УДК 511.26 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4
MSC 08A72

Алгебра нечетких чисел с унимодальной функцией принадлежности*

И. В. Гермашев[1], *Е. В. Дербишер*[2], *В. Е. Дербишер*[2], *А. В. Карташова*[3], *А. В. Титов*[1]

[1] Волгоградский государственный университет,
Российская Федерация, 400062, Волгоград, пр. Университетский, 100
[2] Волгоградский государственный технический университет,
Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр. им. Ленина, 28
[3] Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр. им. Ленина, 27

Для цитирования: *Гермашев И. В., Дербишер Е. В., Дербишер В. Е., Карташова А. В., Титов А. В.* Алгебра нечетких чисел с унимодальной функцией принадлежности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4. С. 590–601. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.402

Представлены нечеткие числа с унимодальной функцией принадлежности, нашедшие применение при нечетком анализе таких предметных областей, как экология, химическая технология. В настоящей статье рассмотрено множество нечетких чисел с унимодальной функцией принадлежности специального типа. Над этим множеством заданы две бинарные операции (сложение и умножение), получены формулы для вычисления и исследованы некоторые свойства этой алгебры. Доказано, что сложение и умножение коммутативны и ассоциативны. Более того, умножение дистрибутивно относительно сложения. Показано, что не существует нейтрального и обратного элементов относительно обеих операций. Заметим, что если в данную алгебру добавить нейтральные элементы относительно сложения и умножения, то получится коммутативное полукольцо. Сформулированы условия, при которых существуют квазинейтральный и квазиобратный элементы.

Ключевые слова: алгебра, нечеткие числа, арифметические операции, ассоциативность, дистрибутивность.

1. Введение. При решении прикладных задач методами нечеткой математики часто возникает необходимость проводить операции над нечеткими числами. Нами, например, такие вычисления использовались для анализа химических и экологических систем [1, 2] при анализе нечетких рядов [3]. Вычисление таких выражений требует довольно сложных манипуляций и существенных усилий. Для решения подобных задач обычно пользуются тем правилом, что вид функции принадлежности обычно не известен заранее и, следовательно, выбор какой-либо функции не лучше и не хуже, чем выбор другой. В таком случае разумно выбрать такую функцию, для которой вычисления операций над нечеткими числами подчиняются определенным законам.

*Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0633-2020-0003).

Так, в [4] было предложено использовать нечеткие множества с унимодальными функциями принадлежности в качестве нечетких чисел, и для таких чисел были введены процедуры вычисления суммы, максимума и минимума.

В [5] предлагается использовать нечеткий логический вывод для вычисления арифметических операций. Такой подход, помимо вычислений, позволяет соединить нечеткий логический вывод и арифметику нечетких чисел.

Например, использование нечетких чисел (L-R)-типа позволяет получить формулы для вычисления сложения и вычитания нечетких чисел, но умножение и деление удается вычислять лишь приближенно [4, 6] и лишь в некоторых случаях точно [7]. Предлагаемые методы вычисления арифметических операций базируются на комбинации принципа обобщения Заде и интервальной математики.

В [8] были обобщены приближенные методы вычисления арифметических операций над определенными классами нечетких чисел. Функции принадлежности были параметризованы, и проведена их кусочно-монотонная интерполяция. Это позволило построить процедуры вычисления параметров функций принадлежности и результатов арифметических операций.

В работе [9] для реализации арифметики трапезоидных чисел использовались t-норма и интервальная математика.

Одним из ключевых вопросов при определении арифметических операций является вопрос о существовании и единственности обратного элемента. До настоящего времени был достигнут существенный прогресс в исследовании полуколец (см., например, [10, 11]). В некоторых случаях эту задачу можно решить, например, как предложено в [12]. В этой статье также представлен подход к вычислению нейтрального и обратного элемента.

Наши исследования также базируются на принципе обобщения Заде. Но при вычислении произведения и частного мы отошли от этого принципа, благодаря чему удалось обеспечить ассоциативность и дистрибутивность.

2. Предварительные сведения. Далее рассматривается класс функций принадлежности, который позволяет производить операции над нечеткими числами на регулярной основе. Этот класс основан на понятии унимодальной функции, которое приводится в [13] и состоит в следующем.

Определение 1. *Пусть* $f : D \to E$, $D, E \subset \mathbb{R}$. *Функция* $f(x)$ *называется унимодальной на* D, *если она непрерывна на* D *и существуют числа* $\alpha, \beta \in D (\alpha \leq \beta)$ *такие, что*

1) $f(x)$ *монотонно строго возрастает при* $x \leq \alpha$;

2) $f(x)$ *монотонно строго убывает при* $x \geq \beta$;

3) $f(t) = \max\limits_{x \in D} f(x)$ *при* $\alpha \leq t \leq \beta$.

Если $\alpha = \beta$, *то будем называть* $f(x)$ *строго унимодальной на* D *и писать* $f \in U(D)$.

Определение 2. *Пусть* $f : \mathbb{R} \to [0; 1]$, $f \in U(\mathbb{R})$, *достигающая максимума равного 1, в точке* q, *т. е.* $\exists q \in \mathbb{R} : f(q) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$, *для некоторого* $\delta > 0$ *принимающая на отрезке* $[q - \delta, q + \delta]$ *значения не меньше некоторого* $h > 0$, *а вне отрезка — меньше, т. е.* $\exists \delta > 0, h > 0 : (f(x) \geq h \Leftrightarrow q - \delta \leq x \leq q + \delta)$, *представляющая собой некоторую суперпозицию* g *от функции* $\xi(x) = b^2(x-q)^2 + c$, $b \neq 0$, *т. е.* $f(x) = g(\xi(x))$, *где* $\xi : \mathbb{R} \to \Xi$, $g : \Xi \to [0; 1]$, $\xi(x) = b^2(x - q)^2 + c, b \neq 0$, *тогда класс таких функций* $f(x)$ *обозначим через* $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$.

В определении 2 функция g показывает структуру $f(x)$, т. е. то, что $f(x)$ является суперпозицией функции $\xi(x)$. Выбор функции $g(x)$ ограничен теми условиями, которые накладываются на $f(x)$, и задает конкретную суперпозицию, но таким образом, чтобы после применения функции $g(x)$ к $\xi(x)$ получалась $f(x)$, которая удовлетворяет всем условиям определения (2). В [14] была исследована функция $g(x)$ и установлено несколько ее свойств, которые здесь не используются и поэтому не приводятся.

Здесь и далее для обозначения функции принадлежности будем использовать тот же символ, который используется для обозначения нечеткого множества. Например, для нечеткого множества u функцию принадлежности будем обозначать $u(x)$.

Уточним понятие нечеткого числа.

Определение 3. *Назовем $u = \{(x, u(x))|x \in \mathbb{R}\}$ нечетким множеством, где $u(x) : \mathbb{R} \to [0; 1]$ — функция принадлежности u. Нечеткое множество u с функцией принадлежности $u(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ называется нормальным, если $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} u(x) = 1$. Нормальное нечеткое множество называется нечетким числом.*

Будем рассматривать нечеткие числа с функцией принадлежности из $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$. Для таких чисел в работе [14] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f_k \in \mathfrak{R}(X)$, $X \subset \mathbb{R}$ компактно, функции f_k реализуют одну и ту же суперпозицию g, но над разными функциями $\xi_k(x) = b_k^2(x - q_k)^2 + c$ соответственно, $k = 1, 2$, т. е. $f_k(x) = g(\xi_k(x))$, где $\xi_k(x) : X \to \Xi_k$, $\Xi_k \subset \Xi$, $g : \Xi \to [0, 1]$, $\xi_k(x) = b_k^2(x - q_k)^2 + c$, $k = 1, 2$, тогда $\max\limits_{X} \min\limits_{k=1,2}(f_k(x))$ достигается в точке $\dfrac{q_1 |b_1| + q_2 |b_2|}{|b_1| + |b_2|}$.*

3. Арифметические операции. Определим арифметические операции над множеством нечетких чисел над $\mathbb{R}$. Пусть u и v нечеткие числа над $\mathbb{R}$.

Принцип обобщения Заде

$$f(u, v)(x) = \sup_{x=f(x_1,x_2)} \min\left(u\left(x_1\right), v\left(x_2\right)\right)$$

позволяет задавать операции над нечеткими числами, в том числе и арифметические, например

$$(u + v)(x) = \sup_{x_1\in\mathbb{R}} \min\left(u\left(x_1\right), v\left(x - x_1\right)\right), \tag{1}$$

$$(u - v)(x) = \sup_{x_1\in\mathbb{R}} \min\left(u\left(x_1\right), v\left(x_1 - x\right)\right). \tag{2}$$

Исследуем, как вычислять арифметические операции над нечеткими числами с функциями принадлежностями из $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$, т. е. вида

$$u(x) = g(b^2(x - q)^2 + c).$$

Обозначим $u_i(x) = g(b_i^2(x - q_i)^2 + c)$, $i = 1, 2$.

Далее для u, u_1, u_2 учитываем, что значение в (1) для фиксированного x согласно теореме 1 достигается в точке

$$x_i^* = \frac{q_1 |b_1| + (x - q_2) |b_2|}{|b_1| + |b_2|}.$$

Кроме того,

$$u_2\left(x-x_1\right)=g\left(b_2^2\left(\left(x-x_1\right)-q_2\right)^2+c\right)=g\left(b_2^2\left(x_1-\left(x-q_2\right)\right)^2+c\right).$$

Тогда получим

$$u(x)=\left(u_1+u_2\right)(x)=\sup_{x_1\in\mathbb{R}}\min\left(u_1\left(x_1\right),u_2\left(x-x_1\right)\right)=u_1\left(\frac{q_1\left|b_1\right|+\left(x-q_2\right)\left|b_2\right|}{\left|b_1\right|+\left|b_2\right|}\right)=$$

$$=g\left(b_1^2\left(\frac{q_1\left|b_1\right|+\left(x-q_2\right)\left|b_2\right|}{\left|b_1\right|+\left|b_2\right|}-q_1\right)^2+c\right)=g\left(b_1^2\left(\frac{x\left|b_2\right|-q_2\left|b_2\right|-q_1\left|b_2\right|}{\left|b_1\right|+\left|b_2\right|}\right)^2+c\right)=$$

$$=g\left(\frac{b_1^2b_2^2}{\left(\left|b_1\right|+\left|b_2\right|\right)^2}\left(x-\left(q_1+q_2\right)\right)^2+c\right).$$

Таким образом, для операции $u=u_1+u_2$ выполнено

$$q=q_1+q_2,\ b^2=\frac{b_1^2b_2^2}{\left(\left|b_1\right|+\left|b_2\right|\right)^2}.$$

Аналогично из (2) для операции $u=u_1-u_2$ выполнено

$$q=q_1-q_2,\ b^2=\frac{b_1^2b_2^2}{\left(\left|b_1\right|+\left|b_2\right|\right)^2}.$$

При попытке применить принцип обобщения Заде к операции умножения получим

$$(u_1u_2)(x)=\sup_{x_1\in\mathbb{R}}\min\left(g\left(b_1^2\left(x_1-q_1\right)^2+c\right),g\left(b_2^2\left(\frac{x}{x_1}-q_2\right)^2+c\right)\right),$$

и эта функция принадлежности уже не будет принадлежать классу $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$. Аналогично получим и операции деления.

Поэтому поступим так, как это было с операциями сложения и вычитания, и зададим формулы для умножения $u=u_1u_2$:

$$q=q_1q_2,\ b^2=\frac{b_1^2b_2^2}{\left(\left|b_1\right|+\left|b_2\right|\right)^2}$$

и деления $u=u_1/u_2$:

$$q=q_1/q_2,\ b^2=\frac{b_1^2b_2^2}{\left(\left|b_1\right|+\left|b_2\right|\right)^2}.$$

При этом операция деления определена при $q_2\neq 0$.

В качестве примера вычислим сумму двух нечетких чисел.

Пример 1. *Пусть* $u_1(x)=e^{-\frac{(x-2)^2}{9}}$ *и* $u_2(x)=e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}$ *. Вычислим* $u=u_1+u_2$*:*

$$q=q_1+q_2=2+3=5,$$

$$b^2=\frac{b_1^2b_2^2}{\left(\left|b_1\right|+\left|b_2\right|\right)^2}=\frac{\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{4}}{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)}=\frac{1}{25},\qquad u(x)=e^{-\frac{(x-5)^2}{25}}.$$

Вычислим $u = u_1 - u_2$*:*

$$q = q_1 - q_2 = 2 - 3 = -1,$$

$$b^2 = \frac{b_1^2 b_2^2}{\left(|b_1| + |b_2|\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{4}}{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{1}{25},$$

$$u(x) = e^{-\frac{(x+1)^2}{25}}.$$

Вычислим $u = u_1 u_2$*:*

$$q = q_1 q_2 = 2 \cdot 3 = 6,$$

$$b^2 = \frac{b_1^2 b_2^2}{\left(|b_1| + |b_2|\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{4}}{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{1}{25},$$

$$u(x) = e^{-\frac{(x-6)^2}{25}}.$$

Вычислим $u = u_1 / u_2$*:*

$$q = q_1 / q_2 = 2/3,$$

$$b^2 = \frac{b_1^2 b_2^2}{\left(|b_1| + |b_2|\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{4}}{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{1}{25},$$

$$u(x) = e^{-\frac{(x-\frac{2}{3})^2}{25}}.$$

4. Свойства арифметических операций. Полученные определения арифметических операций над нечеткими числами сохраняют ряд свойств операций над вещественными числами. Так, легко проверить, что для сложения и умножения соблюдается закон ассоциативности:

$$(u_1 \circ u_2) \circ u_3 = u_1 \circ (u_2 \circ u_3), \tag{3}$$

где $\circ$ — либо операция сложения, либо умножения, но в (3) во всех четырех вхождениях $\circ$ может быть только одна операция: либо всюду сложение, либо всюду умножение.

Относительно параметра q ассоциативность очевидна, поскольку

$$(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3).$$

С параметром b чуть сложнее. Вычислим $u' = (u_1 \circ u_2) \circ u_3$, $u'(x) = g\left(b'^2 \left(x - q'\right)^2 + c\right)$,

$$b'^2 = \frac{\dfrac{b_1^2 b_2^2}{\left(|b_1| + |b_2|\right)^2} b_3^2}{\left(\dfrac{|b_1|\,|b_2|}{|b_1| + |b_2|} + |b_3|\right)^2} = \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{\left(|b_1| + |b_2|\right)^2 \dfrac{\left(|b_1|\,|b_2| + |b_3|\left(|b_1| + |b_2|\right)\right)^2}{\left(|b_1| + |b_2|\right)^2}} =$$

$$= \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{\left(|b_1|\,|b_2| + |b_1|\,|b_3| + |b_2|\,|b_3|\right)^2}. \tag{4}$$

Очевидно, что перенумерация слагаемых в выражении $(u_1 \circ u_2) \circ u_3$ приводит к соответствующей перестановке множителей в числителе (4) и слагаемых в знаменателе (4), т. е. для $u'' = (u_2 + u_3) + u_1$, $u''(x) = g\left(b''^2 (x - q'')^2 + c\right)$ получим

$$\frac{b_2^2 b_3^2 b_1^2}{\left(|b_2|\,|b_3| + |b_1|\,|b_2| + |b_1|\,|b_3|\right)^2}.$$

Откуда следует равенство (3).

Очевидно, что заданные таким образом операции сложения и умножения коммутативны:

$$u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1.$$

Обобщая формулу (4), можно показать, что для $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ и $v = \prod\limits_{i=1}^{n} u_i$ верно

$$b^2 = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} b_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |b_j|\right)^2}. \tag{5}$$

Докажем (5) по математической индукции.

Выше было показано, что (5) верно для $n = 2$ и $n = 3$.

Пусть (5) верно для $n - 1$. Покажем, что (5) верно и для n.

Для $u' = \sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i$ имеем $b'^2 = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} |b_j|\right)^2}$. Положим $u = u' + u_n$. Тогда

$$b^2 = \frac{b'^2 b_n^2}{\left(|b'| + |b_n|\right)^2} = \frac{\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} |b_j|\right)^2} b_n^2}{\left(\left|\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} |b_i|}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} |b_j|}\right| + |b_n|\right)^2} =$$

$$
= \frac{\prod_{i=1}^{n} b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|b_j|\right)^2\left(\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}|b_i| + |b_n|\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|b_j|}{\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|b_j|}\right)^2} = \frac{\prod_{i=1}^{n} b_i^2}{\left(\prod_{i=1}^{n-1}|b_i| + |b_n|\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|b_j|\right)^2} =
$$

$$
= \frac{\prod_{i=1}^{n} b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|b_j|\right)^2}.
$$

Таким образом, формула (5) верна для n.

Поскольку параметр b вычисляется одинаково, как для суммы, так и для произведения, а также из ассоциативности этих операций следует дистрибутивность произведения относительно сложения:

$$
u(v+w) = uv + uw.
$$

Что же касается дистрибутивности сложения относительно умножения, то можно показать, что равенство

$$
u + vw = (u+v)(u+w)
$$

неверно.

Положим

$$
r = u + vw,
$$

$$
s = (u+v)(v+w),
$$

$$
p(x) = g\left(b_p^2\,(x-q_p)^2 + c\right),\ p \in \{u, v, w, r, s\},
$$

тогда легко показать, что

$$
q_r = q_u + q_v q_w,
$$

$$
q_s = (q_u + q_v)\,(q_u + q_w)
$$

и, вообще говоря, $q_r \neq q_s$ при $r \neq s$.

5. Нейтральный и квазинейтральный элемент. Положим $u(x) = g(b_u^2(x - q_u)^2 + c)$, $e(x) = g(b_e^2(x-q_e)^2+c)$. Найдем для u нейтральный элемент e относительно произведения, т. е.

$$
ue = u.
$$

Для этого должно, во-первых, выполняться равенство

$$
q_u \cdot q_e = q_u.
$$

Откуда получаем $q_e = 1$.

Во-вторых, для того чтобы найти b_e, необходимо рассмотреть следующее равенство:

$$\frac{b_u^2 b_e^2}{\left(|b_u| + |b_e|\right)^2} = b_u^2,$$

$$b_e^2 = \left(|b_u| + |b_e|\right)^2,$$

$$|b_e| = -\frac{1}{2}\,|b_u|\,.$$

Получили, что нейтрального элемента не существует. Следовательно, и обратного элемента для u тоже не существует.

Так как аналогичные равенства справедливы и для нейтрального элемента относительно сложения, то и в этом случае нет ни нейтрального, ни обратного элемента.

Определение 4. *Будем называть квазинейтральным элементом нечеткое число* e *такое, что* $e(x) = g\left(b_e^2\,(x - q_e)^2 + c\right) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$, *для которого выполнено* $\forall u\left(u(x) = g\left(b_u^2\,(x - q_u)^2 + c\right) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})\right), v\left(v(x) = g\left(b_v^2\,(x - q_v)^2 + c\right) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})\right) \mid ue = v \colon q_u = q_v$.

Очевидно, что квазинейтральных элементов e бесконечно много и они имеют следующий вид:

$$e(x) = g\left(b_e^2(x-1)^2 + c\right).$$

При этом можно задавать разные квазинейтральные элементы, варьируя параметр b_e. Надо заметить, что при выборе квазинейтрального элемента особенный интерес представляют идемпотенты. Очевидно, что в данной алгебре если идемпотенты существуют, то только среди квазинейтральных элементов, поскольку равенство $u+u=u$ $(uu=u)$ может выполняться только в случае, когда u — квазинейтральный элемент.

Найдем идемпотент для операции сложения и рассмотрим квазинейтральный элемент e для операции сложения, $e(x) = g\left(b_e^2 x^2 + c\right)$. Вычислим $e_2 = e + e$:

$$q_{e_2} = 0 + 0 = 0.$$

Для параметра q идемпотентность выполняется. Проверим для параметра b:

$$b_{e_2}^2 = \frac{b_e^2 b_e^2}{\left(|b_e| + |b_e|\right)^2} = \frac{b_e^2}{4},$$

и для идемпотентности должно выполняться равенство:

$$b_e^2 = \frac{b_e^2}{4}.$$

Данное равенство возможно, только если $b_e = 0$, но поскольку $e(x) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$, то $b_e \neq 0$. Следовательно, идемпотентов для операции сложения не существует. Аналогичные рассуждения верны и для операции умножения, для которой также не существует идемпотента.

Определение 5. *Зададим нечеткое число* u, $u(x) = g\left(b_u^2\,(x-q_u)^2+c\right) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$, *тогда квазиобратным к нему называется такое нечеткое число* v, $v(x) = g\left(b_v^2\,(x-q_v)^2+c\right) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$, *для которого выполнено условие*

$$uv = e,$$

где e *— квазинейтральный элемент.*

Выясним условия существования квазиобратного элемента. Из определения получаем, что

$$q_u q_v = q_e,$$

$$q_v = \frac{q_e}{q_u} = \frac{1}{q_u}$$

и

$$\frac{b_u^2 b_v^2}{\left(|b_u|+|b_v|\right)^2} = b_e^2,$$

$$b_u^2 b_v^2 = b_e^2\left(|b_u|+|b_v|\right)^2,$$

$$\left(b_e^2-b_u^2\right)b_v^2 + 2\,|b_u|\,b_e^2\,|b_v| + b_u^2 b_e^2 = 0. \tag{6}$$

Решая уравнение (6), получим

$$|b_v| = \frac{|b_u|\,|b_e|}{|b_u|-|b_e|}. \tag{7}$$

Очевидно, равенство (7) нарушается при $|b_u| \leq |b_e|$ и остается верным при $|b_u| > |b_e|$, т. е. квазиобратный элемент существует тогда и только тогда, когда $|b_u| > |b_e|$. Поскольку у уравнения (6) только один корень, то квазиобратный элемент единственный. Таким образом, доказана следующая теорема, в которой приняты обозначения: $u(x) = g\left(b_u^2\,(x-q_u)^2+c\right)$, $e(x) = g\left(b_e^2(x-1)^2+c\right)$, $v(x) = g\left(b_v^2\,(x-q_v)^2+c\right)$. □

Теорема 2. *Для любого нечеткого числа* u *с функцией принадлежности* $u(x) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$ *и любого квазинейтрального элемента* e *с функцией принадлежности* $e(x) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$ *существует единственное квазиобратное нечеткое число* v *с функцией принадлежности* $v(x) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда* $b_u^2 > b_e^2$. *Причем* $q_v = \dfrac{1}{q_u}$, $|b_v| = \dfrac{|b_u|\,|b_e|}{|b_u|-|b_e|}$.

Надо заметить, что аналогичная теорема верна и для операции сложения с той поправкой, что в этом случае квазинейтральный элемент будет $e(x) = g\left(b_e^2 x^2 + c\right)$, а $q_v = -q_u$.

6. Заключение. Введенная алгебра имеет существенное прикладное значение. Полученные формулы для вычисления арифметических операций позволяют применять нечеткий анализ для исследования сложных систем, например в экологии [2] или химической технологии [1]. Хотя полученные результаты применимы только для функций принадлежности из класса $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$, но при решении указанных прикладных задач (как, впрочем, и многих других) функция принадлежности неизвестна и ее выбор всецело зависит от личных предпочтений исследователя. Поэтому довольно часто можно использовать предложенный класс функций и применять полученные результаты для проведения вычислительных экспериментов. Кроме того, в работе [14] было доказано, что для ряда прикладных исследований выбор функции принадлежности среди функций класса $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$ не оказывает существенного влияния на результаты. Поэтому предлагаемый подход носит довольно общий характер и может применяться для довольно широкого класса исследований методами нечеткого анализа.

Литература

1. Germashev I. V., Derbisher V. E. Fuzzy optimization of polymer compositions. *Theor. Found. of Chem. Eng.* **35** (4), 418–421 (2001). https://doi.org/10.1023/A:1010443607682

2. Гермашев И. В., Клинкова Г. Ю. Модель оценки сукцессионного возраста экосистемы водоемов. *Математические методы в технике и технологиях: Сб. трудов 27-й междунар. конф.*, Тамбов, 3–5 июня 2014 г. В 12 т. Т. 7, 5–7 (2014).

3. Гермашев И. В., Дербишер Е. В., Дербишер В. Е., Куликова Н. Ю. Сходимость рядов нечетких чисел с унимодальной функцией принадлежности. *Математическая физика и компьютерное моделирование* **21** (1), 11–17 (2018). https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.2

4. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers. *Int. J. Syst. Sci.* **9** (6), 613–626 (1978). https://doi.org/10.1080/00207727808941724

5. Filev D. P., Yager R. R. Operations on fuzzy numbers via fuzzy reasoning. *Fuzzy Sets and Syst.* **91** (2), 137–142 (1997). https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00135-8

6. Alim A., Johora F. T., Babu S., Sultana A. Elementary operations on L-R fuzzy number. *Adv. in Pure Math.* **5** (3), 131–136 (2015). https://doi.org/10.4236/apm.2015.53016

7. Wagenknecht M., Hampel R., Schneider V. Computational aspects of fuzzy arithmetics based on archimedean t-norms. *Fuzzy Sets and Syst.* **123** (1), 49–62 (2001). https://doi.org/10.4236/apm.2015.53016

8. Guerra M. L., Stefanini L. Approximate fuzzy arithmetic operations using monotonic interpolations. *Fuzzy Sets and Syst.* **150** (1), 5–33 (2005). https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.06.007

9. Koroteev M. V., Terelyanskii P. V., Ivanyuk V. A. Arithmetic of fuzzy numbers in generalized trapezoidal form. *J. of Math. Sci.* **216** (5), 696–701 (2016). https://doi.org/10.1007/s10958-016-2931-x

10. Golan J. S. *Semirings and their applications.* Dordrecht, Kluwer Academic (1999).

11. Vechtomov E. M., Petrov A. A. Multiplicatively idempotent semirings. *Fundam. and Appl. Math.* **18** (4), 41–70 (2013).

12. Vrba J. A note on inverses in arithmetic with fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Syst.* **50** (3), 267–278 (1992). https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90225-S

13. Васильев Ф. П. *Численные методы решения экстремальных задач.* Москва, Наука (1988).

14. Germashev I. V., Derbisher V. E. Properties of unimodal membership functions in operations with fuzzy sets. *Russ. Math.* **51** (3), 73–76 (2007). https://doi.org/10.3103/s1066369x07030115

Статья поступила в редакцию 26 апреля 2022 г.;
доработана 8 июня 2022 г.;
рекомендована к печати 9 июня 2022 г.

Контактная информация:

Гермашев Илья Васильевич — д-р техн. наук, проф.; germashev@volsu.ru

Дербишер Евгения Вячеславовна — канд. техн. наук, доц.; derbisher2@vstu.ru

Дербишер Вячеслав Евгеньевич — д-р хим. наук, проф.; derbisher_ve@vstu.ru

Карташова Анна Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.; kartashovaan@yandex.ru

Титов Александр Викторович — аспирант; alexandr.titov@volsu.ru

Algebra of fuzzy numbers with unimodal membership function*

I. V. Germashev[1], *E. V. Derbisher*[2], *V. E. Derbisher*[2], *A. V. Kartashova*[3], *A. V. Titov*[1]

[1] Volgograd State University,
100, pr. Universitetskiy, Volgograd, 400062, Russian Federation
[2] Volgograd State Technical University,
28, pr. im. Lenina, Volgograd, 400005, Russian Federation
[3] Volgograd State Socio-Pedagogical University,
27, pr. im. Lenina, Volgograd, 400005, Russian Federation

For citation: Germashev I. V., Derbisher E. V., Derbisher V. E., Kartashova A. V., Titov A. V. Algebra of fuzzy numbers with unimodal membership function. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 4, pp. 590–601. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.402 (In Russian)

Fuzzy numbers with a unimodal membership function are presented, which have found application in the fuzzy analysis of such subject fields as ecology, chemical technology. In this article, a set of fuzzy numbers with an unimodal membership function of a special type is considered. Two binary operations (addition and multiplication) are given over this set, formulas for calculation are obtained and some properties of this algebra are investigated. It is proved that addition and multiplication are commutative and associative. Moreover, multiplication is distributive over addition. It is shown that there are no neutral and inverse elements over both operations. Note that if we add neutral elements under addition and multiplication to the given algebra, we will obtain a commutative semiring. The conditions under which quasineutral or quasiinverse elements exist are also given.

Keywords: algebra, fuzzy numbers, arithmetic operations, associativity, distributivity.

References

1. Germashev I. V., Derbisher V. E. Fuzzy optimization of polymer compositions. *Theor. Found. of Chem. Eng.* **35** (4), 418–421 (2001). https://doi.org/10.1023/A:1010443607682

2. Germashev I. V., Klinkova G. Y. The model for estimating the successional age of a reservoir ecosystem. *Mathematical methods in Engineering and Technology: Proceedings of the 27th International Conference*, Tambov, June 3–5, 2014. In 12 vols, vol. 7, 5–7 (2014). (In Russian)

3. Germashev I. V., Derbisher E. V., Derbisher V. E., Kulikova N. Y. Convergence of series of fuzzy numbers with unimodal membership function. *Mathematical Physics and Computer Simulation* **21** (1), 11–17 (2018). https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.2 (In Russian)

4. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers. *Int. J. Syst. Sci.* **9** (6), 613–626 (1978). https://doi.org/10.1080/00207727808941724

5. Filev D. P., Yager R. R. Operations on fuzzy numbers via fuzzy reasoning. *Fuzzy Sets and Syst.* **91** (2), 137–142 (1997). https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00135-8

6. Alim A., Johora F. T., Babu S., Sultana A. Elementary operations on L-R fuzzy number. *Adv. in Pure Math.* **5** (3), 131–136 (2015). https://doi.org/10.4236/apm.2015.53016

7. Wagenknecht M., Hampel R., Schneider V. Computational aspects of fuzzy arithmetics based on archimedean t-norms. *Fuzzy Sets and Syst.* **123** (1), 49–62 (2001). https://doi.org/10.4236/apm.2015.53016 (In Russian)

8. Guerra M. L., Stefanini L. Approximate fuzzy arithmetic operations using monotonic interpolations. *Fuzzy Sets and Syst.* **150** (1), 5–33 (2005). https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.06.007

9. Koroteev M. V., Terelyanskii P. V., Ivanyuk V. A. Arithmetic of fuzzy numbers in generalized trapezoidal form. *J. of Math. Sci.* **216** (5), 696–701 (2016). https://doi.org/10.1007/s10958-016-2931-x

10. Golan J. S. *Semirings and their applications*. Dordrecht, Kluwer Academic (1999).

11. Vechtomov E. M., Petrov A. A. Multiplicatively idempotent semirings. *Fundam. and Appl. Math.* **18** (4), 41–70 (2013). (In Russian)

*The work is supported by state task of the Ministry of Science and Higher Education of Russia (project no. 0633-2020-0003).

12. Vrba J. A note on inverses in arithmetic with fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Syst.* **50** (3), 267–278 (1992). https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90225-S

13. Vasilyev F. P. *Numerical methods for solving extreme problems.* Moscow, Nauka Publ. (1988). (In Russian)

14. Germashev I. V., Derbisher V. E. Properties of unimodal membership functions in operations with fuzzy sets. *Russ. Math.* **51** (3), 73–76 (2007). https://doi.org/10.3103/s1066369x07030115

Received: April 26, 2022
Revised: June 8, 2022
Accepted: June 9, 2022

Authors' information:

Ilya V. Germashev — germashev@volsu.ru
Evgeniya V. Derbisher — derbisher2@vstu.ru
Vyacheslav E. Derbisher — derbisher_ve@vstu.ru
Anna V. Kartashova — kartashovaan@yandex.ru
Alexander V. Titov — alexandr.titov@volsu.ru

ХРОНИКА

23 марта 2022 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Полякова в санкт-петербургском Доме ученых им. М. Горького выступили ассистент Г. А. Нестерчук и д-р физ.-мат. наук, проф. С. Б. Филиппов (СПбГУ) с докладом на тему «Свободные колебания цилиндрической оболочки, сопряженной с пластинами».

Краткое содержание доклада:

Изучаются свободные колебания цилиндрических оболочек, сопряженных с пластинами: 1) оболочка, подкрепленная кольцевыми пластинами разной жесткости, 2) оболочка, сопряженная по краю с круговой пластиной. В первом случае для приближенного вычисления низших частот колебаний используется асимптотический метод в сочетании с методом Рэлея — Ритца. Получены приближенные значения оптимальных параметров подкрепленной оболочки с фиксированной массой, соответствующие максимуму первой частоты колебаний. Решена задача минимизации массы оболочки, имеющей фиксированную первую частоту. Исследовано влияние закона распределения жесткостей пластин вдоль образующей цилиндра на частоты колебаний. Дано сравнение асимптотических результатов с рассчитанными методом конечных элементов. Во втором случае показано, что частоты колебаний образуют две серии. Частоты одной из серий близки к частотам колебаний цилиндрической оболочки, а частоты другой серии мало отличаются от частот колебаний пластины. Эти свойства частот подтверждаются и численными расчетами.