МЕХАНИКА

УДК 517.925.51:517.93:531.36
MSC 93C10, 34H15

Нелинейное управление с распределенным запаздыванием для угловой стабилизации твердого тела

А. Ю. Александров, А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Александров А. Ю., Тихонов А. А.* Нелинейное управление с распределенным запаздыванием для угловой стабилизации твердого тела // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4. С. 653–664. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.408

Решается задача угловой стабилизации твердого тела с произвольным трехосным эллипсоидом инерции. Управление строится по типу ПИД-регулятора, в котором вместо классического интегрального члена используется более гибкий вариант управления, предполагающий наличие распределенного запаздывания (интегральный член) в управляющем моменте. Кроме того, вместо обычного линейного восстанавливающего момента впервые используется нелинейный однородный восстанавливающий момент. Аналитическое обоснование асимптотической устойчивости программного движения опирается на использование специальной конструкции функционала Ляпунова — Красовского. Доказана теорема, дающая достаточные условия асимптотической устойчивости программного режима движения тела в виде конструктивных неравенств относительно параметров управления. Продемонстрирована эффективность построенного управления, обеспечивающего одновременно быстродействие и гладкость переходных процессов.

Ключевые слова: твердое тело, стабилизация, вращательное движение, асимптотическая устойчивость, функционалы Ляпунова — Красовского.

1. Введение. Среди задач управления механическими системами выделяются задачи, связанные с управлением ориентацией твердого тела. Актуальность этих задач обусловлена большим разнообразием объектов, для которых твердое тело является достаточно хорошей механической моделью. К таким объектам относятся, например, пилотируемые и беспилотные летательные аппараты, крылатые ракеты, космические аппараты, подводные аппараты. Для решения задач управления ориентацией твердого тела могут использоваться разнообразные варианты управления и различные подходы к выбору критериев качества управления. При этом решения, построенные с учетом одних критериев качества, могут не соответствовать другим важным критериям качества и поэтому могут оказаться практически неприемлемыми для тех или иных задач. В частности, оптимальные по скорости или расходу топлива решения могут оказаться недостаточно гладкими для наведения высокоточных приборов или недостаточно жестких космических аппаратов, для которых недопустимы вибрации, связанные с работой системы управления [1]. В связи с этим можно упомянуть известный комплекс проблем, включающих повышение скорости наведения большого космического телескопа, подавление его вибраций и сокращение времени стабилизации в процессе наведения [2, 3]. Также на больших космических станциях следует избегать вибраций, вызванных работой систем управления, генерирующих разрывные управляющие воздействия [5], особенно в условиях резонансов [4–8].

В таких ситуациях актуальна проблема сглаживания переходных процессов. Известный подход к решению этой проблемы основан на усилении демпфирующих компонент управления [9, 10]. Однако не во всех случаях такой подход можно реализовать. В частности, он практически неприменим для управления космическими аппаратами из-за сложности создания диссипативных сил и моментов. Другой известный подход к решению этой задачи основан на введении в управление интегральной составляющей (ПИД-регулятора). В настоящее время ПИД-регуляторы используются в различных электромеханических системах [11–14]. Недостаток такого подхода, который сильнее проявляется по мере приближения механической системы к программному режиму движения, является следствием того, что ПИД-регулятор продолжает учитывать ту предысторию движения механической системы, которая уже не играет положительной роли в данный момент. В результате этот подход может быть неприменим для высокоточного наведения [15]. Для преодоления указанного недостатка предлагается использовать управление с распределенным запаздыванием. Ранее эта модификация ПИД-регулятора была предложена А. М. Формальским в работе [11], где дано сравнение модифицированного ПИД-регулятора с ПД-регулятором и обычным ПИД-регулятором. Там же отмечены трудности аналитического исследования эффективности ПИД-регулятора.

Некоторые условия устойчивости механических систем с распределенным запаздыванием были получены в [11, 16–20]. В работах [16–18] для анализа устойчивости использовались функционалы Ляпунова — Красовского с отрицательно определенными производными и специальные оценки решений. Результаты работ [19, 20] установлены с помощью метода предельных уравнений и функционалов Ляпунова — Красовского с неположительными производными.

В работах [21, 22] управления с распределенным запаздыванием применялись для решения задач одноосной и трехосной стабилизации твердого тела. Использовались линейные диссипативные и восстанавливающие моменты. На основе специальной формы декомпозиции были установлены достаточные условия стабилизации. Результаты численного моделирования продемонстрировали эффективность предложенных подходов. Показано, что введение в систему управления интегральных составляющих позволяет существенно снизить колебательность процесса управления и ускорить сходимость решений к асимптотически устойчивым программным режимам.

Цель настоящей работы — исследование возможности трехосной стабилизации твердого тела с помощью нелинейных однородных восстанавливающих моментов с распределенным запаздыванием. Известно [23, 24], что существенно нелинейные системы являются более робастными по отношению к воздействию нестационарных возмущений и запаздываний, чем линейные. В отличие от подходов, применявшихся в [21, 22], в данной работе для получения условий асимптотической устойчивости вместо метода декомпозиции используется специальная конструкция функционала Ляпунова — Красовского.

2. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело в инерциальном пространстве, вращающееся вокруг центра масс — точки O — с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Будем считать, что с телом связаны главные центральные оси инерции $Oxyz$. Уравнение вращательного движения тела под действием управляющего момента $\vec{M}$ имеет вид

$$J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} = \vec{M}, \tag{1}$$

где $J = \mathrm{diag}\,(A, B, C)$ — тензор инерции тела в осях $Oxyz$.

Пусть заданы две правые тройки взаимно ортогональных ортов $\vec{s}_1,\ \vec{s}_2,\ \vec{s}_3$ и $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Орты $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ занимают неизменное положение в инерциальном пространстве, а орты $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ — неизменное положение в твердом теле. Тогда векторы $\vec{s}_i$ вращаются по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\vec{\omega}$. Следовательно,

$$\dot{\vec{s}}_i = -\vec{\omega} \times \vec{s}_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Таким образом, будем рассматривать дифференциальную систему, состоящую из динамического уравнения Эйлера (1) и кинематического уравнения Пуассона (2).

Предположим, что момент $\vec{M}$ складывается из диссипативной составляющей $\vec{M}_d$ и восстанавливающей составляющей $\vec{M}_r$: $\vec{M} = \vec{M}_d + \vec{M}_r$. Диссипативный момент будем считать заданным формулой $\vec{M}_d = -D\vec{\omega}$, где D — постоянная симметричная положительно определенная матрица. Восстанавливающий момент $\vec{M}_r$ требуется выбрать так, чтобы с помощью момента $\vec{M}$ обеспечить трехосную стабилизацию твердого тела [25]: система уравнений (1), (2) должна иметь асимптотически устойчивое положение равновесия:

$$\vec{\omega} = \vec{0}, \qquad \vec{s}_i = \vec{r}_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Известно [25], что для решения задачи трехосной стабилизации восстанавливающий момент можно определить по формуле

$$\vec{M}_r = -\eta^{\nu}(\vec{s}_1, \vec{s}_2)(a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 + a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2).$$

Здесь a_1 и a_2 — положительные постоянные, ν — неотрицательный параметр,

$$\eta(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{1}{2}\left(a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2\right),$$

а $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора.

Предположим теперь, что действующий на тело восстанавливающий момент содержит еще интегральную составляющую $\vec{M}_\tau = c\int_{t-\tau}^{t} \vec{M}_r(u)du$. Здесь $c \neq 0$ — постоянный коэффициент, τ — постоянное положительное запаздывание. Тогда уравнение

Эйлера принимает вид

$$J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} = -D\vec{\omega} + \vec{M}_r(t) + c\int_{t-\tau}^{t} \vec{M}_r(u)du. \tag{4}$$

Будем считать, что начальные функции $\varphi(\theta)$ для систем (2), (4) принадлежат пространству $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{12})$ непрерывных функций с равномерной нормой

$$\|\varphi\|_\tau = \max_{\theta\in[-\tau,0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Требуется определить условия асимптотической устойчивости положения равновесия (3) систем (2) и (4). Такая задача решалась в работе [22] в случае линейного восстанавливающего момента ($\nu = 0$). Было доказано, что стабилизацию положения равновесия можно гарантировать, если выполнено неравенство $|c|\tau < 1$, а перед вектором диссипативного момента имеется достаточно большой положительный множитель.

Цель настоящей статьи — показать, что при использовании существенно нелинейного восстанавливающего момента ($\nu > 0$) стабилизация имеет место при менее жестких ограничениях на параметры системы.

3. Достаточные условия асимптотической устойчивости. Для анализа устойчивости будем использовать прямой метод Ляпунова. На основе развития подходов, разработанных в [24, 26–30], построим для исследуемой системы функционал Ляпунова—Красовского полного типа. Заметим, что в [28] функционалы полного типа строились для линейных систем, а в статьях [24, 29] были предложены конструкции таких функционалов для некоторых классов существенно нелинейных систем. Однако в [24, 28, 29] рассматривались системы с постоянным запаздыванием. Наша задача — распространить результаты указанных работ на систему (2), (4) с распределенным запаздыванием.

Теорема. *Пусть $\nu > 0$. Если выполнено неравенство $1 + c\tau > 0$, то положение равновесия (3) системы (2), (4) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Сначала в соответствии с подходом, предложенным в [26], определим функцию Ляпунова по формуле

$$V(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{\omega}) = \eta(\vec{s}_1, \vec{s}_2) + (a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 + a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2)^\top D^{-1}J\vec{\omega} + \frac{\alpha}{2}\vec{\omega}^\top J\vec{\omega}, \tag{5}$$

где α — вспомогательный положительный параметр. Имеем

$$\frac{1}{2}\left(a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2\right) - \|D^{-1}J\|\left(a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\| + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|\right)\|\vec{\omega}\| +$$
$$+\frac{\alpha}{2}\min\{A; B; C\}\|\vec{\omega}\|^2 \le V(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{\omega}) \le \frac{1}{2}\left(a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2\right) +$$
$$+\|D^{-1}J\|\left(a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\| + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|\right)\|\vec{\omega}\| + \frac{\alpha}{2}\max\{A; B; C\}\|\vec{\omega}\|^2.$$

Значит, если α достаточно велико, то

$$\frac{1}{3}\left(a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2\right) + \frac{\alpha}{3}\min\{A; B; C\}\|\vec{\omega}\|^2 \le V(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{\omega}) \le$$
$$\le a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2 + \alpha\max\{A; B; C\}\|\vec{\omega}\|^2.$$

Продифференцируем функцию (5) в силу рассматриваемой системы. Получим

$$\dot V = -\alpha\vec\omega^\top D\vec\omega + \alpha\vec\omega^\top\vec M_r(t) + c\alpha\vec\omega^\top\int_{t-\tau}^{t}\vec M_r(u)du +$$

$$+(a_1\vec s_1\times\vec r_1 + a_2\vec s_2\times\vec r_2)^\top D^{-1}\left(\vec M_r(t) + c\int_{t-\tau}^{t}\vec M_r(u)du - \vec\omega\times J\vec\omega\right) -$$

$$-\vec\omega^\top JD^{-1}(a_1(\vec\omega\times\vec s_1)\times\vec r_1 + a_2(\vec\omega\times\vec s_2)\times\vec r_2) \leq$$

$$\leq -\alpha\lambda_{\min}\|\vec\omega\|^2 + \alpha b_1\|\vec\omega\|\left(\|\vec s_1-\vec r_1\|^{2\nu+1} + \|\vec s_2-\vec r_2\|^{2\nu+1}\right) +$$

$$+\alpha|c|b_1\|\vec\omega\|\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec s_1(u)-\vec r_1\|^{2\nu+1} + \|\vec s_2(u)-\vec r_2\|^{2\nu+1}\right)du +$$

$$+(a_1\vec s_1\times\vec r_1 + a_2\vec s_2\times\vec r_2)^\top D^{-1}\left(\vec M_r(t) + c\int_{t-\tau}^{t}\vec M_r(u)du\right) +$$

$$+\max\{A;B;C\}\|\vec\omega\|^2\left(a_1\|\vec s_1-\vec r_1\| + a_2\|\vec s_2-\vec r_2\|\right) + (a_1+a_2)\|D^{-1}J\|\|\vec\omega\|^2,$$

где $\lambda_{\min}$ — наименьшее собственное число матрицы D, а b_1 — положительная постоянная.

Следовательно, для любого $\alpha > 4(a_1+a_2)\|D^{-1}J\|/\lambda_{\min}$ найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$\dot V \leq -\frac{1}{2}\alpha\lambda_{\min}\|\vec\omega\|^2 + \alpha b_1\|\vec\omega\|\left(\|\vec s_1-\vec r_1\|^{2\nu+1} + \|\vec s_2-\vec r_2\|^{2\nu+1}\right) +$$

$$+\alpha|c|b_1\|\vec\omega\|\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec s_1(u)-\vec r_1\|^{2\nu+1} + \|\vec s_2(u)-\vec r_2\|^{2\nu+1}\right)du +$$

$$+(a_1\vec s_1\times\vec r_1 + a_2\vec s_2\times\vec r_2)^\top D^{-1}\left(\vec M_r(t) + c\int_{t-\tau}^{t}\vec M_r(u)du\right)$$

при $\|\vec s_1-\vec r_1\| + \|\vec s_2-\vec r_2\| < \delta$.

Далее строим функционал Ляпунова—Красовского:

$$V_1(\vec s_{1t},\vec s_{2t},\vec\omega_t) = V(\vec s_1,\vec s_2,\vec\omega) + c(a_1\vec s_1\times\vec r_1 + a_2\vec s_2\times\vec r_2)^\top D^{-1}\int_{t-\tau}^{t}(u+\tau-t)\vec M_r(u)du +$$

$$+\int_{t-\tau}^{t}(\beta(u+\tau-t)+\gamma)\left(\|\vec s_1(u)-\vec r_1\|^{2\nu+2} + \|\vec s_2(u)-\vec r_2\|^{2\nu+2}\right)du, \qquad (6)$$

где β,γ — положительные коэффициенты, а $(\vec s_{1t}^\top,\vec s_{2t}^\top,\vec\omega_t^\top)^\top$ — отрезок решения $(\vec s_1^\top(t)$, $\vec s_2^\top(t),\vec\omega^\top(t))^\top$ системы (2), (4) [28]. Дифференцируя его в силу рассматриваемых уравнений, имеем

$$\dot V_1 \leq -\frac{1}{2}\alpha\lambda_{\min}\|\vec\omega\|^2 + \alpha b_1\|\vec\omega\|\left(\|\vec s_1-\vec r_1\|^{2\nu+1} + \|\vec s_2-\vec r_2\|^{2\nu+1}\right) +$$

$$+\alpha|c|b_1\|\vec\omega\|\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec s_1(u)-\vec r_1\|^{2\nu+1} + \|\vec s_2(u)-\vec r_2\|^{2\nu+1}\right)du +$$

$$+(1+c\tau)(a_1\vec s_1\times\vec r_1 + a_2\vec s_2\times\vec r_2)^\top D^{-1}\vec M_r(t) -$$

$$-\beta\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec{s}_1(u)-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2(u)-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)du+$$

$$+(\beta\tau+\gamma)\left(\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)-$$

$$-\gamma\left(\|\vec{s}_1(t-\tau)-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2(t-\tau)-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)-$$

$$-c(a_1(\vec{\omega}\times\vec{s}_1)\times\vec{r}_1+a_2(\vec{\omega}\times\vec{s}_2)\times\vec{r}_2)^{\top}D^{-1}\int_{t-\tau}^{t}(u+\tau-t)\vec{M}_r(u)du\leq$$

$$\leq-\frac{1}{2}\alpha\lambda_{\min}\|\vec{\omega}\|^2+\alpha b_1\|\vec{\omega}\|\left(\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^{2\nu+1}+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^{2\nu+1}\right)+$$

$$+\alpha|c|b_1\|\vec{\omega}\|\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec{s}_1(u)-\vec{r}_1\|^{2\nu+1}+\|\vec{s}_2(u)-\vec{r}_2\|^{2\nu+1}\right)du-$$

$$-(1+c\tau)\mu_{\min}\eta^{\nu}(\vec{s}_1,\vec{s}_2)\|a_1\vec{s}_1\times\vec{r}_1+a_2\vec{s}_2\times\vec{r}_2\|^2+$$

$$-\beta\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec{s}_1(u)-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2(u)-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)du+$$

$$+(\beta\tau+\gamma)\left(\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)-$$

$$-\gamma\left(\|\vec{s}_1(t-\tau)-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2(t-\tau)-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)+$$

$$+|c|\tau(a_1+a_2)\|\vec{\omega}\|\|D^{-1}\|\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec{s}_1(u)-\vec{r}_1\|^{2\nu+1}+\|\vec{s}_2(u)-\vec{r}_2\|^{2\nu+1}\right)du,$$

где $\mu_{\min}$ — наименьшее собственное число матрицы D^{-1}.

Используя свойства однородных функций (см. [31]) и лемму 1 из работы [32], нетрудно показать, что положительные числа $\alpha,\beta,\gamma,\delta,b_2$ можно выбрать так, чтобы при $\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|_{\tau}+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|_{\tau}<\delta$ были справедливы оценки

$$\frac{1}{4}\left(a_1\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+a_2\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2\right)+\frac{\alpha}{3}\min\{A;B;C\}\|\vec{\omega}\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec{s}_1(u)-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2(u)-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)du\leq V_1(\vec{s}_{1t},\vec{s}_{2t},\vec{\omega}_t)\leq$$

$$\leq 2\left(a_1\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+a_2\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2\right)+\alpha\max\{A;B;C\}\|\vec{\omega}\|^2+$$

$$+(\beta\tau+2\gamma)\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec{s}_1(u)-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2(u)-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)du,$$

$$\dot{V}_1\leq-\frac{1}{3}\alpha\lambda_{\min}\|\vec{\omega}\|^2-b_2\left(\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)-$$

$$-\gamma\left(\|\vec{s}_1(t-\tau)-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2(t-\tau)-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\beta\int_{t-\tau}^{t}\left(\|\vec{s}_1(u)-\vec{r}_1\|^{2\nu+2}+\|\vec{s}_2(u)-\vec{r}_2\|^{2\nu+2}\right)du.$$

Таким образом, функционал (6) — это функционал Ляпунова—Красовского полного типа для систем (2), (4), который гарантирует асимптотическую устойчивость положения равновесия (3). Теорема доказана. □

4. Результаты численного моделирования. Проиллюстрируем на примере предложенный подход к построению нелинейного управления с распределенным запаздыванием для угловой стабилизации твердого тела. Все численные значения параметров имеют размерности в единицах системы СИ. Рассмотрим твердое тело с главными центральными моментами инерции $A = 5$, $B = 6$, $C = 4$. Ставится задача стабилизации тела в положении (3), которому соответствуют нулевые значения «самолетных» углов ориентации тела в кениговой системе координат: $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$. Возьмем управляющий момент в виде правой части уравнения (4), где $D = \mathrm{diag}(0.5, 0.5, 0.5)$, $a_1 = a_2 = 2$, $c = 1.3$. Рассмотрим процесс стабилизации углового положения тела при разных значениях запаздывания τ и показателя ν степени нелинейности управления для одних и тех же начальных значений углов и угловых скоростей $\varphi(0) = 0.5$, $\psi(0) = -0.2$, $\theta(0) = 0.6$, $\omega_x(0) = -0.055$, $\omega_y(0) = -0.045$, $\omega_z(0) = 0.05$.

Вначале рассмотрим случай линейного управления ($\nu = 0$) при отсутствии распределенного запаздывания ($\tau = 0$). Процесс стабилизации тела показан на рис. 1. Видно, что он практически завершается при $t = 100$.

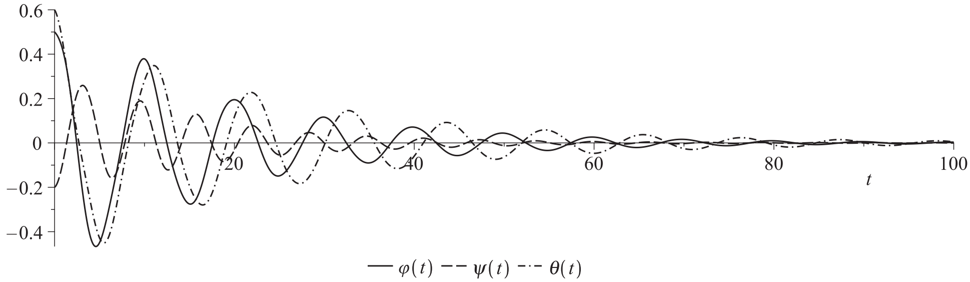

Рис. 1. Процесс стабилизации при $\nu = 0$, $\tau = 0$.

Затем введем в управление интегральную составляющую ($\tau = 0.8$) и снова рассмотрим поведение тела при тех же начальных условиях. Как видно из рис. 2, стабилизация тела отсутствует. Этот результат полностью соответствует ранее доказанной теореме [22], гарантирующей асимптотическую устойчивость нулевого решения лишь при $|c|\tau < 1$. В данном случае $|c|\tau = 1.3 \cdot 0.8 = 1.04 > 1$.

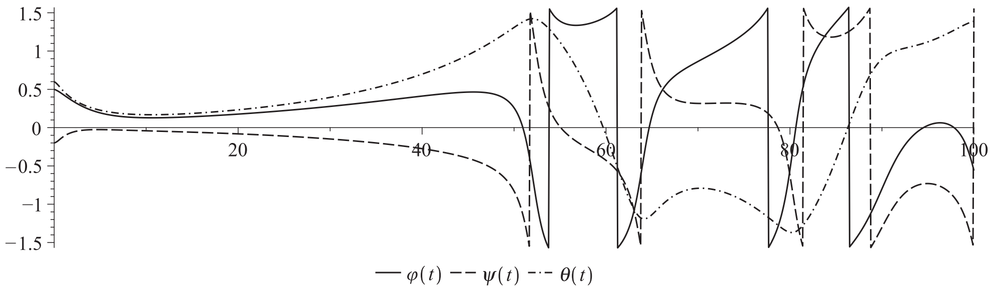

Рис. 2. Отсутствие стабилизации при $\nu = 0$, $\tau = 0.8$ ($|c|\tau > 1$).

Однако теорема, доказанная в данной работе, позволяет надеяться на то, что при нелинейном восстанавливающем моменте процесс стабилизации может состояться даже при $c = 1.3$ и $\tau = 0.8$, поскольку неравенство $1 + c\tau > 0$ выполняется. Действительно, выбрав $\nu = 4$, убеждаемся, что тело успешно стабилизируется (рис. 3).

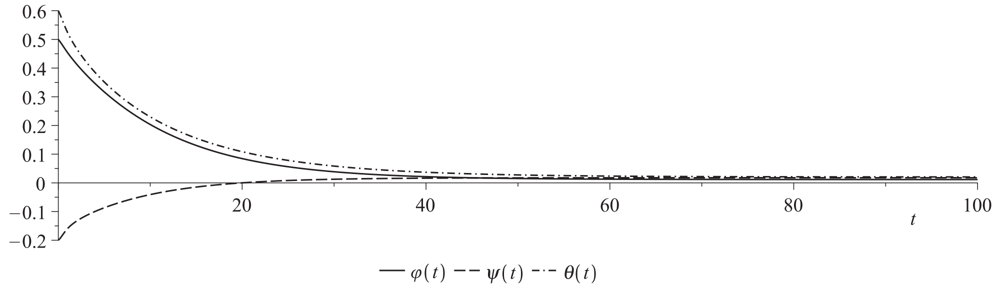

Рис. 3. Процесс стабилизации при $\nu = 4$, $\tau = 0.8$.

При этом важно заметить, что, во-первых, тело в процессе стабилизации совершенно не испытывает колебаний, вызванных работой системы управления, и, во-вторых, процесс стабилизации завершается намного быстрее, чем в случае линейного управления без распределенного запаздывания (см. рис. 1). Наглядная демонстрация этих двух важных качеств предложенного нелинейного управления с распределенным запаздыванием свидетельствует о его перспективности для решения многочисленных практически важных задач, требующих не только быстродействия, но и соблюдения условий гладкости переходных режимов.

5. Заключение. В недавних работах авторов были рассмотрены вопросы одноосной [21] и трехосной [22] стабилизации углового положения твердого тела путем введения управлений по типу ПИД-регулятора, но отличающихся тем, что вместо классических интегральных членов использовались более гибкие варианты управления, предполагающие наличие распределенного запаздывания (интегральный член) в управляющем моменте. В этих же работах доказано, что при наличии достаточно большого диссипативного момента и выполнении неравенства $|c|\tau < 1$ гарантируется асимптотическая устойчивость стабилизируемого режима углового движения тела. Выявлены преимущества управления с распределенным запаздыванием по сравнению с классическим ПИД-регулятором.

В отличие от процитированных работ, в данной статье вместо линейного восстанавливающего момента впервые используется нелинейный однородный восстанавливающий момент с распределенным запаздыванием (интегральный член) для трехосной стабилизации твердого тела. Такой вариант управления выбран не случайно. Известно [23, 24], что существенно нелинейные системы являются более робастными по отношению к воздействию нестационарных возмущений и запаздываний, чем линейные и, соответственно, более перспективными. При этом для преодоления трудностей аналитического исследования в отличие от подходов, применявшихся в [21, 22], в данной работе для получения условий асимптотической устойчивости, вместо метода декомпозиции используется специальная конструкция функционала Ляпунова — Красовского. В результате доказана теорема об асимптотической устойчивости стабилизируемого режима углового движения тела. Условие на величину запаздывания τ существенно более слабое: $1 + c\tau > 0$. Кроме того, из доказательства теоремы следует, что если восстанавливающий управляющий момент вовсе отсутствует, то диссипативный момент и интегральный член с запаздыванием позволяют обеспечить асимптотическую устойчивость стабилизируемого режима углового движения тела, причем наличие большого параметра при диссипативном моменте необязательно.

Таким образом, из сравнения процессов стабилизации при линейном и нелинейном восстанавливающих моментах следует, что если в линейном случае стабилизация тела происходит за счет восстанавливающего момента, а интегральная составляющая эффективно сглаживает переходные процессы, выполняя роль своего рода гасителя колебаний, вызванных работой системы управления, то при нелинейном восстанавливающем моменте интегральная составляющая не только стабилизирует тело, но и одновременно гасит колебания тела. Поэтому предложенный вариант управления представляется перспективным для решения тех задач, в которых требуется не только быстродействие, но и высокая гладкость переходных процессов.

Литература

1. Ермилов А. С., Ермилова Т. В., Рутковский В. Ю., Суханов В. М. Двухуровневая система управления ориентацией деформируемых космических аппаратов с активной стабилизацией упругих колебаний конструкции. *Автоматика и телемеханика* **6**, 26–40 (2008).

2. Артеменко Ю. Н. Многофункциональное использование манипулятора наведения космического телескопа «Миллиметрон». *Вестник Нижегородского университета.* **4** (2), 44–46 (2011).

3. Кайдановский М. Н., Белоусов Н. Ю., Быков В. Ю., Ильин Г. Н., Рубин И. Г., Стэмпковский В. Г., Шишикин А. М. Система наведения радиотелескопа РТ-32. *Приборы и техника эксперимента* **3**, 63–74 (2012).

4. Тихонов А. А. Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 4. Многочастотные резонансы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **1**, вып. 1, 131–137 (2000).

5. Крутова И. Н., Суханов В. М. Синтез модифицированного PD-алгоритма управления угловым движением большой космической конструкции. *Автоматика и телемеханика* **1**, 39–50 (2009).

6. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **73**, 51–57 (2015). https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006

7. Тихонов А. А., Тхай В. Н. Симметричные колебания в задаче о вращательном движении гиростата на слабоэллиптической орбите в гравитационном и магнитном полях. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **2** (60), вып. 2, 279–287 (2015).

8. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. Symmetric oscillations of charged gyrostat in weakly elliptical orbit with small inclination. *Nonlinear Dynamics* **85** (3), 1919–1927 (2016). https://doi.org/10.1007/s11071-016-2805-2

9. Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Y., Penkov V. I., Ivanova T. A. Modeling a nanosatellite's angular motion damping using a hysteresis plate. *Mathematical Models and Computer Simulations* **12** (5), 816–823 (2020). https://doi.org/10.1134/S2070048220050075

10. Легович Ю. С., Максимов Ю. В., Максимов Д. Ю. Метод электромеханических аналогий в определении демпфирования вибраций в квадрокоптере. В сб.: *Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2020*, 575–580 (2020). https://doi.org/10.25728/mlsd.2020.0575

11. Formal'sky A. M. On a modification of the PID controller. *Dynamics and Control* **7** (3), 269–277 (1997).

12. Барахов В. М., Санкин Ю. Н. Управление многозвенным манипулятором с распределенными параметрами. *Автоматика и телемеханика* **8**, 57–67 (2007).

13. Александров А. Г., Хомутов Д. А. Повышение точности систем с ПИД-регуляторами при внешнем возмущении. *Проблемы управления* **1**, 64–70 (2010).

14. Александров А. Г., Паленов М. В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов. *Автоматика и телемеханика* **3**, 16–30 (2014).

15. Рутковский В. Ю., Суханов В. М., Глумов В. М. Стабилизация низкочастотных колебаний конструкции крупногабаритного спутника с гиросиловым управлением. *Автоматика и телемеханика* **3**, 120–135 (2013).

16. Ананьевский И. М., Колмановский В. Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием. *Автоматика и телемеханика* **9**, 34–43 (1989).

17. Shen J., Lam J. Decay rate constrained stability analysis for positive systems with discrete and distributed delays. *Systems Science & Control Engineering* **2** (1), 7–12. (2014). https://doi.org/10.1080/21642583.2013.870054

18. Su Y. X., Zheng C. H. PID-control for global finite-time regulation of robotic manipulators. *International Journal of Systems Science* **48** (3), 547–558 (2017). https://doi.org/10.1080/00207721.2016.1193256

19. Павликов С. В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения. *Прикладная математика и механика* **71** (3), 377–387 (2007).

20. Павликов С. В. О стабилизации движений управляемых механических систем с запаздывающим регулятором. *Доклады Академии наук* **412** (2), 176–178 (2007).

21. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Анализ устойчивости механических систем с распределенным запаздыванием на основе декомпозиции. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* **17** (1), 13–26 (2021). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.102

22. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. On the attitude stabilization of a rigid body under control with distributed delay. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* (2021). https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1891935

23. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P. Stability analysis for a class of nonlinear nonstationary systems via averaging. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory* **13** (4), 332–343 (2013).

24. Aleksandrov A., Efimov D. Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **42**, 101090 (2021). https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101090

25. Зубов В. И. *Динамика управляемых систем.* Москва, Высшая школа (1982).

26. Александров А. Ю., Косов А. А., Чэнь Я. Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями. *Автоматика и телемеханика* **6**, 5–17 (2011).

27. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B. Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched nonlinear positional forces. *Nonlinear Dynamics* **83** (4), 2427–2434 (2016). https://doi.org/10.1007/s11071-015-2491-5

28. Kharitonov V. L. *Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices.* Basel, Birkhauser (2013).

29. Efimov D., Aleksandrov A. Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov — Krasovskii functionals. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **31**, 3730–3746 (2021).

30. Aleksandrov A. Yu., Stepenko N. A. Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching. *J. of Applied and Computational Mechanics* **8** (3), 1113–1119 (2022).

31. Зубов В. И. *Устойчивость движения.* Москва, Высшая школа (1973).

32. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system. *Advances in Space Research* **62** (1), 142–151 (2018). https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.04.006

Статья поступила в редакцию 4 мая 2022 г.;
доработана 23 мая 2022 г.;
рекомендована к печати 9 июня 2022 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.aleksandrov@spbu.ru
Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.tikhonov@spbu.ru

Nonlinear control with distributed delay for angular stabilization of a rigid body

A. Yu. Aleksandrov, A. A. Tikhonov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Nonlinear control with distributed delay for angular stabilization of a rigid body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 4, pp. 653–664.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.408 (In Russian)

The problem of angular stabilization of a rigid body with an arbitrary triaxial ellipsoid of inertia is solved. The control strategy is based on the type of PID controller, in which, instead of the classical integral term, a more flexible control option is used, which assumes the presence of a distributed delay (integral term) in the control torque. In addition, instead of the usual linear restoring torque, a non-linear uniform restoring torque is used for the first time. The analytical substantiation of the asymptotic stability of the program motion is based on the use of a special construction of the Lyapunov — Krasovskii functional. A theorem is proved that gives sufficient conditions for the asymptotic stability of the program mode of the body angular motion in the form of constructive inequalities with respect to control parameters. The effectiveness of the constructed control is demonstrated, which simultaneously provides the convergence speed and smoothness of transient process.

Keywords: rigid body, stabilization, attitude motion, asymptotic stability, Lyapunov — Krasovskii functionals.

References

1. Ermilov A. S., Ermilova T. V., Rutkovskii V. Yu., Sukhanov V. M. Two-level orientation control system of flexible spacecraft with active stabilization of structural elastic oscillations. *Avtomatika i Telemekhanika* **6**, 26–40 (2008) (In Russian) [Eng. transl.: *Automation and Remote Control* **69** (6), 929–941 (2008). https://doi.org/10.1134/S0005117908060040].

2. Artemenko Yu. N. Multifunctional use of the "Millimetron" space telescope pointing manipulator. *Bulletin of Nizhny Novgorod University* **4** (2), 44–46 (2011). (In Russian)

3. Kaidanovskiy M. N., Belousov N. Yu., Bykov V. Yu., Ilyin G. N., Rubin I. G., Stympkovskiy V. G., Shishikin A. M. Guidance system of the RT-32 radio telescope. *Instruments and Experimental Technique* **3**, 63–74 (2012). (In Russian)

4. Tikhonov A. A. Resonance phenomena in oscillations of a gravity-oriented rigid body. Part 4: Multifrequency resonances. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, iss. 1, 131–137 (2000). (In Russian)

5. Krutova I. N., Sukhanov V. M. Design of modified PD algorithm to control angular motion of large space structure. *Avtomatika i Telemekhanika* **1**, 39–50 (2009) (In Russian) [Eng. transl.: *Automation and Remote Control* **70** (1), 33–42 (2009). https://doi.org/10.1134/S0005117909010032].

6. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **73**, 51–57 (2015). https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006

7. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. Symmetrical oscillations in the problem of Gyrostat attitude motion in a weakly elliptical orbit in gravitational and magnetic fields. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics, Mathematics, Astronomy* **2** (60), iss. 2, 279–287 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **48** (2), 119–125 (2015). https://doi.org/10.3103/S1063454115020107].

8. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. Symmetric oscillations of charged gyrostat in weakly elliptical orbit with small inclination. *Nonlinear Dynamics* **85** (3), 1919–1927 (2016). https://doi.org/10.1007/s11071-016-2805-2

9. Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Y., Penkov V. I., Ivanova T. A. Modeling a nanosatellite's angular motion damping using a hysteresis plate. *Mathematical Models and Computer Simulations* **12** (5), 816–823 (2020). https://doi.org/10.1134/S2070048220050075

10. Legovich Yu. S., Maksimov Yu. V., Maksimov D. Y. The method of electromechanical analogy in determining damping of vibrations in a quadrocopter. In: *Proceedings of the thirteenth international conference.* 575–580 (2020). https://doi.org/10.25728/mlsd.2020.0575 (In Russian)

11. Formal'sky A. M. On a modification of the PID controller. *Dynamics and Control* **7** (3), 269–277 (1997).

12. Barakhov V. M., Sankin Yu. N. Control of the distributed-parameter multi-element manipulator. *Avtomatika i Telemekhanika* **8**, 57–67 (2007) (In Russian) [Eng. transl.: *Automation and Remote Control* **68** (8), 1345–1354 (2007). https://doi.org/10.1134%2FS0005117907080061].

13. Aleksandrov A. G., Khomutov D. A. Increasing the accuracy of a system with pid-controller with external disturbance. *Control problems* **1**, 64–70 (2010). (In Russian)

14. Alexandrov A. G., Palenov M. V. Adaptive PID controllers: State of the art and development prospects. *Avtomatika i Telemekhanika* **3**, 16–30 (2014) (In Russian) [Eng. transl.: *Automation and Remote Control* **75** (2), 188–199 (2014). https://doi.org/10.1134%2FS0005117914020027].

15. Rutkovskii V. Y., Sukhanov V. M., Glumov V. M. Stabilization of low-frequency vibrations of a large satellite structure with powered gyro control. *Avtomatika i Telemekhanika* **3**, 120–135 (2013) (In Russian) [Eng. transl.: *Automation and Remote Control* **74** (3), 413–425 (2013). https://doi.org/10.1134/S0005117913030077].

16. Anan'evskii I. M., Kolmanovskii V. B. On stabilization of some control systems with an aftereffect. *Automation and Remote Control* **9**, 34–43 (1989). (In Russian)

17. Shen J., Lam J. Decay rate constrained stability analysis for positive systems with discrete and distributed delays. *Systems Science & Control Engineering* **2** (1), 7–12 (2014). https://doi.org/10.1080/21642583.2013.870054

18. Su Y. X., Zheng C. H. PID control for global finite-time regulation of robotic manipulators. *International Journal of Systems Science* **48** (3), 547–558 (2017). https://doi.org/10.1080/00207721.2016.1193256

19. Pavlikov S. V. Constant-sign Lyapunov functionals in the problem of the stability of a functional differential equation. *J. of Applied Mathematics and Mechanics* **71** (3), 339–350 (2007). https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.07.014

20. Pavlikov S. V. On the stabilization of movements of controlled mechanical systems with a retarded controller. *Proceedings of Academy Sciences of Russia* **412** (2), 176–178 (2007). (In Russian)

21. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Stability analysis of mechanical systems with distributed delay via decomposition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes* **17** (1), 13–26 (2021). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.102 (In Russian)

22. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. On the attitude stabilization of a rigid body under control with distributed delay. *Mechanics Based Design of Structures and Machines.* https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1891935

23. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P. Stability analysis for a class of nonlinear nonstationary systems via averaging. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory* **13** (4), 332–343 (2013).

24. Aleksandrov A., Efimov D. Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **42**, 101090 (2021). https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101090

25. Zubov V. I. *Dynamics of Controlled Systems.* Moscow, Vysshaya Shkola Publ. (1982). (In Russian)

26. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A. Chen Y. Stability and stabilization of mechanical systems with switching. *Avtomatika i Telemekhanika* **6**, 5–17 (2011) (In Russian) [Eng. transl.: *Automation and Remote Control* **72** (6), 1143–1154 (2011)]. https://doi.org/10.1134%2FS0005117911060026].

27. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B. Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched nonlinear positional forces. *Nonlinear Dynamics* **83** (4), 2427–2434 (2016). https://doi.org/10.1007/s11071-015-2491-5

28. Kharitonov V. L. *Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices.* Birkhauser, Basel, 2013.

29. Efimov D., Aleksandrov A. Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov — Krasovskii functionals. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **31**, 3730–3746 (2021).

30. Aleksandrov A. Yu., Stepenko N. A. Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching. *J. of Applied and Computational Mechanics* **8** (3), 1113–1119 (2022).

31. Zubov V. I., *Stability of Motion.* Moscow, Vysshaya Shkola Publ. (1973). (In Russian)

32. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system. *Advances in Space Research* **62** (1), 142–151 (2018). https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.04.006

Received: May 4, 2022
Revised: May 23, 2022
Accepted: June 9, 2022

Authors' information:

Alexander Yu. Aleksandrov — a.u.aleksandrov@spbu.ru
Aleksey A. Tikhonov — a.tikhonov@spbu.ru