для определения критического напряжения, мы должны положить $\bar{\alpha} = 2\pi$. Тогда

$$\bar{\alpha}^2 = 4\pi^2 = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2 \beta},$$

или, после подстановки выражения для α^2 ,

$$4\pi^2 (1 - 4\pi^2 \beta) = \frac{\sigma_x a^2 h}{D}.$$

Отсюда критическое напряжение таково

$$\sigma_x^{kr1} = \frac{4\pi^2 D}{ha^2} (1 - 4\pi^2 \beta), \quad (7)$$

где β — малый параметр порядка $O\left(\frac{h^2}{a^2}\right)$.

Из выражения (7), в частности, следует, что при значении $a_1 = \frac{a}{2}$ напряжение будет $\sigma_x = \frac{16\pi^2 D}{ha^2} \left(1 - 4\pi^2 \beta\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{16\pi^2 D}{ha^2} (1 - 16\pi^2 \beta(a))$. Это означает, что в случае

$$\frac{16\pi^2 D}{ha^2} \left(1 - 4\pi^2 \beta\left(\frac{a}{2}\right)\right) \leq \sigma_x \leq \frac{16\pi^2 D}{ha^2} (1 - 16\pi^2 \beta(a))$$

пластинка соприкасается с основанием только по одной прямой.

Примем, что при напряжении $\sigma_x > \frac{16\pi^2 D}{ha^2} (1 - 16\pi^2 \beta(a))$ образуется зона плотного налегания пластинки к жесткому основанию. Обозначим, как и прежде, длину этого прямого участка вдоль оси Ox $a_2 = a - 2a_1$. Когда прямой участок станет достаточно большим, на нем тоже произойдет потеря устойчивости. Критическое напряжение для среднего участка будет $\sigma_x = \frac{16\pi^2 D}{ha_2^2} (1 - 16\pi^2 \beta(a_2))$. Но, с другой стороны, $\sigma_x = \frac{4\pi^2 D}{ha_1^2} (1 - 4\pi^2 \beta(a_1))$. Приравняв выражения для напряжений, получим уравнение

$$a_1^2 a_2^4 - 4K a_2^4 = 4a_1^4 a_2^2 - 64K a_1^4, \quad K = \frac{\pi^2 h^2 (2 - \nu)}{10(1 - \nu)}.$$

Будем решать это биквадратное уравнение относительно a_2 :

$$(a_1^2 - 4K)a_2^4 - 4a_1^4 a_2^2 + 64K a_1^4 = 0.$$

Искомый корень этого уравнения будет

$$a_2^2 = 4a_1^2 \left(1 + \frac{4K}{a_1^2}\right).$$

Извлечем квадратный корень из обеих частей, подставив значение $a_2 = a - 2a_1$, получим уравнение относительно длины a_1 :

$$4a_1^2 - aa_1 + 4K = 0,$$

откуда найдем искомое значение

$$a_{1_1} = \frac{a + a\sqrt{1 - 64\pi^2 \frac{(2-\nu)h^2}{10(1-\nu)a^2}}}{8} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 64\pi^2\beta(a)}}{8} \right) a.$$

Критическое напряжение тогда получится

$$\sigma_x^{kr_2} = \frac{4\pi^2 D}{ha_{1_1}^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_{1_1})).$$

После того как средний участок изогнется, a_{1_1} скачком изменит свое значение и станет равным $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 192\pi^2\beta(a)}}{12} \right) a$. Рассматривая теперь каждую часть пластинки как новую самостоятельную пластинку, мы можем сохранить полученные выше уравнения. Выражение для критического напряжения при этом даст

$$a_{1_2} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 192\pi^2\beta(a)}}{12} \right) a, \quad \sigma_x = \frac{4\pi^2 D}{ha_{1_2}^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_{1_2})).$$

Это означает, что при

$$\sigma_x \geq \frac{4\pi^2 D}{ha_{1_2}^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_{1_2}))$$

начинается снова прилегание пластинки к основаниям по участкам. Пластинка соприкасается с основаниями по трем прямым при

$$\frac{4\pi^2 D}{ha_{1_1}^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_{1_1})) \leq \sigma_x \leq \frac{4\pi^2 D}{ha_{1_2}^2} (1 - 4\pi^2\beta(a_{1_2})).$$

На рис. 4 показаны основные формы равновесия пластинки при нагрузке. В Табл. 2 даны интервалы изменения безразмерного напряжения $\sigma_x^* = \frac{ha^2}{4\pi^2 D} \sigma_x$ при нагрузке по классической теории и теории Тимошенко–Рейсснера.

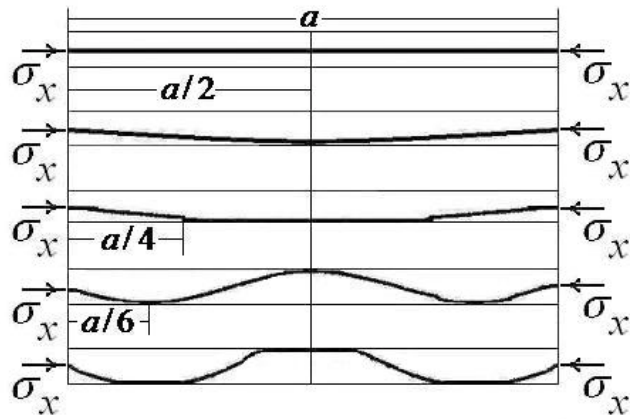


Рис. 4. Первые формы равновесия пластинки при нагрузке.

Сравнение выражений для соответствующих значений критических напряжений в теориях Кирхгофа–Лявы и Тимошенко–Рейсснера показывает, что напряжения в уточненной теории меньше напряжений, полученных в классической теории на величину порядка $\left(\frac{h}{a}\right)^2$. А длины прямых участков при использовании теории Тимошенко–Рейсснера больше на величину порядка $\left(\frac{h}{a}\right)$.

2.4. Расчет задачи методом конечных элементов

Расчет задачи методом конечных элементов производился с помощью пакета ANSYS [7]. Теоретическое решение было получено в рамках линейной теории упругости. В пакете ANSYS решались задача потери устойчивости по нелинейной теории и контактная задача. Рассматривалась тонкая пластинка, защемленная между двумя жесткими основаниями с зазором. Пластинка сжималась в продольном направлении и теряла устойчивость. При постепенном увеличении нагрузки был реализован алгоритм, рассмотренный в

Таблица 2. Интервалы изменения напряжения при нагрузке

Классическая теория, σ_x^*	Теория Тимошенко–Рейсснера, σ_x^*
[0, 1]	$[0, (1 - 4\pi^2\beta(a))]$
[1, 4]	$[(1 - 4\pi^2\beta(a)), 4(1 - 16\pi^2\beta(a))]$
[4, 16]	$4(1 - 16\pi^2\beta(a)), \left(\frac{a}{a_{11}}\right)^2 (1 - 4\pi^2\beta(a_{11}))$
[16, 36]	$\left(\frac{a}{a_{11}}\right)^2 (1 - 4\pi^2\beta(a_{11})), \left(\frac{a}{a_{21}}\right)^2 (1 - 4\pi^2\beta(a_{21}))$
[36, 144]	$\left(\frac{a}{a_{21}}\right)^2 2(1 - 4\pi^2\beta(a_{21})), \left(\frac{a}{a_{22}}\right)^2 (1 - 4\pi^2\beta(a_{22}))$

аналитическом решении. На вклейке рис. 4 и 5 показаны случаи одной и трех зон контакта соответственно, на вклейке рис. 6 и 7 представлены контактные напряжения для них.

В Табл. 3 представлено численное сравнение результатов аналитического и численного решений. Для аналитического решения представлены различные варианты граничных условий для второго и третьего критических значений ("ш" — шарнирное опирание, "у" — упругая заделка, "з" — защемление), т.е. для случаев контакта пластинки с жесткими основаниями. Анализ результатов показывает, что условие упругой заделки для случая теории Тимошенко–Рейсснера наиболее близко к численному решению в пакете ANSYS.

Таблица 3. Сравнение результатов аналитического и численного решений

	ТР–ш	КЛ–ш	ANSYS	ТР–у	КЛ–у	ТР–з	КЛ–з
$\sigma_x^{kr1} \cdot 10^4$			0.923			0.962	0.974
$\sigma_x^{kr2} \cdot 10^3$	0.0383	0.0384	0.121	0.127	0.136	0.147	0.153
$\sigma_x^{kr3} \cdot 10^2$	0.033	0.034	0.110	0.115	0.122	0.131	0.137

2.5. О величине зазора Δ

Аналитическое решение задачи было получено на основе линей-

ной теории тонких пластинок, которая применима лишь к довольно слабым изгибам. Условием применимости этой теории является малость прогиба по сравнению с толщиной h пластинки [8]. Для сильно изогнутой пластинки прогиб w уже не может предполагаться малым по сравнению с толщиной h . Деформация, однако, по-прежнему мала в том смысле, что тензор деформации должен быть мал. Практически это обычно означает, что соблюдается условие $w \ll a$, т. е. прогиб должен быть существенно меньше по сравнению с длиной пластинки a . Следует отметить, что изгиб пластинки сопровождается, вообще говоря, ее общим растяжением. Однако в линейной теории этим растяжением можно пренебречь. Таким образом, прогиб должен быть меньшего порядка, чем толщина пластинки. Величина прогиба соизмерима с величиной зазора Δ , поэтому зазор должен удовлетворять следующему соотношению:

$$\Delta \sim h.$$

При больших изгибах влиянием растяжения пластинки на величину ее прогиба пренебрегать нельзя. Для оценки величины Δ в этом случае воспользуемся полной системой нелинейных уравнений сильного изгиба [6]:

$$D\Delta^2 w - h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = q^0, \quad (8)$$

$$\Delta^2 \Phi + E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) = 0. \quad (9)$$

В этих уравнениях Φ — функция напряжений. Оценка порядка малости членов уравнения (9) показывает, что функция напряжения $\Phi \sim Ew^2$. Заметим, что оценка оправдана, так как функция прогиба обладает достаточной гладкостью. При условии $\Delta \gg h$ первый член в (8) мал по сравнению со вторым членом, который имеет следующий порядок малости:

$$\frac{hw\Phi}{a^4} \sim \frac{Ehw^3}{a^4}.$$

Сравнивая второй член равенства с внешним напряжением q^0 , получаем, что порядок малости прогиба будет

$$w \sim \left(\frac{a^4 q^0}{Eh} \right)^{\frac{1}{3}}$$

и, соответственно, порядок для величины зазора получится

$$\Delta \sim \left(\frac{a^4 q^0}{Eh} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Отсюда, в частности, видно, что величина зазора Δ пропорциональна кубическому корню из напряжения и обратно пропорциональна кубическому корню из толщины пластинки.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

3.1. Постановка задачи

Исследование динамической устойчивости длинной цилиндрической оболочки под воздействием радиального давления [2] показало, что, как и при решении задач статики и колебаний оболочек [10], учет поперечного сдвига может приводить к существенным поправкам по сравнению с классической теорией. В данной статье рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия. Используется уточненная теория, учитывающая поперечные деформации сдвига согласно С.А. Амбарцумяну [1]. Определяются критические нагрузки для трансверсально-изотропного и изотропного материалов.

3.2. Основные уравнения уточненной теории

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку с радиусом кривизны $R = \text{const}$, срединная поверхность которой отнесена к криволинейной ортогональной системе координат α, β . Пусть α направлена вдоль образующей, а β — по дуге поперечного сечения. Для коэффициентов первой квадратичной формы и радиусов кри-

визны будем иметь $A = B = 1$, $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, $\kappa_2 = \frac{1}{R}$. Выражения для внутренних сил и моментов, согласно работе [1], имеют вид

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) \right],$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right],$$

$$Q_1 = \frac{h^3}{12} \phi,$$

$$Q_2 = \frac{h^3}{12} \psi,$$

$$T = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right),$$

$$M_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{h^2}{10G'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) \right],$$

$$M_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{h^2}{10G'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \right],$$

$$H = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{h^2}{10G'} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \right].$$

Уравнения равновесия, которым должны удовлетворять данные внутренние силы и моменты, выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{T_2}{R} - \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} = Z,$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} = Q_1,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \beta} = Q_2.$$

После подстановки выражений для внутренних сил и моментов в уравнения равновесия получим систему разрешающих уравнений относительно функций $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$, $\phi(\alpha, \beta)$ и $\psi(\alpha, \beta)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R} \right) - \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) = Z,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta w - \frac{h^2}{10G'} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \phi + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \frac{1-\nu^2}{E} \phi = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \Delta w - \frac{h^2}{10G'} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \psi + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \frac{1-\nu^2}{E} \psi = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

После исключения функций $\phi(\alpha, \beta)$ и $\psi(\alpha, \beta)$ из трех последних уравнений системы получим систему уравнений относительно искомого перемещения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w - \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} (1 - h^{**} \Delta) \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R} \right) = \\ = -(1 - h^{**} \Delta) Z, \end{aligned}$$

где

$$h^{**} = \frac{Eh^2}{10(1-\nu^2)G'}.$$

Величина h^{**} характеризует влияние поперечного сдвига на напряженно-деформированное состояние оболочки. При $h^{**} = 0$ получается система уравнений классической теории.

Выполним операцию $\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$ над первым уравнением, операцию $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ над вторым, после сложения получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \Delta u + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \Delta v + \frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} = 0.$$

Далее выполним операцию $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ над первым уравнением и операцию $\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$ над вторым; после вычитания второго уравнения из первого получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Delta u - \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \Delta v - \frac{2}{R} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} = 0.$$

Сложим полученные уравнения, найдем

$$\Delta^2 u = -\frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2}$$

и аналогичное уравнение

$$\Delta^2 v = -\frac{2+\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3}.$$

После исключения u и v из третьего уравнения получим систему трех уравнений относительно искомых функций u, v, w :

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= -\frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \\ \Delta^2 v &= -\frac{2+\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3}, \end{aligned}$$

$$D\Delta^4 w + \frac{Eh}{R^2}(1 - h^{**}\Delta)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} = (1 - h^{**}\Delta)\Delta^2 Z,$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, Z — нормальная составляющая внешней нагрузки, E — модуль Юнга в тангенциальных направлениях, ν — коэффициент Пуассона, G' — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к поверхности оболочки. В системе

$$\Delta = R^2 \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \right) \right]$$

оператор Лапласа в безразмерном виде. В применении к задачам устойчивости эта система уравнений справедлива для оболочек средней длины. Более подробный анализ, представленный в работе [4], показывает, что параметры оболочки средней длины должны удовлетворять условию

$$1,38\sqrt{\frac{h}{R}} \leq \frac{L}{R} \leq 0,57\sqrt{\frac{R}{h}},$$

где h — толщина, R — радиус, L — длина оболочки.

3.3. Критическая нагрузка

Оболочка находится под действием осевого сжатия. Нагрузка, приходящаяся на единицу длины дуги поперечного сечения оболочки, равна p . Для начального безмоментного состояния внутренние силы имеют вид

$$T_1^0 = -p, \quad T_2^0 = 0, \quad T^0 = 0.$$

Тогда для интенсивности фиктивной поверхностной нагрузки Z^* имеем

$$Z^* = -p \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}.$$

После подстановки Z^* в систему для решения задачи статической устойчивости получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\Delta^2 u = -\frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2},$$

$$\Delta^2 v = -\frac{2+\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3}, \quad (10)$$

$$\Delta^4 w + \frac{Eh}{R^2} (1 - h^{**} \Delta) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + (1 - h^{**} \Delta) \Delta^2 \left(p \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) = 0.$$

Будем искать решение системы (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= A \cos \frac{m\pi\alpha}{L} \sin \frac{n\beta}{R}, \\ v &= B \sin \frac{m\pi\alpha}{L} \cos \frac{n\beta}{R}, \\ w &= C \sin \frac{m\pi\alpha}{L} \sin \frac{n\beta}{R}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выбор решения в виде (11) означает, что удовлетворяем условиям шарнирного опирания по торцам. Подставив значения для $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ в систему (10), после преобразований получим систему уравнений для постоянных A , B и C :

$$\begin{cases} A(\lambda^2 + n^2) = C\lambda(\nu\lambda^2 - n^2), \\ B(\lambda^2 + n^2) = -C\lambda((2 + \nu)\lambda^2 + n^2), \\ C \left[c^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{1 + h^*(\lambda^2 + n^2)} + \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{p\lambda^2}{E} \right] = 0, \end{cases}$$

где

$$\lambda = \frac{m\pi R}{L}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2}, \quad h^* = \frac{Eh^2}{10(1 - \nu^2)R^2 G'}.$$

Из условия существования нетривиального решения третьего уравнения получим соотношение для определения критической нагрузки:

$$c^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{1 + h^*(\lambda^2 + n^2)} + \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2} = -\frac{p\lambda^2}{E}. \quad (12)$$

Рассмотрим задачу устойчивости цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия в классической постановке. Уравнение устойчивости оболочки [4] в этом случае имеет вид

$$\frac{D}{h} \Delta^4 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + p \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) = 0. \quad (13)$$

После подстановки значения $w(\alpha, \beta)$ из системы (10) в уравнение (13) получим уравнение для определения критической нагрузки:

$$c^2 (\lambda^2 + n^2)^2 + \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2} = -\frac{p\lambda^2}{E}. \quad (14)$$

Уравнение (12) отличается от соответствующего уравнения классической теории (14) лишь наличием члена с h^* , который учитывает явление поперечного сдвига.

Из уравнений (12) и (14) получаем выражения для определения критической нагрузки:

$$p^{kl} = -E \left[c^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right], \quad (15)$$

$$p^a = -E \left[c^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2 (1 + h^*(\lambda^2 + n^2))} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right]. \quad (16)$$

Минимизируя p^{kl} по ξ , где $\xi = \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2}$, для ξ получим

$$\xi = \frac{1}{c}.$$

Тогда соответствующая критическая нагрузка будет равна:

$$p_{kp}^{kl} = -2cE. \quad (17)$$

Минимизируя p^a как функцию двух переменных λ^2 и n^2 , получим критическую нагрузку, соответствующую уточненной теории:

$$p_{kp}^a = -2cE + h^*E. \quad (18)$$

На рис. 5 показан график сжимающей нагрузки. Верхняя ветвь соответствует классической постановке, построена по формуле (17), остальные ветви соответствуют уточненной теории и построены по формуле (18) при разных отношениях G'/E . Минимум соответствует критической нагрузке. Видно, что, чем меньше отношение G'/E , тем меньше критическая нагрузка и существеннее уточнение с классической постановкой.

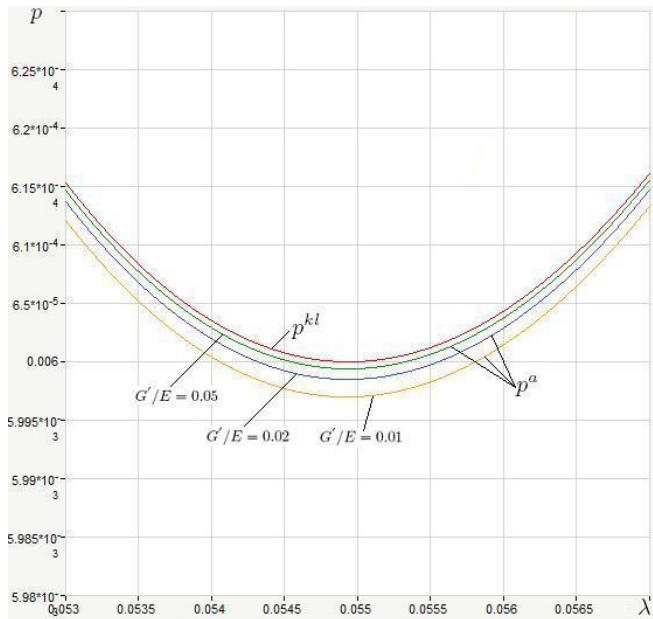


Рис. 5. График зависимости сжимающей нагрузки p^{kl} и p^a от параметра λ при разных значениях отношения G'/E .

3.4. Сравнение с моделью Тимошенко–Рейсснера

В работе П.Е. Товстика [11] рассматривалась устойчивость тонкой трансверсально-изотропной круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Приводится сравнение результатов по двумерным моделям Кирхгофа–Лявы и Тимошенко–Рейсснера. По модели Кирхгофа–Лявы для усилия $-T_1^0$ имеем

$$-T_1^0 = \frac{D(k^2 + m^2)^2}{R^2 k^2} + \frac{E h k^2}{(k^2 + m^2)^2},$$

где R — радиус оболочки, h — толщина, E — модуль Юнга, D — цилиндрическая жесткость, k и m — волновые числа. Минимизируя $-T_1^0$ по волновым числам, найдем искомое значение критической

нагрузки:

$$T_1^0 = \sigma_0 h, \quad -\sigma_0 = \frac{Eh}{\sqrt{3(1-\nu^2)R}}, \quad (19)$$

где σ_0 — начальное напряжение, ν — коэффициент Пуассона, а минимум достигается на множестве значений:

$$\mu(k^2 + m^2) = k, \quad \mu^4 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{R^2},$$

где $\mu \ll 1$ — малый параметр тонкостенности.

Для модели Тимошенко–Рейсснера для осевого усилия имеем выражение:

$$-T_1^0 = \frac{D(k^2 + m^2)^2}{R^2 k^2 [1 + (D/(R^2 \Gamma h))(k^2 + m^2)]} + \frac{Ehk^2}{(k^2 + m^2)^2},$$

где

$$\Gamma = \frac{5}{6} G_{13}.$$

Вычисляя минимум, находим критическое значение:

$$-\sigma_0 = \mu^2 E(2 - \eta); \quad \eta \leq 1, \quad (20)$$

где $\eta = \frac{\mu^2 E}{\Gamma}$ — сдвиговой параметр.

Сравнение выражений (17) и (19), (18) и (20) показывает, что данные выражения одинаковы, только записаны в разных переменных. Это означает, что модель Тимошенко–Рейсснера и уточненная теория Амбарцумяна приводят в данной задаче к одинаковым результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек // М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Бауэр С. М., Клец О. Г., Морозов Н. Ф. О поведении трансверсально-анизотропных цилиндрических оболочек при динамическом приложении радиального давления // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. Вып. 4. С. 19–25.

3. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов // М.: Тех. теор. лит., 1953. 856 с.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем // М.: Физматлит., 1963. 880 с.
5. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек // М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
6. *Каудерер Г.* Нелинейная механика // М.: Изд-во ин. лит., 1961. 778 с.
7. *Копюзов А. В.* Основы анализа конструкций в ANSYS // Казань, 2001. 102 с.
8. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория упругости // М.: Физматлит., 2003. 264 с.
9. *Принц В. Я.* Трехмерные самоформирующиеся наноструктуры на основе свободных напряженных гетероструктур // Известия вузов "Физика" 2003. С. 46(6).
10. *Товстик П. Е.* Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. С-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 3.
11. *Товстик П. Е.* Устойчивость трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Известия РАН. Механика твердого тела. 2009. № 4. С. 70–83.
12. *Феодосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов // М.: Наука, 1973. 400 с.
13. *Prinz V. Y.* A new concept in fabrication building blocks for nanoelectronic and nanomechanic device // Microelectronic Engineering. 2003. P.69 (2–4).

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ НАНОМЕТРОВОГО РАЗМЕРА

А.А. ЯЗОВСКАЯ

Рассматривается задача об упругой плоскости, ослабленной эллиптическим вырезом нанометрового размера под действием напряжений на бесконечности. Учитываются статочное напряжение и дополнительное поверхностное напряжение, действующее на границе. Основываясь на методе Колосова — Мухелишвили решение задачи сводится к решению гиперсингулярного интегрального уравнения относительно неизвестного поверхностного напряжения. В частном случае для кругового отверстия получено решение данного уравнения в явном виде. Построены зависимости окружного напряжения на границе отверстия от радиуса кругового отверстия с учетом и без учета остаточного и поверхностного напряжений. Показано, что в нанометровом диапазоне при учете поверхностного напряжения концентрация напряжений зависит от размера отверстия, а также от упругих постоянных поверхности и объемного материала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понимание свойств поверхностей твердых материалов является важным с научной и технологической точек зрения. Поверхности твердых тел обладают интересными свойствами в связи с тем, что они имеют атомы с наименьшим числом соседей, и, следовательно, избытком энергии по сравнению с атомами в объеме. Свойства поверхностей играют важную роль в процессах, начиная от межклеточного транспорта в биологических системах и кончая ростом тонких пленок в микроэлектронике [1].

В настоящее время стало возможным создавать структуры и приборы нанометровых размеров. Эти структуры характеризуются большим отношением количества частиц (массы) поверхности

Доклад на семинаре 13 декабря 2011 г.

© А.А. Язовская, 2012

к количеству частиц (массе) объема и показывают поведение «зависимости от размера». Например, модуль Юнга цилиндрического образца значительно возрастает, когда диаметр цилиндра становится очень мал. Важным свойством твердых поверхностей является поверхностное напряжение. Когда жидкая поверхность деформируется, атомы из объема свободно мигрируют на поверхность (таким образом, число атомов на единицу площади поверхности остается постоянным в процессе деформации). В твердом теле поверхностное напряжение возникает в связи с тем, что атомы из объема не могут двигаться, чтобы занять поверхность. Появляются дополнительные усилия [1, 2], которые задаются формулой Шатлворта:

$$\tau(\varepsilon) = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon},$$

где τ — поверхностное напряжение, γ — поверхностная энергия, ε — деформация.

Учет поверхностных напряжений в твердых телах [3 — 6] может быть особо существенным для нанобъектов. Здесь имеют место неожиданные эффекты, не соответствующие нашим традиционным представлениям [7, 8]. В частности, поверхностные эффекты отвечают за размерный эффект (size-effect) — материальные свойства образца зависят от его размера. Например, модуль Юнга цилиндрического образца значительно возрастает, когда диаметр цилиндра становится очень мал.

2. Постановка задачи

Рассматривается упругая плоскость с эллиптическим отверстием под действием напряжений на бесконечности (рис. 1). Граничные условия описываются с помощью обобщенного закона Лапласа — Юнга. В случае плоской деформации они имеют вид

$$\begin{cases} \sigma_{nn} - \frac{\sigma_{tt}^s}{R_1} = 0, \\ \sigma_{nt} + \frac{1}{H} \frac{\partial \sigma_{tt}^s}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где σ_{tt}^s — окружное поверхностное напряжение, σ_{nn} , σ_{nt} и σ_{tt} —

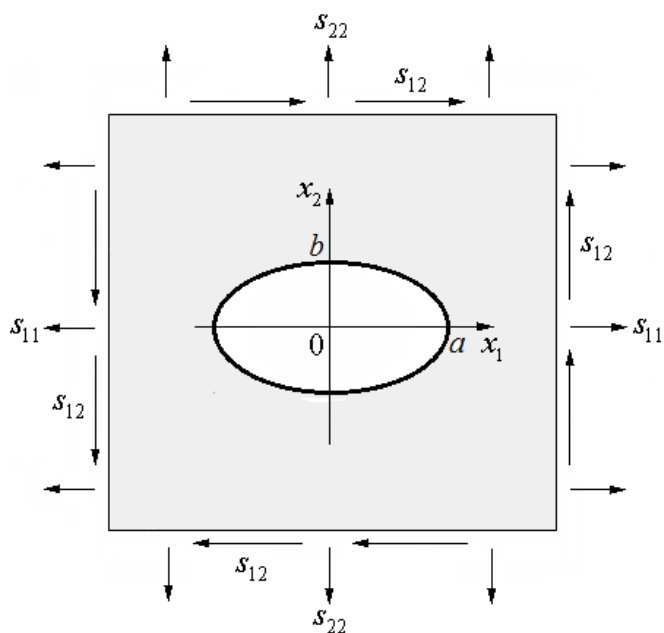


Рис. 1. Эллиптическое отверстие под нагрузкой на бесконечности.

классические напряжения в локальной декартовой прямоугольной системе координат (n, t) , H — метрический коэффициент Ламэ, определяемый следующим образом:

$$H = [(a^2 - b^2) \sin^2 \theta + b^2]^{1/2},$$

$R_1 = H^3/ab$ — радиус кривизны эллиптической координатной линии.

Условия на бесконечности для напряжений σ_{ij} в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2 принимают вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{ij} = s_{ij}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \omega = 0, \quad (2)$$

где s_{ij} ($i, j = 1, 2$) — нагрузки на бесконечности, ω — поворот материальной частицы.

Определяющие соотношения поверхностной и объемной линейной упругости сводятся в случае плоской деформации, соответственно, к следующим:

$$\sigma_{tt}^s = \gamma_s + (2\mu_s + \lambda_s - \gamma_s)\varepsilon_{tt}^s, \quad \sigma_{33}^s = \gamma_s + (\lambda_s + \gamma_s)\varepsilon_{tt}^s \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{tt} &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_{tt} + \lambda\varepsilon_{nn}, & \sigma_{nn} &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_{nn} + \lambda\varepsilon_{tt}, \\ \sigma_{nt} &= 2\mu\varepsilon_{nt}, & \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{nn}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь γ_s — остаточное поверхностное напряжение, отвечающее недеформированному состоянию тела; ε_{tt}^s — окружная поверхностная деформация, ε_{tt} , ε_{nn} , ε_{nt} — компоненты тензора деформации в объеме, λ_s , μ_s — модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламэ λ , μ для объемной изотропной упругости.

3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В комплексной записи уравнения (1) примут вид

$$\sigma_{nn} + i\sigma_{nt} = \frac{\sigma_{tt}^s}{R_1} - i \frac{1}{H} \frac{\partial \sigma_{tt}^s}{\partial \theta} \equiv t^s(\zeta). \quad (5)$$

Воспользуемся конформным отображением внешности эллипса на внешность круга единичного радиуса. Оно определяется функцией

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad R > 0, \quad m \geq 0, \quad (6)$$

где $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $R = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$.

Следуя технике Н.И. Мусхелишвили [9], запишем выражение для вектора напряжений $\sigma_n = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$ в системе координат (n, t) , повернутой относительно системы координат (x_1, x_2) на угол $\alpha - \pi/2$ против часовой стрелки, через функции Φ и Ψ , голоморфные вне эллиптического отверстия:

$$\sigma_n = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{d\bar{z}}{dz} \left(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right), \quad (7)$$

где $dz = |dz|e^{i\alpha}$, $\alpha = (\widehat{t, x_1})$ (рис. 2), т. е. dz берется вдоль направления оси t .

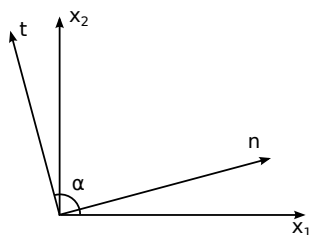


Рис. 2. Угол α между направлением оси t и осью x_1 .

Подставив (6) в (7), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} + i\sigma_{nt} &= \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\overline{\omega'(\zeta)}d\bar{\zeta}}{\omega(\zeta)d\zeta} \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right] = \\ &= \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{1}{\omega'(\zeta)} \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta} \left[\omega(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) введены обозначения $\Phi(\zeta) = \Phi(\omega(\zeta))$, $\Psi(\zeta) = \Psi(\omega(\zeta))$.

При t , совпадающем с касательной линией $\rho = \text{const}$, формула (8) совпадает с формулой Мусхелишвили [10] и $\sigma_{nn} + i\sigma_{nt} \rightarrow \sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta}$. При этом $d\zeta = \rho e^{i(\theta+\pi/2)}$, $d\bar{\zeta}/d\zeta = -e^{-2i\theta} = \bar{\zeta}^2/\rho^2$. Следуя Мусхелишвили, распространим функцию $\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta| < 1$, полагая

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta)\Phi(\zeta) &= -\omega'(\zeta)\overline{\Phi(1/\bar{\zeta}^{-1})} + \\ &+ \frac{1}{\bar{\zeta}^2}\omega(\zeta)\overline{\Phi'(1/\bar{\zeta}^{-1})} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2}\overline{\omega'(1/\bar{\zeta}^{-1})}\overline{\Psi(1/\bar{\zeta}^{-1})}. \end{aligned}$$

Отсюда, заменив ζ на $\bar{\zeta}^{-1}$ и перейдя к комплексно-сопряженному выражению, получим

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta) = \frac{1}{\bar{\zeta}^2}\overline{\omega'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} \left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} \right] - \overline{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}\Phi'(\zeta). \quad (9)$$

Подставив (9) в (8), приходим к основному равенству при $|\zeta| > 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} + i\sigma_{nt} = & \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \\ & + \frac{e^{-2i\alpha}}{\omega'(\zeta)} \left\{ \frac{1}{\zeta^2} \omega' \left(\frac{1}{\zeta} \right) \left[\overline{\Phi(\zeta)} + \Phi \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[\omega(\zeta) - \omega \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right] \overline{\Phi'(\zeta)} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для решения краевой задачи примем в (10) $\alpha = \theta + 3\pi/2$, следовательно $d\zeta = -i|\zeta|e^{i\theta}$, и при учете граничных условий (5) получаем

$$\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = -t^s(\zeta_0), \quad (11)$$

где $\Phi^\pm(\zeta_0) = \lim_{|\zeta| \rightarrow 1 \mp 0} \Phi(\zeta)$ — предельное значение голоморфной функции $\Phi(\zeta)$ на окружности единичного радиуса.

Согласно работе [10], функция Φ , удовлетворяющая условию (11) и условиям на бесконечности (2), а также имеющая полюс второго порядка в нуле, определяется равенством

$$\Phi(\zeta) = -I(\zeta) + S(\zeta); \quad |\zeta| \neq 1, \quad (12)$$

где

$$I(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\eta|=1} \frac{t^s(\eta)}{\eta - \zeta} d\eta, \quad S(\zeta) = c + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2}.$$

При этом $c = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi(\zeta) = (s_{11} + s_{12})/4$. При равенстве нулю главного вектора сил, приложенных к границе выреза, $c_1 = 0$ и $c_2 = (s_{22} - s_{11} - 2is_{12})/2$.

Из условия непрерывности перемещений при переходе от объема к границе имеем следующее условие

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} u = u^s; \quad |\zeta| > 1, \quad |\zeta_0| = 1, \quad (13)$$

где u^s — вектор перемещений точек границы выреза. Из (13) вытекает условие непрерывности деформации $\varepsilon_{\theta\theta}$:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \varepsilon_{\theta\theta}(\zeta) = \varepsilon_{\theta\theta}^s(\zeta_0); \quad |\zeta| > 1, \quad |\zeta_0| = 1. \quad (14)$$

Отношения (12)–(14) сводятся к выражению для поверхностного напряжения:

$$\sigma_{\theta\theta}^s(\zeta_0) = \gamma_s + M_s \sigma_{\theta\theta}(\zeta_0); \quad |\zeta_0| = 1, \quad (15)$$

где $M_s = 2\mu_s + \lambda_s - \gamma_s$.

Выразим окружную деформацию $\varepsilon_{\theta\theta}$ через функцию Φ . Из закона Гука (4) следует, что

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{4\mu(\lambda + \mu)} [(\lambda + 2\mu)\sigma_{\theta\theta} - \lambda\sigma_{rr}]. \quad (16)$$

Полагая последовательно в (10) $d\zeta = ire^{i\theta}d\theta$ ($\alpha = \theta + \pi/2$) и $d\zeta = -e^{i\theta}dr$ ($\alpha = \theta + \pi$), получим соответственно

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = & \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \\ & - \frac{\bar{\zeta}^2}{\omega'(\zeta)} \left\{ \frac{1}{\bar{\zeta}} \omega' \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \left[\overline{\Phi(\zeta)} + \Phi \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[\omega(\zeta) - \omega \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right] \overline{\Phi'(\zeta)} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = & \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \\ & + \frac{\bar{\zeta}^2}{\omega'(\zeta)} \left\{ \frac{1}{\bar{\zeta}} \omega' \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \left[\overline{\Phi(\zeta)} + \Phi \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[\omega(\zeta) - \omega \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right] \overline{\Phi'(\zeta)} \right\}. \end{aligned}$$

Переходя в (17) к пределу при $\zeta \rightarrow \zeta_0$, подставим в (16) полученные выражения для напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{rr} на границе выреза. После несложных преобразований находим

$$2\mu\varepsilon_{\theta\theta}(\zeta_0) = Re [\kappa\Phi^-(\zeta_0) + \Phi^+(\zeta_0)]; \quad \kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}. \quad (18)$$

Подставив (18) в (15), с учетом (12) приходим к следующему уравнению:

$$\sigma_{\theta\theta}^s = \gamma_s - Re [\kappa I^-(\zeta_0) + I^+(\zeta_0)] + \frac{1}{2} M(\kappa + 1) (S(\zeta_0) + \overline{S(\zeta_0)}), \quad (19)$$

где $M = M_s/2\mu$ — биупругая постоянная.

При $\partial\sigma_s/\partial\theta = i\zeta_0\partial\sigma_s/\partial\zeta_0 = i\zeta_0\sigma'_s(\zeta_0)$ формулы Сохоцкого — Племеля для интегралов типа Коши можно записать в виде

$$I^\pm(\zeta_0) = \mp \frac{\sigma_s(\zeta_0)}{2R_1} \pm \frac{\zeta_0\sigma'_s(\zeta_0)}{2H} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\sigma_s/R_1 + \eta\sigma'_s/H}{\eta - \zeta_0} d\eta, \quad (20)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Подставив (20) в (19), получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение для эллиптического отверстия:

$$\begin{aligned} & [2R_1 - M(\chi - 1)]\sigma_s(\zeta_0) + \\ & + \left[\frac{M(\chi + 1)}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\tau(\sigma_s/R_1) + \eta\sigma'_s/H}{\eta - \zeta_0} d\eta - \right. \\ & \left. - \zeta_0 \int_{|\eta|=1} \frac{\eta^{-1}\sigma_s/\overline{R_1} - \sigma'_s/\overline{H}}{\bar{\eta} - \bar{\zeta}_0} d\bar{\eta} \right] = \\ & = 2R_1\gamma_s + MR_1(\chi + 1)(S(\zeta_0) + \overline{S(\zeta_0)}). \quad (21) \end{aligned}$$

В случае, когда $a = b$, получаем круговое отверстие, и уравнение (21) трансформируется в гиперсингулярное интегральное уравнение от неизвестной функции $\tau(\zeta_0)$. Обозначим $\tau = \sigma_s - \gamma_s$, $\eta = \eta_1/a$, $\zeta_0 = \zeta_1/a$, где η_1 , ζ_1 — точки на окружности радиуса a :

$$\begin{aligned} & [2a - M(\chi - 1)]\tau(\zeta_0) + \frac{M(\chi + 1)}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{(\eta + \zeta_0^2/\eta)\tau(\eta)}{(\eta - \zeta_0)^2} d\eta = \\ & = Ma(\chi + 1)(S(\zeta_0) + \overline{S(\zeta_0)}); \quad |\zeta_0| = 1. \quad (22) \end{aligned}$$

Очевидно, что для кругового отверстия $\sigma_{\theta\theta}^s = \text{const}$ в (22), если внешние нагрузки отсутствуют. Пусть $s_{ij} = 0$ и $\sigma_{\theta\theta}^s = \sigma_0^s$. Тогда мы получаем уравнение поверхностного напряжения σ_0^s на границе кругового отверстия при отсутствии напряжений на бесконечности:

$$\sigma_0^s = \frac{a}{a + M}\gamma_s. \quad (23)$$

Важно учесть, что однородное уравнение, соответствующее интегральному уравнению (22), не имеет нетривиального решения.

Для поиска решения уравнения (22) найдем решение эквивалентного ему уравнения (19) в виде степенного ряда, минуя формулы (20) Сохоцкого — Племеля:

$$\tau = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \zeta_0^k. \quad (24)$$

4. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ ДЛЯ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ

Для случая кругового отверстия решение уравнения (22) примет простой вид

$$\tau = d_0 + d_2 \zeta_0^2 + \overline{d_2} \zeta_0^{-2}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} d_0 &= 4H_1 c, & d_2 &= \overline{d_{-2}} = H_2 \overline{c_2}, \\ H_1 &= \frac{M(1+\kappa)}{4(a+M)}, & H_2 &= \frac{M(1+\kappa)}{2a+M(3+\kappa)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для определения выражения для кольцевых напряжений примем в (10) $d\zeta = -e^{i\theta} dr$. Тогда получаем

$$\sigma_{\theta\theta}(\zeta_1) = \operatorname{Re} [3\Phi^-(\zeta_1) + \Phi^+(\zeta_1)]; \quad |\zeta_1| = a. \quad (27)$$

Принимая во внимание (12), (23), (25) и (26), мы имеем из (27)

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= H_0 \gamma_s + (2 - 3H_2)(s_{22} - s_{11}) \cos 2\theta - \\ &\quad - 2(2 - 3H_2)s_{12} \sin 2\theta + (1 - H_1)(s_{11} + s_{22}), \end{aligned} \quad (28)$$

где $H_0 = -1/(a+M)$. Эта формула совпадает с решением в работе [11], которое было получено другим путем.

Рассмотрим частные случаи нагружения (рис. 3, 4).

1. Одноосное растяжение. При $s_{11} = p$ и $s_{22} = s_{12} = 0$ поверхностное напряжение будет

$$\sigma_{\theta\theta} = H_0 \gamma_s + (H_1 - 3H_2 \cos 2\theta)s_{11} + (1 - 2 \cos 2\theta)s_{11}. \quad (29)$$

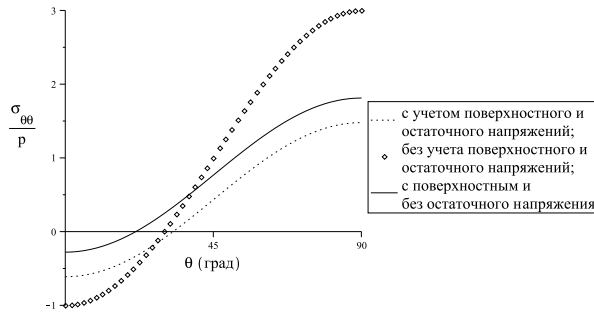


Рис. 3. Поверхностное напряжение для кругового отверстия.

Как и в классической задаче Кирша без учета поверхностных напряжений имеют место максимальные значения кольцевых напряжений при $\theta = \pm\pi/2$

$$\max \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\gamma_s}{a+M} - \frac{M(1+\kappa)[M(7+\kappa)+6a]}{4(a+M)[M(3+\kappa)+2a]} s_{11} + 3s_{11}.$$

В задаче Кирша поверхностные напряжения снижают концентрацию напряжения, если $M > 0$, и в зависимости от значения радиуса могут уменьшать или увеличивать.

2. Чистый сдвиг. При $s_{12} = p$ и $s_{22} = s_{11} = 0$:

$$\sigma_{\theta\theta} = H_0\gamma_s - 2s_{12} [2 - 3H_2] \sin 2\theta. \quad (30)$$

3. Всестороннее растяжение/сжатие. При $s_{12} = 0$ и $s_{22} = s_{11} = p$:

$$\sigma_{\theta\theta} = H_0\gamma_s + 2s_{22}(1 - H_1). \quad (31)$$

Равенства (29)–(31) показывают, что наличие поверхностного напряжения уменьшает концентрацию напряжений, если $M > 0$. Остаточное напряжение создает такой же эффект. Кроме того, концентрация напряжений зависит от радиуса отверстия (size-effect).

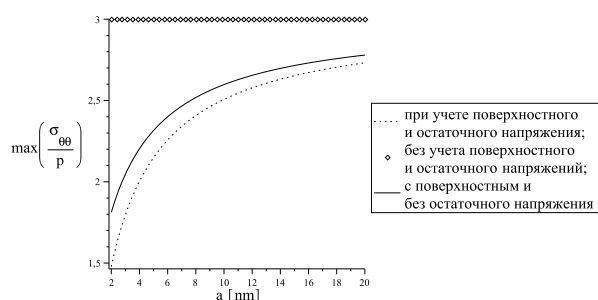


Рис. 4. Максимальное поверхностное напряжение для кругового отверстия.

Согласно теоретическим расчетам для металлов с кубической решеткой в работе [1] и оценки, произведенной в [8], параметр $M = (\mu_s + \lambda - \gamma_s)/2\mu$, в котором остаточное напряжения γ_s имеет порядок $M \sim (10^{-10} \div 10^{-9})_M$ и $\gamma_s \sim 1$ Н/м. В этом случае, если $a \sim 10$ нм, то первое слагаемое (29)–(31) становится порядка 10^8 Н/м² = 100 МПа. Так, для значений удаленной нагрузки p из (29)–(31) до 100 МПа влияние остаточного напряжения γ_s на распределение напряжений на границе, в особенности на концентрацию напряжения, сравнимо с действием нагрузок, действующих на расстоянии. Кроме того, влияние остаточного поверхностного напряжения превосходит поверхностную упругость, так как остальные члены в (29)–(31) содержат в себе параметр меньший, чем первый. Это явление было недавно выяснено Гольштейном и др. [8].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общее решение задачи об эллиптическом отверстии нанометрового размера в упругой плоскости сведено к решению сингулярного интегродифференциального уравнения относительно неизвестного поверхностного напряжения. В случае кругового отверстия решение получаем в явном виде. Построены зависимости окружного кольцевого напряжения на границе кругового отверстия от радиуса с учетом и без учета остаточного и поверхностного напряжений.

Показано, что для радиуса отверстия в пределах нескольких десятков нанометров при учете поверхностного напряжения концентрация напряжения зависит от значения радиуса, а также от упругих постоянных поверхности и объема материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shenoy V. B.* Atomic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces. // *Phys. Rev. B.*, 71 (9), pp. 94–104 (2005).
2. *Shuttleworth R.* The surface tension of solids / Н.Н. Уиллс // *Phys. Rev. B.*, 71 (9), pp. 444–457 (1950).
3. *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces. // *Arch. Rational Mech. Anal.*, 57, pp. 291–323 (1975).
4. *Murdoch A. I.* Some fundamental aspects of surface modelling. // *J. Elasticity*, 80 (1-3) (2005).
5. *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Введение в механику поверхностных явлений. Киев: Наукова Думка, 1985. 200 с.
6. *Duan H. L., Wang J., Karimloo B. L.* Theory of elasticity at the nanoscale. // *Adv. Appl. Mechanics*, 42, pp.1–68 (2009).
7. *Еремеев В. А., Морозов Н. Ф.* Об эффективной жесткости нанопористого стержня // Доклад Академии наук. 2010. **432** (4). 473–476 с.
8. *Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Устинов К. Б.* Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // *Физическая мезомеханика*. 2010. **13** (5). 127–138 с.
9. *Греков М. А.* Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2001. **192**.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
11. *Tian L., Rajapakse R. K. D.* Analytical solution for size-dependent elastic field of a nanoscale circular inhomogeneity. // *Trans. ASME // J. Appl. Mech.*, 74 (5). pp. 568–574 (2007).

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРУЗА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ

А.М. Ермаков

Деформации оболочек при приложении груза с плоским основанием являются большими и описываются уравнениями геометрически нелинейной теории оболочек. Построение решений уравнений нелинейной теории оболочек связано со значительными трудностями. Они заметно уменьшаются, если речь идет об ограниченных перемещениях, при которых форма поверхности оболочки в процессе нагружения сравнительно мало меняется, поэтому в основу решения задачи положен метод последовательных нагружений – дельта-метод. Особенность дельта-метода состоит в том, что благодаря применению линейных физических соотношений удается свести задачу на каждом отдельном шаге к решению линейной системы с постоянными коэффициентами, совпадающей с линейной системой ненагруженного тела. Расчет заканчивается, когда нагрузка или деформация достигает заданной конечной величины. Для решения рассмотренной задачи используется теория анизотропных оболочек средней толщины Паляя–Спиро. Задачи о напряженно-деформированном состоянии мягких и близких к мягким оболочек под действием груза с плоским основанием важны для анализа данных, связанных с измерением очень важной в офтальмологии характеристики – внутриглазного давления.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о напряженно-деформированном состоянии мягких и близких к мягким оболочек под действием груза с плоским основанием важны для анализа данных, связанных с измерением очень важной в офтальмологии характеристики – внутриглазного давления (ВГД). Значение измерения ВГД впервые было подчеркнуто Альбрехтом фон Грефе в 1862 г. при изучении причины возникновения глаукомы [1]. Он также создал первый тонометр импрессионного типа. Чем мягче глаз, т.е. чем ниже ВГД, тем больше он деформируется под влиянием одной и той же силы. При импрессионном методе на глаз производят давление концом некоторого

Доклад на семинаре 3 апреля 2012 г.

© А.М. Ермаков, 2012

штифта небольшого диаметра, а о деформации судят по глубине образуемой пологой ямки.

В 1882 г. А.Н. Маклаковым был создан тонометр, положивший начало развитию апланационной тонометрии [2]. При апланационной тонометрии глаз деформируется грузом с плоским основанием (рис. 1).

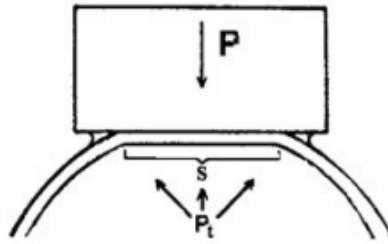


Рис. 1. Воздействие штампа на роговицу.

Под действием этого груза роговица деформируется. Далее или при заданной величине груза (5, 7.5, 10, 15 г) регистрируют диаметр зоны контакта груза и роговицы и по измеренному диаметру оценивают ВГД (метод Маклакова) (рис. 2).

При измерении ВГД по Гольдману создается небольшая зона контакта. О величине ВГД судят по силе, которая требуется, чтобы сделать плоской эту часть роговицы.

Тонометр Гольдмана полвека считался одним из самых надежных классических методов измерения внутриглазного давления. Однако последнее время появились приборы, которые позволяют при обследовании пациента точнее определить геометрические параметры роговицы, и, как следствие, появилось много работ, в которых обсуждается чувствительность показателей тонометра Гольдмана к толщине роговицы в центральной зоне. Особенно эта зависимость может сильно проявляться после кераторефракционных операций, используемых для коррекции зрения, так как в их результате существенно меняется толщина роговицы в средней зоне и кривизна роговицы [3]. При этом статистические данные офталь-

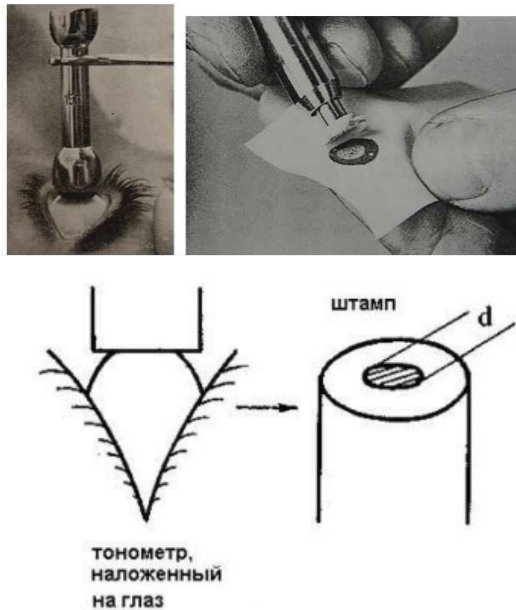


Рис. 2. Измерение ВГД по методу Маклакова и схема метода Маклакова.

мологов говорят о том, что данные, полученные тонометром Маклакова весом 10 г, менее чувствительны к изменениям толщины оболочки [3]. Однако последние исследования показали, что для «плоских» роговиц после операций иногда тонометр Маклакова дает заниженное значение ВГД [4], что может быть объяснено потерей контакта роговицы и груза или потерей устойчивости роговицы

Таким образом, задача о напряженно-деформированном состоянии и устойчивости мягких оболочек при приложении к ним груза с плоским основанием в настоящее время является актуальной.

2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЙ

Деформации оболочек при приложении груза с плоским основа-

нием являются большими и описываются уравнениями геометрически нелинейной теории оболочек. Построение решений уравнений нелинейной теории оболочек связано со значительными трудностями [5–7], которые заметно уменьшаются, если речь идет об ограниченных перемещениях, при которых форма поверхности оболочки в процессе нагружения сравнительно мало меняется. Последнее имеет место до потери устойчивости исходного состояния.

В основу дальнейшего решения задачи о напряженно-деформируемом состоянии и устойчивости сферического сегмента под действием груза с плоским основанием положен метод последовательных нагружений, который основан на идее линеаризации уравнений теории оболочек на малом отрезке нагружения, таким образом, он позволяет учесть историю нагружения. К сожалению, в общем случае метод линеаризации приводит к неоправданному завышению объема вычислительной работы. Приведем используемый алгоритм решения задач:

$$P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n \quad (\Delta P > 0, n \gg 1). \quad (1)$$

Представим давление P как сумму монотонных последовательных нагружений.

1-й шаг. Решаем задачу о малых деформациях предварительно ненагруженного тела, т. е. нагружаем его только частью общей нагрузки ΔP_1 так, чтобы деформации остались малыми.

2-й шаг. Считаем исходной конфигурацией тела ту, которую оно получило после нагружения на первом шаге.

Для описания геометрии полученной оболочки выберем на ней точки и с их использованием построим интерполяционные полиномы 10-го порядка. Используя их, можно получить новые коэффициенты Ламе и кривизны, описывающие геометрию деформированной оболочки.

В разрешающих уравнениях учитываются величины параметров напряженного и деформированного состояний оболочки на «предыдущем» уровне нагрузки: $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta \vartheta, \Delta \vartheta_0, \Delta \psi, \Delta \psi_0, \Delta \gamma_1, \Delta \gamma_2$. В начальном состоянии они равны нулю. Затем к напряженно-деформированной оболочке прикладывается следующая нагрузка ΔP_2 , и решается задача при малых деформациях,

т. е. считается, что приращение нагрузки не должно вызывать деформации, при которых задача станет нелинейной. Таким образом, приращения нагрузки ΔP_1 , ΔP_2 , ΔP_3 должны быть малы по сравнению с теми значениями, которым соответствует верхняя критическая нагрузка.

На k -м шаге повторяем то, что было сделано на предыдущем, за исходное принимаем состояние после $k-1$ -го шага. При этом геометрически нелинейная задача сводится к последовательному решению линейных задач для оболочки вращения, деформированная конфигурация которой определена по результатам предшествовавших нагружений давлениями ΔP_i .

Особенность метода последовательных нагружений состоит в том, что благодаря применению линейных физических соотношений удастся свести задачу на каждом отдельном шаге к решению линейной системы с постоянными коэффициентами, совпадающей с линейной системой ненагруженного тела. Расчет заканчивается, когда нагрузка или деформация достигает заданной конечной величины.

3. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Для решения представленной задачи используется теория оболочек Папия–Спиро [6]. Это теория оболочек средней толщины, в которой приняты следующие гипотезы:

1) прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными;

2) косинус угла наклона оболочки таких волокон к срединной поверхности деформированной оболочки равен осредненному углу поперечного сдвига.

Математическая формулировка принятых гипотез сводится к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u + \phi \cdot z, & u_2 &= v + \psi \cdot z, \\
u_3 &= w + F(\alpha_1, \alpha_2, z), \\
\phi &= \gamma_1 + \phi_0, & \psi &= \gamma_2 + \psi_0, \\
\phi_0 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + k_1 u, & \psi_0 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + k_2 v,
\end{aligned} \tag{2}$$

где φ и ψ – углы поворота нормали в плоскостях (α_1, z) и (α_2, z) ; φ_0 , ψ_0 , γ_1 и γ_2 – углы поворота нормали к срединной поверхности и углы сдвига в тех же плоскостях. Функция $F(\alpha_1, \alpha_2, z)$ характеризует изменение длины нормали к срединной поверхности.

Приведем уравнения связи декартовых X, Y, Z и сферических α_1, α_2 координат, описывающие срединную поверхность оболочки в пространстве:

$$\begin{aligned}
X &= R \cdot \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2), \\
Y &= R \cdot \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2), \\
Z &= R \cdot \sin(\alpha_1).
\end{aligned} \tag{3}$$

В силу симметрии сечения вдоль главных осей (рис. 3), рассмотрим лишь дугу с введенными в точке полюса и на экваторе граничными условиями симметрии и шарнирного опирания.

Таким образом, можно рассматривать одномерную задачу, так как все величины зависят только от одной координаты $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$, характеризующей линию параллели, h – толщина, R – радиус срединной поверхности, E_1, E_2 – модули упругости в тангенциальных и E_3 в нормальном направлениях, ν_{ij} – коэффициенты Пуассона. В исходных координатных функциях $X(\alpha_1), Y(\alpha_1), Z(\alpha_1)$ тригонометрические функции можно заменить их разложениями в ряд Тейлора старшей степени десятого порядка, без существенной потери точности.

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм, выраженные через координатные функции, имеют вид

$$\begin{aligned}
A &= (\partial_{\alpha_1} X)^2 + (\partial_{\alpha_1} Y)^2 + (\partial_{\alpha_1} Z)^2, \\
B &= (\partial_{\alpha_1} X)(\partial_{\alpha_2} X) + (\partial_{\alpha_1} Y)(\partial_{\alpha_2} Y) + (\partial_{\alpha_1} Z)(\partial_{\alpha_2} Z), \\
C &= (\partial_{\alpha_2} X)^2 + (\partial_{\alpha_2} Y)^2 + (\partial_{\alpha_2} Z)^2, \\
\omega &= \sqrt{A \cdot C - B^2};
\end{aligned} \tag{4}$$

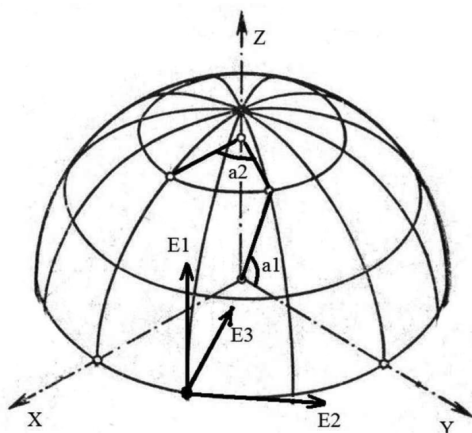


Рис. 3. Сферический сегмент.

$$L = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \partial_{\alpha_1}^2 X & \partial_{\alpha_1}^2 Y & \partial_{\alpha_1}^2 Z \\ \partial_{\alpha_1} X & \partial_{\alpha_1} Y & \partial_{\alpha_1} Z \\ \partial_{\alpha_2} X & \partial_{\alpha_2} Y & \partial_{\alpha_2} Z \end{bmatrix}; \quad N = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \partial_{\alpha_2}^2 X & \partial_{\alpha_2}^2 Y & \partial_{\alpha_2}^2 Z \\ \partial_{\alpha_1} X & \partial_{\alpha_1} Y & \partial_{\alpha_1} Z \\ \partial_{\alpha_2} X & \partial_{\alpha_2} Y & \partial_{\alpha_2} Z \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$M = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \partial_{\alpha_1}^2 X & \partial_{\alpha_1}^2 Y & \partial_{\alpha_1}^2 Z \\ \partial_{\alpha_1, \alpha_2} X & \partial_{\alpha_1, \alpha_2} Y & \partial_{\alpha_1, \alpha_2} Z \\ \partial_{\alpha_2} X & \partial_{\alpha_2} Y & \partial_{\alpha_2} Z \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты Ламе и кривизны, определяющие геометрию оболочки, являются компонентами первой и второй квадратичных форм поверхности и находятся по формулам

$$A_1 = \sqrt{A}, \quad A_2 = \sqrt{C}, \quad k_1 = L/A, \quad k_2 = N/C. \quad (6)$$

так, для случая сферической оболочки они примут вид

$$A_1 = R, \quad A_2 = R \cdot \cos(\alpha_1), \quad k_1 = 1/R, \quad k_2 = 1/R. \quad (7)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$E_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{12} = E_{21} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{22} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{E_3}{1 - \nu_{13}\mu_1 - \nu_{23}\mu_2}, \quad \mu_1 = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \mu_2 = \frac{\nu_{32} + \nu_{21}\nu_{31}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
K_{11} &= -E_{11}h\rho, \quad K_{21} = E_{22}h\rho, \quad \rho = k_1 - k_2, \\
K_{21} &= \frac{3}{2}E_{11}(k_1h + k_2\nu_{12}h)\mu_1, \quad K_{22} = \frac{3}{2}E_{22}(\nu_{21}k_1h + k_2h)\mu_2, \\
K_{13} &= E_{11}\frac{h}{2}k_1(\mu_2 + 2\nu_{12}\mu_1) + E_{22}\frac{h}{2}k_2(2\mu_1 + \nu_{21}\mu_2), \quad (8) \\
K_{23} &= E_{11}\frac{h}{2}k_1(2\mu_2 + \nu_{12}\mu_1) + E_{22}\frac{h}{2}k_2(\mu_1 + 2\nu_{21}\mu_2), \\
m_j &= \frac{h}{2}P_j^+ \left(1 + \frac{h}{2}k_1\right) \left(1 + \frac{h}{2}k_2\right) + \frac{h}{2}P_j^- \left(1 - \frac{h}{2}k_1\right) \left(1 - \frac{h}{2}k_2\right), \\
q_j &= P_j^+ \left(1 + \frac{h}{2}k_1\right) \left(1 + \frac{h}{2}k_2\right) - P_j^- \left(1 - \frac{h}{2}k_1\right) \left(1 - \frac{h}{2}k_2\right); \\
&\quad (j = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Деформации оболочки выражаются через компоненты перемещения по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + k_1 w + \vartheta \cdot \Delta \vartheta - \gamma_1 \cdot \Delta \vartheta - \Delta \gamma_1 \cdot \vartheta, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + k_2 w; \\
\eta_1 &= \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1} \right), \quad \eta_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \vartheta.
\end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения связи деформаций с усилиями и моментами имеют вид

$$\begin{aligned}
T_1 &= h(E_{11}\varepsilon_1 + E_{12}\varepsilon_2) + \frac{h^2}{12} ((K_{11} - K_{12})\eta_1 - K_{13}\eta_2) + \mu_1 \frac{q_3}{2} h, \\
T_2 &= h(E_{12}\varepsilon_1 + E_{22}\varepsilon_2) + \frac{h^2}{12} ((K_{21} - K_{22})\eta_1 - K_{23}\eta_2) + \mu_2 \frac{q_3}{2} h, \\
M_1 &= \frac{h^2}{12} (E_{11}\eta_1 h + E_{12}\eta_2 h + (K_{11} - K_{12})\varepsilon_1 - K_{23}\varepsilon_2) + \mu_1 \frac{q_3}{8} h^2, \\
M_2 &= \frac{h^2}{12} (E_{12}\eta_1 h + E_{22}\eta_2 h + (K_{21} - K_{22})\varepsilon_2 - K_{13}\varepsilon_1) + \mu_2 \frac{q_3}{8} h^2,
\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= G_{13}h\gamma_1 - \Delta T_1\vartheta_0 - T_1\Delta\vartheta_0, \\
\sigma_{33} &= \frac{P_j^+ (1 + \frac{h}{2}k_1) (1 + \frac{h}{2}k_2) (0.5 + \frac{z}{h})}{(1 + k_1z)(1 + k_2z)} - \\
&\quad - \frac{P_j^- (1 - \frac{h}{2}k_1) (1 - \frac{h}{2}k_2) (0.5 - \frac{z}{h})}{(1 + k_1z)(1 + k_2z)}, \\
F(\alpha, \beta, z) &= \int_0^z \frac{\sigma_{33}}{E_z} dz - (\mu_1\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2)z - \\
&\quad - (\mu_1(\eta_1 - \varepsilon_1k_1) + \mu_2(\eta_2 - \varepsilon_2k_2)) \frac{z^2}{2} + (\mu_1\eta_1k_1 + \mu_2\eta_2k_2) \frac{z^3}{3}.
\end{aligned}$$

Подставим в приведенные выражения (10) соотношения для деформаций (9). Таким образом, выражения для усилий и моментов будут сведены зависимости от трех основных компонентов – смещений u , w и угла поворота γ_1 . Используя полученные зависимости в уравнениях равновесия сферического слоя (11), так же перейдем к зависимости только от компонентов смещения:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1A_2} \left(\frac{\partial(A_2T_1)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} T_2 \right) + k_1N_1 &= 0, \\
\frac{1}{A_1A_2} \left(\frac{\partial(A_2N_1)}{\partial\alpha_1} \right) - k_1T_1 - k_2T_2 + q_3 &= 0, \quad (11) \\
\frac{1}{A_1A_2} \left(\frac{\partial(A_2M_1)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} M_2 \right) - N_1 - \Delta T_1\vartheta_0 - T_1\Delta\vartheta_0 &= 0.
\end{aligned}$$

На концах дуги А, В (рис. 4) для компонентов смещения должны выполняться 3 условия симметрии и 3 граничных условия шарнирного опирания. Следует отметить, что основные уравнения при $\alpha_1 = \pi/2$ имеют особенность. Поэтому рассмотрим малую левую окрестность точки $\alpha_0 = \pi/2 - \varphi$:

$$\begin{aligned}
u(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad \gamma_1(0) = 0, \\
u(\alpha_0) = 0, \quad w'(\alpha_0) = 0, \quad \gamma_1(\alpha_0) = 0.
\end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, получена система из трех дифференциальных уравнений 6-го порядка с 6 граничными условиями и тремя

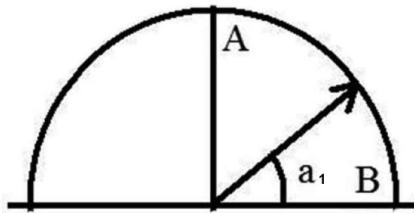


Рис. 4. Сечение сферического сегмента.

неизвестными функциями. Путем подстановки найденных компонентов деформации в расчетные формулы может быть получена полная система уравнений состояния рассматриваемой оболочки. Для решения этой системы была разработана программа в пакете Mathematica 8.0, реализующая конечно-разностный численный метод.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим модель роговицы глаза, представленную в виде шарнирно опертого по краям сегмента трансверсально-изотропной сферической оболочки. Примем следующие значения для модулей упругости и коэффициентов [8, 9] Пуассона

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = 2.86 \cdot 10^6 Pa, \quad E_3 = 2.86 \cdot 10^4 Pa, \\ \nu_{12} = \nu_{23} = 0.01, \quad \nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{12} = \nu_{32} = 0.4. \end{aligned} \quad (13)$$

Средний радиус кривизны роговицы (до операций по коррекции зрения) $R = 8$ мм, полусектор сегмента $\alpha \in [0, 38.6^\circ]$. На первом этапе оболочка нагружается внутренним равномерным давлением $\Delta P_1 = 10$ (в мм Hg) – среднее значение внутриглазного давления. Напомним, что $1 \text{ mm Hg} = 133.3 \text{ Па}$.

На последующих этапах для моделирования воздействия груза

вводится функция

$$\Delta q_3 = \begin{cases} \Delta P_i Y(\alpha_1) k_1, & 0.05 > \frac{\Delta Y}{\Delta X}(\alpha) > 0, \\ -\Delta P_i Y(\alpha_1) k_1, & 0 > \frac{\Delta Y}{\Delta X}(\alpha_1) > -0.05. \end{cases} \quad (14)$$

Общий вид функции говорит о том, что нагрузка действует только в пологой области, там, где значение производной функции, описывающей форму оболочки, будет мало. В случае возникновения прогиба, приводящего к отслоению оболочки от груза, начинает действовать отрицательная нагрузка, снимающая часть общей нагрузки с внешней поверхности оболочки. Кроме того, нагрузка будет действовать всегда по нормали к поверхности. В среднем функция толщины роговицы обычного глаза – h линейно меняется от 0.8 мм на концах сегмента до 0.52 мм в точке полюса. В случае же моделирования роговицы после кератометрической операции $h \in [0.8; 0.44]$. На рис. 5 приведены графики функций распределения контактных напряжений для «нормальной» и «тонкой» оболочек, полученные с использованием разработанной программы и конечно-элементного пакета ANSYS 14.

Видно, что полученные по разным методам результаты хорошо согласуются. В случае «тонкой» оболочки в окрестности полюса хорошо видна отслаивающаяся область, на которой отсутствуют контактные напряжения.

В таблице приведены зависимости радиуса кривизны «тонкой» оболочки от веса приложенного груза (в граммах), при котором начинается потеря устойчивости – «отделение» роговицы от тонометра.

Значения критических нагрузок

R , мм	7.5	8	8.5	9	9.5
P , гр	11.1	9.9	9.1	8.5	7.9

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При «нормальной» толщине роговицы и «средних» параметрах

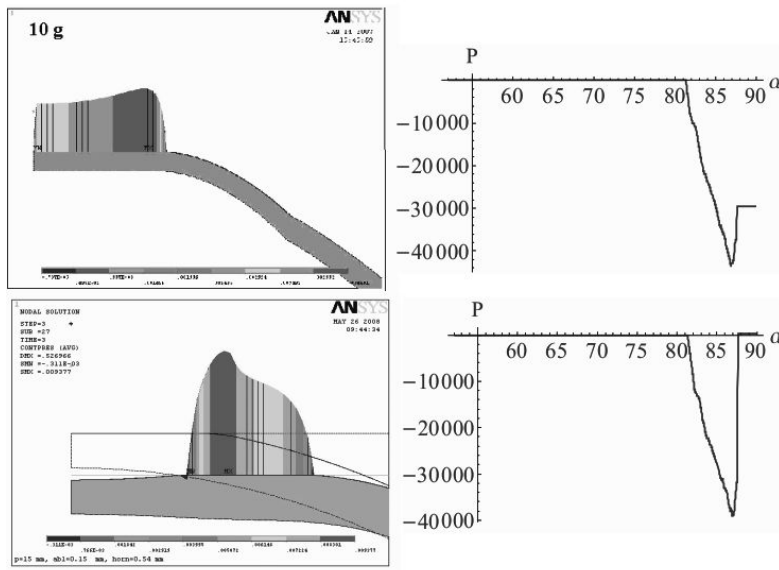


Рис.5. Распределение контактных напряжений.

оболочки потеря устойчивости при приложении тонометра Маклакова не происходит. Тоннометр Маклакова имеет вес 5; 7.5; 10 или 15 граммов. Для «тонких» оболочек, или утонченных после рефракционных операций, возможна потеря устойчивости при нормальном ВГД в случае, если прикладываемый груз больше 10 граммов. При пониженном ВГД – гипотонии глаза – возможна потеря устойчивости и при весе тонометра 10 гр, если роговица является достаточно «плоской», т.е. имеет большой радиус кривизны. Это может объяснить соответствующие экспериментальные статистические данные, представленные в работе [4], так как потеря устойчивости в данном случае может приводить как раз к заниженным значениям ВГД. Расчеты показывают, что величина критического груза с плоским основанием, соответствующего отделению нагруженной внутренним давлением трансверсально-изотропной мягкой оболоч-

ки, уменьшается при радиусе кривизны оболочки и при уменьшении толщины оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вургафт М.Б., Вургафт Я.М.* ТонOMETрические методы исследования внутриглазного давления и гидродинамика глаза при глаукоме. Казань, 1991. С. 112.
2. *Маклаков А.Н.* Офтальмотонометрия // Мед. обозрение. 1884. Т. 24. С. 1092–1095.
3. *Тарутта Е.П., Еричев В.П., Ларина Т.Ю.* Контроль уровня ВГД после кераторефракционных операций. Биомеханика глаза. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2004. С. 120–122.
4. *Аветисов С.Э., Бубнова И.А., Антонов А.А.* Исследование влияния биомеханических свойств роговицы на показатели тонометрии // Бюллетень СО РАМН. 2009. N 4. С. 30–33.
5. *Феодосьев В.И.* Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых тел // Прикладная математика и механика. Т. XXVII. 1963. С. 265–274.
6. *Палий О.М., Спири В.Е.* Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. Ленинград. Кораблестроение. 1977. 386 с.
7. *Лавендел Э.Э.* Расчет резино-технических изделий. М.: Машиностроение. 1997. С. 146–154.
8. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. 92 с.
9. *Иомдина Е.Н.* Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция. Дис. докт. биол. наук. 2000. 319 с.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

**Программный комплекс
для исследования прочности и устойчивости
подкрепленных оболочек вращения
при учете различных свойств материала**

Доклад на семинаре 18 октября 2011 г.

Д.А. Баранова

РЕЗЮМЕ

Разработана математическая модель деформирования подкрепленных оболочек вращения с учетом геометрической и физической нелинейности, возможности развития деформации ползучести при длительном нагружении, поперечных сдвигов, ребра вводятся по методу конструктивной анизотропии при учете их сдвиговой и крутильной жесткости. Разработан алгоритм исследования этой модели на основе градиентного метода L-BFGS и аппроксимации NURBS-поверхностями. Создан программный комплекс для ПЭВМ на основе современных технологий для исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения для решения линейно- и нелинейно-упругих задач и задач ползучести. Приведены результаты исследования устойчивости различных оболочек вращения на основе разработанного программного комплекса.

**МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ
РЕБРАМИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТЫ**

Доклад на семинаре 15 ноября 2011 г.

Л.П. Москаленко

РЕЗЮМЕ

Разработана математическая модель деформирования пологих оболочек прямоугольного плана, подкрепленных ребрами переменной высоты. Предложен вариант метода конструктивной анизотропии, сводящий оболочку дискретно-переменной толщины к оболочке непрерывно-переменной толщины. На основе метода продолжения решения по наилучшему параметру разработаны алгоритм исследования устойчивости подкрепленных пологих оболочек и программная реализация этого алгоритма. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния, устойчивости и закритического поведения пологих оболочек, подкрепленных ребрами постоянной и переменной высоты. Показана эффективность подкрепления оболочки ребрами.

**ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ
ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Доклад на семинаре 21 февраля 2012 г.

К.Г. Шашкин

РЕЗЮМЕ

В докладе приводится краткий обзор истории разработки отечественного программного комплекса FEM models для расчета взаимодействия основания конструкций зданий и сооружений. Предлагается для обсуждения стратегия разработки новой версии программы в виде открытой системы с широкими возможностями по разработке новых КЭ моделей. Приведены теоретические основы и практический опыт использования итерационных методов решения больших систем линейных уравнений со специальными методами построения предобусловливателя. Приведены математические основы и практические особенности реализации нелинейного метода сопряженных градиентов для решения нелинейных задач метода конечных элементов, позволяющего существенно сократить время решения задач. Рассмотрены практические особенности использования параллельных вычислений с использованием графических процессоров с применением технологии CUDA. Предлагаются к обсуждению открытые вопросы теории и практики разработки нелинейных методов решения больших нелинейных задач МКЭ.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ
ИЗ КАНАЛОВ И ОРОСИТЕЛЕЙ**

Доклад на семинаре 6 марта 2012 г.

Н.В. Лихачева

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются некоторые схемы фильтрационных течений из каналов и оросителей ирригационных систем через почвенный слой, подстилаемый нижележащим хорошо проницаемым напорным водоносным горизонтом или водонепроницаемым основанием. Для их изучения формулируются и с применением метода П. Я. Полубариновой-Кочиной решаются смешанные краевые многопараметрические задачи теории аналитических функций. На базе этих моделей разработаны алгоритмы расчета размеров зоны насыщения в ситуациях, когда при фильтрации приходится оценивать совместное влияние на картину движения таких важных фильтрационных факторов, как подпор со стороны нижележащего напорного водоносного горизонта или непроницаемого основания, форма поперечного сечения русла источника питания и уровень воды в нем, капиллярность грунта и испарение со свободной поверхности грунтовых вод. Результаты расчетов для всех схем фильтрации сопоставляются при одинаковых фильтрационных параметрах в зависимости как от формы русла источников питания (канал или ороситель), так и от вида основания почвенного слоя (сильно проницаемый напорный водоносный горизонт или водоупор).

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПУТНЫХ СТРУЙ СО СМЕЩЕНИЕМ

Доклад на семинаре 20 марта 2012 г.

О.К. Овчинникова

РЕЗЮМЕ

В докладе рассматривается задача моделирования струй, истекающих сопел двигателей, при различных параметрах окружающей среды и составах продуктов сгорания. Прикладное значение решаемой задачи — оптическая идентификация летательных аппаратов, поэтому при моделировании важно учитывать смещение, догорание, наличие дисперсной фазы. Также особенностью разработанного алгоритма является широкий диапазон его применения. В основе математической модели лежат фундаментальные законы сохранения и известные эмпирические зависимости.

МОДЕЛИ РЕШЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ ДИСКА ЗРИТЕЛЬНОГО НЕРВА

Доклад на семинаре 17 апреля 2012 г.

Д.З. САБИТОВА

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются различные математические модели решетчатой пластины глаза (РП), которые описывают поведение РП при изменении ВГД и учитывают такие общие свойства живой ткани, как сильная анизотропия, неоднородность, вязкоупругость. РП моделируется трансверсально-изотропной круглой пластиной. Проводится сравнение результатов различных теорий и результатов, полученных в прикладном пакете ANSYS (конечно-элементное моделирование), при различных геометрических и механических параметрах, а также учитывается слоистое строение РП. Напряженно-деформированное состояние (НДС) РП, как двухслойной пластины с различными параметрами для каждого слоя, сравнивается с НДС однослойной пластины с эквивалентными механическими характеристиками. Материал РП считается вязкоупругим. Рассмотрено влияние кратко- и длительного нагружений на напряженно-деформированное состояние РП.

Хроника

ПЯТАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯМ

15–20 июня 2012 г. в местечке Лозенец (Болгария) состоялась Пятая конференция по численному анализу и его приложениям NAA-12 (Numerical Analysis and its Applications), организованная университетом г. Русе (Болгария). Первая подобная конференция прошла в 1996 г. Председателем конференции традиционно является профессор Любин Вълков (Университет г. Русе, Болгария).

В 2012 г. в конференции приняли участие представители российской научной школы, постоянные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”: С.М. Бауэр, А.М. Ермаков, А.В. Лебедев, А.Л. Смирнов и С.Б. Филиппов (СПбГУ).

Конференция была посвящена вычислительным методам и их приложениям к широкому классу задач вычислительной математики и механики. В рамках конференции был проведен минисимпозиум “Численное моделирование оболочечных конструкций и их приложения” (Numerical modeling of shell-like structure and applications), организаторами которого были проф. С.М. Бауэр и доц. А.Л. Смирнов, а спикером — доц. Румен Янков (Институт механики БАН, Болгария) (рис. 8 на вклейке).

Доценты Румен Янков и Мария Дачева, выпускница Московского университета, работающие в настоящее время в отделе Био и нано- механики Института механики БАН, предложили обсудить возможность выполнения совместных исследований, связанных с определением механических параметров биообъектов.

С.М. Бауэр, А.Л. Смирнов

ВОСЬМАЯ ЕВРОПЕЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

09–13 июля 2012 г. в городе Грац (Австрия) прошла 8-ая европейская конференция по механике твердого тела ESMC2012 (European Solid Mechanics Conference). Первая подобная конференция состоялась в 1991 г. в Мюнхене. В 2012 году конференция была организована Техническим университетом г. Грац. Председателем научного комитета конференции был профессор R.W. Ogden (Университет г. Абердин, Великобритания), оргкомитет возглавлял профессор G.A. Holzapfel (Технический университет г. Грац, Австрия). В ESMC2012 приняли участие более 2 тысяч человек. Самым большим было представительство Австрии и Германии, Россия заняла 6-е место по числу участников форума.

Работа конференции проходила по 7 основным секциям, 46 мини-симпозиумам, была также секция стендовых докладов. С приглашенными докладами выступили James R. Rice из университета Гарварда (США), Ferdinando Auricchio (Университет г. Павия, Италия), Norman A. Fleck (Университет г. Кэмбридж, Великобритания), Peter J. Hunter (университет Аукланда, Новая Зеландия), Robert M. McMeeking (Калифорнийский университет, США) и Michael Ortiz (Калифорнийский технический институт, США). В работе форума приняла участие большая группа постоянных участников семинара “Компьютерные методы в механике сплошной сред” (рис. 9 на вклейке). Так на заседаниях мини-симпозиума “Refined Theories of Plates and Shells” (Уточненные теории пластин и оболочек), организаторами которого были профессора W. Pietraszkiewicz (Польская академия наук) и В. Еремеев, представляющий в настоящее время университет Отто фон Герике (Германия) выступили проф. П.Е. Товстик, канд. физ.-мат. наук Е.Б. Воронкова, канд. физ.-мат. наук А.М. Ермаков (СПбГУ). Академик Н.Ф. Морозов (СПбГУ) совместно с проф. Н. Altenbach из университета Отто фон Герике (Германия) были организаторами мини-симпозиума “Surface Effects in Nano-Mechanics” (Поверхностные эффекты в наномеханике). На этом мини-симпозиуме сделали доклады проф. М.А. Греков и асп. С.В. Каштанова (СПбГУ).

Е.Б. Воронкова

ОБ АВТОРАХ

Баранова Дарья Александровна — выпускница и в настоящее время аспирантка кафедры прикладной математики и информатики факультета городского строительства и жилищно-коммунального хозяйства СПбГАСУ. Автор 5 опубликованных работ. Научный руководитель — проф. В.В. Карпов. E-mail: insya@ya.ru

Ермаков Андрей Михайлович — выпускник кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ 2009 г., кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь СПбГУ, ассистент СПбГМТУ. Автор 16 опубликованных работ. E-mail: khopesh_ra@mail.ru

Ефимов Иван Владимирович — выпускник и в настоящее время аспирант кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ. Сфера научных интересов — изучение прочностных свойств материалов со сложной реологией и построение моделей деформирования таких материалов. Научный руководитель — доц. Г.В. Павилайнен. E-mail: sqr.efimov@gmail.com

Кузин Алексей Константинович — ассистент кафедры компьютерных технологий в машиностроении Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. E-mail: kuzin_aleksei@mail.ru

Лихачева Наталья Владимировна — выпускница кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации 2010 г. В настоящее время —

аспирантка СПбГУТА по специальности “Механика жидкости, газа и плазмы”. Автор 6 опубликованных работ по проблемам фильтрационных течений из каналов. Научный руководитель — проф. Э.Н. Береславский. E-mail: nataly_gate@mail.ru

Москаленко Людмила Павловна — с отличием закончила Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ) по специальности “Прикладная математика”. В настоящее время — аспирантка кафедры прикладной математики и информатики СПбГАСУ. Автор 8 опубликованных работ. Научный руководитель — проф. В.В. Карпов. E-mail: l_moskalenko@bk.ru

Новиков Артём Николаевич — магистрант первого года обучения кафедры плазмогазодинамики и теплотехники БГТУ “ВОЕНМЕХ” им. Д. Ф. Устинова. Научный руководитель — проф. В.Н. Емельянов. E-mail: artemnovikov89@gmail.com

Овчинникова Ольга Константиновна — выпускница кафедры плазмогазодинамики и теплотехники БГТУ “ВОЕНМЕХ” им. Д.Ф. Устинова. В настоящее время — старший преподаватель БГТУ “ВОЕНМЕХ”. Автор 20 опубликованных работ по проблемам вычислительной газодинамики и динамики струйных течений. Научный руководитель — проф. В.Н. Емельянов. E-mail: ook127@yandex.ru

Платонов Виктор Викторович — выпускник кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей математики и информатики СПбГУ. Автор шести опубликованных работ. Научный руководитель — доц. Б.Н. Семенов. E-mail: viktorplatonov@yandex.ru

Сабитова Дина Закиевна — выпускница и в настоящее время аспирантка кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — биомеханика. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр. E-mail: dina_sabitova@mail.ru

Шашкин Константин Георгиевич — кандидат технических наук, руководитель отдела сложных геотехнических расчетов «ПИ Геореконструкция», руководитель группы разработчиков программы “FEM models”, автор более 50 научных работ. Область научных интересов — методы решения линейных и нелинейных систем МКЭ,

нелинейные модели работы грунта, разработка программ МКЭ.
E-mail: c_shashkin@geotec.spb.ru

Язовская Анна Александровна — выпускница Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. В настоящее время — аспирантка кафедры теории упругости СПбГУ. Автор одной опубликованной работы. Научный руководитель — акад. РАН Н.Ф. Морозов. E-mail: yazovskaya_aa@mail.ru

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2010–2011 гг.**

Платонов Виктор Викторович — канд. физ.-мат. наук (СПбГУ), 2011. Научный руководитель — доц. Б. Н. Семенов.

Карамшина Людмила Владимировна — канд. физ.-мат. наук (СПбГУ), 2011. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр.

Капранов Илья Евгеньевич — канд. техн. наук (БГТУ «ВОЕНМЕХ»), 2011. Научный руководитель — проф. В. Н. Емельянов.

Овчинникова Ольга Константиновна — канд. техн. наук (БГТУ «ВОЕНМЕХ»), 2012. Научный руководитель — проф. В. Н. Емельянов.

Москаленко Людмила Павловна — канд. техн. наук (ПГУПС), 2012. Научный руководитель — проф. В. В. Карпов.

Александрова Людмила Александровна — канд. техн. наук СПбГМТУ, 2012. Научный руководитель — проф. Э. Н. Берславский.

SUMMARIES

Efimov I. V. **Anisotropic materials fluidity contour mathematical models**

The article is devoted to actual questions of data processing in experimental studies. The experimental data which should be processed are the material yield limits in different directions. The purpose is a construction of different types of fluidity contours of the various construction materials which are of difficult rheology. The material yield limits are represented by points in the principal stress plane. The yield contours are built in the same plane. The problem is to find the contour factors which minimize the criterion function. This problem is classified as a classical problem in regression analysis.

Three fluidity contour construction methods on experimental data are considered: manual selection, coordinate descent and fast descent. A comparison of these methods helps identify their positive and negative sides: accuracy, convergence to the desired result and requirements for the initial approximation. On the basis of this comparison a technique allowing to reach the result with the least error is proposed. The program which realizes the given technique with some material yield contours are presented in this article.

REFERENCES

1. *Backofen W. A.* Deformation Processing. Addison-Wesley, New York, 1972.
2. *Unksov E.P., Ovchinnikov A.G.* The Theory of Metals Plastic Deformation. Moscow: Mashinostroyeniye, 1983 (in Russian).
3. *Ribakina O.G.* Yield criterion of anisotropic material with SD effect. Studies in Elasticity and Plasticity //Vestnik of Leningrad University. 1982. No. 14. p. 132–142 (in Russian)
4. *Pachuliy V.S.* Abstract of Ph.D. thesis "Some Axisymmetric Problems in the Theory of Ideal Plasticity of an Anisotropic Material". Tula, 1983 (in Russian).
5. *Efimov I.V., Pavilaynen G.V.* Choice of Yield Criterion for Textured Alloys. In International Scientific Conference "Nonlinear Mechanics at the Turn of the Millennium", in honor of N.A. Lyapunov's birth centenary. St. Petersburg. 2006 (in Russian).
6. *Bakhvalov N.S.* Méthodes numériques. Analyse, algèbre, équations différentielles ordinaires. Traduit du russe par Irina Petrova. Moscow: Mir Publishers. 1976. 606 p.

7. *Zabelin A.N.* Abstract of Ph.D. thesis “Elastic and Plastic Bending of Thin Shallow Shells of Positive Gaussian Curvature of Strength-difference Materials for Large Deflections”. Tver, 2010.
8. *Kulawinski D., Nagel K., Henkel S., Hubner P., Fischer H., Kuna M., Biermann H.* Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load ratios. *Engineering Fracture Mechanics*, 78 (2011), p. 1684–1695.

***Ermakov A.M.* Stress-strain state and stability of spherical segment under the influence of a load with a flat base.**

The deformations of shells under a load with a flat base are large. They are described by equations of the geometrically nonlinear theory of shells. The solution of such equations is quite difficult, but become easier in the case of limited displacements, under which the form of the shell does not change much in the process of loading. That is why we base the solution of the problem on the method of gradual loadings — delta-method. In the delta method the application of linear physical relations reduces the problem at each step to the solution of a linear system with constant coefficients. The computation is completed when the loading or deformations attains a given finite value. The initial equations of the Paliy–Spiro theory for anisotropic shells of medium thickness is used.

Next, membranes and soft shells under a load with a flat base are considered. The results are important for ophthalmology analysis of the measurement of intraocular pressure

REFERENCES

1. *Vulgraft B., Vulgraft I.* Tonometric research methods of intraocular pressure and eye hydrodynamics at a glaucoma. Kazan, 1991. p. 112 (in Russian).
2. *Maklakov A.N.* Ophthalmotonometry. Med. Review. 1884. 24 (in Russian).
3. *Tarutta E.P., Eriчев V.P., Larina T.Yu.* Controlling intraocular pressure after keratorefractive operations. *Ocular Biomechanics*. Moscow Helmholtz Research Institute for Eye Diseases, 2004. p. 120–122.
4. *Avetisov S.E., Bubnova I.A., Antonov A.A.* Study of the effect of corneal biomechanical properties on intraocular pressure measurement. State Research Institute for Eye Diseases RAMS. No. 4. 2009. p. 30–33 (in Russian).
5. *Feodos'ev V.I.* On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems, *J. of Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 27. Issue 2. 1963. p. 392–404.

6. *Paliy O.M., Spiro V.E.* Anisotropic Shells in Shipbuilding. Theory and Analysis. Sudostroenie. Leningrad. 1977 (in Russian).
7. *Lavendelis E.* Design of Rubber-Technical Construction Elements. Moscow. 1976. p. 146–154 (in Russian).
8. *Bauer S. M., Zimin, B. A., and Tovstik, P. E.* The Simplest Analytical Models of Shells and Plates in Ophthalmology, St. Petersburg University Press. 2000. 92 p. (in Russian).
9. *Iomdina E.N.* Biomechanical Properties of the Sclera and Possibilities of its Strengthening in Myopia. Ph.D. thesis. Moscow. 1984. 167 p. (in Russian).

***Kuzin A.K.* Numerical analysis of the strength of tile joining based on linear fracture mechanics.**

A problem of stress concentration in the vicinity of edges of joints between the tile and the base is considered. The stress and strain singular state is described by asymptotic formulas, which are defined by the geometry of the vicinity of the joint and material properties. An information about the loads applied far from the joint is concentrated in a scaling factor - stress intensity factor (SIF).

The force strength criterion known in fracture mechanics is used to estimate the strength of the joint, which requires SIF to be in the range of admissible values in the case of the problem of an edge of joint. Because of the universality of asymptotic formulas, an a priori assessment of the strength is possible based on the results of experiments with test specimens.

A method of SIF numerical calculation from known results of finite element analysis of an elastic problem based on reciprocal theorem usage in the vicinity of the edge is being introduced. The method allows generalization to the case of thermal loads.

REFERENCES:

1. *Parton V.Z., Morozov E.M.* Elastic-plastic Fracture Mechanics. Moscow: Mir Publishers. 1978. 427 p.
2. *Yeliseyev V.V.* Mechanics of Elastic Bodies. St. Petersburg: St. Petersburg State Polytechnical University Publishing House, 2003. 336 p. (in Russian).
3. *Lin K.Y., Tong P.* Singular finite elements for the fracture analysis of V-notched plate//Int. J. Numer. Meth. Eng. 1980. 15(9). p. 1343–1354.

4. *Costabel M., Dauge M., Yosibash Z.* A quasi-dual function method for extracting edge stress intensity functions//SIAM J. Math. Anal. 2004. 35(5). p. 1177–1202.
5. *Morozov N.F.* Mathematical Problems of the Theory of Cracks. Moscow: Nauka, 1984. 256 p. (in Russian).
6. *Yeliseyev V.V., Kuzin A.K.* Mathematical modeling and evaluation of strength of linear elastic body in the vicinity of a corner Indent//Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU. 2011. 5(133). p. 68–73 (in Russian).
7. *Helsing, J., Jonsson, A.* On the computation of stress fields on polygonal domains with V-notches//International J. for Numerical Methods in Engineering. 2002. 53. p. 433–453.

Novikov A.N. Modeling gasdynamics processes in a tunnel due to the motion of a high-speed train.

In this work, the motion of a high-speed train in a tunnel has been simulated by means of the package ANSYS Fluent. As the train enters the tunnel, a compression wave extends with the speed of sound in the tunnel. Having reached the opposite end of the tunnel, the compression wave is reflected in an expansion wave mode and moves towards the train. Thus, there is a difficult oscillatory distribution process of compression and expansion waves along the tunnel. This leads to pressure difference on the length of the train and can cause acoustical discomfort to passengers. This circumstance imposes restriction on the speed of a train entering a tunnel. In this work one considers how the size of the pressure differences in the tunnel is influenced by the following parameters:

- length of tunnel,
- ratio of train to tunnel cross-sections,
- form of the train front part,
- speed of the train.

In this work, two train models are used. The first model is the Japanese Fastech 360. The second model is the European Eurostar. It is necessary to remark that the given models are approximate. Only the shapes of the models of the specified trains are taken into account, while the effect of windows, doors, wheels, etc. are neglected. The problem was modelled numerically with the use of dynamic mesh. In the problem under consideration a hexohedral grid with approximately 280000 elements was applied.

As a result, conclusions have been drawn on those factors that have impact on the size of pressure differences in a tunnel at the passage of a high-speed train.

REFERENCES

1. *Bopp R., Hagenah B.*. Aerodynamics, ventilation and tunnel safety for high speed rail tunnels // Konferenz "Sicherheit und Belüftung von Tunnelanlagen". Wien. 2008. – www.gruner.at
2. *Bopp R., Langner V., Burghart M.*. Climate in very long railway tunnels // Konferenz "Sicherheit und Belüftung von Tunnelanlagen". Graz. 2010. – www.gruner.at

Platonov V. V. Nonclassical models of plates and shells for buckling problems.

In modern designs, composite, synthetic and other non-metallic materials are used. The distinctive characteristic of these materials is high compliance in the interlaminar shear. For these materials, even small shear stresses in magnitude significantly influence the overall deformation. Therefore, the calculation of plates and shells of such materials using the theory of Kirchhoff–Love can lead to large errors. In this article, we discuss a few problems of stability of plates and shells on the basis of non-classical theories.

For plates under longitudinal compression, located in a channel with hard walls, the classical theory and the theory of Timoshenko–Reissner are used to obtain the critical values of the compressive stress and the length of straight sections overlap at each loading stage. The results from the analytical solution and those from the three-dimensional theory of elasticity in the package ANSYS were compared. For transversely isotropic cylindrical shells under axial compression, the critical load was obtained by the Ambartsumyan theory. Comparison with results obtained by the Timoshenko–Reissner theory was conducted.

REFERENCES

1. *Ambartsumyan S.A.* Theory of anisotropic shells. // NASA Technical Translation, NASA TTF-118, 1964.

2. *Bauer S. M., Klets O. G., Morozov N. F.* Behavior of transversally isotropic cylindrical shells under a dynamic application of radial pressure // *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43. No. 4. p. 539–544.
3. *Belyaev N. M.* *Strength of Materials* // Moscow: Mir Publishers. 1979. 647 p.
4. *Vol'mir A. S.* *Stability of Elastic Systems*. // ENTIS: Virginia. 1965.
5. *Grigolyuk E. I., Tolkachev V. M.* *Contact Problems in the Theory of Plates and Shells* // Moscow: Mir Publishers. 1987. 423 p.
6. *Kauderer H.* *Nichtlineare Mechanik* // Berlin: Springer. 1958.
7. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* *Theory of Elasticity* // Butterworth-Heinemann. 1986. Vol. 7.
8. *Tovstik P. E.* On the asymptotic nature of approximate models of beams, plates, and shells // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*. Vol. 40. No 3. p. 188–192.
9. *Tovstik P. E.* Stability of a transversally isotropic cylindrical shell under axial compression // *Mechanics of Solids*. Vol. 44. N. 4. p. 552–564.
10. *Feodosyev V. I.* *Selected Problems and Questions in Strength of Materials* // Moscow: Mir Publishers. 1977. 430 p.
11. *Prinz V. Y.* A new concept in fabrication of building blocks for nanoelectronic and nanomechanic devices // *Microelectronic Engineering*. Vol. 69, No 2–4. 2003. p. 466–475.

***Yazovskaya A. A.* Stress-strain state of an elastic plane with nanosize elliptical hole.**

The effect of the surface energy in traditional continuum mechanics is ignored as it is small compared to the volume energy. For nanoscale materials and structures, however, the surface effects become significant due to the high surface/volume ratio. In particular, the surface stresses are directly related to the scale effect; this means the material properties of a specimen depend on its size. Solid surface stresses are known as prestresses in a prestressed membrane, which is perfectly fitted on the bounding surface of a solid. Inclusion of such a surface stress in an otherwise traction-free surface of the solid leads to additional loads applied to this boundary surface.

In this paper, an elastic plate with an elliptical hole under the action of a remote load and unknown surface stress is considered. It is supposed that the conditions of the plane stress state are satisfied. So, the boundary value problem is to define the stress-strain state of an

elastic half-plane under corresponding boundary conditions which are formulated according to the generalized Young–Laplace equations. By means of Goursat–Kolosov’s complex potentials and Muskhelishvili’s representations, we reduce the solution of the problem to a singular integral equation in the surface stress. For the particular case of a circular nanometer hole, this equation is solved explicitly. The general solution of this equation allows us to study the effect of the surface stress on the stress-strain distribution near the circular hole. We show the dependence of this distribution on the size of the hole and on the elastic parameters of the surface and solid as well if the surface stress is taken into account.

REFERENCES

1. *Shenoy V.B.* Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces. // *Phys. Rev. B.*, 71 (9), pp. 94–104 (2005).
2. *Shuttleworth R.* The surface tension of solids / H.H. Wills // *Phys. Rev. B.*, 71 (9), pp. 444–457 (1950).
3. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* A continuum theory of elastic material surfaces.// *Arch. Rational Mech. Anal.*, 57, pp. 291–323 (1975).
4. *Murdoch A.I.* Some fundamental aspects of surface modeling. // *J. Elasticity*, 80 (1-3) (2005).
5. *Podstrigach Ya.S., Povstenko Yu.Z.* An Introduction to the Mechanics of Surface Phenomena in Deformable Solids. Kiev: Naukova Dumka, p. 200 (1985). (in Russian).
6. *Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L.* Theory of elasticity at the nanoscale.// *Adv. Appl. Mechanics*, 42, pp.1–68 (2009).
7. *Eremeyev V. A., Morozov N. F.* The effective stiffness of a nanoporous rod. // *Doklady Physics*, 2010 **432** (4) pp. 473–476.
8. *Goldstein P.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.B.* Effect of residual surface stress and surface elasticity on deformation of nanometer spherical inclusions in an elastic matrix // *Phys. Mesomechanics*, Vol. 13 (2010), pp. 127–138.
9. *Grekov M.A.* The Singular Plane Problem in the Theory of Elasticity. // *St. Petersburg University Press*, St. Petersburg, (2001), pp. 192 (in Russian).
10. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Groningen: Noordhoff, 1953.
11. *Tian L., Rajapakse R.K.D.* Analytical solution for size-dependent elastic field of a nanoscale circular inhomogeneity. // *Trans. ASME // J. Appl. Mech.*, 74 (5). pp. 568–574 (2007).

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ефимов И.В.</i> Математические модели контуров течности анизотропных материалов	3
1. Введение	3
2. Основные критерии пластичности	4
3. Постановка задачи	7
4. Способы решения	8
4.1. Алгоритм построение контура при известных коэффициентах	8
4.2. Методы подбора коэффициентов контура	9
4.3. Построение методом подбора вручную	10
4.4. Построение методом покоординатного спуска	10
4.5. Построение методом наискорейшего спуска	11
5. Сравнение рассмотренных методов	12
6. Заключение	13
<i>Новиков А. Н.</i> Моделирование газодинамических процессов в тоннеле при движении высокоскоростного поезда	16
1. Введение	16
2. Постановка задачи	17
3. Особенности численного моделирования	18
4. Анализ результатов	19
5. Заключение	22
<i>Кузин А.К.</i> Численный анализ прочности облицовки на основе линейной механики разрушения	25
1. Силовой критерий прочности	25
2. Решение в окрестности углового выреза	27
3. Метод расчета КИН на основе теоремы взаимности работ	32
4. Примеры вычислений	36
5. Выводы	38
<i>Платонов В.В.</i> Применение неклассических моделей пластин и оболочек к задачам устойчивости	40
1. Введение	40
2. Устойчивость нагофрированной системы	41
2.1. Постановка задачи	41
2.2. Решение по теории Кирхгофа–Лява	43

2.3. Теория Тимошенко–Рейсснера	48
2.4. Расчет задачи методом конечных элементов	52
2.5. О величине зазора Δ	53
3. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии в неклассической постановке	55
3.1. Постановка задачи	55
3.2. Основные уравнения уточненной теории	55
3.3. Критическая нагрузка	59
3.4. Сравнение с моделью Тимошенко–Рейсснера	61
<i>Язовская А.А.</i> Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с эллиптическим отверстием нанометрового размера	65
1. Введение	65
2. Постановка задачи	66
3. Основные соотношения	68
4. Поверхностное напряжение для кругового отверстия	73
5. Заключение	75
<i>Ермаков А.М.</i> Напряженно-деформируемое состояние и устойчивость сферического сегмента под действием груза с плоским основанием	78
1. Введение	77
2. Метод последовательных нагружений	79
3. Разрешающие уравнения теории оболочек	81
4. Численное моделирование	86
5. Заключение	86
Доклады, не вошедшие в сборник	90
Хроника	96
Об авторах	98
Summaries	102

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.63:539.3

Ефимов И.В. **Математические модели контуров текучести анизотропных материалов.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2011–2012 гг. С. 3–16.

Статья посвящена актуальным вопросам обработки экспериментальных исследований. Цель — построение различного вида контуров текучести конструкционных материалов, имеющих сложную реологию по экспериментальным данным. В качестве экспериментальных данных рассматриваются пределы текучести материала в различных направлениях, которые изображаются точками на плоскости главных напряжений. В этой же плоскости строятся контуры текучести. Задача сводится к нахождению минимума целевой функции коэффициентов контура и является классической задачей регрессионного анализа.

Рассматриваются три метода построения контура текучести по экспериментальным данным: ручной подбор, метод координатного спуска, метод наискорейшего спуска. Проводится сравнение методов, выявляются их положительные и отрицательные стороны: точность, сходимость к требуемому результату, требования к начальным приближениям. На основе сравнения методов предлагается методика, позволяющая с наименьшей погрешностью достичь результата. В статье представлена программа, реализующая данную методику, а также представлены построенные контуры текучести для некоторых материалов.

Библиогр. 8 назв. Ил. 16

УДК 519.63:539.3

Ермаков А.М. **Напряженно-деформируемое состояние и устойчивость сферического сегмента под действием груза с плоским основанием** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2011–2012 гг. С. 78–90.

Деформации оболочек при приложении груза с плоским основанием являются большими и описываются уравнениями геометрически нелинейной теории оболочек. Построение решений уравнений

нелинейной теории оболочек связано со значительными трудностями, которые заметно уменьшаются, если речь идет об ограниченных перемещениях, при которых форма поверхности оболочки в процессе нагружения сравнительно мало меняется, поэтому в основу решения задачи положен метод последовательных нагружений – дельта-метод. Особенность дельта-метода состоит в том, что благодаря применению линейных физических соотношений удается свести задачу на каждом отдельном шаге к решению линейной системы с постоянными коэффициентами, совпадающей с линейной системой ненагруженного тела. Расчет заканчивается, когда нагрузка или деформация достигает заданной конечной величины. Для решения рассмотренной задачи используется теория анизотропных оболочек средней толщины Паляя–Спиро.

Задачи о напряженно-деформированном состоянии мягких и близких к мягким оболочек под действием груза с плоским основанием важны для анализа данных, связанных с измерением очень важной в офтальмологии характеристики – внутриглазного давления.

Библиогр. 9 назв. Ил. 5. Табл.1.

УДК 539.3

А.К. Кузин **Численный анализ прочности облицовки на основе линейной механики разрушения.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2011–2012 гг. С. 26–40.

Рассматривается задача о концентрации напряжений в окрестности угла крепления облицовки к основанию. Сингулярное напряженно-деформированное состояние описывается асимптотическими формулами, определяемыми геометрией окрестности и свойствами материала. Информация о нагрузках вдали от угла сосредоточена в масштабном множителе – коэффициенте интенсивности напряжений (КИН).

Для оценки прочности соединения используется известный в механике разрушения силовой критерий, применительно к задаче с углом сводящийся к требованию попадания КИН внутрь диапазона допустимых значений. В силу универсальности асимптотических формул возможна априорная оценка прочности исследуемой

конструкции на основе результатов испытаний тестовых образцов.

Предложен метод численного определения КИН по известному конечно-элементному решению упругой задачи, основанный на применении теоремы взаимности работ в окрестности угловой точки. Метод допускает обобщение для случая температурных воздействий.

Библиогр. 7 назв. Ил. 3.

УДК 519.6

Новиков А. Н. Моделирование газодинамических процессов в тоннеле при движении высокоскоростного поезда // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 17–25,

В данной работе с помощью пакета ANSYS Fluent моделируется движение высокоскоростного поезда по тоннелю. При этом рассматривается, как на величину перепадов давления в тоннеле влияют такие параметры, как длина тоннеля, отношение площадей поперечного сечения поезда и тоннеля, форма головной части и скорость движения поезда.

Библиогр. 2 назв. Ил. 7

УДК 539.3

Платонов В. В. Применение неклассических моделей пластин и оболочек к задачам устойчивости. // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2011–2012 гг. С. 41–65.

Для сжатой в продольном направлении пластинки, находящейся в канале с жесткими стенками, получены критические значения сжимающего напряжения и длины прямых участков налегания на каждом этапе нагружения по классической теории и теории Тимошенко–Рейсснера. Проведен анализ результатов, полученных при аналитическом решении и при использовании трехмерной теории упругости в пакете ANSYS. Для трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии на основе теории С. А. Амбарцумяна получена критическая нагрузка, проведено сравнение с результатами, полученными по теории Тимошенко–Рейсснера.

Библиогр. 13 назв. Ил. 10. Табл. 3.

УДК 539.3

Язовская А.А. **Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с эллиптическим отверстием нанометрового размера.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2011–2012 гг. С. 66–77.

В работе рассматривается задача об упругой плоскости, ослабленной эллиптическим вырезом нанометрового размера под действием напряжений на бесконечности. Учитываются остаточное напряжение и дополнительное поверхностное напряжение, действующее на границе. При использовании метода Колосова–Мухомелишвили решение задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения относительно неизвестного поверхностного напряжения. В частном случае для кругового отверстия получено решение данного уравнения в явном виде. Построены зависимости окружного напряжения на границе отверстия от радиуса кругового отверстия с учетом и без учета остаточного и поверхностного напряжений. Показано, что в нанометровом диапазоне при учете поверхностного напряжения концентрация напряжений зависит от величины размера отверстия, а также от упругих постоянных поверхности и объемного материала.

Библиогр. 11 назв. Ил. 4.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2011–2012 гг.

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*
Корректор *Н. В. Ермолаева*
Компьютерная верстка *А. М. Вейцторт*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать . . . 2012. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл.-печ. л. . . Тираж 123 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21.

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22.

E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21.

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76.

E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

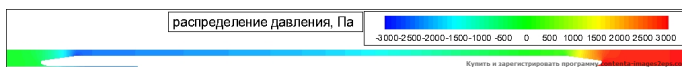


Рис. 1. Контуры распределения давления по длине поезда в тоннеле (к статье А.Н. Новикова).

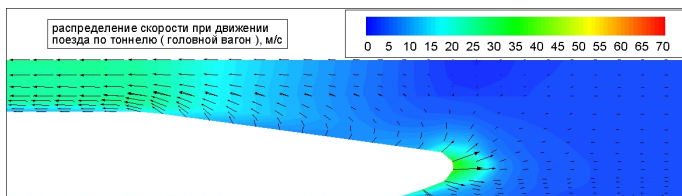


Рис. 2. Контуры распределения скорости и вектора скорости при движении поезда по тоннелю (к статье А.Н. Новикова).

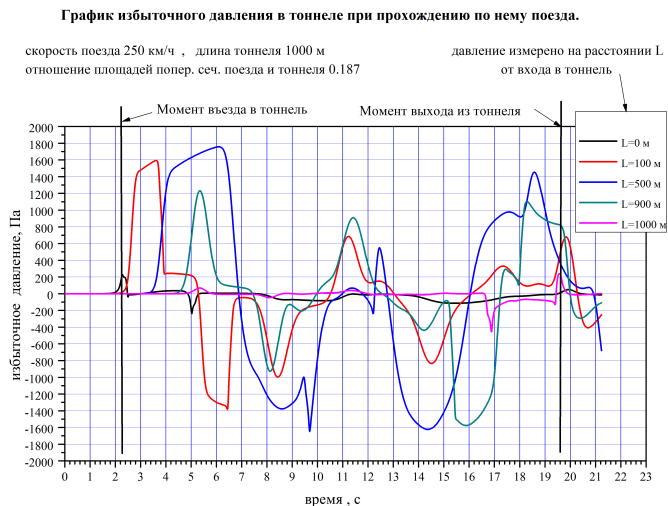


Рис. 3. Изменение избыточного давления в тоннеле при прохождении по нему поезда (к статье А.Н. Новикова).

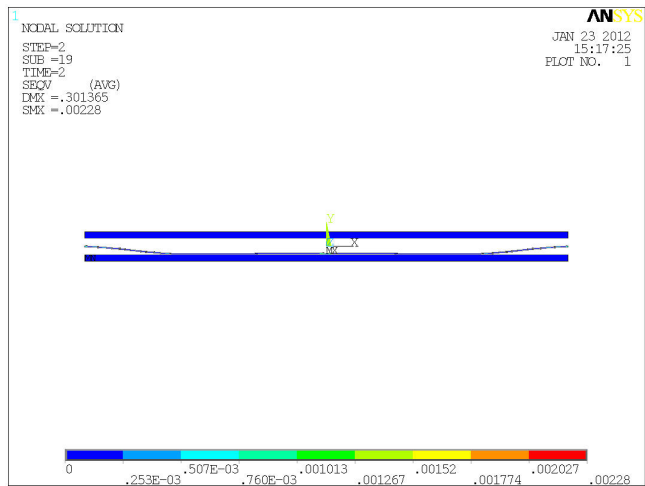


Рис. 4. Случай одной зоны контакта. (к статье В.В. Платонова)

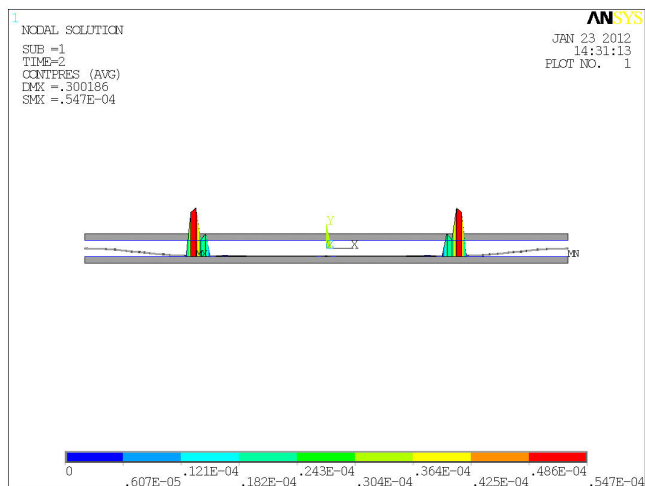


Рис. 5. Случай трех зон контакта. (к статье В.В. Платонова)

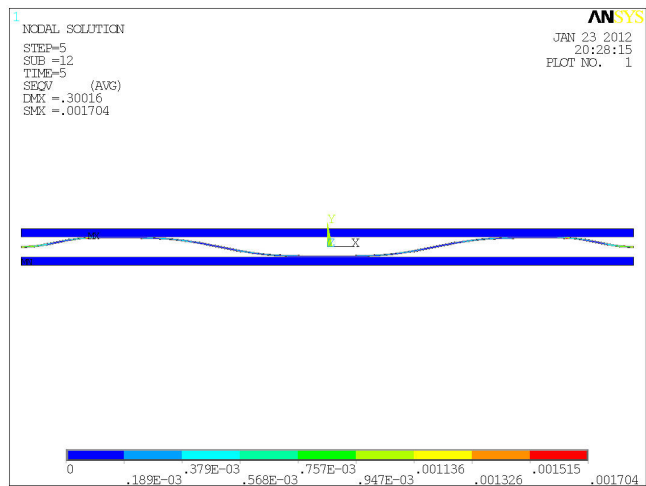


Рис. 6. Картина контактных напряжений для одной зоны контакта. (к статье В.В. Платонова)

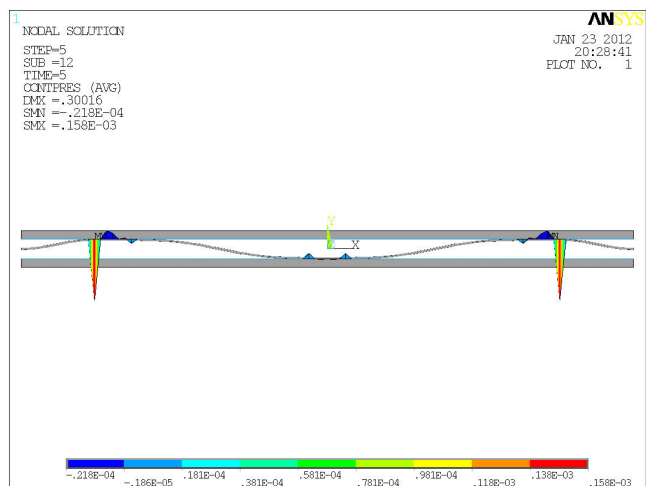


Рис. 7. Картина контактных напряжений для трех зон контакта. (к статье В.В. Платонова)



Рис. 8. На конференции NAA-12: (слева направо) проф. С.Б. Филиппов, спикер мини-симпозиума доц. Р. Янков, доц. А.Л. Смирнов, председатель конференции проф. Л. Вълков, проф. С.М. Бауэр, канд физ-мат. наук А.М. Ермаков, канд физ-мат. наук А.В. Лебедев.



Рис. 9. На конференции ESMC-12: (слева направо) проф. П.Е. Товстик, доц. Е.М. Товстик, доц. Н.А. Волкова, проф. А.И. Разов, канд физ-мат. наук Г.А. Волков, проф. А.Е. Волков, доц. Е.Б. Воронкова, асп. А. Манойлов; (сидит) канд физ-мат. наук А.М. Ермаков.