

Алгоритм гашения упругих колебаний распределенного объекта при избыточном количестве пар сенсор — актуатор

В. А. Полянский¹, Н. А. Смирнова²

¹ Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Для цитирования: Полянский В. А., Смирнова Н. А. Алгоритм гашения упругих колебаний распределенного объекта при избыточном количестве пар сенсор — актуатор // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4. С. 720–728. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.413>

Эффективность алгоритмов независимого гашения низших упругих мод объекта ограничена наличием и возбуждением неконтролируемых высших мод. Исследовано влияние количества пар сенсор — актуатор, при сохранении числа обратных связей, на эффективность гашения. Предложена и численно промоделирована процедура определения модальных матриц, предназначенных для сепарации форм из сигналов сенсоров и организации воздействия на формы актуаторами, без использования математической модели объекта.

Ключевые слова: распределенный упругий объект, управление модами, пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы, идентификация.

1. Введение. Особенностью облегченной механической конструкции как объекта управления является распределенность инерционных и упругих характеристик, приводящая к бесконечному спектру собственных частот. Методы управления состоянием таких объектов основаны на редукции их модели в предположении о существенном возрастании демпфирования с увеличением номера формы упругих колебаний.

Слежение за состоянием объекта и управляющее воздействие на него осуществляется с помощью конечного числа пар пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов [1]. Метод «модального» управления состоит в независимом демпфировании колебаний по формам упругого объекта [2–4], причем число пьезоэлементов обычно не превышает числа демпфируемых форм. Следствием является возбуждение неконтролируемых форм колебаний объекта [1, 3].

Оптимизация расположения и размеров пьезоэлементов отчасти нивелирует указанный эффект [5–9]. В работе на примере шарнирно-опертой балки показано, что использование дополнительных сенсоров и актуаторов позволяет:

- не допускать возбуждения неконтролируемых форм колебаний;
- располагать пьезоэлементы не требующим расчетов способом;
- определять модальные матрицы в алгоритме управления с помощью простой идентификационной процедуры.

2. Постановка задачи. В качестве модельного распределенного объекта выбрана шарнирно-опертая балка Бернулли — Эйлера под воздействием внешнего изгибающего момента. Рассматривается медленный переход через резонансы. Система подавления вынужденных колебаний балки включает в себя пары пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, наклеенные в r сечениях балки. Актуатор создает сосредоточенный изгибающий момент, а сенсор измеряет угол поворота сечения балки в месте прикрепления [1].

Математическая модель балки постоянного сечения имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \rho \ddot{u} &= 0, \\ Q - \frac{\partial M}{\partial x} &= M_0(t)\delta(x - x_0) + \sum_{i=1}^r M_i \delta(x - x_i), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \phi &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{EI} M &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u — поперечное перемещение (прогиб) балки; ϕ — угол поворота касательной к средней линии балки; Q — поперечная сила; M — изгибающий момент; x — продольная координата, отсчитываемая от левого конца балки; ρ — масса единицы длины балки; I — момент инерции поперечного сечения; E — модуль Юнга материала балки; $M_0(t)$ — внешний изгибающий момент, приложенный в сечении с координатой x_0 ; M_i — управляющие моменты, приложенные в сечениях с координатой x_i ; $\delta(x)$ — функция Дирака.

Граничные условия отражают способ закрепления балки длины l :

$$u_{x=0} = 0, \quad u''_{x=0} = 0, \quad u_{x=l} = 0, \quad u''_{x=l} = 0.$$

Начальное состояние системы соответствует прямолинейной конфигурации балки:

$$u_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_{t=0} = 0.$$

Перемещение $u(x, t)$ и угол поворота сечения $\phi(x, t)$ представимы рядами:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \beta_k(t), \quad (2)$$

$$\phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k(x) \beta_k(t), \quad (3)$$

где $\beta_k(t)$ — главные координаты (моды); $w_k(x)$ — собственные формы прогиба, удовлетворяющие граничным условиям и условиям ортогональности; $\vartheta_k(x) = \frac{-dw_k(x)}{dx}$ — формы колебаний угла поворота сечения.

Моды $\beta_k(t)$ являются решениями бесконечной системы уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_k(t) + \lambda_k^2 \beta_k(t) &= f_k + y_k, \\ f_k &= M_0(t) \vartheta_k(x_0), \quad y_k = \sum_{i=1}^r M_i \vartheta_k(x_i), \end{aligned} \quad (4)$$

где λ_k — k -я собственная частота упругой балки, определяемая из частотного уравнения для свободных колебаний; $M_0(t) = \sin(\frac{1}{2}at^2)$; a — параметр, определяющий скорость перехода через резонансы.

С учетом выражений (2) и (4) цель управления заключается в снижении резонансных амплитуд низших m мод $\beta_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$, за счет выбора управляющих сигналов M_i .

3. Алгоритм управления модами объекта. Для управления низшими m модами требуется не менее m пар сенсор — актуатор, расположенных в сечениях с координатами x_i , $i = 1, \dots, r$. Объединяя $r > m - 1$ управляющих сигналов M_i в вектор U , запишем алгоритм управления с обратной связью:

$$U = -FKT \frac{d}{dt} \Phi, \quad (5)$$

где $\Phi_{r \times 1}$ — вектор, объединяющий сигналы сенсоров $\phi(x_i, t)$; $K_{m \times m}$ — диагональная матрица коэффициентов усиления; $F_{r \times m}$, $T_{m \times r}$ — модальные матрицы, подлежащие выбору (нижний индекс показывает размер матричного объекта).

Сформируем строку матрицы форм упругого объекта $\theta_{r \times m}$ из значений ϑ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, в месте закрепления пары сенсор — актуатор (количество строк определяется r — количеством актуаторов). Вектор сигналов сенсоров представим в виде слагаемого, включающего первые m мод, и вектора $\tilde{\Phi}$, содержащего моды высших форм:

$$\Phi = \theta\beta + \tilde{\Phi}. \quad (6)$$

Первые m уравнений бесконечной системы (4) с учетом управления (5) и разложения (6) запишем в матричном виде:

$$\ddot{\beta}_{m \times 1} + \Lambda_{m \times m} \beta_{m \times 1} = f_{m \times 1} - \theta_{m \times r}^T F_{r \times m} K_{m \times m} T_{m \times r} \theta_{r \times m} \dot{\beta}_{m \times 1} - \Delta, \quad (7)$$

где $\Lambda_{m \times m} = \text{diag}\{\lambda_k^2\}$ — диагональная матрица квадратов собственных частот упругой балки; $f_{m \times 1}$ — вектор внешних воздействий, объединяющий компоненты f_k ; вектор Δ не содержит компонент вектора $\dot{\beta}_{m \times 1}$, а только производные мод высших форм.

Для независимого демпфирования первых m мод необходимо выбрать модальные матрицы следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{m \times r} &= (\theta_{m \times r}^T \theta_{r \times m})^{-1} \theta_{m \times r}^T, \\ F_{r \times m} &= T_{r \times m}^T = \theta_{r \times m} (\theta_{m \times r}^T \theta_{r \times m})^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Экспериментальные исследования [10, 11] при минимальном количестве пар сенсор — актуатор $r = m$ продемонстрировали, что увеличение коэффициентов усиления K может не повышать эффективность демпфирования колебаний в замкнутой системе. Покажем, что причиной является присутствие в измерениях сенсоров неуправляемых мод. Запишем конечномерную модель замкнутой системы, учитывающую n мод, среди которых только m мод являются управляемыми:

$$\ddot{\beta}_{n \times 1} + \Lambda_{n \times n} \beta_{n \times 1} = f_{n \times 1} - D_{n \times n} \dot{\beta}_{n \times 1}, \quad (9)$$

где $D_{n \times n} = \theta_{n \times r}^T F_{r \times m} K_{m \times m} T_{m \times r} \theta_{r \times n}$ — матрица демпфирования замкнутой системы.

Пусть достаточное условие устойчивости [1] замкнутой системы (9) выполнено. Вектор мод $\beta = \begin{bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{bmatrix}$ представим в блочной форме: к блоку β^1 отнесем управляемые моды, к β^2 — неуправляемые моды. Матрицу $\theta_{r \times n}$ представим в блочной форме $\theta_{r \times n} = \begin{bmatrix} \theta_{r \times m}^1 & \theta_{r \times (n-m)}^2 \end{bmatrix}$, где строки блока $\theta_{r \times (n-m)}^2$ сформированы из значений ϑ_k , $k = m + 1, m + 2, \dots, n$, в месте закрепления пары сенсор — актуатор. Тогда матрица D имеет следующую структуру:

$$D_{n \times n} = \begin{bmatrix} K_{m \times m} & S_{m \times (n-m)} \\ S_{(n-m) \times m}^T & G_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix},$$

где введены следующие обозначения: $S = K\Psi$, $G = \Psi^T K\Psi$, $\Psi = T\theta^2$.

Система уравнений (7) для управляемых мод записывается в виде

$$\ddot{\beta}_m + k_m \dot{\beta}_m + \lambda_m^2 \beta_m = f_m - \sum_{i=1}^{n-m} s_{mi} \dot{\beta}_{m+i}. \quad (10)$$

Влияние неуправляемых мод тем значительнее, чем больше элементы матрицы $S = K\Psi$. Абсолютные значения элементов матрицы

$$\Psi = (\theta^{1T} \theta^1)^{-1} \theta^{1T} \theta^2$$

являются показателем присутствия в сигнале $T \frac{d}{dt} \Phi$ неуправляемых мод. Запишем уравнение для моды с номером $j > m$:

$$\ddot{\beta}_j + g_{j-m, j-m} \dot{\beta}_j + \lambda_j^2 \beta_j = - \sum_{i=1}^m s_{ij} \dot{\beta}_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_{ji} \dot{\beta}_{m+i} - \sum_{i=j+1}^n g_{ji} \dot{\beta}_{m+i} + f_j. \quad (11)$$

Вынужденные колебания неуправляемой моды возбуждаются не только приложением внешнего возбуждения f_j , но и приложением нагрузки $q_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} \dot{\beta}_i$ за счет введения обратных связей. Если элементы матрицы $S = K\Psi$ велики, то вынужденные колебания неуправляемых мод в ряде (2) могут давать ощутимый вклад в размах колебаний в определенных точках по длине балки при увеличении коэффициентов обратных связей.

Представим результаты численного эксперимента. Инерционные и упругие параметры балки длиной $l = 1.47$ м выбраны так, что нижние собственные частоты составляют $\lambda_1 = 20$ рад/с и $\lambda_2 = 80$ рад/с. В модели учитываются десять членов разложения (3), а также вязкое демпфирование, пропорциональное собственной частоте с одинаковым безразмерным коэффициентом $\xi = 0.01$. Координата приложения возбуждающего момента $x_0 = 0.15$ м выбрана так, чтобы гарантированно возбуждались колебания по нижним трем формам упругого объекта. Внешний момент $M_0(t) = \sin(\frac{1}{2}at^2)$ приложен на промежутке времени такой длительности, чтобы осуществлялся переход через два резонанса, поэтому цель управления заключается в снижении резонансных амплитуд мод $\beta_k(t)$, $k = 1, 2$. Значение параметра $a = 0.1$ рад/с² делает переход через резонансы не слишком быстрым. В алгоритме управления моделируется реальное дифференцирование измеряемых сигналов с помощью апериодического звена первого порядка с постоянной времени $\tau = 0.01$ с.

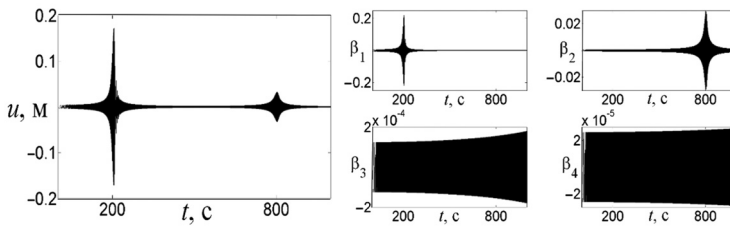


Рис. 1. Осциллограммы перехода через резонанс в разомкнутой системе.

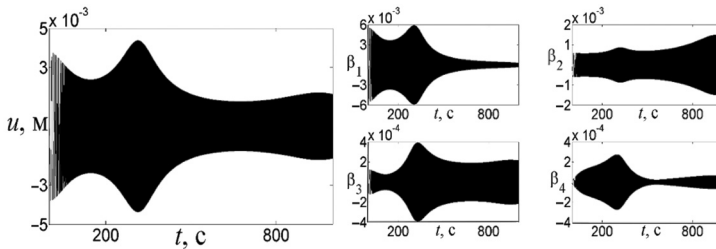


Рис. 2. Осциллограммы перехода через резонанс в замкнутой системе с двумя обратными связями и двумя парами сенсор — актуатор.

Эффективность подавления вынужденных колебаний оценивается по прогибу в сечении $x_u = 1.1$ м, в котором значения двух низших форм прогиба балки отличны от нуля, а значение третьей формы — максимально.

На рис. 1 показаны осциллограммы перемещения $u(x_u, t)$ и первых четырех мод упругого объекта в разомкнутой системе.

На рис. 2 показаны осциллограммы процессов в замкнутой системе с двумя обратными связями (коэффициенты усиления $k_1 = 40$ 1/с; $k_2 = 60$ 1/с) по измерениям сенсоров, расположенных в сечениях $x_1 = 0.7$ м и $x_2 = 1.4$ м. На осциллограммах третьей и четвертой мод видны области возбуждения вынужденных колебаний, обусловленные замыканием обратных связей.

4. Модификация алгоритма управления. Эффективность подавления вибраций объекта с помощью обратных связей зависит от баланса между уровнем демпфирования управляемых мод и интенсивностью вынужденных колебаний низшей неуправляемой моды. Чтобы не возбуждать вынужденные колебания, следует расположить пары сенсор — актуатор в узлах формы низшей неуправляемой моды, что требует точной идентификации формы. Более перспективным является увеличение количества пар сенсор — актуатор при сохранении числа обратных связей. Матрица демпфирования системы (9) при $n = 3$, $m = 2$ и симметричной относительно середины балки расстановке пар сенсор — актуатор имеет вид

$$D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_1 \theta_1 \theta_3 / \theta_1 \theta_1 \\ 0 & k_2 & 0 \\ k_1 \theta_1 \theta_3 / \theta_1 \theta_1 & 0 & k_1 (\theta_1 \theta_3 / \theta_1 \theta_1)^2 \end{bmatrix},$$

где θ_i — i -й столбец матрицы $\theta_{r \times n}$, $\theta_i \theta_j$ обозначает скалярное произведение векторов.

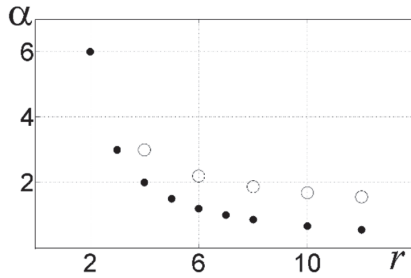


Рис. 3. Зависимость отношения α от количества r пар сенсор — актуатор (точки — с модальными матрицами (8), окружности — с модальными матрицами (12)).

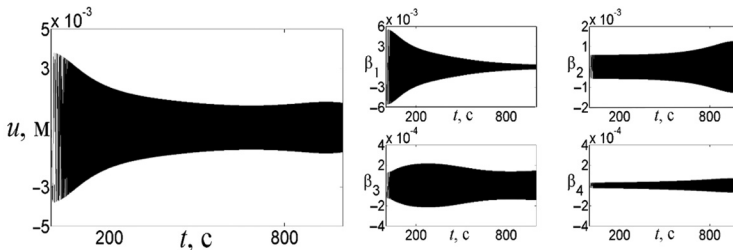


Рис. 4. Осциллограммы перехода через резонанс в замкнутой системе с двумя обратными связями, шестью парами сенсор — актуатор и модальными матрицами (8).

Интенсивность присутствия в измерениях сенсоров колебаний по третьей форме оценим отношением $\alpha = |\theta_1 \theta_3| / \theta_1 \theta_1$, которое представлено на рис. 3 в зависимости от количества r пар сенсор — актуатор.

На рис. 4 показаны осциллограммы процессов в замкнутой системе с двумя обратными связями ($k_1 = 40$ 1/с; $k_2 = 60$ 1/с) и шестью парами сенсор — актуатор, расположенными так, чтобы координаты сечений $x_i, i = 1, \dots, 6$, делили балку на семь равных частей.

Сравнение осциллограмм (рис. 2 и 4) показывает, что при избыточном количестве (превышающем число обратных связей) пар сенсор — актуатор можно добиться более эффективного подавления вибрации на низших резонансах за счет невозбуждения вынужденных колебаний по высшим формам.

Для расчета модальных матриц (8) должна быть проведена идентификационная процедура [12] определения матрицы форм $\theta_{r \times m}$. Использование избыточного количества пар сенсор — актуатор и симметричная относительно середины балки расстановка пар дает возможность упростить расчет модальных матриц:

$$T = \text{sign}(\theta^{1T}), \quad F = T^T = \text{sign}(\theta^1). \quad (12)$$

Зависимость отношения $\alpha = |d_{13}/d_{11}|$, характеризующего присутствие в измерениях сенсоров колебаний по третьей форме и вычисляемого по значениям элементов матрицы $D_{10 \times 10}$, от количества r пар сенсор — актуатор при расчете по (12) представлена на рис. 3. На рис. 5 показаны осциллограммы процессов в замкнутой системе с двумя обратными связями, шестью парами сенсор — актуатор и модальными

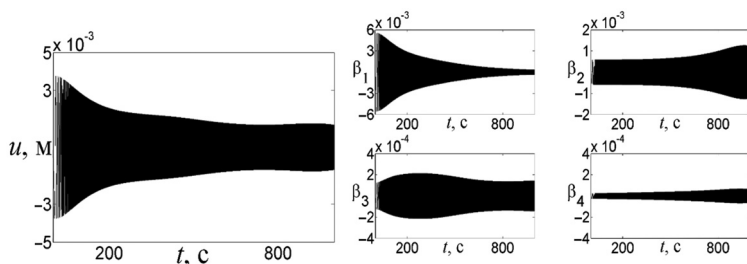


Рис. 5. Осциллограммы перехода через резонанс в замкнутой системе с двумя обратными связями, шестью парами сенсор — актуатор и модальными матрицами (12).

матрицами (12). Коэффициенты усиления приняты $k_1 = 0.6$ 1/с и $k_2 = 0.225$ 1/с, чтобы обеспечить значения $d_{11} = 40$ 1/с; $d_{22} = 60$ 1/с.

Для экспериментального определения модальных матриц (12) предлагается простая идентификационная процедура.

5. Определение модальных матриц. В режиме главных колебаний измерения двух произвольных сенсоров представляют собой гармонические сигналы собственной частоты балки с разностью фаз $\Delta\varphi = 0$ (синфазные) или $\Delta\varphi = \pi$ (противофазные). По виду фигур Лиссажу, построенных по сигналам двух сенсоров, определяется разность фаз измеряемых сигналов. В месте крепления опорного (любого) сенсора значению формы присваивается определенный знак, затем идентифицируются по разности фаз знаки формы в местах крепления остальных сенсоров.

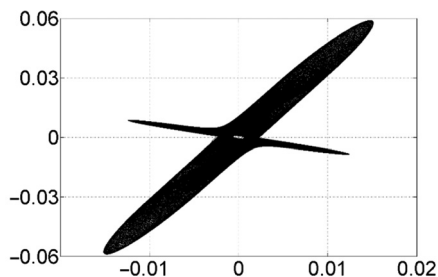


Рис. 6. Фигура Лиссажу, построенная по сигналам с сенсоров, расположенных в сечениях $x_4 = 0.84$ м и $x_6 = 1.26$ м.

Идентификационная процедура работоспособна в режиме перехода через резонанс. Она протестирована на системе (4) с внешним изгибающим моментом, приложенным в сечении с координатой $x_0 = 0.15$ м. На рис. 6 приведена фигура Лиссажу, которая показывает, что на первом резонансе сигналы сенсоров синфазные, а на втором — имеют противоположную фазу. Построение и анализ фигур Лиссажу позволяет заполнить модальные матрицы значениями ± 1 , не прибегая к формуле (12).

6. Заключение. Побочным эффектом управления отдельными модами упругого объекта является возбуждение колебаний по неконтролируемым модам. Использование избыточного количества сенсоров и актуаторов позволяет уменьшить проявление этого эффекта. При этом определение модальных матриц для симметричных конструкций значительно упрощается и осуществляется на реальном объекте.

Литература

1. Moheimani S. O. R., Fleming A. J. *Piezoelectric transducers for vibration control and damping*. Springer (2006).
2. Meirovitch L., Baruh H. Optimal control of damped flexible gyroscopic systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **4** (2), 157–163 (1981).
3. Baz A., Poh S. Performance of an active control system with piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration* **126** (2), 327–343 (1988).
4. Singh S. P., Pruthi H. S., Agarwal V. P. Efficient modal control strategies for active control of vibrations. *Journal of Sound and Vibration* **262** (3), 563–575 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00111-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00111-1)
5. Aldraihem O. J., Singh T., Wetherhold R. C. Optimal size and location of piezoelectric actuator/sensors: practical considerations. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **23** (3), 289–299 (2000). <https://doi.org/10.2514/2.4557>
6. Cinquemani S., Ferrari D., Bayati I. Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators. *Smart Materials and Structures* **24**, 085006 (2015).
7. Bruant I., Coffignal G., Lene F. A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures. *Journal of Sound and Vibration* **243** (5), 861–882 (2001). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
8. Botta F., Dini D., Schwingshackl C., L. di Mare, Cerri G. Optimal placement of piezoelectric plates to control multimode vibrations of a beam. *Advances in Acoustics and Vibration* **2013**, ID 905160 (2013). <https://doi.org/10.1155/2013/905160>
9. Botta F., Scorza A., Rossi A. Optimal piezoelectric potential distribution for controlling multimode vibrations. *Applied Sciences* **8** (4), 551 (2018). <https://doi.org/10.3390/app8040551>
10. Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems. *Structural Control and Health Monitoring* **25** (8), e2105 (2017). <https://doi.org/10.1002/stc.2105>
11. Peukert C., Pohlmann P., Merx M., Muller J., Ihlenfeldt S. Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system. *Journal of Machine Engineering* **19** (2), 32–45 (2019). <https://doi.org/10.5604/01.3001.0013.2222>
12. Беляев А. К., Полянский В. А., Смирнова Н. А., Федотов А. В. Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом. *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки* **10** (2), 69–81 (2017). <https://doi.org/10.18721/JPM.10207>

Статья поступила в редакцию 6 мая 2022 г.;
доработана 1 июня 2022 г.;
рекомендована к печати 9 июня 2022 г.

Контактная информация:

Полянский Владимир Анатольевич — д-р техн. наук, проф.; vapol@mail.ru
Смирнова Нина Анатольевна — канд. техн. наук, доц.; nina-mru@mail.ru

Control damping for elastic vibrations of a distributed system with the sensor — actuator overcharge

V. A. Polyanskiy¹, N. A. Smirnova²

¹ Institute for Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoy pr. V. O., St Petersburg, 199178, Russian Federation

² Peter the Great St Petersburg Polytechnic University,
29, ul. Polytechnicheskaya, St Petersburg, 195251, Russian Federation

For citation: Polyanskiy V. A., Smirnova N. A. Control damping for elastic vibrations of a distributed system with the sensor — actuator overcharge. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 4, pp. 720–728. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.413> (In Russian)

This project develops the modal control system for vibration damping of an elastic object with distributed parameters. Non-controllable upper modes excitement sets a limit on

control efficiency of individual lowest elastic mode damping. The study tests the control operability in relation to the changing sensor — actuator number while the feedback loops remains the same. Simulation results show spillover effect degradation in case the sensor — actuator overcharge. Control algorithm includes of identification procedure instead of designing with the object model assistance. The present procedure puts the modal matrices to separate the inherent object modes from the sensor signals and to suppress the modes using the actuators.

Keywords: elastic distributed system, modal control, piezoelectric transducer, identification.

References

1. Moheimani S. O. R., Fleming A. J. *Piezoelectric transducers for vibration control and damping*. Springer, 2006.
2. Meirovitch L., Baruh H. Optimal control of damped flexible gyroscopic systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **4** (2), 157–163 (1981).
3. Baz A., Poh S. Performance of an active control system with piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration* **126** (2), 327–343 (1988).
4. Singh S. P., Pruthi H. S., Agarwal V. P. Efficient modal control strategies for active control of vibrations. *Journal of Sound and Vibration* **262** (3), 563–575 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00111-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00111-1)
5. Aldraihem O. J., Singh T., Wetherhold R. C. Optimal size and location of piezoelectric actuator/sensors: practical considerations. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **23** (3), 289–299 (2000). <https://doi.org/10.2514/2.4557>
6. Cinquemani S., Ferrari D., Bayati I. Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators. *Smart Materials and Structures* **24**, 085006 (2015).
7. Bruant I., Coffignal G., Lene F. A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures. *Journal of Sound and Vibration* **243** (3), 861–882 (2001). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
8. Botta F., Dini D., Schwingshackl C., L. di Mare, Cerri G. Optimal placement of piezoelectric plates to control multimode vibrations of a beam. *Advances in Acoustics and Vibration* **2013**, ID 905160 (2013). <https://doi.org/10.1155/2013/905160>
9. Botta F., Scorza, A. Rossi A. Optimal piezoelectric potential distribution for controlling multimode vibrations. *Applied Sciences* **8** (4), 551 (2018). <https://doi.org/10.3390/app8040551>
10. Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems. *Structural Control and Health Monitoring* **25** (8), e2105 (2017). <https://doi.org/10.1002/stc.2105>
11. Peukert C., Pohlmann P., Merx M., Muller J., Ihlenfeldt S. Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system. *Journal of Machine Engineering* **19** (2), 32–45 (2019). <https://doi.org/10.5604/01.3001.0013.2222>
12. Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A., Fedotov A. V. Identification procedure in the modal control of a distributed elastic system. St Petersburg Polytechnical State University. *Journal Physics and Mathematics* **10** (2), 69–81 (2017). <https://doi.org/10.18721/JPM.10207>

Received: May 6, 2022

Revised: June 1, 2022

Accepted: June 9, 2022

Authors' information:

Vladimir A. Polyanskiy — vapol@mail.ru

Nina A. Smirnova — nina-mpu@mail.ru