

## Устойчивость плавания барж с трапециевидным и пятиугольным сечениями

А. С. Смирнов<sup>1,2</sup>, Т. Н. Хашба<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук,  
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

**Для цитирования:** Смирнов А. С., Хашба Т. Н. Устойчивость плавания барж с трапециевидным и пятиугольным сечениями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4. С. 740–752.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.415>

Обсуждаются вопросы устойчивости симметричного положения равновесия плавающих в жидкости барж, которые имеют трапециевидное и пятиугольное сечения. Приводятся основные принципы статического анализа, необходимые для исследования устойчивости плавания. Для обеих рассматриваемых задач строится точное выражение для потенциальной энергии плавающего тела и вычисляется его квадратичная аппроксимация вблизи исследуемого состояния равновесия. На основе этих выражений получены условия устойчивости в терминах безразмерных параметров, причем каждая из обсуждаемых задач обладает тремя такими параметрами. Проверяется, что для частных вариантов прямоугольного понтона и треугольной лодки из найденных условий устойчивости в обеих задачах вытекают известные ранее результаты. Найденные решения иллюстрируются в виде серий областей устойчивости на плоскости двух безразмерных параметров, когда значение третьего параметра варьируется. Данная графическая интерпретация позволяет установить основные качественные и количественные особенности построенных решений и сделать ключевые выводы. Полученные результаты интересны в теоретическом отношении и могут представлять определенную практическую ценность.

*Ключевые слова:* плавающая баржа, устойчивость, статический анализ, область устойчивости, плоскость безразмерных параметров.

**1. Введение.** Исследование устойчивости плавающих тел (в морской науке используется термин «остойчивость») является одной из важнейших задач гидростатики [1]. Это обусловлено тем, что данная область механики имеет серьезное практическое значение, так как плавающие тела представляют широчайший спектр самых разнообразных водных транспортных средств, портовых сооружений и подводных конструкций, которые предназначены для использования в различных целях и ситуациях [2, 3]. Ясно, что все эти объекты требуют тщательного статического исследования, гарантирующего их устойчивость во многих режимах эксплуатации, а также при плавном изменении их механических параметров. Именно эти изменения нередко приводят к неожиданной потере устойчивости водного объекта с последующим его опрокидыванием или переворотом на бок [4], и история судостроения знает немало примеров подобных ситуаций, приведших к катастрофам.

Среди задач подобного рода хорошо известна задача о равновесии и устойчивости плавания прямоугольного параллелепипеда, моделирующего понтон с прямоугольным сечением, которая была рассмотрена русским инженером и ученым А. П. Фан-дер-Флитом [5, 6] и в дальнейшем неоднократно обсуждалась и развивалась [7]. Например, в работе [4] рассмотрено плавание понтона со смещенным центром масс, а в работе [2] проводится глобальный анализ плавающей прямоугольной баржи с определением всех возможных положений равновесия и исследованием их устойчивости, выполненный по аналогии с задачей о плавании бруса квадратного сечения [8]. Интересна и задача об устойчивости плавающей лодки с треугольным сечением [9], причем стоит отметить, что равновесие трехгранной призмы в жидкости изучалось еще русским математиком и механиком А. Ю. Давидовым [10].

Тем не менее многие вопросы, связанные с выявлением устойчивости плавающих тел и важные в практическом отношении, остаются открытыми. Это обусловлено тем, что статический анализ погруженного в жидкость тела даже при достаточно простой геометрии его сечения зачастую весьма сложен из-за возникающих в его процессе серьезных вычислительных трудностей [4]. Именно поэтому в современных руководствах по механике твердых тел и теории устойчивости вопросам гидростатической устойчивости тел в жидкости уделяется весьма малое внимание [2].

В данной работе предлагается отчасти восполнить этот пробел и сделать еще один шаг в сторону усложнения геометрии поперечных сечений тел, погруженных в жидкость, чтобы приблизить их к реальным плавающим средствам. Основная цель статьи — изучение вопросов устойчивости плавания барж с трапециевидным и пятиугольным сечениями.

**2. Основные положения при исследовании устойчивости плавающих тел.** Прежде чем переходить к решению названных задач, рассмотрим основные положения, традиционно принимаемые при исследовании устойчивости плавающих тел методами аналитической статики [4, 8, 9]. Предположим, что рассматривается длинный брус постоянного поперечного сечения с плотностью  $\rho_b$  (поверхностная плотность сечения бруса, т. е. масса на единицу площади), погруженный в жидкость плотности  $\rho_l$  (также на единицу площади) и моделирующий плавающее средство. Вследствие этого можно ограничиться рамками плоской задачи, в которой твердое тело имеет три степени свободы — смещения в горизонтальном и вертикальном направлениях, а также поворот сечения в вертикальной плоскости. При этом горизонтальная координата в статической задаче не играет никакой роли и поэтому может быть отброшена, а вертикальная координата исключается при помощи широко известного приема в статике плавающих тел, который заключается в рассмотрении лишь равнообъемных наклонов бруса по углу поворота [11, 12]. Значит, рассматриваются только такие наклоны бруса, при которых объем вытесненной жидкости остается постоянным (в условиях плоской задачи речь, разумеется, идет о соответствующей площади). Таким образом, в рассмотрении остается лишь одна обобщенная координата — угол наклона бруса  $\varphi$ , и вопрос об устойчивости его плавания может быть решен с помощью исследования потенциальной энергии для задачи с одной степенью свободы. Трактую жидкость как потенциальное поле гидростатических сил, не имеющее собственных степеней свободы, заключаем, что брус испытывает действие двух потенциальных сил — силы тяжести и силы Архимеда. Их потенциальные энергии соответственно  $\Pi_b = P_b y_b$  и  $\Pi_l = -P_l y_l$ , где  $P_b$  и  $P_l$  — вес

бруса и вытесненной жидкости, а  $y_b$  и  $y_l$  — вертикальные координаты центров масс бруса и вытесненного объема, отсчитываемые от ватерлинии. Ясно, что в положении равновесия  $P_l = P_b$ , а при наклонениях  $P_l = \rho_l g S_l = \text{const}$  в силу условия  $S_l = \text{const}$ , где в рамках плоской задачи  $S_l$  — площадь вытесненной жидкости, так что равенство  $P_l = P_b$  выполняется для любого  $\varphi$ . Тогда из условия  $\rho_b g S_b = \rho_l g S_l$ , где  $S_b$  — площадь сечения бруса, имеем  $S_l = \rho S_b$ , где  $\rho = \rho_b / \rho_l$  — безразмерная плотность, причем из условия плавания  $\rho_b < \rho_l$ , так что  $\rho < 1$ . Полагая  $P_b = P_l = P$ , получим выражение для суммарной потенциальной энергии системы в виде  $\Pi = P(y_b - y_l)$  [13].

**3. Устойчивость плавания трапецевидной баржи.** Предположим сначала, что сечение баржи представляет собой равнобедренную трапецию, имеющую меньшее основание  $2a$ , боковую сторону  $2b$  и острый угол  $\alpha$  между ее боковой стороной и высотой (рис. 1).

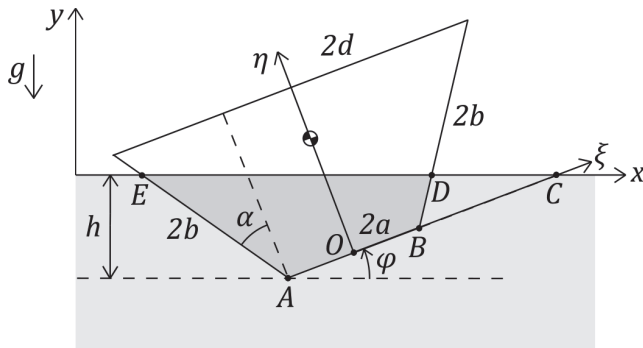


Рис. 1. Трапецевидная баржа.

Рассмотрим вопрос об устойчивости положения равновесия  $\varphi = 0$ . Ясно, что большее основание трапеции есть  $2d = 4b \sin \alpha + 2a$ , а ее высота дается формулой  $H = 2b \cos \alpha$ . Поэтому площадь трапеции, а также координата центра масс сечения  $\eta_b$  на оси симметрии  $\eta$  с началом в точке  $O$ , лежащей на нижнем основании трапеции, выражаются формулами:

$$S_b = (a + d)H = 4(a + b \sin \alpha)b \cos \alpha, \quad \eta_b = \frac{b \cos \alpha(3a + 4b \sin \alpha)}{3(a + b \sin \alpha)}. \quad (1)$$

Обозначим глубину погружения бруса при отклонении на угол  $\varphi$  за  $h$  (рис. 1). Тогда для вертикальной координаты центра масс бруса  $y_b$  имеем:

$$y_b = -h + a \sin \varphi + \frac{b \cos \alpha(3a + 4b \sin \alpha)}{3(a + b \sin \alpha)} \cos \varphi. \quad (2)$$

Что же касается координаты центра масс вытесненного объема  $y_l$ , определяемой центром масс затемненного четырехугольника  $ABDE$  (рис. 1), то ее можно вычислить по известной формуле:

$$y_l = -\frac{1}{S_l} \left[ \frac{h}{3} S_1 - \frac{h - 2a \sin \varphi}{3} S_2 \right], \quad (3)$$

представляя этот четырехугольник как треугольник  $ACE$ , из которого исключается треугольник  $BCD$ . Площади этих треугольников, обозначенные здесь для краткости

как  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, а также площадь  $S_l$ , равная их разности, определяются следующими формулами:

$$S_1 = \frac{h^2 \cos \alpha}{2 \sin \varphi \cos(\alpha + \varphi)}, \quad S_2 = \frac{(h - 2a \sin \varphi)^2 \cos \alpha}{2 \sin \varphi \cos(\alpha - \varphi)}, \quad (4)$$

$$S_l = \frac{\cos \alpha [h^2 \sin \alpha + 2a \cos(\alpha + \varphi)(h - a \sin \varphi)]}{\cos(\alpha - \varphi) \cos(\alpha + \varphi)}.$$

Для нахождения величины  $h$  необходимо использовать условие равнообъемности  $S_l = \rho S_b$ , которое в результате подстановки в него  $S_b$  и  $S_l$  согласно (1) и (4) приводит к квадратному уравнению относительно  $h$ :

$$h^2 \sin \alpha + 2a \cos(\alpha + \varphi)h - 2a^2 \sin \varphi \cos(\alpha + \varphi) - 4b\rho(a + b \sin \alpha) \cos(\alpha - \varphi) \cos(\alpha + \varphi) = 0. \quad (5)$$

Его положительный корень, отвечающий смыслу задачи, имеет вид

$$h = \frac{1}{\sin \alpha} [-a \cos(\alpha + \varphi) + (2a^2 \sin \varphi \cos(\alpha + \varphi) \sin \alpha + a^2 \cos^2(\alpha + \varphi) + 4b\rho(a + b \sin \alpha) \cos(\alpha - \varphi) \cos(\alpha + \varphi) \sin \alpha)^{1/2}]. \quad (6)$$

Само уравнение (5) также понадобится нам в дальнейшем, чтобы облегчить последующие вычисления. Возвращаясь к выражению (3) для  $y_l$ , преобразуем его, пользуясь формулами (4):

$$y_l = -\frac{h^3 \sin \alpha + a(3h^2 - 6ah \sin \varphi + 4a^2 \sin^2 \varphi) \cos(\alpha + \varphi)}{12b\rho(a + b \sin \alpha) \cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}. \quad (7)$$

Видно, что в это выражение входит не только  $h$ , определяемое согласно (6) и представленное в явном виде достаточно громоздкой формулой, но и значительно более сложные выражения  $h^2$  и  $h^3$ . Однако они также могут быть выражены через  $h$  посредством самого уравнения (5):

$$h^2 = \frac{2 \cos(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} [a^2 \sin \varphi + 2b\rho(a + b \sin \alpha) \cos(\alpha - \varphi) - ah], \quad (8)$$

$$h^3 = \frac{2 \cos(\alpha + \varphi)}{\sin^2 \alpha} [-2a \cos(\alpha + \varphi) (a^2 \sin^2 \varphi + 2b\rho(a + b \sin \alpha) \cos(\alpha - \varphi)) + (a^2 \sin \varphi \sin \alpha + 2a^2 \cos(\alpha + \varphi) + 2b\rho(a + b \sin \alpha) \cos(\alpha - \varphi) \sin \alpha) h], \quad (9)$$

и далее исключены из формулы (7), в которой останется только  $h$ , как и в выражении (2). В результате указанных действий можно вычислить потенциальную энергию плавающего тела:

$$\Pi = P(y_b - y_l) = P \left[ -\frac{a^2 + 4b\rho(a + b \sin \alpha) \sin \alpha}{6b\rho(a + b \sin \alpha) \sin \alpha} h + \frac{(a + 2b \sin \alpha)^2 \cos \alpha}{3(a + b \sin \alpha) \sin \alpha} \cos \varphi + \frac{a(a^2 + 4b\rho(a + b \sin \alpha) \sin \alpha)}{6b\rho(a + b \sin \alpha) \sin \alpha} \sin \varphi \right]. \quad (10)$$

Поскольку для получения условия устойчивости тривиального положения равновесия  $\varphi = 0$  достаточно использовать квадратичную аппроксимацию для  $\Pi$ , то согласно (10) следует получить такую же аппроксимацию и для  $h$ . Раскладывая выражение (6) в ряд вблизи точки  $\varphi = 0$  и удерживая при этом слагаемые не выше второго порядка малости по  $\varphi$ , получим следующее приближенное выражение с точностью до аддитивной постоянной:

$$h = a\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha \left[ a - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \sqrt{a^2 + 4b\rho(a + b \sin \alpha) \sin \alpha} \right] \varphi^2. \quad (11)$$

Подставляя полученное выражение в (10), приходим к квадратичной аппроксимации потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{P}{12b\rho \sin^2 \alpha \cos \alpha (a + b \sin \alpha)} \left\{ [(1 - \rho)a^2 + \rho(a + 2b \sin \alpha)^2]^{3/2} - \right. \\ \left. - \cos^2 \alpha [(1 - \rho)a^3 + \rho(a + 2b \sin \alpha)^3] \right\} \varphi^2, \quad (12)$$

где уже отброшены несущественные постоянные слагаемые, не влияющие на устойчивость. Прежде чем выписывать условие устойчивости в общем случае, проверим два частных случая, которые были обсуждены во введении. Так, при  $a = 0$  трапециевидное сечение переходит в треугольное, и из (12) находим в этом случае

$$\Pi = \frac{2Pb}{3} \left( \frac{\sqrt{\rho}}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) \varphi^2 = \frac{PH}{3} \left( \frac{\sqrt{\rho}}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \varphi^2. \quad (13)$$

Поскольку в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия системы согласно теореме Лагранжа — Дирихле имеет строгий минимум, то из (13) вытекает следующее условие устойчивости положения равновесия  $\varphi = 0$  [9]:

$$\rho > \cos^4 \alpha. \quad (14)$$

Что же касается частного случая  $\alpha = 0$ , когда трапециевидное сечение переходит в прямоугольное, то в этой ситуации выражение (12) представляет неопределенность вида  $0/0$ . Раскрывая ее, получаем следующее выражение:

$$\Pi = \frac{P}{2} \left[ \frac{a^2}{6b\rho} + b(\rho - 1) \right] \varphi^2, \quad (15)$$

откуда следует условие устойчивости в известном виде [6]:

$$\delta > \sqrt{6\rho(1 - \rho)}, \quad (16)$$

где введен безразмерный параметр  $\delta = a/b$ . В общем же случае, когда  $a \neq 0$  и  $\alpha \neq 0$ , условие устойчивости следует непосредственно из выражения (12) и имеет достаточно компактную форму:

$$[(1 - \rho)\delta^2 + \rho(\delta + 2 \sin \alpha)^2]^3 > \cos^4 \alpha [(1 - \rho)\delta^3 + \rho(\delta + 2 \sin \alpha)^3]^2. \quad (17)$$

Графическую интерпретацию полученным результатам удобно дать в виде серии областей устойчивости на плоскости  $\rho\delta$  при различных значениях угла  $\alpha$  (на рис. 2

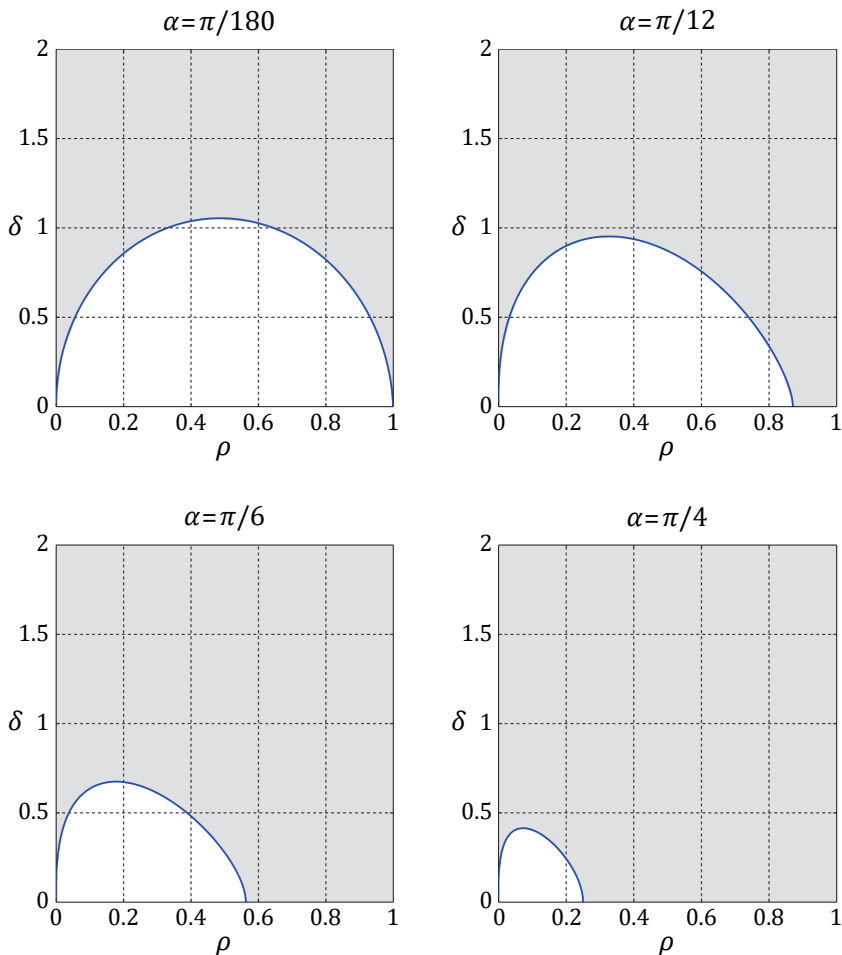
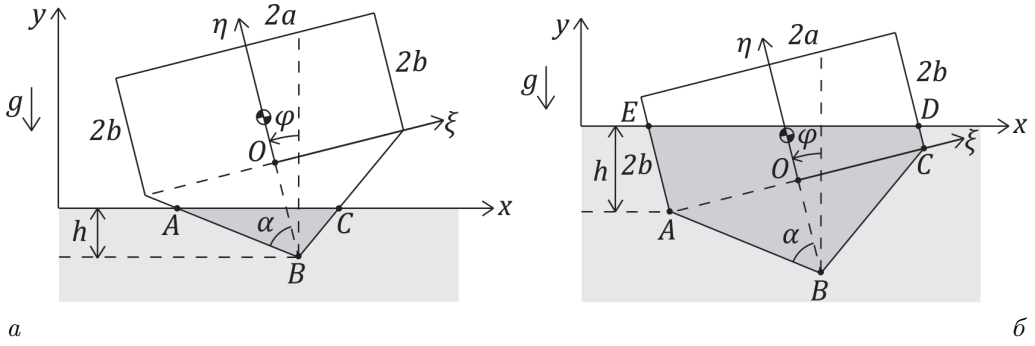


Рис. 2. Области устойчивости плавания трапецевидной баржи.

они затемнены). Видно, что при малых  $\alpha$  область устойчивости практически не отличается от области устойчивости прямоугольного понтона согласно (16), тогда как с увеличением  $\alpha$  область устойчивости становится более широкой, вследствие чего неустойчивость будет проявляться лишь при достаточно небольших значениях параметров  $\rho$  и  $\delta$ . Такая ситуация имеет место, когда трапецевидное сечение близко к треугольному, а баржа мало погружена в жидкость, и эти результаты согласуются с общими представлениями о рассматриваемой задаче устойчивости плавания.

**4. Устойчивость плавания пятиугольной баржи.** Рассмотрим теперь баржу с сечением в виде пятиугольника, представляющего собой объединение прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$  и равнобедренного треугольника с основанием  $2a$  и углом  $2\alpha$  между боковыми сторонами. Ясно, что здесь необходимо рассматривать два качественно различных случая погружения, представленные на рис. 3, отличающиеся расположением прямоугольной части относительно ватерлинии.



a

b

Рис. 3. Пятиугольная баржа: а — первый вариант погружения; б — второй вариант погружения.

В обоих указанных случаях из условия равнообъемности имеем

$$S_l = \rho S_b = \rho(4ab + a^2 \operatorname{ctg} \alpha) = \rho ab (4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha), \quad (18)$$

где введен безразмерный параметр  $\delta = a/b$ , а также учтено, что  $S_b = S_1 + S_2$ ,  $S_1 = 4ab$  — площадь прямоугольной части,  $S_2 = a^2 \operatorname{ctg} \alpha$  — площадь треугольной части. Нетрудно понять, что границе двух вариантов погружения отвечает ситуация, когда в положении равновесия треугольная часть бруса полностью оказывается в жидкости, тогда как прямоугольная его часть полностью располагается над ватерлинией. В этом случае  $S_l = a^2 \operatorname{ctg} \alpha$ , откуда с учетом равенства (18) получим

$$\rho_* = \frac{\delta}{\delta + 4 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (19)$$

Поэтому при  $0 < \rho < \rho_*$  имеет место первая схема погружения, тогда как при  $\rho_* < \rho < 1$  — вторая. Определим также координату центра масс сечения  $\eta_b$  на оси симметрии  $\eta$  с началом в точке  $O$ , лежащей на стыке двух частей бруса. Для этого следует использовать формулу центра масс составного сечения:

$$\eta_b = \frac{\eta_1 S_1 + \eta_2 S_2}{S_b} = b \frac{4 - \frac{1}{3} \delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha}, \quad (20)$$

где  $\eta_1 = b$  и  $\eta_2 = -a \operatorname{ctg} \alpha / 3$  — координаты центров масс прямоугольника и треугольника соответственно, расположенных на оси симметрии  $\eta$ .

**Вариант 1.** Обратимся сначала к первой схеме погружения (рис. 3, а). Нетрудно понять, что если обозначить за  $h$  глубину погружения баржи, то формула для  $S_l$ , т. е. для площади треугольника  $ABC$ , будет иметь точно такой же вид, как и в задаче о треугольной лодке, а именно:

$$S_l = \frac{h^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi)}. \quad (21)$$

Приравнивая это выражение к (18) и разрешая его относительно  $h$ , будем иметь

$$h = b \cos \varphi \sqrt{\rho (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi) \delta (4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (22)$$

Ясно, что вертикальная координата центра масс сечения относительно ватерлинии в отклоненном положении будет определяться формулой

$$y_b = -h + (\eta_b + a \operatorname{ctg} \alpha) \cos \varphi = -h + b \frac{4 + 4\delta \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2}{3}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha} \cos \varphi, \quad (23)$$

тогда как  $y_l = -h/3$ . В результате можно составить выражение для потенциальной энергии системы в рассматриваемом случае:

$$\Pi = P(y_b - y_l) = Pb \left[ -\frac{2}{3} \sqrt{\rho(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi) \delta (4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{4 + 4\delta \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2}{3}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha} \right] \cos \varphi, \quad (24)$$

где учтено выражение (22). Записывая далее квадратичную аппроксимацию потенциальной энергии, получим следующее выражение:

$$\Pi = Pb \left[ \frac{\sqrt{\rho \delta \operatorname{ctg} \alpha (4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha)}}{3 \cos^2 \alpha} - \frac{2 + 2\delta \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{3}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha} \right] \varphi^2. \quad (25)$$

Отсюда вытекает условие устойчивости для случая  $0 < \rho < \rho_*$ :

$$\rho > 9 \cos^4 \alpha \frac{(2 + 2\delta \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{3}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha)^2}{(4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha)^3 \delta \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (26)$$

Ясно, что при  $b \rightarrow 0$  (т. е. при  $\delta \rightarrow \infty$ ) рассматриваемая схема переходит в обычную треугольную лодку. Нетрудно убедиться в том, что в этой ситуации полученное условие устойчивости (26) полностью переходит в (14), что является одной из его проверок.

**Вариант 2.** Обратимся теперь ко второй схеме погружения (рис. 4, б). Если обозначить здесь за  $h$  не всю глубину погружения бруса, а только глубину погружения его прямоугольной части, то для площади трапеции  $ACDE$  можно заимствовать выражение, полученное для случая прямоугольного понтона [9], а вся площадь  $S_l$  пятиугольника  $ABCDE$  тогда выразится как

$$S_l = \frac{2a(h - a \sin \varphi)}{\cos \varphi} + a^2 \operatorname{ctg} \alpha. \quad (27)$$

Подставляя это соотношение в условие (18) и разрешая полученное соотношение относительно  $h$ , приходим к следующему выражению:

$$h = b \left[ \delta \sin \varphi + \left( 2\rho + \frac{1}{2}(\rho - 1) \right) \cos \varphi \right]. \quad (28)$$

Следовательно, теперь можно определить и вертикальную координату  $y_b$  центра масс сечения баржи:

$$\begin{aligned} y_b &= -h + a \sin \varphi + b \frac{4 - \frac{1}{3}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha} \cos \varphi = \\ &= b \cos \varphi \left[ \frac{4 - \frac{1}{3}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha} - 2\rho - \frac{1}{2}(\rho - 1)\delta \operatorname{ctg} \alpha \right]. \end{aligned} \quad (29)$$



Далее необходимо найти вертикальную координату  $y_l$  центра масс пятиугольника  $ABCDE$ , что является гораздо более трудоемкой задачей, так как для этого следует вычислить

$$y_l = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_l}, \quad (30)$$

где индексами 1 и 2 помечаются координаты центров масс и площади прямоугольной и треугольной частей сечения соответственно. Ясно, что выражение для первого слагаемого в числителе формулы (30) также может быть заимствовано из [9], и оно будет иметь вид

$$\begin{aligned} y_1 S_1 &= -\frac{a}{3 \cos \varphi} [3(h - a \sin \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi] = \\ &= -ab^2 \left[ \left( 2\rho + \frac{1}{2}(\rho - 1)\delta \operatorname{ctg} \alpha \right)^2 \cos \varphi + \frac{\delta^2 \sin^2 \varphi}{3 \cos \varphi} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где также учтено выражение для  $h$  согласно (28). Что же касается второго слагаемого  $y_2 S_2$  в числителе формулы (30), то для него будем иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} y_2 S_2 &= -a^2 \operatorname{ctg} \alpha \left[ h - a \sin \varphi + \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{3} \cos \varphi \right] = \\ &= -a^2 b \operatorname{ctg} \alpha \left[ 2\rho + \frac{\delta \operatorname{ctg} \alpha}{6} (3\rho - 1) \right] \cos \varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда выражение после подстановки формул (18), (31) и (32) в соотношение (30) получим после ряда преобразований искомую формулу для  $y_l$ :

$$\begin{aligned} y_l &= -\frac{b}{\rho(4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha)} \left[ \frac{\delta^2 \sin^2 \varphi}{3 \cos \varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \left( 4 + 2\delta \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{4}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) \rho^2 + \frac{1}{12}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

В результате выражение для потенциальной энергии примет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= P(y_b - y_l) = \frac{Pb}{\rho(4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha)} \left[ \frac{\delta^2 \sin^2 \varphi}{3 \cos \varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{12}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + \left( 4 + 2\delta \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{6}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) \rho - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( 4 + 2\delta \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{4}\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) \rho^2 \right) \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (34)$$

а ее квадратичная аппроксимация определится выражением

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{Pb}{24\rho(4 + \delta \operatorname{ctg} \alpha)} [3(\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 8\delta \operatorname{ctg} \alpha + 16)\rho^2 - \\ &\quad - 2(\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 12\delta \operatorname{ctg} \alpha + 24)\rho + \delta^2(8 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)] \varphi^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда вытекает условие устойчивости для случая  $\rho_* < \rho < 1$  в виде квадратного неравенства относительно  $\rho$ :

$$\begin{aligned} 3(\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 8\delta \operatorname{ctg} \alpha + 16)\rho^2 - \\ - 2(\delta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 12\delta \operatorname{ctg} \alpha + 24)\rho + \delta^2(8 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

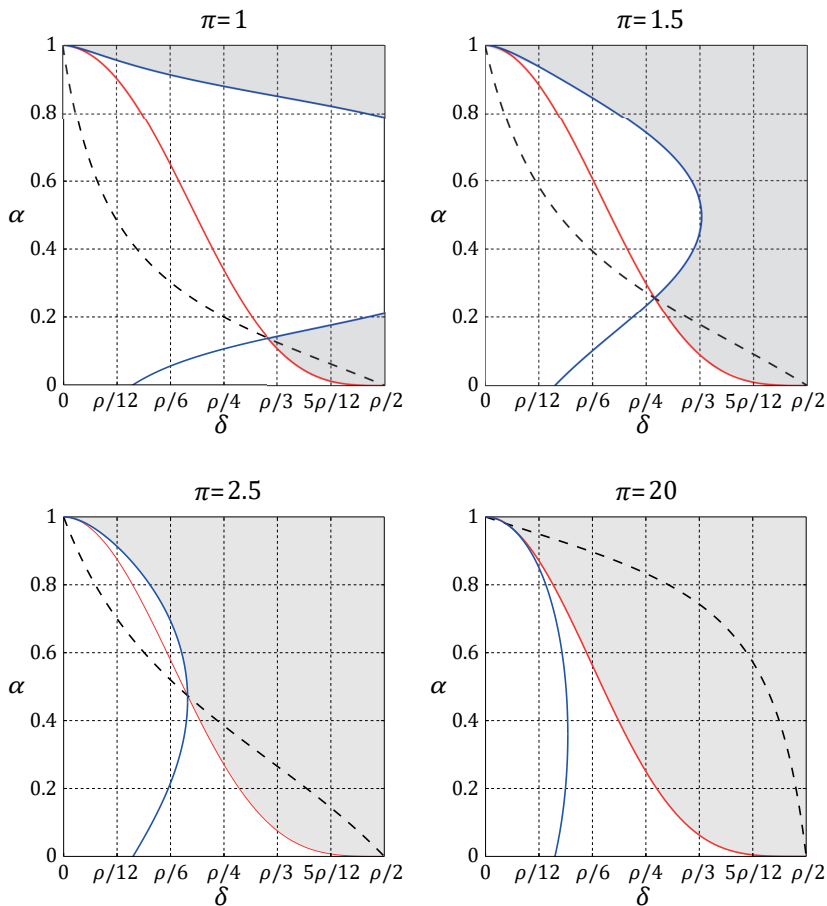


Рис. 4. Области устойчивости плавания пятиугольной баржи.

Ясно, что при  $\alpha \rightarrow \pi/2$  рассматриваемая схема переходит в прямоугольный понтон. Нетрудно видеть, что полученное условие (36) в этом случае переходит в (16), как это и должно быть.

В данной задаче удобно построить серию областей устойчивости на плоскости параметров  $\alpha\rho$  при различных значениях параметра  $\delta$ . Для этой цели необходимо объединить полученные условия устойчивости (26) для  $0 < \rho < \rho_*$  и (36) для  $\rho_* < \rho < 1$ , в результате чего получим картину, приведенную на рис. 4. Здесь на каждом из графиков пунктирной линией приведена кривая (19), красной линией — граница области (26), а синей линией — граница области (36). Все указанные кривые пересекаются в одной точке, в чем можно убедиться непосредственно, используя указанные формулы. В результате устанавливается, что координаты  $\alpha_0$  и  $\rho_0$  этой точки определяются выражениями:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{6 - \delta^2 + \sqrt{\delta^4 + 20\delta^2 + 36}}{8\delta}, \quad \rho_0 = \frac{\sqrt{\delta^4 + 20\delta^2 + 36} - \delta^2 - 6}{4}. \quad (37)$$

Видно, что вследствие сшивки отдельных частей области устойчивости сама кривая согласно (19), которая разграничивает два варианта погружения баржи, никогда не

оказывается участком границы этой области, как этого и следовало ожидать. При этом приведенные графические иллюстрации на плоскости безразмерных параметров позволяют выявить нетривиальный характер построенного решения. Так, при  $\delta < \sqrt{3/2}$  область устойчивости состоит из двух несвязанных частей. Что же касается варианта  $\delta > \sqrt{3/2}$ , то для него область устойчивости является единой, так как в этом случае при  $\alpha = \pi/2$ , когда пятиугольная баржа переходит в прямоугольную, устойчивость будет иметь место уже при любом значении  $\rho$  согласно (16). Наконец, при достаточно больших значениях  $\delta$  область устойчивости уже почти не отличается от области устойчивости треугольной лодки, отвечающей условию (14).

В завершение обсуждения результатов представленного исследования крайне важно подчеркнуть, что полученные в работе выражения имеют существенно большую ценность, чем это может показаться на первый взгляд. Дело в том, что в процессе изложения были найдены не только приближенные, но и точные выражения для потенциальной энергии в рамках рассмотренных вариантов погружения, т. е. конфигураций, которые определяются количеством вершин сечения, расположенных ниже ватерлинии. Это позволит в случае неустойчивости симметричного равновесия определить, например, путем построения графической иллюстрации потенциальной энергии  $\Pi(\varphi)$  смежное с ним наклонное положение устойчивого равновесия, если оно будет отвечать тому же случаю погружения. Именно это обстоятельство полностью оправдывает использование статического подхода, основанного на детальном анализе потенциальной энергии, который позволяет выявить гораздо более глубокую информацию о решаемых задачах и сформировать серьезный задел под дальнейшие исследования данных проблем.

**5. Заключение.** В данной статье были рассмотрены вопросы устойчивости плавания барж с трапециевидным и пятиугольным сечениями, которые решались при помощи методов аналитической статики. Несмотря на достаточно громоздкий характер проведенных построений, в обоих случаях были получены конечные точные выражения для потенциальной энергии в рамках рассмотренных конфигураций, которые позволили выявить искомые условия устойчивости в терминах безразмерных параметров задачи. Найденные решения наглядно иллюстрируются в виде серий областей устойчивости на плоскости параметров. Полученные результаты имеют неочевидный характер и представляют не только фундаментальное теоретическое значение, но могут также оказаться полезными для практических аспектов корабельного дела.

## Литература

1. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Москва, Наука (1952).
2. Скалина М. К., Смирнов А. С. Устойчивость положений равновесия плавающей прямоугольной баржи в условиях плоской задачи. В: *Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды»*. 2020–2021, 41–55 (2021).
3. Черданцев С. В. Теоретические основы расчета понтонов, используемых на угольных разрезах. *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых* **1**, 61–69 (2013).
4. Скалина М. К., Смирнов А. С. Равновесие и устойчивость прямоугольной баржи со смещенным центром тяжести в жидкости. *Неделя науки СПбПУ, ИПММ*, 95–98 (2019).
5. Фан-дер-Флит А. П. Остойчивость прямоугольного понтона при наклонении от 0 до 90°. *Известия Санкт-Петербургского политехнического института* **10**, 281–307 (1908).
6. Фан-дер-Флит А. П. Начальная остойчивость прямоугольных параллелепипедов. *Известия Санкт-Петербургского политехнического института* **10**, 397–406 (1908).

7. Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения*, пер. с англ. Москва, Мир (1980).
8. Меркин Д. Р., Смольников Б. А. *Прикладные задачи динамики твердого тела*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2003).
9. Меркин Д. Р., Бауэр С. М., Смольников Б. А., Смирнов А. Л. *Теория устойчивости в примерах и задачах*. Москва; Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика (2007).
10. Жуковский Н. Е. *Полное собрание сочинений. Т. 9. Математика. Астрономия. Речи. Доклады. Характеристики и биографии*. Москва, Ленинград, ОНТИ НКТП СССР (1937).
11. Войткунский Я. И. (ред.) *Справочник по теории корабля: в 3 т. Т. 2. Статика судов. Качка судов*. Ленинград, Судостроение (1985).
12. Борисов Р. В., Луговский В. В., Мирохин Б. В., Рождественский В. В. *Статика корабля*. Санкт-Петербург, Судостроение (2005).
13. Ржаницын А. Р. *Устойчивость равновесия упругих систем*. Москва, ГИТТЛ (1955).

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2022 г.;  
доработана 28 мая 2022 г.;  
рекомендована к печати 9 июня 2022 г.

Контактная информация:

*Смирнов Алексей Сергеевич* — ассистент, мл. науч. сотр.; smirnov.alexey.1994@gmail.com  
*Хашба Тимур Нурзагович* — инженер; hashba\_tn@spbstu.ru

## Stability of floating barges with trapezoidal and pentagonal sections

*A. S. Smirnov*<sup>1,2</sup>, *T. N. Khashba*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Peter the Great St Petersburg Polytechnic University,  
29, ul. Polytechnicheskaya, St Petersburg, 195251, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,  
61, Bolshoy pr. V. O., St Petersburg, 199178, Russian Federation

**For citation:** Smirnov A. S., Khashba T. N. Stability of floating barges with trapezoidal and pentagonal sections. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 4, pp. 740–752. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.415> (In Russian)

The issues of stability of the symmetrical equilibrium position of floating barges in liquid, which have trapezoidal and pentagonal sections, are discussed in the paper. The basic principles of static analysis necessary for studying the stability of floating bodies are given. The exact expression for the potential energy of a floating body is constructed and its quadratic approximation is calculated near the investigated equilibrium state for both problems under consideration. Stability conditions are obtained in terms of dimensionless parameters on the basis of these expressions, and each of the problems under discussion has three such parameters. It is checked that for particular variants of a rectangular pontoon and a triangular boat, the previously known results follow from the found stability conditions in both problems. The found solutions are illustrated as a series of stability regions on the plane of two dimensionless parameters when the value of the third parameter varies. This graphical interpretation allows to establish the main qualitative and quantitative features of the constructed solutions and draw key conclusions. The obtained results are interesting from a theoretical point of view and may be of some practical value.

*Keywords:* floating barge, stability, static analysis, stability region, plane of dimensionless parameters.

## References

1. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoj sredy*. Moscow, Nauka (1952) (In Russian) [Eng. transl.: Sedov L. I. *In 2 vols*. Singapore, World Scientific Publishing Co. (1997)].
2. Skalina M. K., Smirnov A. S. Stability of equilibrium positions of a floating rectangular barge under conditions of a flat problem. In: *Computer methods in continuum mechanics. 2020–2021*, 41–55 (2021). (In Russian)
3. Cherdantsev S. V. Theoretical basis for calculation of pontoons used in open pit mines. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh* **1**, 61–69 (2013) (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Mining Science* **49** (1), 52–59 (2013) <https://doi.org/10.1134/S1062739149010073>].
4. Skalina M. K., Smirnov A. S. Equilibrium and stability of a rectangular barge with a displaced center of gravity in a liquid. *Week of Science of SPbPU, IAMM*, 95–98 (2019). (In Russian)
5. Fan-der-Flit A. P. Stability of a rectangular pontoon at an inclination from 0 to 90°. *Izvestia of the St Petersburg Polytechnic Institute* **10**, 281–307 (1908). (In Russian)
6. Fan-der-Flit A. P. Initial stability of rectangular parallelepipeds. *Izvestia of the St Petersburg Polytechnic Institute* **10**, 397–406 (1908). (In Russian)
7. Poston T., Stewart I. *Catastrophe theory and its applications*. London, San Francisco, Melbourne, Pitman (1978) [Rus. ed.: Poston T., Stuart I. *Teoriya katastrof i ee prilozheniya*. Moscow, Mir (1980)].
8. Merkin D. R., Smolnikov B. A. *Applied problems of the dynamics of a rigid body*. St Petersburg, St Petersburg University (2003). (In Russian)
9. Merkin D. R., Bauer S. M., Smirnov A. L., Smolnikov B. A. *The theory of stability in examples and problems*. In: *Regular and Chaotic Dynamics*. Moscow; Izhevsk (2007). (In Russian)
10. Zhukovsky N. E. *Complete set of works. Vol. 9. Mathematics. Astronomy. Speeches. Reports. Characteristics and biographies*. Moscow, Leningrad, ONTI NKTP USSR (1937). (In Russian)
11. Voytkunsky Ya. I. (ed.). *Handbook of ship theory in three volumes. V. 2. Statics of courts. The pitching of ships*. Leningrad, Sudostroenie Publ. (1985). (In Russian)
12. Borisov R. V., Lugovsky V. V., Mirokhin B. V., Rozhdestvensky V. V. *Ship statics*. St Petersburg, Sudostroenie Publ. (2005). (In Russian)
13. Rzhantsyn A. R. *Stability of equilibrium of elastic systems*. Moscow, GITTL Publ. (1955). (In Russian)

Received: February 25, 2022

Revised: May 28, 2022

Accepted: June 9, 2022

### Authors' information:

Aleksey S. Smirnov — [smirnov.alexey.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexey.1994@gmail.com)

Timur N. Khashba — [hashba\\_tn@spbstu.ru](mailto:hashba_tn@spbstu.ru)