

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ
ТОНКОСТЕННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ

*Рекомендовано к изданию
Государственным комитетом Российской Федерации
по высшему образованию*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
Издательство С.-Петербургского университета
1995

Редактор: Т. Ф. Шпагина

Рецензенты: кафедра теоретической механики С.-Петербург. техн. ун-та (зав. каф. д-р. физ.-мат. наук, проф. П. А. Жилин), д-р. физ.-мат. наук А. Л. Попов (Институт проблем механики РАН)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского университета*

УДК 534.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ: Учеб. пособие / П. Е. Товстик, С. М. Бауэр, А. Л. Смирнов, С. Б. Филиппов. — СПб.: Издательство С.-Петербургского ун-та, 1995. — 188 с.

ISBN 5-288-01406-X

В учебном пособии рассматриваются основные асимптотические методы, используемые в механике тонкостенных конструкций. Приводятся свойства асимптотических разложений и асимптотические методы вычисления интегралов. Основное место занимает построение решений сингулярно возмущенных линейных и нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Анализируются задачи на собственные значения, возникающие в теории тонких оболочек и пластин.

Книга предназначена для студентов механико-математических факультетов университетов. Она может быть полезна специалистам в области механики деформируемого тела.

Библиогр. 241 назв. Ил. 29.

Работа проводилась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №94-01-00599).

А $\frac{1603040000-030}{076(02)-95}$ 47-95

© П. Е. Товстик,

С. М. Бауэр, А. Л. Смирнов,
С. Б. Филиппов, 1995

© Издательство

Санкт - Петербургского
университета, 1995

ISBN 5-288-01406-X

Предисловие

Методы решения инженерных задач и задач по прикладной математике можно разделить на две большие группы – аналитические и численные. Лишь немногие задачи имеют точное решение, поэтому часто приходится ограничиваться построением приближенного решения. Асимптотические методы, основанные на разложениях по малым или большим значениям параметров или координат, занимают ведущее место среди методов построения приближенных аналитических решений.

В зависимости от решаемых задач структура асимптотических разложений оказывается различной. Целью данного учебного пособия является описание некоторых классов асимптотических разложений. Такие разложения возникают при приближенном вычислении интегралов, при решении алгебраических и трансцендентных уравнений. Однако основное внимание уделено асимптотическим решениям краевых задач для дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. При этом обсуждается лишь так называемое сингулярное вырождение, которое характеризуется наличием малого параметра при старших производных и приводит, как правило, к расходящимся асимптотическим рядам.

Интересы авторов настоящего пособия лежат в области исследований по теории тонких оболочек и пластин, поэтому работы этого направления обсуждаются более подробно.

При анализе различных классов асимптотических разложений приводятся основные результаты, рассматриваются примеры учебного характера и дается указание на литературные источники, которые содержат более полное изложение вопроса.

Основу пособия составили лекции по спецкурсу "Асимптотические методы в механике", который читается для студентов кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского (Ленинградского) университета в течение последних двадцати лет.

Авторы благодарят В.И. Сергееву за большую помощь при подготовке рукописи к печати и Н.Г. Филипова за выполненные рисунки.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

В этой главе дается определение асимптотических разложений, приводятся разложения, возникающие при вычислении определенных интегралов и при решении алгебраических уравнений. Вводится понятие о показателе изменяемости функции.

1.1. Оценки функций

Напомним определение символов O , o , \sim . Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ определены на некотором множестве S комплексных или вещественных чисел и пусть a — предельная точка S . Во всех последующих соотношениях этого параграфа считаем, что $z \in S$.

Обозначение $f(z) = O(g(z))$ при $z \rightarrow a$ используем, если существуют постоянная C и окрестность U точки a , такие, что $|f(z)| \leq C|g(z)|$ при $z \in U$.

Обозначение $f(z) = o(g(z))$ используется также и в случае, если существует постоянная C , такая, что неравенство $|f(z)| \leq C|g(z)|$ имеет место для всех z .

Обозначение $f(z) = o(g(z))$ при $z \rightarrow a$ используем, если

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$

Из сказанного следует, что $f = O(g)$ означает, что порядок функции f не превосходит порядка функции g , а $f = o(g)$ — порядок f меньше порядка g при $z \rightarrow a$.

Для функций f и g , порядки которых при $z \rightarrow a$ одинаковы, используем обозначение $f \sim g$ при $z \rightarrow a$. В этом случае одновременно $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $z \rightarrow a$. Во многих монографиях символ \sim используется лишь, если функции f и g эквивалентны, т.е.

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = 1. \quad (1.1)$$

Далее для $f \sim g$ выполнение равенства (1.1) не предполагается.

Приведем несколько примеров, в которых $S = R$ — множество вещественных чисел:

$$\ln x = o(x^\alpha), \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0;$$

$$\sin x = O(1), \quad x \in R;$$

$$x^\alpha = o(e^x), \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0;$$

$$x^{\alpha_1} = o(x^{\alpha_2}), \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > 0;$$

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$\sin x - x \sim x^3, \quad x \rightarrow 0.$$

Действия над символами O и o и различные примеры рассматриваются в публикациях [21, 111, 179, 181, 197].

1.2. Асимптотические ряды

1°. Пусть дана последовательность функций

$$\varphi_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

заданных на множестве S , имеющем предельную точку a . Последовательность (2.1) называется асимптотической при $z \rightarrow a$, если при любом целом $n \geq 0$

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \rightarrow a. \quad (2.2)$$

Приведем примеры асимптотических последовательностей, считая, что $S = R$ — множество вещественных чисел:

$$(z - a)^n, \quad z \rightarrow a;$$

$$z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty;$$

$$e^{\lambda_n z}, \quad z \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) < 0; \quad (2.3)$$

$$\Phi(z)(z - a)^{\alpha_n}, \quad z \rightarrow a, \quad \alpha_{n+1} > \alpha_n,$$

где $\Phi(z)$ — любая функция, заданная в S . Первые две последовательности (2.3) называются степенными.

Пусть функция $f(z)$ определена на том же множестве S . Ряд

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \quad z \rightarrow a \quad (2.4)$$

называется *асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре* функции $f(z)$ по асимптотической последовательности (2.1), если a_n — постоянные и при любом целом $N \geq 0$

$$R_N(z) = f(z) - \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z) = o(\varphi_N(z)), \quad z \rightarrow a. \quad (2.5)$$

Для асимптотического разложения здесь и далее используется знак \simeq вместо $=$.

Ряд (2.4) может расходиться. Соотношение (2.5) порождает последовательность приближенных формул

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z), \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

погрешность $R_N(z)$ которых имеет порядок первого отброшенного члена ряда (2.4) $R_N(z) \sim \varphi_{N+1}(z)$.

В книгах [111, 139, 181, 198] можно найти примеры асимптотических разложений для специальных функций. Так, интегральная показательная функция имеет асимптотическое разложение [139]

$$E(z) = \int_z^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt \simeq e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

причем ряд в (2.6) расходится при всех z . В то же время погрешность $R_N(z)$ (см. (2.5)) не превосходит первого отброшенного члена в (2.6).

2°. Свойства асимптотических рядов и действия над ними обсуждаются в [21, 111, 179, 181, 197]. Перечислим основные из них.

Если функция $f(z)$ разлагается в асимптотический ряд (2.4) по последовательности (2.1), то это разложение единственно,

т.е. единственным образом определяются коэффициенты a_n в (2.4):

$$a_n = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(z)}{\varphi_n(z)}$$

Вместе с тем асимптотический ряд единственным образом определяет функцию $f(z)$. Действительно, функция $f(z) + f_1(z)$ будет иметь то же асимптотическое разложение (2.4), если для всех $n \geq 0$

$$f_1(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \rightarrow a.$$

Например, функции $E(z)$ и $E(z) + e^{-2z}$ имеют одно и то же разложение (2.6)

Из сказанного ясно, что при выборе последовательности (2.1) для асимптотического разложения функции $f(z)$ необходимо учитывать поведение $f(z)$ при $z \rightarrow a$. При неудачном выборе $\varphi_n(z)$ разложение (2.4) либо не существует, либо дает тривиальный результат $f(z) \simeq 0$. Например, для последовательности z^{-n} имеем $e^{-z} \simeq 0$, $z \rightarrow \infty$, т.е. все $a_n = 0$ в (2.4).

Асимптотические разложения можно складывать и умножать на функции, при определенных предположениях их можно дифференцировать и интегрировать. Степенные асимптотические разложения

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

можно перемножать: $f(z)g(z)$, делить: $f(z)/g(z)$ при $b_0 \neq 0$ и подставлять друг в друга: $f[g(z)]$ при $b_0 = 0$. При этом асимптотические разложения результатов получаются по тем же правилам, что и для сходящихся рядов Маклорена (2.7).

3°. Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2.8)$$

сходится в области $S = \{z : |z| < R\}$, то в этой области он определяет аналитическую функцию $f(z)$, асимптотическое разложение которой при $z \rightarrow 0$ совпадает с (2.8). Несложно привести примеры (например, $a_n = n!$), когда ряд (2.8) расходится при всех $z \neq 0$. Интерес представляет следующий вопрос:

какие ограничения нужно наложить на коэффициенты a_n ряда (2.8), чтобы он давал асимптотическое разложение при $z \rightarrow 0$ функции $f(z)$, аналитической в секторе

$$S = \{z : |z| < R, \quad \alpha_1 < \arg z < \alpha_2\}?$$

Ответ оказывается неожиданным: не существует никаких ограничений ни на коэффициенты a_n , ни на угол раствора сектора (α_1, α_2) (см. также [197]).

4°. Отметим существенное различие между сходящимися рядами и расходящимися асимптотическими рядами с точки зрения точности вычислений. Если ряд (2.4) сходится при некотором z , то это означает, что при таком z

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0,$$

т.е. значение функции $f(z)$ может быть (в принципе) найдено с любой точностью. Если же ряд (2.4) расходится, то погрешность $R_N(z)$ при сохранении $(N+1)$ -го члена ряда при некотором $N = N_0(z)$ достигает минимального значения и точность вычислений не может быть выше $R_{N_0}(z)$. Погрешность $R_{N_0}(z)$ убывает при $z \rightarrow a$.

В простейших случаях, например для специальных функций, удается построить весь асимптотический ряд. В других случаях, в частности при асимптотическом интегрировании дифференциальных уравнений, в связи с громоздкостью вычислений приходится ограничиваться лишь одним или двумя первыми членами ряда (см. последующие главы).

В пп. 1.3 — 1.5 рассмотрено вычисление интегралов, содержащих большой параметр.

1.3. Метод Лапласа

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(x) e^{\lambda h(x)} dx \quad (-\infty \leq a < b \leq \infty), \quad (3.1)$$

содержащий большой параметр $\lambda > 0$. Ищется асимптотическое разложение $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Этому вопросу посвящена обширная литература [21, 49, 54, 111, 126, 139, 179, 181, 197, 198] и др. Особо отметим трехтомную монографию [126], в которой наряду с (3.1) подробно исследованы интегралы более общего вида. Ниже приводим лишь простейшие результаты, считая функции $\varphi(x)$ и $h(x)$ голоморфными при $a < x < b$ и $h(x)$ вещественной.

1°. Если $h(x) = -x$ и в окрестности точки $x = 0$ функция $\varphi(x)$ имеет сходящееся или асимптотическое разложение

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}, \quad \alpha > -1,$$

то интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^b \varphi(x) e^{-\lambda x} dx \quad (3.2)$$

имеет асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\lambda^{n+\alpha+1}} a_n, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Действительно, почленное интегрирование в (3.2) дает

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(\lambda), \quad F_n(\lambda) = \int_0^b x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx.$$

С помощью интегрирования по частям можно показать, что в случае $c > b > 0$

$$\int_b^c x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx = o(\lambda^N),$$

где N — любое натуральное число. Последнее соотношение справедливо и при $c = \infty$, поэтому

$$F_n(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx - \int_b^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx + o(\lambda^N).$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^{n+\alpha+1}} \int_0^{\infty} z^{n+\alpha} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\lambda^{n+\alpha+1}},$$

приходим к формуле (3.3).

В зависимости от a_n ряд (3.3) может расходиться или сходиться, однако в последнем случае он может сходиться не к функции $F(\lambda)$, давая лишь ее асимптотическое разложение. Рассмотрим пример. Применяя формулу (3.3) при $\alpha = 0$ к интегралу

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda x} \sin x dx,$$

получаем

$$F(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda^{2k+2}} = \frac{1}{1 + \lambda^2}. \quad (3.4)$$

Точное значение

$$F(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda^2} \left(1 - \lambda e^{-\pi\lambda/2} \right)$$

отличается от функции, к которой сходится ряд (3.4). Дело в том, что здесь, как и в последующих случаях, ряд (3.3) или (3.4) учитывает лишь вклад в интеграл окрестности точки максимума функции $e^{\lambda h(x)}$ и пренебрегает экспоненциально малыми слагаемыми.

Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad h(x) = -x^2, \quad a < 0, \quad b > 0. \quad (3.5)$$

Тогда интеграл (3.1) имеет разложение

$$\int_a^b \varphi(x) e^{-\lambda x^2} dx \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\lambda^{n+1/2}} a_{2n}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Ряд (3.6) — это вклад в интеграл окрестности точки $x = 0$, в которой функция $e^{-\lambda x^2}$ максимальна.

2°. Пусть $h(x)$ голоморфна при $a \leq x \leq b$ и принимает наибольшее значение при $x = c$, причем $h(x) < h(c)$, если $x \neq c$. Рассмотрим два частных случая.

Пусть $c = a$, причем $h'(a) < 0$. Тогда путем замены переменной интегрирования $x = x(u)$ интеграл (3.1) приводится к интегралу вида (3.2) и имеет асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \simeq e^{\lambda h(a)} \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n \lambda^{-n-1}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Упомянутая замена определяется соотношением $h(a) - h(x) = u$, откуда находим голоморфную в окрестности точки $x = a$ функцию $x(u)$. Коэффициенты a_n в (3.7) вычисляются из разложения

$$\varphi[x(u)] x'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n. \quad (3.8)$$

Пусть теперь $a < c < b$, причем $h''(c) < 0$. Замена переменных $h(c) - h(x) = u^2$ преобразует интеграл (3.1) в разложение вида (3.5) и

$$F(\lambda) \simeq e^{\lambda h(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\lambda^{n+1/2}} a_{2n}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

где коэффициенты a_n определяются из того же разложения (3.8). В частности, удерживая лишь первый член ряда (3.9), находим

$$F(\lambda) = e^{\lambda h(c)} \left[\varphi(c) \left(-\frac{2\pi}{\lambda h''(c)} \right)^{1/2} + O(\lambda^{-3/2}) \right], \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Подобным образом рассматриваются случаи, когда при $x = c$ обращается в нуль большее число производных.

1.4. Интегралы с осциллирующей подынтегральной функцией. Метод стационарной фазы

1°. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda S(x)} dx \quad (-\infty \leq a < b \leq \infty) \quad (4.1)$$

с большим параметром $\lambda > 0$ и вещественной функцией $S(x)$. Пусть сначала $[a, b]$ — конечный промежуток, в котором

$$\varphi(x) \in C^{N+1}, \quad S(x) \in C^{N+2}, \quad S'(x) \neq 0 \quad (4.2)$$

(т.е. $\varphi(x)$ и $S(x)$ имеют $N+1$ и $N+2$ непрерывных производных). Тогда

$$F(\lambda) \approx \sum_{n=0}^N \frac{1}{(i\lambda)^{n+1}} \left[e^{i\lambda S(x)} \left(\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\varphi(x)}{S'(x)} \right) \right]_{x=a}^{x=b} + o(\lambda^{-N-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Формула (4.3) доказывается интегрированием по частям с последующей ссылкой на лемму Римана—Лебега [21, 111]

$$\int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda x} dx = o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

для кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$.

Из (4.3) следует, что при сделанных предположениях (4.2) асимптотическое разложение $F(\lambda)$ зависит лишь от значений функций $\varphi(x)$ и $S(x)$ и их производных на концах промежутка интегрирования. Если функции $\varphi(x)$ и $S(x)$ или их производные имеют конечное число точек разрыва, разбиваем промежуток интегрирования $[a, b]$ на части таким образом, чтобы точки разрыва совпали с концами этих частей, и к каждой части применяем формулу (4.3).

2°. Точки $x = c$, в которых $S'(c) = 0$, называются *стационарными*. При наличии стационарных точек разложение (4.3) не выполняется. Рассмотрим интеграл (4.1) с единственной стационарной точкой $x = c$, причем

$$a < c < b, \quad \varphi(x), S(x) \in C^\infty, \quad S''(c) \neq 0,$$

$$\varphi^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(b) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Условия (4.4) поставлены для того, чтобы выделить вклад в интеграл (окрестности) стационарной точки и исключить вклады концов $x = a$ и $x = b$. Получаем

$$F(\lambda) \simeq \exp(i\lambda S(c) + \pi i S_0/4) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(n\pi i S_0/4) \frac{\Gamma(n+1/2)}{\lambda^{n+1/2}} a_{2n},$$

где

$$a_m = \left(S_1(x, c) \frac{d}{dx} \right)^m (S_1(x, c) \varphi(x)) \quad \text{при } x = c,$$

$$S_1(x, c) = [2S_0(S(x) - S(c))]^{1/2} (S'(x))^{-1}, \quad S_0 = \text{sign}(S''(c)).$$

3°. *Нейтрализаторы*, введенные Ван дер Корпутом, позволяют разложить подынтегральную функцию на сумму двух функций, каждая из которых обращается в нуль вместе со всеми производными на одном из концов промежутка интегрирования. Нейтрализатор $\nu(x)$ — это функция, удовлетворяющая условиям

$$\nu(x) \in C^\infty, \quad \nu(a) = 1, \nu(b) = 0, \quad \nu^{(n)}(a) = \nu^{(n)}(b) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Примером нейтрализатора является функция [197]

$$\nu(x) = \int_x^b \exp\left(-\frac{1}{t-a} - \frac{1}{b-t}\right) dt \left(\int_a^b \exp\left(-\frac{1}{t-a} - \frac{1}{b-t}\right) dt \right)^{-1}.$$

Разбивая промежуток (a, b) на части и представляя $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \varphi(x)\nu(x) + \varphi(x)(1 - \nu(x)),$$

можно добиться того, чтобы вклад в интеграл давала окрестность лишь одного из концов промежутка интегрирования. Для вычисления этого вклада в случае, когда функции $\varphi(x)$ и $S(x)$ имеют особенности при $x = 0$, можно использовать лемму Эрдейи. Пусть

$$F(\lambda) = \int_0^b x^{\beta-1} \varphi(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx,$$

$$\alpha \geq 1, \quad \beta > 0, \quad \varphi(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \varphi^{(n)}(b) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$F(\lambda) \approx \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{\pi i(n+\beta)}{2\alpha}} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{a_n}{\alpha} \lambda^{-\frac{n+\beta}{\alpha}}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

4°. Итак, вклад в интеграл (3.1) дают лишь окрестности концов a и b промежутка интегрирования, точек разрыва функций $\varphi(x)$, $S(x)$ или их производных и стационарных точек функции $S(x)$. В окрестностях остальных точек происходит интерференция колебаний.

Например, интеграл

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-\lambda}$$

имеет асимптотическое разложение (4.3) с нулевыми членами, ибо нет точек разрыва и стационарных точек, а вклады окрестностей концов равны нулю, так как $\varphi^{(n)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Пусть $\varphi(x) \in C^\infty$, $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$

$$F(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{inx} dx, \quad n\text{-целое.} \quad (4.5)$$

В силу периодичности $\varphi(x)$ вклады окрестностей концов промежутка интегрирования сокращаются, и мы приходим к оценке $F(n) = o(n^{-N})$ ($n \rightarrow \infty$) при любом $N > 0$.

1.5. Метод перевала

Будем искать асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$ интеграла

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz \quad (\lambda > 0), \quad (5.1)$$

где γ — кривая в комплексной плоскости, а $\varphi(z)$ и $h(z)$ голоморфны в области S , причем $\gamma \subset S$. Описание метода перевала содержится в публикациях [21, 111, 179, 181, 190, 197] и др.

Метод перевала включает в себя два этапа — деформацию контура γ в контур γ_0 , наиболее удобный для получения асимптотических оценок, и вычисление асимптотики интеграла по контуру γ_0 .

При $\lambda \rightarrow \infty$ модуль подынтегральной функции будет наибольшим в точках z , в которых функция $\operatorname{Re}(h(z))$ максимальна. Предположим, что среди контуров, концы которых совпадают с концами контура γ , существует контур γ_0 , на котором достигается

$$\min_{\gamma} \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re}(h(z)).$$

Отметим, что в связи с тем, что подынтегральная функция является аналитической, величина интеграла не меняется при деформации контура. Допустим, что возможна деформация контура γ в γ_0 , не выводящая за пределы S . Тогда

$$F(\lambda) = \int_{\gamma_0} \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz. \quad (5.2)$$

Асимптотику интеграла (5.2) можно получить с помощью метода Лапласа (см. п. 1.3). Пусть для простоты

$$\max_{z \in \gamma_0} \operatorname{Re}(h(z))$$

достигается только в одной точке $z = c$.

Если точка $z = c$ совпадает с концом γ_0 и $h'(c) \neq 0$, разложение $F(\lambda)$ находим по формуле (3.7).

Если $z = c$ — внутренняя точка γ_0 , то из минимаксного свойства контура γ_0 следует, что c является стационарной точкой функции $f(x, y) = \operatorname{Re}(h(z))$, где $z = x + iy$. В ней $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, и из условий Коши—Римана следует, что $h'(c) = 0$.

Точка $z = c$ называется *точкой перевала*, а величина $\operatorname{Re}(h(c))$ — высотой точки перевала. Точка перевала называется *простой*, если $h''(c) \neq 0$. В этом случае точка перевала является седловой точкой (рис. 1).

Через нее проходят две пересекающиеся под прямым углом линии $\operatorname{Im}(h(z) - h(c)) = 0$, на которых функция $f(x, y)$ меняется наиболее быстро. Одна из этих линий, на которой $f(x, y)$ убывает при удалении от точки $z = c$, называется *линией наискорейшего спуска* или *линией стока*. Контур γ_0 можно деформировать

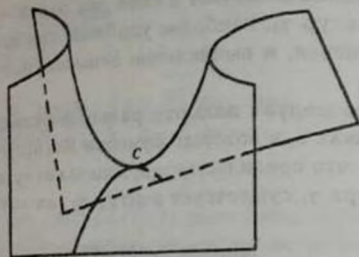


Рис. 1.

так, чтобы в окрестности точки $z = c$ он совпал с линией наискорейшего спуска. Тогда в этой окрестности $\text{Im}(h(z)) = \text{const}$, и для оценки интеграла (5.2) удобно использовать метод Лапласа (см. формулу (3.9)).

Общего алгоритма построения контура γ_0 не существует. Для конкретного интеграла (5.1) сначала необходимо найти точки перевала и провести проходящие через них линии наискорейшего спуска. После этого следует пытаться так деформировать контур γ , чтобы он состоял из частей линий наискорейшего спуска и, может быть, других кривых, интегралы по которым могут быть отброшены как асимптотически малые.

Метод перевала допускает обобщение и на интегралы вида (5.1) от функций нескольких переменных [179, 181].

Следующий п. 1.6 иллюстрирует применение метода перевала.

1.6. Асимптотические свойства функций Эйри

1°. Функции Эйри находят приложение при асимптотическом интегрировании дифференциальных уравнений с параметром, содержащих точки поворота (см. далее п. 2.5).

Уравнение Эйри

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} - \eta w = 0 \quad (6.1)$$

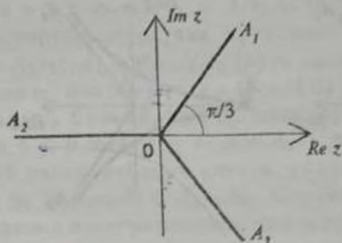


Рис. 2.

имеет решения, являющиеся целыми функциями комплексного аргумента η . Применяя преобразование Лапласа, можно представить решения $w_k(\eta)$ в виде контурных интегралов

$$w_k(\eta) = C_k \int_{\gamma_k} e^{z^3/3 - \eta z} dz, \quad (6.2)$$

где γ_k — контуры, уходящие обоими концами в бесконечность по лучам OA_n ($\arg z = \frac{\pi}{3}(-1 + 2n)$, $n = 1, 2, 3$, рис. 2), на которых подынтегральная функция в (6.2) стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Стандартные функции Эйри $Ai(\eta)$ и $Bi(\eta)$, вещественные при вещественных η , получим, взяв в (6.2)

$$\begin{aligned} Ai(\eta) &= w_1(\eta), & C_1 &= i/2\pi, & \gamma_1 &= A_1OA_3, \\ Bi(\eta) &= w_2(\eta), & C_2 &= 1/2\pi, & \gamma_2 &= A_2OA_1 + A_2OA_3. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Разложения функций Эйри в ряды Тейлора получаются из (6.2) после разложения

$$e^{-\eta z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\eta z)^k}{k!}$$

и последующего почленного интегрирования по z по лучам OA_n [139]:

$$Ai(\eta) = a_1 f_1(\eta) - a_2 f_2(\eta), \quad Bi(\eta) = \sqrt{3}(a_1 f_1(\eta) + a_2 f_2(\eta)),$$

$$f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \eta^{3k}, \quad b_0 = 1, \quad b_k = \frac{b_{k-1}}{(3k-1)3k}, \quad a_1 = \frac{3^{-2/3}}{\Gamma(2/3)},$$

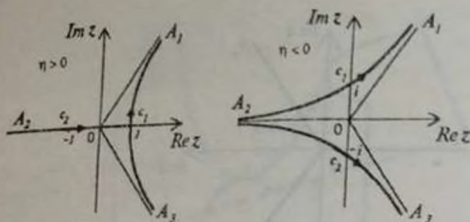


Рис. 3.

$$f_2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \eta^{3k+1}, \quad d_0 = 1, \quad d_k = \frac{d_{k-1}}{3k(3k+1)}, \quad a_2 = \frac{3^{-1/3}}{\Gamma(1/3)}.$$

2°. Для получения асимптотических разложений функций Эйри при $\eta \rightarrow \infty$ используем метод перевала. Пусть сначала $\eta > 0$. Сделаем в (6.2) замену $z = \sqrt{\eta}z_1$. Тогда формула (6.2) принимает вид

$$w_k(\eta) = C_k \sqrt{\eta} \int_{\gamma_k} e^{\lambda h_1(z_1)} dz_1, \quad h_1(z_1) = \frac{z_1^3}{3} - z_1, \quad \lambda = \eta^{3/2}. \quad (6.4)$$

Точно так же при $\eta < 0$ заменой $z = \sqrt{-\eta}z_2$ преобразуем (6.2):

$$w_k(\eta) = C_k \sqrt{-\eta} \int_{\gamma_k} e^{\lambda h_2(z_2)} dz_2, \quad h_2(z_2) = \frac{z_2^3}{3} + z_2, \quad \lambda = |\eta|^{3/2}. \quad (6.5)$$

Интегралы в (6.4) и (6.5) удобны для применения метода перевала. При $\eta > 0$ точки перевала суть $c_{1,2} = \pm 1$, а при $\eta < 0$ — суть $c_{1,2} = \pm i$. Линии наискорейшего спуска показаны на рис. 3. Эти линии имеют лучи OA_n своими асимптотами, поэтому асимптотические разложения интегралов (6.4) и (6.5) состоят лишь из вкладов окрестностей точек перевала.

При $\eta > 0$ и $\eta < 0$ обозначим эти вклады соответственно через J_k^+ и J_k^- , $k = 1, 2$. Тогда в силу (6.3)

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\eta) &\simeq -J_1^+, & \text{Bi}(\eta) &\simeq 2J_2^+, & \eta &\rightarrow +\infty; \\ \text{Ai}(\eta) &\simeq J_2^- - J_1^-, & \text{Bi}(\eta) &\simeq J_1^- + J_2^-, & \eta &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (6.6)$$

При этом пути интегрирования γ_k деформируются следующим образом. При $\eta > 0$ имеем $\gamma_1 = A_1 c_1 A_3$ (путь целиком состоит из линии наискорейшего спуска, проходящей через точку перевала c_1), $\gamma_2 = A_2 c_2 c_1 A_1 + A_2 c_2 c_1 A_3$ (путь дважды проходит через точку перевала c_2 , поэтому вклад J_2^\pm в (6.6) удваивается, высота точки перевала c_2 больше, чем c_1 , поэтому вклад c_1 не учитывается). При $\eta < 0$ имеем $\gamma_1 = A_1 c_1 A_2 + A_2 c_2 A_3$ (путь состоит из двух линий наискорейшего спуска, уходящих концами в бесконечность), $\gamma_2 = A_2 c_1 A_1 + A_2 c_2 A_3$. Стрелками на рис. 3 показаны направления интегрирования при вычислении вкладов J_k^\pm . При несовпадении этих направлений с направлениями путей γ_k в (6.6) появляется знак "-". После вычисления вкладов J_k^\pm при $\eta \rightarrow \infty$ получим [139]

$$Ai(\eta) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} e^{-\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{\zeta^k}, \quad |\arg \eta| < \pi;$$

$$Bi(\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} e^{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta^k}, \quad |\arg \eta| < \frac{\pi}{3};$$

$$Ai(-\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} \left[D_1(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) - D_2(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

$$|\arg \eta| < \frac{2\pi}{3}; \quad (6.7)$$

$$Bi(-\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} \left[D_1(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) + D_2(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

$$|\arg \eta| < \frac{2\pi}{3};$$

$$D_1(\zeta) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_{2k}}{\zeta^{2k}}, \quad D_2(\zeta) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_{2k+1}}{\zeta^{2k+1}},$$

$$\zeta = \frac{2}{3} \eta^{3/2}, \quad c_k = \frac{\Gamma(3k + 1/2)}{54^k k! \Gamma(k + 1/2)}.$$

Ряды (6.7) расходятся. Область их применимости не ограничивается вещественными η . Указаны сектора в окрестности точки $\eta = \infty$, в которых разложения (6.7) являются асимптотическими.

Графики функций $Ai(\eta)$ и $Bi(\eta)$ для вещественных η показаны на рис. 4.

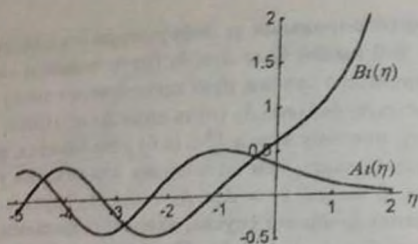


Рис. 4.

1.7. Понятие о показателе изменяемости функций

1°. При интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\lambda > 0$ приходим к функциям $F(x, \lambda)$ двух переменных. Для асимптотического интегрирования и качественного исследования решений при $\lambda \rightarrow \infty$ необходимо располагать способом описания скорости изменения функции F , связанной с изменением x , т.е. производной $\partial F/\partial x$ при $\lambda \rightarrow \infty$. В [40, 41] применительно к решениям уравнений теории тонких оболочек было введено понятие о показателе изменяемости функций, оказавшееся весьма удобным.

Показателем изменяемости функции $F(x, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ назовем число t , такое, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} \sim \lambda^t F, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (7.1)$$

Напомним, что символ \sim ставится между функциями одного порядка. При $t > 0$ функция F быстро меняющаяся, а при $t < 0$ — медленно меняющаяся.

В качестве примеров рассмотрим функции

$$F(x, \lambda) = g(x)e^z, \quad (7.2)$$

$$F(x, \lambda) = g(x) \sin z \quad (7.3)$$

при

$$z = \lambda^t f(x), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad t \geq 0, \quad f'(x) \neq 0.$$

Показатель изменяемости функций (7.2) и (7.3) равен t . Правда, для функции (7.3) оценка (7.1) нарушается в окрестностях тех точек, где $\sin z$ или $\cos z$ обращается в нуль, однако это обстоятельство при введении показателя применимости принято игнорировать. Для функции e^{iz} этот дефект определения (7.1) отсутствует.

2°. Показатель изменяемости может быть разным в различных областях изменения x . В качестве примера рассмотрим уравнение

$$F'' - \lambda q(x)F = 0, \quad (') = \partial/\partial x \quad (7.4)$$

с голоморфным коэффициентом $q(x)$. Если $q(x) \neq 0$, показатель изменяемости t решений $F(x, \lambda)$ уравнения (7.4) $t = 1/2$.

Пусть теперь $q(x_0) = 0$, $q'(x_0) = a \neq 0$. Тогда при $x - x_0 \sim \lambda^{-1/3}$ имеем $t = 1/3$. Для доказательства сделаем замену $x = x_0 + (\lambda a)^{-1/3}\eta$. В этом случае (7.4) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - (\eta + R)F = 0, \quad R = O(\lambda^{-1/3}\eta^2).$$

Полагая $R = 0$, приходим к уравнению Эйри (6.1), уже не содержащему параметра λ . Можно считать, что $\partial F/\partial \eta \sim F$, следовательно, $\partial F/\partial x \sim \lambda^{1/3}F$.

С показателем изменяемости t связана характерная длина рисунка деформации $l \sim \lambda^{-t}$ (это понятие используется при описании поля деформаций упругих тел).

3°. Показатель изменяемости вводится и для функций большего числа переменных. Рассмотрим функцию $F(x, y, \lambda)$. Ее общим показателем изменяемости назовем число t , такое, что

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \right\} \sim \lambda^t F, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Если же производные функции F по различным направлениям в плоскости xu имеют разный порядок, то вводится также частный показатель изменяемости $t_1 < t$. Пусть, например, $|\partial F/\partial x| \ll |\partial F/\partial y|$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} \sim \lambda^{t_1} F, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

4°. При сравнении порядка нескольких функций вводятся показатели интенсивности. Пусть даны две функции $F_1(x, \lambda)$ и $F_2(x, \lambda)$. Предположим, что их можно представить в виде

$$F_k = g_k(x, \lambda)H_k(x, \lambda), \quad k = 1, 2,$$

причем

$$g_k \sim \lambda^{p_k}, \quad k = 1, 2; \quad H_1 \sim H_2, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда числа p_k называются показателями интенсивности функций F_k . Если, например, функции F_k имеют вид (7.3) $F_k = g_k \sin(z + \alpha_k)$, то можно считать, что $H_1 \sim H_2 \sim 1$ и показатели интенсивности совпадают с порядками функций F_k , т.е.

$$F_k \sim \lambda^{p_k}. \quad (7.5)$$

Для функций типа (7.2) $F_k = g_k e^z$ оценка (7.5) уже не имеет места.

Пусть функция F имеет показатель изменяемости l и показатель интенсивности p . Тогда в силу (7.1) показатель интенсивности p_1 ее производной $\partial F / \partial x$ равен $p_1 = p + l$.

Разумеется, не для каждой функции можно ввести показатель изменяемости. Часто решения дифференциальных уравнений с параметром можно представить в виде суммы нескольких функций с различными показателями изменяемости (см. главы 2,3).

1.8. Диаграмма Ньютона

1°. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами, зависящими от параметра μ :

$$\sum_{k=0}^n a_k(\mu) \frac{d^{n-k} z}{dt^{n-k}} = 0.$$

После подстановки $z = e^{xt}$ приходим к алгебраическому уравнению n -й степени

$$\sum_{k=0}^n a_k(\mu) x^{n-k} = 0. \quad (8.1)$$

Пусть коэффициенты a_k имеют вид

$$a_k(\mu) = \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} \mu^{\alpha_{kj}},$$

$$a_{kj} \neq 0, \quad \alpha_{k,j+1} > \alpha_{kj}, \quad 0 \leq m_k \leq \infty, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Следовательно, $a_k(\mu) \sim \mu^{\alpha_{k0}}$, $\mu \rightarrow 0$. При $a_p(\mu) \equiv 0$ считаем $m_p = 0$, $\alpha_{p0} = \infty$. Пусть $a_n(\mu) \neq 0$, $a_0(\mu) \neq 0$.

2°. Асимптотические разложения корней x_q уравнения (8.1) имеют вид

$$x_q \simeq \sum_{j=0}^{\infty} x_{qj} \mu^{\beta_{qj}}, \quad \mu \rightarrow 0, \quad \beta_{q,j+1} > \beta_{qj}, \quad q=1, \dots, n. \quad (8.2)$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\mu^2 x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - \mu = 0 \quad (8.3)$$

и найдем сначала первое слагаемое в разложении (8.2), опуская индекс q .

Подставив $x = x_0 \mu^{\beta_0}$ в (8.3), получим

$$\mu^{2+5\beta_0} x_0^5 + \mu^{4\beta_0} x_0^4 - 2\mu^{3\beta_0} x_0^3 + \mu^{2\beta_0} x_0^2 - \mu = 0. \quad (8.4)$$

Теперь необходимо выбрать в (8.4) главные члены и определить значения β_0 , при которых как минимум два главных члена имеют одинаковый порядок. При $\beta_0 < 0$ главными членами будут два первых слагаемых. Значение $\beta_0 = -2$ определяется из условия совпадения их порядков $2 + 5\beta_0 = 4\beta_0$, а $x_0 = -1$ находится из уравнения $x_0^5 + x_0^4 = 0$.

Для выделения главных членов и определения значений параметра β_0 удобно использовать алгоритм, носящий название диаграммы Ньютона, описание которого содержится в [110, 178].

На плоскости (k, α) построим $n+1$ точку $M_k = \{k, \alpha_{k0}\}$ с целочисленными абсциссами (рис. 5). Проведем отрезок $M_0 M_1$. Тангенс угла наклона отрезка к оси k равен значению β_0 , при котором совпадают порядки первого и второго слагаемых. Нетрудно проверить, что точкам, лежащим выше прямой, проходящей через M_0 и M_1 соответствуют слагаемые, имеющие более высокий порядок малости. В рассматриваемом примере все остальные точки лежат выше прямой $M_0 M_1$.

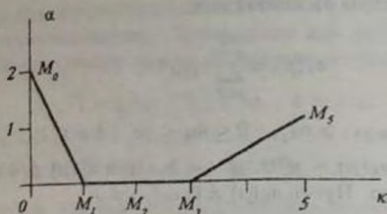


Рис. 5.

Если мы проведем отрезок M_0M_2 , то тем самым определим значение β_0 , при котором имеют одинаковый порядок первое и третье слагаемые. Однако в рассматриваемом примере эти слагаемые не будут главными, так как порядок второго слагаемого при таком значении β_0 будет меньше (точка M_1 лежит ниже прямой M_0M_2). Нас интересуют только главные члены, поэтому следует соединять точки M_k отрезками прямой таким образом, чтобы точки M_k , не лежащие на этих отрезках, находились выше полученной ломаной линии.

Для построения указанной ломаной линии будем поворачивать против часовой стрелки луч, проведенный вертикально вниз из точки $M_0^* = M_0$. Обозначим M_1^* первую из точек M_k , которую пересечет этот луч. Затем вертикальный луч из точки M_1^* будем поворачивать в том же направлении, пока он не пройдет через следующую точку M_2^* . Этот процесс продолжается до тех пор, пока очередной луч не пройдет через точку $M_n^* = M_{n+1}$.

Ломаная линия, соединяющая точки M_i^* , называется диаграммой Ньютона. Тангенс угла наклона отрезка $M_i^*M_{i+1}^*$ к оси k дает порядок β_{q0} корня x_q , длина проекции отрезка на ось k равна числу корней x_q , имеющих этот порядок, а число точек M_k , через которые проходит отрезок, равно числу членов уравнения для вычисления x_{q0} .

Диаграмма Ньютона для уравнения (8.3) показана на рис. 5.

Она имеет три участка: убывающий, постоянный и возрастающий, причем $\beta_{10} = -2$, $\beta_{20} = \beta_{30} = 0$, $\beta_{40} = \beta_{50} = 1/2$.

Для вычисления последующих членов рядов (8.2) сделаем в (8.1) замену $x_q = \mu^{\beta_{q0}}(x_{q0} + \Delta_q)$. Тогда для Δ_q получим алге-

браическое уравнение того же типа (8.1), однако будем искать лишь корни Δ_q , стремящиеся к нулю при $\mu \rightarrow 0$. Число таких корней равно кратности корня x_{q0} .

Приближенные значения корней уравнения (8.3) таковы: $x_1 = -\mu^{-2} - 2$, $x_{2,3} = 1 \pm \mu^{1/2}$, $x_{4,5} = \pm \mu^{1/2} + \mu$.

СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе обсуждается асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с переменными коэффициентами и малым параметром при производных. Как при отсутствии точек поворота, так и при их наличии построена фундаментальная система решений, которая затем используется для решения краевых задач на собственные значения. Значительное внимание уделено построению локализованных собственных функций.

Обсуждаются также методы асимптотического решения линейных одномерных краевых задач, сингулярно вырождающихся в задачи меньшего порядка. Основное внимание уделено случаю регулярного вырождения Вишика—Люстерника. Обсуждаются также случаи вырождения, не являющегося регулярным.

Ряд вопросов асимптотического интегрирования не нашел отражения в данном пособии. Это относится, в частности, к методам возмущений и асимптотическим разложениям решений обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых регулярно зависят от малого параметра [19, 91, 100, 103, 104, 189], к интегрированию уравнений с быстро меняющимися коэффициентами [6, 14, 136].

2.1 Введение

1°. Основным предметом обсуждения в этой главе является однородная система линейных дифференциальных уравнений

$$\mu \frac{dy}{dx} = A(x, \mu)y, \quad \mu > 0, \quad (1.1)$$

и способы построения асимптотических разложений при $\mu \rightarrow 0$ ее решений. Здесь y — n -мерный вектор, A — квадратная ма-

трица n -го порядка, представляемая в виде

$$A(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(x), \quad \mu \rightarrow 0,$$

с голоморфными в вещественной или комплексной области S коэффициентами [23, 24, 47, 85, 100, 180].

Упомянем также о системе более общего вида [23, 100, 142]

$$\mu^h \frac{dy}{dx} = A(x, \mu)y, \quad h > 1, \quad (1.2)$$

при тех же предположениях о матрице A . Здесь целое число h называется рангом системы.

Во многих работах вместо малого параметра μ вводится большой параметр $\lambda = \mu^{-1}$, и системы (1.1), (1.2) принимают вид

$$\frac{dy}{dx} = A^*(x, \lambda)y, \quad A^* \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{h-k} A_k(x), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Далее большой параметр λ не вводится, а результаты авторов, использующих λ , будут записаны через малый параметр μ .

При рассмотрении систем (1.1), (1.2) возникают следующие задачи

- построение формального асимптотического решения,
- выяснение условий, при которых формальное асимптотическое решение является асимптотическим разложением решения,
- асимптотическое расщепление системы, т.е. приведение ее к нескольким системам меньшего порядка,
- решение краевых задач для систем (1.1), (1.2), в том числе задач на собственные значения.

2°. Формальным асимптотическим решением называется асимптотический ряд, обращающий рассматриваемую систему в тождество. При этом вопрос о том, является ли формальное решение асимптотическим разложением решения, остается открытым.

При определенных предположениях формальное асимптотическое решение системы (1.2) имеет вид [23, 100, 142]

$$y(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) \mu^k \exp \left\{ \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^{h-1} \mu^{k-h} \lambda^{(k)}(x) dx \right\}, \quad (1.3)$$

где $U_k(x)$, $\lambda^{(k)}(x)$ — голоморфные функции x . В частности, формула (1.3) имеет место, если характеристическое уравнение

$$\det(A_0(x) - \lambda E) = 0 \quad (\lambda = \lambda^{(0)}(x)) \quad (1.4)$$

имеет при всех x простые корни. В [142] исследуются случаи, когда формула типа (1.3) сохраняется и для кратных корней. Для этого необходимо, чтобы корни уравнения (1.4) были кратными тождественно по x и чтобы каноническая форма Жордана матрицы $A_0(x)$ не менялась с изменением x . Может потребоваться выполнение и других ограничений на матрицы $A_k(x)$.

Точки $x = x_*$, в которых изменяются кратность корней уравнения (1.4) или структура канонической формы Жордана матрицы $A_0(x)$, называются *точками поворота* или *точками возврата*. В окрестностях этих точек формула (1.3) становится непригодной, ибо некоторые из $U_k(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_*$. При наличии точек поворота задача построения асимптотического решения, равномерно пригодного во всей области S , в настоящее время полного решения не имеет. Некоторые результаты частного характера обсуждаются далее.

2.2 Решение системы (1.1) при отсутствии точек поворота

1°. Рассмотрим систему (1.1) при сделанных в п. 2.1 предположениях относительно матрицы $A(x, \mu)$. Пусть $\lambda(x)$ — простой корень характеристического уравнения (1.4), являющегося уравнением n -ой степени относительно λ . Этому корню соответствует формальное асимптотическое решение системы (1.1)

$$y(x, \mu) \approx \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) \mu^k \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \lambda(x) dx \right\}, \quad \mu > 0. \quad (2.1)$$

Вектор-функции $U_k(x)$ последовательно находятся в результате подстановки (2.1) в (1.1). Рассмотрим подробнее построение первого члена ряда (2.1). Запишем уравнения

$$\begin{aligned} (A_0 - \lambda E)U_0 &= 0, \\ (A_0 - \lambda E)U_1 + A_1 U_0 &= \frac{dU_0}{dx}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

получающиеся в результате приравнивания коэффициентов при μ^0 и при μ^1 . Из первого уравнения

$$U_0(x) = \varphi_0(x)V(x),$$

где $\varphi_0(x)$ — скалярная функция, а $V(x)$ — собственный вектор матрицы A_0 , т.е.

$$(A_0(x) - \lambda(x)E)V = 0.$$

Функция $\varphi_0(x)$ определяется лишь из следующего приближения. Второе уравнение (2.2) рассматриваем как систему линейных неоднородных уравнений относительно компонент вектора U_1 . Определитель этой системы равен нулю, а условие ее совместности имеет вид

$$W^T A_1 U_0 = W^T \frac{dU_0}{dx},$$

где $W(x)$ — собственный вектор матрицы $A_0^T(x)$,

$$(A_0^T(x) - \lambda(x)E)W = 0,$$

а символ T обозначает транспонирование матрицы или вектора. Условие совместности дает дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\varphi_0(x)$

$$\frac{d\varphi_0(x)}{dx} = b_0(x)\varphi_0(x), \quad b_0 = \frac{W^T(A_1 V - dV/dx)}{W^T V},$$

которое интегрируется в квадратурах.

Далее находим

$$U_1(x) = \varphi_1(x)V(x) + U_1^*(x),$$

где $U_1^*(x)$ — частное решение второго уравнения (2.2), а $\varphi_1(x)$ — скалярная функция, определяемая из следующего приближения.

Все функции $\lambda(x)$, $U_k(x)$ голоморфны в S .

2°. Если при всех $x \in S$ все корни $\lambda_p(x)$, $p = 1, \dots, n$ уравнения (1.4) простые, то соотношение (2.1) определяет фундаментальную матрицу $\tilde{Y}(x, \mu)$ формальных асимптотических решений. Матрица $\tilde{Y}(x, \mu)$ состоит из n столбцов (2.1). Существует ли матрица $Y(x, \mu)$ точных решений системы (2.1), для которой

$$Y(x, \mu) \simeq \tilde{Y}(x, \mu), \quad \mu \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

т.е. является ли матрица \tilde{Y} асимптотическим разложением? Соотношение (2.3) подразумевает, что для соответствующих элементов матриц Y и \tilde{Y} при всех $x \in S$ выполнены оценки (1.2.5). Этот вопрос исследовался в работах [23, 180, 182, 194] и других. Решение его зависит в первую очередь от области S .

Если при некотором $x = x_0$ корни $\lambda_p(x_0)$ различны, то существует окрестность точки x_0 , в которой равенство (2.3) имеет место [23]. Для всей же области S такой матрицы Y может не найтись. Рассмотрим это подробнее. Пусть S_* — часть области S , из которой исключены все точки поворота вместе с их окрестностями. Тогда в окрестности любой точки x_* , $x_* \in S_*$, для любого (векторного) решения $y(x, \mu)$ системы (1.1) существует асимптотическое разложение

$$y(x, \mu) \simeq \sum_{p=1}^n C_p(x_*) y^{(p)}(x, \mu), \quad \mu \rightarrow 0,$$

где $y^{(p)}(x, \mu)$ — ряд (2.1), соответствующий корню $\lambda = \lambda_p$ уравнения (1.4), а $C_p(x_*)$ — некоторые постоянные. Важно подчеркнуть, что эти постоянные зависят от выбора точки x_* , в окрестности которой строится асимптотическое разложение. Постоянные C_p называются *множителями Стокса*, а факт их смены при переходе из одной части области S_* в другую — *явлением Стокса* (см. также п. 2.3).

Приведем достаточные условия, при выполнении которых явление Стокса не имеет места. Достаточным для выполнения соотношения (2.3) при отсутствии кратных корней λ_p является то, что разности $\operatorname{Re}(\lambda_p(x) - \lambda_j(x))$ не меняют знака при $x \in S$, $p, j = 1, \dots, n$ [180], т.е. для любой пары корней $\lambda_p(x)$ и $\lambda_j(x)$ выполнено одно из неравенств

$$\operatorname{Re}(\lambda_p(x) - \lambda_j(x)) \geq 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Re}(\lambda_p(x) - \lambda_j(x)) \leq 0, \quad x \in S. \quad (2.4)$$

При этом асимптотика (2.3) является равномерной по x в любой замкнутой области S_1 ($S_1 \subset S$).

В случае, когда S — отрезок вещественной оси $x_1 \leq x \leq x_2$, в работе [194] ограничение на корни $\lambda_p(x)$ удалось заменить ограничением на их интегралы: для любой пары корней $\lambda_p(x)$ и

$\lambda_j(x)$ должно быть выполнено одно из неравенств

$$\operatorname{Re} \int_{x_1}^x (\lambda_p - \lambda_j) dx \geq 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} \int_{x_2}^x (\lambda_p - \lambda_j) dx \geq 0. \quad (2.5)$$

3°. Рассмотрим линейное уравнение n -го порядка

$$\sum_{k=0}^n \mu^k a_k(x, \mu) \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad (2.6)$$

$$a_k(x, \mu) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j a_{kj}(x), \quad \mu \rightarrow 0, \quad a_{n0}(x) \neq 0, \quad x \in S.$$

в предположении, что коэффициенты $a_{kj}(x)$ голоморфны в S . Введением дополнительных неизвестных

$$y_j = \mu^j \frac{d^j y}{dx^j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

уравнение (2.6) приводится к системе (1.1), поэтому все, относящееся к системе (1.1), справедливо и для уравнения (2.6). Характеристическое уравнение (1.4) принимает вид

$$P_0(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^n a_{k0}(x) \lambda^k = 0. \quad (2.7)$$

При отсутствии кратных корней уравнения (2.7) фундаментальная система решений (2.5) дается теми же формулами (2.1) с той лишь разницей, что теперь $y^{(p)}$ и $U_k^{(p)}$ — скалярные функции x .

4°. Рассмотрим линейное уравнение порядка $m+n$

$$\sum_{k=1}^n \mu^k a_{k+m}(x, \mu) \frac{d^{k+m} y}{dx^{k+m}} + \sum_{k=0}^m a_k(x, \mu) \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad (2.8)$$

вырождающееся при $\mu = 0$ в уравнение порядка m

$$\sum_{k=0}^m a_k(x, 0) \frac{d^k y}{dx^k} = 0. \quad (2.9)$$

Относительно коэффициентов $a_k(x, \mu)$ делаем те же предположения (2.6), в том числе считаем, что $a_{m+n,0}(x) \neq 0$, $x \in S$. После умножения всех членов уравнения (2.8) на μ^m это уравнение принимает вид (2.5). Ему соответствует характеристическое уравнение (2.7) вида

$$\sum_{k=0}^n a_{k+m,0}(x) \lambda^{k+m} = 0. \quad (2.10)$$

Это уравнение имеет корень $\lambda \equiv 0$ кратности m . Если $a_{m,0}(x) \neq 0$, $x \in S$ и отличные от нуля корни $\lambda_p(x)$, $p = 1, \dots, n$, уравнения (2.10) различны при всех $x \in S$, то уравнение (2.8) имеет n формальных асимптотических решений вида (2.1) с показателем изменчивости $t = 1$ (см. п. 1.7) и m решений с показателем изменчивости $t = 0$:

$$y^{(q)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k U_k^{(q)}(x), \quad q = n+1, \dots, n+m, \quad \mu \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Здесь $U_0^{(q)}(x)$ — линейно-независимые решения вырожденного уравнения (2.9).

Формальные ряды (2.1), (2.11) будут асимптотическими разложениями точных решений уравнения (2.6) при $\mu \rightarrow 0$ при тех же предположениях (2.4) или (2.5) относительно корней уравнения (2.7) (включая корень $\lambda \equiv 0$).

Частным случаем уравнения (2.8) является встречающееся в задачах механики уравнение

$$\mu^n Ny + Ly = 0, \quad (2.12)$$

где дифференциальные операторы N и L таковы:

$$Ny = \sum_{k=0}^{m+n} a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k}, \quad Ly = \sum_{k=0}^m b_k(x) \frac{d^k y}{dx^k},$$

коэффициенты $a_k(x)$ и $b_k(x)$ предполагаются голоморфными. Характеристическое уравнение (2.10) в этом случае является двухчленным:

$$a_{m+n}(x) \lambda^{m+n} + b_m(x) \lambda^m = 0. \quad (2.13)$$

Как и в (2.6), считаем $a_{m+n}(x) \neq 0$, $x \in S$. Если $b_m(x) \neq 0$, $x \in S$, уравнение (2.12) имеет m решений вида (2.11) и n решений вида (2.1). Случай, когда $b_m(x)$ обращается в нуль в отдельных точках (точки поворота), обсуждается в п. 2.3.

Уравнение Орра—Зоммерфельда, описывающее устойчивость ламинарного потока вязкой жидкости [217, 225, 237], принадлежит к типу (2.12) при $m = n = 2$. К тому же типу относятся и уравнение осесимметричной ($m = 2$, $n = 4$) и циклически симметричной ($m = n = 4$) деформации (а также колебаний и устойчивости) тонких оболочек вращения (см. главу 3, а также [40, 41, 47, 61, 131, 207]).

5°. Частным случаем уравнения (2.8) является уравнение второго порядка

$$\mu^2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \mu p_1(x, \mu) \frac{dy_1}{dx} + q_1(x, \mu) y_1 = 0, \quad (2.14)$$

которое заменой неизвестной функции

$$y_1 = y e^{-\frac{1}{2\mu} \int p_1 dx}$$

преобразуется в уравнение вида

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - q(x, \mu) y = 0. \quad (2.15)$$

Уравнениям (2.14) и (2.15) посвящены многочисленные исследования (см. [21, 23, 24, 100, 103, 104, 107, 111, 180, 182, 186, 188, 197] и др.). К этим уравнениям приводится и ряд задач механики и физики. Асимптотическое решение уравнений (2.14) или (2.15) вида (2.1) принято называть *ВКБ-приближением*, а методы построения таких решений — *методами ВКБ*. Это название связано с фамилиями авторов (Вентцель, Крамерс, Бриллюэн), впервые применивших этот метод в задачах квантовой механики. Позднее название "методы ВКБ" стали применять как эквивалент названия "методы асимптотического интегрирования" и для более широкого класса задач [93, 94].

Приведем асимптотическое решение уравнения (2.15) в случае, когда $q(x, \mu) \equiv q(x)$. Решение имеет вид (2.1), причем

$$\lambda_p^2 - q(x) = 0, \quad p = 1, 2; \quad U_0^{(p)} = (q(x))^{-1/4},$$

$$U_{k+1}^{(p)} = -\frac{2}{\sqrt{\lambda_p}} \int_{x_0}^x U_k^{(p)\prime} \sqrt{\lambda_p} dx, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.16)$$

Из (2.16) ясно, что окрестности точек поворота $x = x_*$ (в которых $q(x_*) = 0$) требуют особого рассмотрения, ибо $U_k^{(p)}(x_*) = \infty$.

6°. Простейшим способом определения неизвестных коэффициентов ряда (2.1) является его подстановка в соответствующие уравнения и последующее приравнивание коэффициентов при различных степенях μ . В [85] предложен другой метод исследования, применимый и к задачам, обсуждаемым в пп. 2.3—2.7. Вместо функции $y(x, \mu)$ ищем функцию $Y(x, \eta_p, \mu)$ переменных x, η_1, \dots, η_n , такую, что

$$y(x, \mu) = Y\left(x, \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \lambda_p(x) dx, \mu\right), \quad p = 1, \dots, n.$$

При $\mu \rightarrow 0$ задача построения $Y(x, \eta_p, \mu)$ является регулярно возмущенной. Этот метод, называемый иногда *методом подвешивания в пространство большей размерности*, близок *методу многих масштабов* [78, 103, 104].

Метод двух масштабов удобен для построения решений уравнений с быстро меняющимися коэффициентами. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dz}{dx} = A(x, \eta)z, \quad \eta = \frac{x}{\mu}, \quad (2.17)$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, z — n -мерный вектор, матрица A голоморфна по обоим аргументам и периодична по η :

$$A(x, \eta + 1) = A(x, \eta).$$

Решение системы (2.17) будем искать в виде

$$z(x, \mu) = u(y, \eta, \mu),$$

где $u(y, \eta, \mu)$ — вспомогательная функция, зависящая от двух аргументов y и η . Эта функция удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial \eta} = A(y, \eta)u, \quad (2.18)$$

решение которого ищем в виде формального ряда по степеням μ :

$$u(y, \eta, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n u_n(y, \eta), \quad (2.19)$$

причем $u(y, \eta + 1) = u(y, \eta)$.

Подстановка (2.19) в (2.18) приводит к последовательности уравнений

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \eta} = Au_k - \frac{\partial u_k}{\partial y}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

Введем обозначение для среднего значения периодической функции F :

$$\langle F \rangle = \int_0^1 F(\eta) d\eta$$

и представим u_k в виде суммы медленно меняющейся функции u_k^0 и быстро меняющейся функции с нулевым средним значением u_k^*

$$u_k(y, \eta) = u_k^0(y) + u_k^*(y, \eta), \quad \langle u_k^*(y, \eta) \rangle = 0. \quad (2.21)$$

Тогда из уравнений (2.20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k^0}{\partial y} &= \langle A \rangle u_k^0 + \langle Au_k^* \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, \\ \frac{\partial u_{k+1}^*}{\partial \eta} &= A(u_k^0 + u_k^*) - \langle A(u_k^0 + u_k^*) \rangle - \frac{\partial u_k^*}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Первое уравнение (2.22) не содержит быстрой переменной η , и при его решении могут быть удовлетворены заданные начальные либо граничные условия.

В частности, в нулевом приближении

$$\frac{du_0^0}{dy} = \langle A \rangle u_0^0, \quad u_0^* = 0, \quad (2.23)$$

что соответствует осреднению коэффициентов системы (2.17).

Второе уравнение (2.22) имеет единственное периодическое по η решение, удовлетворяющее условию (2.21).

В качестве примера рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left(p(x, \eta) \frac{dw}{dx} \right) + q(x, \eta)w = 0, \quad (2.24)$$

где $p(x, \eta+1) = p(x, \eta) > 0$, $q(x, \eta+1) = q(x, \eta)$, и найдем осредненное уравнение в нулевом приближении. Вводя вспомогательные неизвестные функции

$$z_1 = p \frac{dw}{dx}, \quad z_2 = w,$$

приведем уравнение (2.24) к системе двух уравнений первого порядка вида (2.17) с матрицей A , элементы которой суть

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = q, \quad a_{21} = p^{-1}.$$

Проводя, как и в (2.23), осреднение по η и возвращаясь затем к прежней неизвестной функции w , имеем осредненное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left(\langle p^{-1} \rangle^{-1} \frac{dw_0}{dx} \right) + \langle q \rangle w_0 = 0,$$

которое не совпадает с получающимся в результате прямого осреднения коэффициентов уравнения (2.17).

2.3 Построение решений при наличии точек поворота

1°. Рассмотрим систему (1.1) при наличии точек поворота в области интегрирования S . Как уже упоминалось, в окрестностях точек поворота x_* экспоненциальное представление (2.1) становится непригодным, ибо некоторые из функций $U_k^{(p)}(x)$ стремятся к бесконечности при $x \rightarrow x_*$. Однако, в окрестности любой точки x_0 , не являющейся точкой поворота, формулы (2.1) дают асимптотическое разложение фундаментальной системы решений (1.1) [23].

Возможны два способа построения асимптотического разложения фундаментальной системы решений (1.1).

Первый из них заключается в том, что мы отказываемся от описания решений в окрестностях точек поворота и строим решения в некоторой подобласти \tilde{S} области S ($\tilde{S} \subset S$), не содержащей точек поворота [23, 180, 186, 188]. Приведем некоторые

подробности. Асимптотическое разложение любого решения $y(x, \mu)$ системы (1.1) можно представить в виде линейной комбинации формальных рядов (2.1)

$$y(x, \mu) \approx \sum_{p=1}^n C_p(\mu) y^{(p)}(x, \mu), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Трудность заключается в том, что множители Стокса $C_p(\mu)$ зависят не только от выбранного решения $y(x, \mu)$, но и от подобласти изменения x . Линии, на которых множители Стокса скачком изменяются, называются *линиями Стокса*. Линии Стокса, выходящие из точки поворота $x = x_*$, определяются соотношением [180]

$$\operatorname{Re} \int_{x_*}^x (\lambda_p(x) - \lambda_j(x)) dx = 0, \quad \lambda_p(x_*) = \lambda_j(x_*),$$

где $\lambda_p(x)$ — корни уравнения (1.4).

Например, для уравнения Эйри $\mu^2 y'' - xy = 0$ линиями Стокса будут лучи $\varphi = 2k\pi/3$, $k = 0, 1, 2$, выходящие из начала координат. В справочниках [49, 139, 198] можно найти многочисленные примеры зависимости множителей Стокса S_p от сектора, в котором изменяется аргумент x асимптотических разложений вида (3.1) для специальных функций.

В общем случае задача построения линий Стокса и определение множителей Стокса не решена. Достаточно подробно исследованы лишь уравнения второго порядка (2.15) [73, 180, 186, 188]. Для уравнений более высокого порядка получены лишь частные результаты (см. [23, 71, 72, 157, 180, 234] и др.).

2°. Более подробно остановимся на втором способе построения асимптотических разложений — способе эталонных функций.

Первым шагом на пути асимптотического интегрирования системы (1.1) является ее расщепление, т.е. приведение к нескольким системам меньшего, чем n , порядка.

Пусть корни $\lambda_k(x)$ характеристического уравнения (1.4) образуют две изолированные группы $\lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x)$ и $\lambda_{p+1}(x), \dots, \lambda_{p+q}(x)$ ($p+q = n$). Это означает, что

$$\lambda_i(x) \neq \lambda_{p+j}(x), \quad x \in S, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q.$$

Тогда (см. [23, 182]) существует линейная невырожденная замена неизвестных функций

$$y(x, \mu) \simeq \tilde{P}(x, \mu)z(x, \mu), \quad \tilde{P}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\mu^k, \quad \det P_0(x) \neq 0, \quad (3.3)$$

такая, что вектор-функция z удовлетворяет уравнению

$$\mu \frac{dz}{dx} = B(x, \mu)z$$

того же вида (1.1), но с блочно-диагональной матрицей B :

$$B(x, \mu) = \begin{pmatrix} B^{(1)}(x, \mu) & 0 \\ 0 & B^{(2)}(x, \mu) \end{pmatrix}$$

$$B^{(i)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(i)}(x)\mu^k. \quad (3.4)$$

При этом $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ — квадратные матрицы порядков $p \times p$ и $q \times q$ соответственно, собственные значения матриц $B_0^{(1)}(x)$ и $B_0^{(2)}(x)$ суть $\lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x)$ и $\lambda_{p+1}(x), \dots, \lambda_{p+q}(x)$, элементы матриц $P_k(x)$, $B_k^{(i)}(x)$ голоморфны в S , матрица $P_0(x)$ невырождена в S .

В (3.3), (3.4) разложения \tilde{P} , $B^{(i)}$ по μ — это формальные в общем случае расходящиеся ряды. В [23, 182] показано, что при некоторых ограничениях существует аналитическая замена переменных $y = P(x, \mu)z$, приводящая матрицу A к блочно-диагональной, и такая, что ряд $\tilde{P}(x, \mu)$ является асимптотическим разложением $P(x, \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$.

Если все корни $\lambda_j(x)$ характеристического уравнения (1.4) разные, то проводя несколько раз расщепление системы, можно привести ее к n уравнениям первого порядка

$$\mu \frac{dz_j}{dx} = b^{(j)}(x, \mu)z_j, \quad b^{(j)} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)}(x)\mu^k, \quad b_0^{(j)}(x) = \lambda_j(x),$$

$$j = 1, \dots, n,$$

которые интегрируются в квадратурах. Фактически это другой способ получения ряда (2.1).

3°. Пусть теперь рассматривается область S , содержащая единственную точку поворота x_* . Путем расщепления системы (1.1) можно привести к виду, когда для одной из подсистем уравнение (1.4) при $x = x_*$ будет иметь единственный корень кратности p . Не нарушая общности, будем считать, что $x_* = 0$ и уравнение (1.4)

$$\det(A_0(0) - \lambda E) = 0$$

имеет нулевой корень кратности p . Случай $\lambda(0) \neq 0$ приводится к рассматриваемому подходящей заменой неизвестной функции

$$y_1 = y \exp\left(\mu^{-1} \int_0^x \varphi(x) dx\right), \quad \varphi(0) = -\lambda(0).$$

Асимптотическое интегрирование полученной системы обосновывается в [23]. Далее будем считать, что система приведена к одному уравнению порядка n (считаем $p = n$) вида (2.6), характеристическое уравнение (2.7) которой при $x = 0$ имеет нулевой корень кратности n . Способ эталонных функций заключается в том, что наряду с уравнением (2.6) вводится в рассмотрение более простое эталонное уравнение. При этом ставится требование, чтобы асимптотические решения уравнения (2.6) могли быть выражены через решения эталонного уравнения (и быть может) их производные и были голоморфными по x в S . Исследованию эталонных уравнений посвящены работы [4, 23, 74, 154, 157, 180, 216, 224, 230, 234, 236, 237] и др. Вопрос о выборе наиболее простого эталонного уравнения в общем случае не решен. Порядок эталонного уравнения может быть равен или меньше n . Последний случай может иметь место, в частности, для уравнения вида (2.8) при $a_m(0) = 0$. При этом только часть решений уравнения (2.8) выражается через решения эталонного уравнения (см. далее).

Перейдем к рассмотрению частных случаев.

4°. Рассмотрим уравнение второго порядка (2.15)

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - q(x, \mu) y = 0, \quad q(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) \mu^k. \quad (3.5)$$

Предположим, что $q_k(x)$ голоморфны в области S , содержащей точку $x = 0$. Пусть $q_0(0) = 0$ и в области S нет других нулей

функции $q_0(x)$. Если $q'_0(0) \neq 0$, точку поворота $x = 0$ называем *простой*. Пусть $q'_0 > 0$. В качестве эталонного уравнения используем уравнение Эйри (1.6.1)

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} - \eta v = 0.$$

Асимптотическое разложение решений уравнения (3.5) можно представить в виде [215]

$$y(x, \mu) = a^{(0)}(x, \mu)v[\eta(x, \mu)] + \mu^{1/3}a^{(1)}(x, \mu)\frac{dv}{d\eta}, \quad (3.6)$$

где

$$\eta(x, \mu) = \mu^{-2/3}\xi(x), \quad \xi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{q_0(x)} dx\right)^{2/3},$$

$$a^{(j)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)}(x)\mu^k, \quad j = 0, 1. \quad (3.7)$$

Функция $\xi(x)$ и коэффициенты $a_k^{(j)}(x)$ определяются в результате подстановки в (3.5) и приравнивания коэффициентов при μ^k и $\mu^k(dv/d\eta)$ и оказываются голоморфными в S , включая точку $x = 0$. Первые коэффициенты в (3.7) равны

$$a_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\xi'}} \cos \nu, \quad a_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\xi\xi'}} \sin \nu, \quad \nu = \int_0^x \frac{q_1 dx}{2\xi'\sqrt{\xi}}.$$

Все коэффициенты $a_k^{(j)}(x)$ выражаются через $q_i(x)$ в виде квадратур.

Разложение (3.6) равномерно пригодно во всей области S , включая окрестность точки $x = 0$. Если $|\eta| \gg 1$, можно воспользоваться асимптотическими разложениями функций Эйри (1.6.7), и выразить (3.6) через функции (2.1). Пусть, например, область S содержит отрезок $-1 \leq x \leq 1$ вещественной оси, функция $q(x, \mu)$ вещественна при вещественных x и $q_1(x) \equiv 0$. Рассмотрим решение уравнения (3.5), экспоненциально убывающее при $x > 0$. Возьмем в (3.6) $v(\eta) = Ai(\eta)$ и запишем первые члены асимптотического ряда при $\mu \rightarrow 0$

$$y(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\xi'}} Ai(\eta) (1 + O(\mu)) + Ai'(\eta) \cdot O(\mu^{2/3}),$$

$$y(x, \mu) = \frac{\mu^{1/6}}{\sqrt{4\pi q_0}} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_0^x \sqrt{q_0(x)} dx\right) (1 + O(\mu)), \quad x > 0, \quad (3.8)$$

$$y(x, \mu) = \frac{\mu^{1/6}}{\sqrt{-\pi q_0}} \left[\cos\left(\frac{1}{\mu} \int_0^x \sqrt{-q_0(x)} dx + \frac{\pi}{4}\right) + O(\mu) \right], \quad x < 0.$$

Первая формула (3.8) равномерно пригодна при $-1 \leq x \leq 1$, а две следующие — лишь при $x > 0$ и $x < 0$ соответственно.

В работе [193] вместо (3.6) используется представление

$$y(x, \mu) = a(x, \mu)v[\eta(x, \mu)],$$

где a и η — ряды по степеням $\mu^{1/3}$.

Асимптотическое разложение по дробным степеням μ находит применение и при интегрировании уравнений с частными производными в случае двух независимых переменных (см. (4.2.5), а также [9]).

В работах [47, 103, 211, 216] исследуется случай двух простых точек поворота. Одной из возможностей построения решений является использование эталонного уравнения параболического цилиндра

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} + (u - \eta^2)v = 0. \quad (3.9)$$

Другая возможность заключается в раздельном построении решений в окрестностях точек поворота и последующем их сшивании [47].

В работах [217, 225, 226, 236, 237] исследуется уравнение четвертого порядка ($m = n = 2$) вида (2.12) при $a_4 = 1$, $b_2(0) = 0$, $b_2'(0) \neq 0$. Характеристическое уравнение (2.13) $\lambda^4 + b_2(x)\lambda^2 = 0$ имеет при $x = 0$ корень $\lambda = 0$ четвертой кратности.

5°. Подробнее остановимся на интегрировании уравнения шестого порядка ($m = 2$, $n = 4$) вида (2.12), описывающего осесимметричные колебания оболочек вращения. В этом уравнении (см. п. 3.5, а также [47])

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad \mu > 0, \quad b_2 = \frac{1}{R_2^2(x)} - \Lambda, \quad a_6 = 1,$$

где h — толщина оболочки, которая предполагается малой по сравнению с характерным размером R , ν — коэффициент Пуассона, Λ — параметр, пропорциональный квадрату частоты свободных колебаний (3.1.11), $R_2(x)$ — радиус кривизны оболочки,

равный длине нормали к оболочке от точки ее поверхности до оси вращения, x — длина дуги образующей, $y(x)$ — нормальный прогиб.

Для цилиндрической и сферической оболочек $R_2 = \text{const}$ и точки поворота отсутствуют, а уравнение (2.12) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами [151]. Для оболочек другой формы в частотном интервале $\Lambda^{(1)} \leq \Lambda \leq \Lambda^{(2)}$, где

$$\Lambda^{(1)} = \min_{x \in S} \{R_2^{-2}(x)\}, \quad \Lambda^{(2)} = \max_{x \in S} \{R_2^{-2}(x)\}, \quad S = \{x : x_1 \leq x \leq x_2\}, \quad (3.10)$$

появляются точки поворота, ибо найдутся значения x_* , при которых $b_2(x_*) = 0$, а уравнение (2.13) будет иметь корень $\lambda = 0$ шестой кратности.

Рассмотрим сначала асимптотическое разложение решений (2.12) при $b_2'(x_*) \neq 0$ в малой окрестности точки поворота x_* . Впервые эти разложения были построены в [4] для конической оболочки с использованием эталонного уравнения

$$-\mu^4 \left(\frac{d^6 v}{d\eta^6} + \gamma_0 \frac{d^5 v}{d\eta^5} + \gamma_1 \frac{d^4 v}{d\eta^4} \right) + \eta \frac{d^2 v}{d\eta^2} + (2 + \gamma_0 \eta) \frac{dv}{d\eta} + (\gamma_2 + \gamma_1 \eta) v = 0, \quad (3.11)$$

где постоянные γ_i зависят от формы оболочки и частоты колебаний. Позднее было показано [150], что для произвольной оболочки вращения в (3.11) можно считать $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Наконец, в [154] было введено пять последовательностей эталонных функций $v_k^{(i)}(\eta)$, не зависящих от параметров оболочки и определяемых соотношениями

$$\frac{d^5 v_k^{(i)}}{d\eta^5} - \eta \frac{dv_k^{(i)}}{d\eta} + (k-1)v_k^{(i)} = \delta_{i5} \delta_{k0} \frac{2\eta^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$v_k^{(i)} = \frac{dv_{k-1}^{(i)}}{d\eta}, \quad i = \overline{1, 5}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$).

6°. В окрестности $x = x_*$ пять интегралов уравнения (2.12) имеют показатель изменчивости $t = 4/5$ и их асимптотические

разложения записываются в виде (см. [47])

$$y^{(i)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k(x) v_k^{(i)}(\eta) + \varepsilon \delta_{i5} y^*(x, \mu), \quad i = 1, \dots, 5, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon = \mu^{4/5} > 0, \quad \eta = \varepsilon^{-1} \xi(x), \quad \xi = \left(\frac{5}{4} \int_{x_*}^x b_2^{1/4} dx \right)^{4/5},$$

$$C_0 = B^{-1/2} (\xi')^{-3/2}.$$

Здесь функции $\xi(x)$, $C_k(x)$, $y^*(x, \mu)$ голоморфны и вещественны, $B(x)$ — расстояние до оси вращения от точки на поверхности оболочки.

Для построения шестого интеграла рассмотрим уравнение (2.12) при $\mu = 0$:

$$L(y_0) = b_2(x) \frac{d^2 y_0}{dx^2} + b_1(x) \frac{dy_0}{dx} + b_0(x) y_0 = 0.$$

Уравнение имеет регулярную особую точку при $x = x_*$, причем $b_1(x_*) = 2b_2'(x_*)$. Поэтому характеристические показатели в этой точке $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ различаются на целое число и одно из его решений $y_0^{(6)}(x)$ регулярно при $x = x_*$, а другое $y_5^{(0)}(x)$ имеет особенность вида

$$y_0^{(5)} = \frac{1}{x - x_*} + \sum_{k=0}^{\infty} y_{5k}(x - x_*)^k + \gamma y_0^{(6)}(x) \ln(x - x_*).$$

Регулярному решению $y_0^{(6)}(x)$ соответствует асимптотическое при $\mu \neq 0$, $\mu \rightarrow 0$ решение уравнения (2.12)

$$y^{(6)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} y_k^{(6)}(x). \quad (3.13)$$

Вернемся к разложениям (3.12). Они являются асимптотическими разложениями при $\varepsilon \eta \rightarrow 0$, т.е. при $x \rightarrow x_*$. Пусть теперь $x - x_* \sim 1$, тогда $\eta \sim \varepsilon^{-1}$. Рассмотрение асимптотики функций $v_k^{(i)}(\eta)$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$ показывает [47], что для $i = 1, 2, 3$ ряды (3.12) будут асимптотическими при всех $x \in S$. Что касается $i = 4, 5$, то при $x - x_* \sim 1$ ряды (3.12) перестают быть асимптотическими,

ибо все члены этих рядов имеют один порядок при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для построения асимптотического разложения этих интегралов во всей области S приходится решать сложную задачу о сшивании асимптотик (3.12) с более простыми асимптотиками вида (2.1) (3.13), пригодными при $x_1 \leq x < x_*$ и $x_* < x \leq x_2$. В настоящее время задача о построении равномерно пригодного во всей области $x_1 \leq x \leq x_2$ асимптотического разложения решений уравнения (2.12) не решена.

Остановимся коротко на других работах. В [47, 159] рассмотрены неосесимметричные колебания оболочки вращения. В отличие от осесимметричных колебаний здесь $m = n = 4$ в (2.12) и при тех же предположениях имеют место разложения (3.12) однако число решений вида (3.13) возрастает до трех.

В [157] приводится асимптотическое интегрирование системы (2.12) с произвольными m и n в предположении, что $b_m(x) = b_{m-1}(0)$ отлично от целого числа и нуля. В [156] для осесимметричных колебаний оболочки вращения ($m = 2, n = 4$) рассмотрена двойная точка поворота $b_2(0) = b_2'(0) = 0, b_2''(0) \neq 0$. В [183] проанализированы осесимметричные колебания оболочки вращения при наличии на промежутке интегрирования двух простых точек поворота.

2.4. Краевые задачи. Задача Штурма—Лиувилля

1°. Пусть областью интегрирования S является отрезок $[x_1, x_2]$ вещественной оси. Рассмотрим краевую задачу, состоящую из уравнения (2.6) и граничных условий

$$\frac{d^k y}{dx^k} = q_k^{(j)} \quad \text{при } x = x_j, \quad k = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, 2, \quad n_1 + n_2 = n. \quad (4.1)$$

Относительно коэффициентов $a_k(x, \mu)$ в (2.6) будем дополнительно предполагать их вещественность.

2°. Рассмотрим сначала возможные варианты поведения интегралов уравнения (2.6) в зависимости от корней $\lambda_p(x)$ уравнения (2.7). В силу (2.1) в окрестности любой точки x , не являющейся точкой поворота, интеграл экспоненциально возрастает при $\operatorname{Re} \lambda_p(x) > 0$, убывает при $\operatorname{Re} \lambda_p(x) < 0$, осциллирует при

$\operatorname{Re} \lambda_p(x) = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_p(x) \neq 0$. Если $\lambda_p(x) \equiv 0$, что имеет место для уравнений (2.8), (2.12), интеграл (2.11) — медленно меняющийся. Если выполнены условия

$$\operatorname{Re} \lambda_p(x_1) < 0, \quad \operatorname{Re} \int_{x_1}^x \lambda_p(x) dx < 0, \quad x_1 < x \leq x_2,$$

интеграл будем называть *интегралом пограничного слоя* или *интегралом краевого эффекта* вблизи левого края $x = x_1$. Этот интеграл экспоненциально убывает при удалении от края $x = x_1$ и остается экспоненциально малым при всех x , $x > x_1$. При решении краевой задачи с погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$, $c > 0$, значение этого интеграла на краю $x = x_2$ можно считать равным нулю. Аналогично вводится интеграл пограничного слоя на правом краю $x = x_2$. Если при всех x имеем $\operatorname{Re} \lambda_p(x) = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_p(x) \neq 0$, интеграл называем *осциллирующим*. Могут существовать интегралы, не принадлежащие ни к одному из названных типов. Отметим среди них интегралы, осциллирующие на части S_0 промежутка S . При сделанных предположениях границами S_0 могут быть лишь точки поворота или крайние точки x_1, x_2 .

3°. Рассмотрим сначала задачу Штурма—Лиувилля с малым параметром μ и искомым спектральным параметром Λ

$$\mu^2 \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + p(x, \Lambda) y = 0,$$

$$y(x_1) = y(x_2) = 0, \quad r(x) > 0, \quad x \in S. \quad (4.2)$$

Требуется найти асимптотику собственных функций $y(x)$ и собственных значений Λ при $\mu \rightarrow 0$. Традиционная постановка задачи Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda p_1(x) - p_2(x)) y = 0$$

сводится к (4.2), если разыскивать асимптотику n -го собственного значения $\lambda_n \sim n^2$ при $n \rightarrow \infty$. Для этого вводим фиксированное $\mu \sim n^{-1}$ и полагаем $\Lambda = \mu^2 \lambda$. Решение задачи (4.2) содержится в [53, 111, 180] и др. Приведем основные результаты.

Если Λ таково, что $p(x, \Lambda) < 0$ при всех $x \in S$, то задача (4.2) не имеет нетривиальных решений, т.е. Λ не является собственным значением.

Пусть теперь $p(x, \Lambda) > 0$ при всех $x \in S$. Тогда уравнение (4.2) имеет два осциллирующих интеграла. Их вещественная линейная комбинация, обращающаяся в нуль при $x = x_1$, имеет разложение

$$y(x, \mu) = U \cos \varphi + V \sin \varphi,$$

$$U(x, \mu) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k+1}(x) \mu^{2k+1}, \quad V(x, \mu) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k}(x) \mu^{2k},$$

$$\varphi(x, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_{x_1}^x \sqrt{\frac{p}{r}} dx, \quad a_0 = (pr)^{-1/4},$$

$$a_{k+1} = \frac{a_0}{2} \int_{x_1}^x a_0 (ra'_k)' dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Условие $y(x_2) = 0$ дает уравнение для определения Λ

$$\varphi_2(\Lambda) \equiv \varphi(x_2, \mu) = n\pi - \arctg \frac{U(x_2, \mu)}{V(x_2, \mu)}, \quad n - \text{целое.} \quad (4.3)$$

Второе слагаемое в правой части (4.3) имеет порядок μ и в первом приближении может быть отброшено. В силу оценки $\partial \varphi_2 / \partial \Lambda \sim \mu^{-1}$ расстояние между соседними корнями уравнения (4.3) имеет порядок μ .

Собственные функции осциллируют на всем интервале (x_1, x_2) (рис. 6).

4°. Пусть $p(x_1, \Lambda) = 0$, $p'_x(x_1, \Lambda) > 0$, $p(x, \Lambda) > 0$ ($x > x_1$), т.е. имеется простая точка поворота $x_* = x_1$. Воспользовавшись асимптотическими представлениями (3.6), (3.8), приходим к уравнению для определения Λ

$$\varphi_2(\Lambda) = \pi(n - 1/12) + O(\mu), \quad (4.4)$$

где φ_2 то же, что и в (4.3).

Пусть теперь простая точка поворота x_* расположена внутри промежутка $x_1 < x_* < x_2$, причем $p'_x(x_*, \Lambda) > 0$, $p > 0$ ($x > x_*$), $p < 0$ ($x < x_*$).

Решения уравнения (4.2) осциллируют при $x > x_*$ и экспоненциально растут или убывают при $x < x_*$. В качестве эталонной

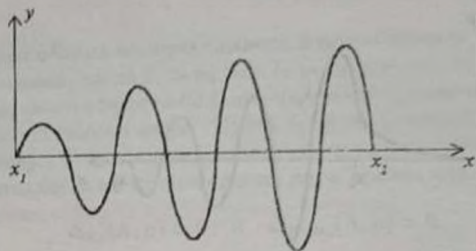


Рис. 6.

функции в (3.6) возьмем функцию $Ai(\eta)$, дающую решение, экспоненциально убывающее вместе с уменьшением x при $x < x_*$. Игнорируя с погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$ граничное условие при $x = x_1$ и удовлетворяя условию при $x = x_2$, получаем уравнение для определения Λ в виде $Ai(\eta(x_2)) = 0$, откуда в силу (3.7) находим

$$\varphi_2(\Lambda) = \frac{2}{3} |\eta_n|^{3/2} + O(\mu), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \varphi_2(\Lambda) = \frac{1}{\mu} \int_{x_*}^{x_2} \sqrt{\frac{p}{r}} dx, \quad (4.5)$$

где η_n — n -й корень функции $Ai(\eta)$. Пользуясь асимптотической формулой (1.6.7), при $n \gg 1$, уравнение (4.5) запишем в виде

$$\varphi_2(\Lambda) = \pi(n - 1/4) + O(\mu), \quad (4.6)$$

удобном для сравнения с уравнениями (4.3), (4.4). Даже при небольших n уравнение (4.6) дает приемлемую точность. Приведем первые значения $(2/3)|\eta_n|^{3/2}$ и (в скобках) соответствующие значения $\pi(n - 1/4)$: 2.383 (2.356), 5.510 (5.498), 8.647 (8.639). Иллюстративный пример см. в п. 2.4.9.

Собственные функции осциллируют при $x_* < x \leq x_2$ и затухают при приближении к краю $x = x_1$ (рис. 7).

В работах [53, 58, 85, 111, 180, 188] рассмотрены и другие случаи, возникающие при асимптотическом решении задачи (4.2). Случай двух точек поворота, между которыми $p > 0$ и решения уравнения (4.2) осциллируют, рассмотрен в следующем п. 2.5.

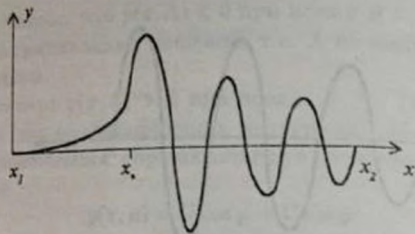


Рис. 7.

5°. Перейдем к рассмотрению краевых задач на собственные значения при $n > 2$. Для системы (1.1) введем граничные условия

$$B^{(j)}y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_j, \quad j = 1, 2, \quad (4.7)$$

где $B^{(j)}$ — прямоугольные матрицы размером $n \times n_j$. Для уравнения (2.6) возьмем однородные ($q_k^{(j)} = 0$) условия (4.1). Коэффициенты системы (1.1) и уравнения (2.6) будем предполагать зависящими от параметра Λ , т.е. $A_k = A_k(x, \Lambda)$, $a_k = a_k(x, \Lambda)$. Краевые задачи для уравнений (2.8), (2, 12), вырождающихся при $\mu = 0$ в уравнения меньшего порядка, рассмотрены в пп. 2.6, 2.7.

Пусть построены асимптотические разложения при $\mu \rightarrow 0$ для n линейно-независимых интегралов уравнения (1.1). Тогда для определения Λ приходим к уравнению

$$\Delta_n(\Lambda, \mu) = 0 \quad (4.8)$$

в виде равенства нулю определителя порядка n , получающегося при подстановке в условия (4.7) или (4.1) линейной комбинации интегралов. Исследование уравнения (4.8) распадается на ряд частных случаев в зависимости от свойств корней уравнения (1.4).

Пусть сначала точки поворота отсутствуют, а уравнение (1.1) имеет l_1 и l_2 интегралов краевого эффекта вблизи левого и правого концов промежутка $[x_1, x_2]$ соответственно и l_0 осциллирующих интегралов ($l_0 + l_1 + l_2 = n$).

Авторам обзора не приходилось в приложениях сталкиваться со случаями, когда $l_1 > n_1$ или $l_2 > n_2$, т.е. когда число интегралов краевого эффекта больше, чем число граничных условий на соответствующем крае. Пусть $l_1 = n_1$ (случай $l_2 = n_2$ ему аналогичен). Тогда с погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$ уравнение (4.8) распадается на произведение двух уравнений

$$\Delta_{n_1}(\Lambda, \mu) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{n-n_2}(\Lambda, \mu) = 0. \quad (4.9)$$

Первое из них получается в результате подстановки линейной комбинации интегралов краевого эффекта вблизи края $x = x_1$ в граничные условия (4.1) на этом крае. Если уравнение $\Delta_{n_1} = 0$ имеет решение, ему соответствует собственная функция, экспоненциально затухающая при удалении от края $x = x_1$. Собственная функция, соответствующая корню уравнения $\Delta_{n-n_2} = 0$, при $l_0 \neq 0$ может содержать осциллирующую компоненту. В п. 3.2 рассмотрен пример, в котором $l_1 = n_1$.

6°. Пусть уравнение (1.4) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm ip(x, \Lambda)$ и $n_1 = l_1 + 1$, $n_2 = l_2 + 1$. Тогда уравнение (4.8) можно привести к виду

$$D_1(\Lambda, \mu) \cos \varphi + D_2(\Lambda, \mu) \sin \varphi = 0, \\ \varphi = \varphi(\Lambda, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_{x_1}^{x_2} p(x, \Lambda) dx, \quad (4.10)$$

где D_1 и D_2 — регулярные функции μ (см. также [47]). Уравнение (4.10) определяет серию собственных значений, расстояния между которыми имеют порядок μ , а соответствующие собственные функции содержат осциллирующую компоненту. Уравнение (4.10) подобно уравнению (4.3) и отличается от уравнений (4.9), корни которых (если они существуют) регулярно зависят от μ :

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1 + \dots, \quad \Delta_{n_2}(\Lambda_0, 0) = 0. \quad (4.11)$$

По отношению к корням уравнения (4.10) разложение (4.11) неприменимо.

7°. Пусть теперь система (1.1) имеет одну простую точку поворота $x = x_*(\Lambda)$, такую, что при $x > x_*$ уравнение (1.4) имеет

пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm ip(x, \Lambda)$, а при $x < x_*$ будет $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Кроме того, уравнение (1.4) имеет $l_1 = n_1 - 1$ корней с $\text{Re } \lambda < 0$ и $l_2 = n_2 - 1$ корней с $\text{Re } \lambda > 0$. При этих предположениях уравнение (4.8) распадается на два уравнения, первое из которых $\Delta_{n_1} = 0$ совпадает с уравнением (4.9). Обратимся ко второму уравнению (4.9). Оно зависит от граничных условий только на крае $x = x_2$ и с учетом преобразования (3.3) приводится к виду

$$D(\Lambda, \mu) Ai(\eta(x_2)) + \mu D^{(1)}(\Lambda, \mu) \frac{d}{dx} Ai(\eta(x_2)) = 0, \quad (4.12)$$

где в силу (3.7)

$$-\eta(x_2) = \left(\frac{3}{2\mu} \int_{x_*}^{x_2} p(x) dx \right)^{2/3} \equiv \left(\frac{3}{2} \varphi_2(\Lambda) \right)^{2/3}. \quad (4.13)$$

Если $|\eta(x_2)| \gg 1$, то, используя асимптотическую формулу (1.6.7), уравнение (4.12) приводим к виду (4.10) при $\varphi = \varphi_2(\Lambda)$ (см. (4.5)). Последнее уравнение, как и (4.10), имеет серию корней Λ , расстояния между которыми имеют порядок μ и которым соответствуют осциллирующие при $x_* < x \leq x_2$ собственные функции.

При $x_2 - x_* \sim \mu^{2/3}$ будет $\eta(x_2) \sim 1$ и при $D(\Lambda, \mu) \neq 0$ уравнение (4.12) принимает вид

$$Ai[\eta(x_2)] + \mu^{1/3} D^*(\Lambda, \mu) Ai'[\eta(x_2)] = 0. \quad (4.14)$$

С погрешностью порядка $\mu^{1/3}$ это уравнение преобразуется в уравнение вида (4.5).

8°. Одномерные задачи о свободных колебаниях и устойчивости оболочек в пп. 3.2, 3.3 иллюстрируют сказанное. Рассмотрим задачу об определении частот ω собственных колебаний балки переменной толщины с заземленными концами. Имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - q(x) \omega^2 y &= 0, \\ y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) &= 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$r(x) = EI(x) > 0, \quad q(x) = \rho S(x) > 0,$$

где $y(x)$ — прогиб, $r(x)$ — жесткость балки на изгиб, E — модуль Юнга, I — момент инерции сечения, $q(x)$ — линейная плотность материала, ρ — его поверхностная плотность, S — площадь поперечного сечения, l — длина балки.

Положим $\omega^2 = \mu^{-4}$. Тогда уравнение (4.15) примет вид (2.12)

$$\mu^4 \frac{d^2}{dx^2} \left(r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - q(x)y = 0. \quad (4.16)$$

Спектральный параметр Λ не вводим, считая искомыми значения малого параметра μ , при которых уравнение (4.16) имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям (4.15). Характеристическое уравнение (2.13) имеет вид $r(x)\lambda^4 - q(x) = 0$, поэтому выполнены предположения, при которых получено уравнение (4.10). В рассматриваемом случае это уравнение принимает вид

$$\cos \left\{ \frac{1}{\mu} \int_0^l \left(\frac{q}{r} \right)^{1/4} dx \right\} = O(\mu). \quad (4.17)$$

Отсюда находим

$$\mu_n = \frac{1}{\pi(n+1/2)} \int_0^l \left(\frac{q}{r} \right)^{1/4} dx + O(\mu_n^3), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.18)$$

или

$$\omega_n = \pi^2(n+1/2)^2 \left(\int_0^l \left(\frac{q}{r} \right)^{1/4} dx \right)^{-2} + O(1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

Точность формул (4.18), (4.19) повышается с ростом n . Применение формулы (4.19) для балки постоянного сечения ($p, q = \text{const}$) дает при $n = 1$ погрешность 0.004. Эта погрешность связана с тем, что при выводе формул (4.17), (4.10) мы пренебрегали взаимным влиянием краевых эффектов, т.е. величиной $e^{-c/\mu}$ по сравнению с единицей (для балки $c = l(q/r)^{1/4}$).

9°. В качестве примера, иллюстрирующего появление точек поворота, рассмотрим колебания круглой мембраны с большим

числом m волн в окружном направлении

$$T \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) - \frac{m^2 w}{r^2} \right) + \rho \omega^2 w = 0, \quad w(R) = 0, \quad (4.20)$$

где $w(r) \cos m\varphi$ — прогиб мембраны, T — натяжение, ρ — поверхностная плотность материала мембраны, ω — частота колебаний, R — радиус мембраны. Точное решение задачи выражается через нули функции Бесселя

$$\omega_{mn} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \alpha_{mn}, \quad J_m(\alpha_{mn}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Рассмотрим асимптотическое решение при $m \rightarrow \infty$. После замены

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad w(x) = yx^{-1/2}, \quad \omega = \frac{m}{R} \sqrt{\frac{T\Lambda}{\rho}}, \quad r = Rx \quad (4.22)$$

уравнение (4.20) принимает вид (4.2):

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x, \Lambda) y = 0, \quad p = \Lambda - \frac{1 - \mu^2/4}{x^2}, \quad y(1) = 0. \quad (4.23)$$

Наличие особой точки при $x = 0$ не препятствует асимптотическому интегрированию уравнения (4.23), ибо мы получаем решение, экспоненциально убывающее с уменьшением x . Слагаемым $\mu^2/4$ в выражении для p пренебрегаем. При $\Lambda \leq 1$ крайняя задача (4.23) ненулевых решений не имеет. Пусть $\Lambda > 1$. Тогда точка поворота $x_* = \Lambda^{-1/2}$ попадает в область интегрирования $0 \leq x \leq 1$, и мы можем воспользоваться формулой (4.5). Вычисляя приближенно φ_2 в (4.5) в предположении, что точка x_* близка к 1, находим

$$\Lambda_{mn} = 1 + \left(\frac{2}{m} \right)^{2/3} |\eta_n| + O\left(\frac{1}{m} \right),$$

где η_n — n -й корень $Ai(\eta) = 0$. Сравнение формул (4.21) и (4.24) дает

$$\alpha_{mn} = m \Lambda_{mn}^{1/2}. \quad (4.24)$$

В [198] дано асимптотическое разложение α_{mn} по отрицательным степеням $m^{1/3}$, первые два члена которого совпадают с (4.24).

В п. 4.3 представлено обобщение этой задачи для мембраны, занимающей произвольную выпуклую область.

2.5. Локализованные решения обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. В п. 2.4 отмечены случаи (см. (4.9), (4.12)), когда собственная функция экспоненциально затухает при приближении к одному из краев промежутка $[x_1, x_2]$, а уравнение для определения собственного значения Λ не зависит (с погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$) от граничных условий на этом крае. Здесь рассматриваем случаи, когда система (1.1) или уравнение (2.6) имеет решение, осциллирующее при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$ ($x_1 < x_*^{(1)} < x_*^{(2)} < x_2$) и экспоненциально затухающее при приближении к краям x_1 и x_2 . С погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$ можно считать, что это решение удовлетворяет любым однородным граничным условиям при $x = x_1$ и $x = x_2$. Далее это решение будем называть локализованным. Считаем, что коэффициенты системы (1.1) зависят от параметра Λ , и ищем собственные значения Λ , при которых существует локализованное решение.

К обсуждаемым нами случаям сводятся некоторые задачи из квантовой механики для одномерного уравнения Шредингера, задачи по теории колебаний, динамики и устойчивости оболочек [47, 81, 180, 188, 211, 216, 234] и др. В [180] содержится достаточно полное исследование. Мы проанализируем простейшие случаи.

2°. Рассмотрим сначала уравнение второго порядка (4.2), по-прежнему считая $r(x) > 0$ ($x \in S$). Пусть $p(x_*^{(k)}) = 0$, $p'(x_*^{(k)}) \neq 0$, причем $p(x) > 0$ при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$. Условие существования локализованного решения имеет вид

$$\frac{1}{\mu} \int_{x_*^{(1)}}^{x_*^{(2)}} f(x, \Lambda) dx = \frac{\pi}{2} (2n + 1) + O(\mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

где $f = (p/r)^{1/2}$. Условие "квантования" (5.1) может быть получено разными способами:

1) путем использования эталонного уравнения (3.9), описывающего поведение решения сразу в окрестности обеих точек поворота $x = x_*^{(k)}$ [211, 215];

2) путем построения решений (3.6) в окрестности каждой из точек поворота $x_*^{(k)}$ и последующего сшивания их асимптотик (3.8) при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$ [47];

3) путем обхода точек поворота по комплексной плоскости z [180, 188].

В качестве примера рассмотрим свободные колебания струны, лежащей на упругом основании:

$$T \frac{d^2 y}{dx^2} + (\omega^2 \rho - c(x))y = 0, \quad (5.2)$$

$$y \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где T , ρ — натяжение струны и ее поверхностная плотность, ω — искомая частота колебаний, $c(x)$ — переменная жесткость основания. Предположим, что функция $c(x)$ имеет минимум при $x = 0$, и будем искать формы колебаний, локализованные вблизи $x = 0$. При $c(x) = c_0 + c_2 x^2$ задача имеет точное решение [63]

$$y_n(x) = D_n(z\sqrt{2}) = H_n(z)e^{-z^2/2},$$

$$z = \left(\frac{c_2}{T}\right)^{1/4} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

$$\omega_n^2 = \rho^{-1} \left[c_0 + (Tc_2)^{1/2} (2n + 1) \right],$$

где $H_n(z)$ — полином Эрмита степени n , $D_n(t)$ — функция параболического цилиндра (рис. 8 соответствует случаю $n = 6$).

При других функциях $c(x)$ формула (5.1) дает приближенное уравнение для ω_n

$$\int_{x_*^{(1)}}^{x_*^{(2)}} \sqrt{T^{-1}(\rho\omega_n^2 - c(x))} dx = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

точность которого повышается с ростом n . Здесь $x_*^{(k)}$ — нули подкоренного выражения в (5.4).

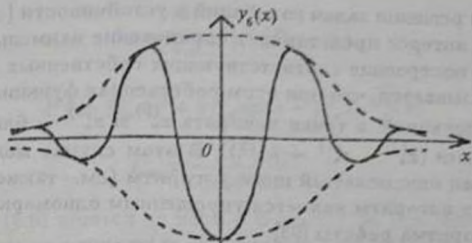


Рис. 8.

3°. Пусть теперь порядок системы (1.1) или уравнения (2.6) больше двух и пусть при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$ характеристическое уравнение (1.4) имеет два чисто мнимых корня

$$\lambda_{1,2} = \pm if(x), \quad f(x) \sim (x_*^{(2)} - x)^{1/2}(x - x_*^{(1)})^{1/2}, \quad x \rightarrow x_*^{(k)}, \quad (5.5)$$

которые при $x \in [x_*^{(1)}, x_*^{(2)}]$ переходят в вещественные корни разных знаков. Остальные корни уравнения (1.4) имеют отличную от нуля вещественную часть. Тогда при выполнении того же условия (5.1) система (1.1) имеет формальное локализованное решение. Для того чтобы это решение было асимптотическим, необходимо наложить дополнительные ограничения типа (2.4) или (2.5) на корни уравнения (1.4).

4°. Отметим еще один случай появления локализованных решений для систем, порядок которых не меньше четырех [47]. Пусть при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$ уравнение (1.4) имеет четыре чисто мнимых корня вида

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm iq(x) \pm if(x), \quad f(x) \sim (x_*^{(2)} - x)^{1/2}(x - x_*^{(1)})^{1/2}, \quad x \rightarrow x_*^{(k)}, \quad (5.6)$$

где функция $q(x)$ голоморфна. При $x \in [x_*^{(1)}, x_*^{(2)}]$ корни (5.6) имеют отличную от нуля вещественную часть. При тех же предположениях относительно остальных корней уравнения (1.4) условием существования локализованных решений снова будет соотношение (5.1).

5°. При решении задач колебаний и устойчивости (см. главу 3) особый интерес представляет определение наименьших значений Λ и построение соответствующих собственных функций. Часто оказывается, что при этом собственная функция является локализованной, а точки поворота $x_*^{(1)}$ и $x_*^{(2)}$ — близко расположенными ($x_*^{(2)} - x_*^{(1)} \sim \mu^{1/2}$). В этом случае может быть использован описываемый ниже алгоритм (см. также [81, 146, 234]). Этот алгоритм является упрощенным одномерным вариантом алгоритма работы [93].

Рассмотрим самосопряженное уравнение порядка $2n$

$$\sum_{k=0}^n (-i\mu)^{2k} \frac{d^k}{dx^k} \left(a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} \right) = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (5.7)$$

причем коэффициенты a_k предполагаются вещественными, голоморфными и линейно зависящими от параметра Λ :

$$a_k = a_{1k} - \Lambda a_{2k}, \quad \Lambda > 0.$$

Будем искать собственные значения Λ , для которых существуют локализованные в окрестности некоторой точки x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) решения уравнения (5.7). Точку x_0 называем *наиболее слабой*. Решение ищем в виде асимптотического ряда

$$y(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} y_k(\xi) \exp \left[i \left(\mu^{-1/2} p_0 \xi + a \xi^2 / 2 \right) \right],$$

$$\xi = \mu^{-1/2} (x - x_0), \quad (5.8)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1 + \dots,$$

где $y_k(\xi)$ — полиномы по ξ ; p_0, x_0, Λ_k вещественны, $\text{Im } a > 0$. Последнее условие обеспечивает убывание решения (5.8) с ростом $|x - x_0|$.

Деля в характеристическом уравнении (2.7) замену $\lambda = i\mu$ и разрешая его относительно Λ , получаем

$$\Lambda = \left(\sum_{k=0}^n a_{1k}(x) p^{2k} \right) \left(\sum_{k=0}^n a_{2k}(x) p^{2k} \right)^{-1} \equiv f(p, x).$$

Предположим, что существует единственная точка p_0, x_0 , такая, что

$$\Lambda_0 = \min_{p,x}^{(+)} \{f\} = f(p_0, x_0) \quad (5.9)$$

и

$$d^2 f = f_{pp}^0 dp^2 + 2f_{px}^0 dp dx + f_{xx}^0 dx^2 > 0, \quad f_{px}^0 = \frac{\partial^2 f(p_0, x_0)}{\partial p_0 \partial x_0}, \dots \quad (5.10)$$

Минимум (5.9) ищется по всем $x \in [x_1, x_2]$, $p_0 \geq 0$, для которых $f > 0$. Тогда решение вида (5.8) существует, причем

$$y_0^{(m)}(\xi) = H_m(z), \quad z = c^{1/2} \xi, \quad \Lambda^{(m)} = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1^{(m)} + O(\mu^2),$$

$$a = \frac{ir - f_{px}^0}{f_{pp}^0}, \quad c = \frac{r}{f_{pp}^0}, \quad r = (f_{pp}^0 f_{xx}^0 - (f_{px}^0)^2)^{1/2} > 0, \quad (5.11)$$

$$\Lambda_1^{(m)} = r(m + 1/2), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $H_m(z)$ — полином Эрмита степени m (в частности, $H_0 = 1$, $H_1 = z$, $H_2 = z^2 - 1/2$). Формулы (5.8), (5.11) определяют серию собственных значений $\Lambda^{(m)}$, наименьшее из которых получается при $m = 0$.

Что касается собственных функций, то здесь следует различать два случая:

$$A) \quad p_0 = 0 \quad \text{и} \quad B) \quad p_0 > 0.$$

В случае $p_0 = 0$ собственные функции имеют вид

$$y^{(m)}(x, \mu) = (H_m(z) + O(\mu)^{1/2}) e^{-z^2/2}, \quad z = (c/\mu)^{1/2}(x - x_0),$$

а соответствующие собственные значения $\Lambda^{(m)}$ простые. Таково же поведение собственных функций при сближении точек поворота $x_*^{(1)}, x_*^{(2)}$, если между ними характеристическое уравнение (1.4) имеет одну пару чисто мнимых корней (см. (5.5)).

В случае $p_0 > 0$ функция (5.9) комплексна. Так как коэффициенты a_k в (5.7) вещественны, решениями уравнения (5.7) будут как вещественная, так и мнимая части (5.8). Но было бы ошибочно считать, что собственные значения $\Lambda^{(m)}$ двукратны и

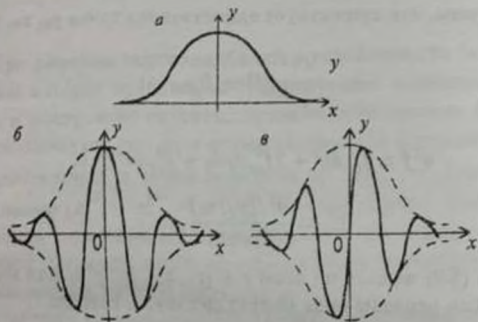


Рис. 9.

произвольная линейная комбинация вещественной и мнимой частей (5.8) дает собственную функцию. Дело в том, что ряд (5.8) является не сходящимся, а асимптотическим и параметру $\Lambda^{(m)}$ соответствуют две фиксированные вещественные собственные функции

$$y^{(m,j)}(x, \mu) = \left[H_m(z) \cos \Psi_j + O(\mu^{1/2}) \right] \exp \left(-\frac{\operatorname{Im}(a)(x - x_0)^2}{2\mu} \right), \quad (5.12)$$

$$\Psi_j = \frac{p_0 x}{\mu} + \frac{\operatorname{Re}(a)(x - x_0)^2}{2\mu} + \Theta_j, \quad j = 1, 2,$$

$$z = \left(\frac{c}{\mu} \right)^{1/2} (x - x_0)$$

где фазы Θ_j фиксированы ($0 \leq \Theta_1, \Theta_2 < 2\pi$). Соответствующие точные собственные значения $\Lambda^{(m,1)}, \Lambda^{(m,2)}$ различны, однако

$$\Delta\Lambda = \Lambda^{(m,2)} - \Lambda^{(m,1)} = O(\mu^N) \quad (5.13)$$

для любого N . Такие собственные значения назовем *асимптотически двукратными*. В случае, когда уравнение (1.4) имеет

две пары чисто мнимых корней (5.6) между точками поворота, собственные значения также асимптотически двухкратны.

На рис. 9 при $m = 0$ показаны собственная функция при $p_0 = 0$ (α) и две собственные функции при $p_0 > 0$ (β, θ).

2.6. Регулярное вырождение краевых задач

1°. В этом разделе дается краткое описание асимптотического метода Вишика—Люстерника решения линейных одномерных краевых задач, сингулярно вырождающихся в задачи меньшего порядка (см. также [33], [177]).

Рассмотрим краевую задачу A_μ , состоящую из уравнения

$$\sum_{k=1}^n \mu^k a_{k+m} \frac{d^{k+m} y}{dx^{k+m}} + \sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k y}{dx^k} = f(x), \quad x \in [x_1, x_2], \quad (6.1)$$

и граничных условий

$$\frac{d^k y}{dx^k} = q_k^{(j)} \quad \text{при } x = x_j,$$

$$k = 0, 1, \dots, m_j + n_j - 1, \quad j = 1, 2, \quad m_1 + m_2 = m, \quad n_1 + n_2 = n. \quad (6.2)$$

Относительно коэффициентов a_k будем делать различные предположения, однако во всех случаях $a_m \neq 0$, $a_{m+n} \neq 0$. Рассмотрим также вырожденную задачу A_0

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k y_0}{dx^k} = f(x), \quad x \in [x_1, x_2], \quad (6.3)$$

$$\frac{d^k y_0}{dx^k} = q_k^{(j)} \quad \text{при } x = x_j, \quad k = 0, 1, \dots, m_j - 1, \quad j = 1, 2. \quad (6.4)$$

Пусть сначала коэффициенты a_k постоянны. Рассмотрим дополнительное характеристическое уравнение (сравни с (2.10))

$$\sum_{k=0}^n a_{k+m} \lambda^k = 0. \quad (6.5)$$

Вырождение задачи A_μ в задачу A_0 при $\mu \rightarrow 0$ ($\mu > 0$) называется *регулярным*, если уравнение (6.5) имеет n_1 корней с

отрицательной вещественной частью и n_2 корней с положительной вещественной частью ($n_1 + n_2 = n$).

При регулярном вырождении число выпадающих граничных условий при переходе от задачи A_μ к задаче A_0 равно числу корней уравнения (6.5) с соответствующим знаком вещественной части. Если некоторые из корней уравнения (6.5) чисто мнимые, вырождение регулярным не является.

2°. Опишем структуру асимптотического решения. Пусть задача A_0 однозначно разрешима при любых $f(x)$, $g_k^{(j)}$. Тогда решение задачи A_μ представимо в виде суммы трех асимптотических рядов

$$y(x, \mu) \simeq y^{(0)}(x, \mu) + z^{(1)}(\eta_1, \mu) + z^{(2)}(\eta_2, \mu),$$

$$y^{(0)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x), \quad (6.6)$$

$$z^{(j)}(\eta_j, \mu) \simeq \mu^{m_j} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k^{(j)}(\eta_j), \quad \eta_j = \mu^{-1}(x - x_j), \quad j = 1, 2,$$

причем требуем, чтобы функции $z^{(j)}$ были интегралами пограничного слоя в окрестности краев $x = x_j$, т.е.

$$z_k^{(1)}(\eta_1) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta_1 \rightarrow \infty,$$

$$z_k^{(2)}(\eta_2) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta_2 \rightarrow -\infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Функции y_k , $z_k^{(j)}$ однозначно определяются в результате подстановки (6.6) в (6.1), (6.2).

Функция y_0 суть решение задачи A_0 . Функции y_k ($k > 0$) определяются из неоднородных краевых задач типа A_0 , правые части которых зависят от ранее определенных функций. Построение функций y_k иногда называют *первым* или *основным* итерационным процессом.

Функции $z_0^{(j)}$ являются решениями краевых задач

$$L z_0^{(j)} \equiv \sum_{k=0}^n a_{k+m} \frac{d^{k+m} z_0^{(j)}}{d\eta_j^{k+m}} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (6.8)$$

$$\frac{d^k z_0^{(j)}}{d\eta_j^k} = \begin{cases} q_k^{(j)} - \frac{d^k y_0}{dx_j^k}, & k = m_j \\ 0, & k = m_j + 1, \dots, m_j + n_j - 1 \end{cases} \quad \text{при } \eta_j = 0$$

с дополнительными условиями (6.7). Последующие приближения $z_k^{(j)}$ однозначно определяются из неоднородных задач, аналогичных (6.8), правые части которых зависят от предыдущих приближений. Процесс построения функций $z_k^{(j)}$ называется вторым или дополнительным итерационным процессом. Взаимодействие первого и второго итерационных процессов осуществляется только через граничные условия.

Функции $z_k^{(j)}$ имеют вид

$$z_k^{(j)}(\eta_j) = \sum_l P_{kl}^{(j)}(\eta_j) e^{\lambda_l \eta_j}, \quad (6.9)$$

где $P_{kl}^{(j)}$ — полиномы возрастающих с ростом k степеней, а суммирование распространяется на все корни λ_l уравнения (6.5) с соответствующим знаком вещественной части. При этом не требуется, чтобы корни λ_l были простыми.

Этот алгоритм практически без изменений распространяется на случай, когда коэффициенты a_k в (6.1) не являются постоянными, а зависят от x и μ

$$a_k = a_k(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l a_{kl}(x),$$

где $a_{kl}(x)$ голоморфны. При этом в уравнении (6.5) считаем $a_k = a_{k0}(x)$ и требуем, чтобы при всех x уравнение (6.5) имело n_1 (n_2) корней с отрицательной (положительной) вещественной частью (последнее требование может быть ослаблено). В формуле (6.9) берем $\lambda_l = \lambda_l(x_j)$.

3°. Алгоритм Вишика—Люстерника может быть применен и при решении задач на собственные значения. В этом случае коэффициенты a_k в (6.1) зависят от спектрального параметра Λ , а уравнение (6.1) и граничные условия (6.2) однородны ($f = q_k^{(j)} = 0$). Пусть Λ_0 — собственное значение Λ для вырожденной задачи A_0 . Построение собственного значения Λ задачи A_μ , близкого к Λ_0 , и соответствующей собственной функции

может быть выполнено с использованием описанного алгоритма. Различие заключается в том, что при определении функции $y_k(x)$ в (6.6) приходим к неоднородным краевым задачам (типа (6.3), (6.4)) на спектре. Условие совместности этих задач дает возможность определить поправочные слагаемые в разложении Λ в ряд по степеням μ . В частности, если Λ_0 — простое собственное значение задачи A_0 , разложение Λ ведется по целым степеням μ :

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Lambda_k. \quad (6.10)$$

В качестве примера определим частоты собственных колебаний неабсолютно гибкой струны длиной L с зашпеленными концами. В безразмерных переменных приходим к краевой задаче A_μ

$$-\mu^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \Lambda y = 0, \quad y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \pi,$$

где

$$\mu^2 = \frac{EI\pi^2}{TL^2}, \quad \omega^2 = \frac{\Lambda T\pi^2}{\rho L^2}, \quad (6.11)$$

EI — жесткость на изгиб, T — натяжение, ρ — линейная плотность струны, ω — частота колебаний.

При $\mu \rightarrow 0$ задача A_μ вырождается в задачу A_0

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + \Lambda_0 y_0 = 0, \quad y_0 = 0 \quad \text{при } x = 0, \pi,$$

решение которой суть $\Lambda_0 = n^2$, $y_0 = \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$

Вырождение задачи A_μ в задачу A_0 регулярно, ибо $m_1 = n_1 = m_2 = n_2 = 1$, а уравнение (6.5) $-\lambda^2 + 1 = 0$ имеет один положительный и один отрицательный корень.

Найдем Λ_1 в (6.10). Функции пограничного слоя в первом приближении таковы:

$$z_0^{(1)} = ne^{-\epsilon_1}, \quad z_0^{(2)} = (-1)^{n+1} ne^{\epsilon_2}.$$

Для y_1 получаем краевую задачу

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + n^2 y_1 = -\Lambda_1 y_0, \quad y_1(0) = -n, \quad y_1(\pi) = (-1)^n n.$$

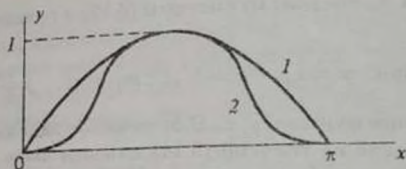


Рис. 10.

условие совместности которой дает $\Lambda_1 = 4n^2\pi^{-1}$.

На рис. 10 показана первая форма собственных колебаний абсолютно гибкой (кривая 1) и неабсолютно гибкой струны (кривая 2) с защемленными концами.

4°. Рассмотрим систему уравнений первого порядка с малым параметром при части производных

$$\frac{dy}{dx} = A_{11}y + A_{12}z, \quad \mu \frac{dz}{dx} = A_{21}y + A_{22}z, \quad (6.12)$$

где y и z — векторы размерности m и n соответственно и A_{ij} — матрицы соответствующих размеров, регулярно зависящие от μ :

$$A_{ij} = A_{ij}(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_{ij}^{(k)}(x).$$

Если $\det(A_{22}^{(0)}) \neq 0$ при всех x , система (6.12) при $\mu = 0$ вырождается в систему порядка m

$$\frac{dy_0}{dx} = \left(A_{11}^{(0)} - A_{12}^{(0)} A_{22}^{(0)-1} A_{21}^{(0)} \right) y_0, \quad z^{(0)} = -A_{22}^{(0)-1} A_{21}^{(0)} y_0. \quad (6.13)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det(A_{22}^{(0)}(x) - \lambda E) = 0$$

и предположим, что это уравнение имеет n_1 (n_2) корней с отрицательной (положительной) вещественной частью ($n_1 + n_2 = n$). Тогда можно говорить о регулярном вырождении краевых задач.

Пусть задача A_μ состоит из системы (6.12) и граничных условий

$$l_k^{(j)}(y, z) = 0 \quad \text{при} \quad x = z_j, \quad k = 1, \dots, m_j + n_j, \quad j = 1, 2, \quad (6.14)$$

где $l_k^{(j)}$ — линейные функции y, z . В отличие от задачи (6.1), (6.2) вопрос о том, какие из условий (6.14) должны быть сохранены при переходе к задаче A_0 , не является простым, особенно в случае, когда коэффициенты в $l_k^{(j)}$ зависят от μ . В общем случае задача A_0 заключается в системе (6.13) и некоторых m_j линейных комбинациях граничных условий (6.14), построение которых называется *расщеплением граничных условий*. Для задач теории тонких оболочек вопрос о расщеплении граничных условий обсуждается во многих работах [6, 40, 41, 47, 53, 77, 109, 170, 184, 185, 191].

2.7. Случаи нерегулярного вырождения

1°. Здесь рассматриваются те же краевые задачи A_μ и A_0 , что и в п. 2.6, однако предполагается, что вырождение задачи A_μ в задачу A_0 регулярным не является.

Если коэффициенты a_k в уравнении (6.1) вещественны и постоянны, нарушение регулярности может быть связано с появлением чисто мнимых корней уравнения (6.5).

Если a_k зависят от x , появление чисто мнимых корней (6.5) возможно как на всем промежутке интегрирования, так и на его части. В последнем случае имеются точки поворота, сильно осложняющие асимптотическое интегрирование (см. п. 2.3). Ниже предполагается, что точек поворота нет.

Будем предполагать, что уравнение (6.1) и граничные условия (6.2) однородны ($f = q_k^{(j)} = 0$), а коэффициенты a_k зависят от спектрального параметра Λ , и искать собственные значения Λ и соответствующие собственные функции.

Пусть уравнение (6.5) имеет l_1 (l_2) корней с отрицательными (положительными) вещественными частями и $2r$ чисто мнимых корней ($l_1 + l_2 + 2r = n$, $l_1 \leq n_1$, $l_2 \leq n_2$). Общее решение уравнения (6.1) запишем в виде

$$y = \sum_{k=1}^{m+n} C_k y^{(k)}(x, \mu), \quad (7.1)$$

где C_k — произвольные постоянные. Функции $y^{(k)}(x, \mu)$ при $1 \leq k \leq m$ имеют вид (2.11), а остальные функции $y^{(k)}(x, \mu)$ при $m+1 \leq k \leq m+n$ имеют вид (2.1), причем $l_1 + l_2$ из них имеют характер интегралов краевого эффекта, а $2r$ функций осциллируют.

Подстановка решения (7.1) в граничные условия (6.2) приводит к уравнению

$$\Delta_{m+n}(\Lambda, \mu) = 0, \quad (7.2)$$

где Δ_p — определитель порядка p , составленный из функций $y^{(k)}(x, \mu)$ и их производных при $x = x_1, x_2$.

Рассмотрим также уравнение

$$\Delta_m^0(\Lambda_0) = 0,$$

соответствующее задаче A_0 и зависящее от функций $y^{(k)}(x, 0)$ при $1 \leq k \leq m$.

При $m_1 = m_2$ уравнение (7.2) может быть представлено в виде [148]

$$\Delta_{m+n} = \Delta_m^0(\Lambda) \Delta_r(\Lambda, \mu) + o(1) = 0, \quad \mu \rightarrow 0,$$

где определитель Δ_n составлен из интегралов (2.1).

Если

$$\Delta_n(\Lambda, \mu) \geq a > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \mu \leq \mu_0, \quad (7.3)$$

то для собственных значений задач A_μ и A_0 выполняется соотношение

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Lambda(\mu) = \Lambda_0. \quad (7.4)$$

Если при этом Λ_0 — простое собственное значение, имеет место асимптотическое разложение по целым степеням μ

$$\Lambda(\mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \mu^k, \quad \mu \rightarrow 0. \quad (7.5)$$

В частности, в случае регулярного вырождения условие (7.3) выполнено.

2°. Если условие (7.3) не выполнено, задача A_μ может иметь дополнительные собственные значения, не стремящиеся к собственным значениям задачи A_0 при $\mu \rightarrow 0$. Структура дополнительного спектра задачи A_μ может быть разной в зависимости

от характера уравнения

$$\Delta_n(\Lambda, \mu) = 0 \quad (7.6)$$

при $\mu \rightarrow 0$. Отметим две возможности, встречающиеся в прикладных задачах.

Если уравнение (7.6) может быть записано в виде

$$\Delta_n(\Lambda, \mu) = \Delta_n^0(\Lambda) + o(1) = 0, \quad \mu \rightarrow 0, \quad (7.7)$$

а уравнение $\Delta_n^0(\Lambda) = 0$ имеет корни $\Lambda = \Lambda_*$, то задача A_μ будет иметь дополнительные собственные значения, подобно (7.4), (7.5) стремящиеся к Λ_* при $\mu \rightarrow 0$.

Уравнение (7.8) может также иметь вид, подобный (2.4.10) [148]:

$$B_0(\Lambda, \mu) + \sum_{j=1}^N B_j(\Lambda, \mu) \cos[\mu^{-1} \psi_j(\Lambda, \mu)] = 0, \quad (7.8)$$

где B_j, ψ_j регулярно зависят от μ . При некоторых дополнительных предположениях относительно B_j, ψ_j уравнение (7.8) имеет корни, расстояния между которыми порядка μ , т.е. дополнительный спектр краевой задачи A_μ является плотным. Задачи с таким спектром рассматриваются в п. 2.4, 3.3.

3°. Вернемся к случаю, когда уравнение (7.6) представимо в виде (7.7), и рассмотрим пример [149]. Свободные малые колебания плоской спиральной пружины в своей плоскости описываются уравнением

$$\begin{aligned} \mu^4 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{q} \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{1}{q} \frac{dy}{dx} \right) \right] + \mu^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{q} \frac{d^3}{dx^3} (qy) \right] + \mu^2 q \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{1}{q} \frac{dy}{dx} \right) + \\ + q \frac{d^2}{dx^2} (qy) + \Lambda \left[y - \mu^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q^2} \frac{dy}{dx} \right) \right] = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7.9) \\ y = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = 1. \end{aligned}$$

Здесь x — безразмерная длина упругой линии, $q(x)$ — ее кривизна, $y(x)$ — проекция смещения на нормаль,

$$\mu = \frac{r}{l}, \quad \Lambda = \frac{\rho S r^2 l^2}{EI} \omega^2,$$

$\mu > 0$ — малый параметр, r — характерный радиус кривизны, l — длина упругой линии, ρ — плотность, S — площадь поперечного сечения, EI — изгибная жесткость, ω — частота колебаний. Граничные условия в (7.9) соответствуют жесткому заземлению концов.

Дополнительное характеристическое уравнение (7.3)

$$q^{-2}\lambda^4 + 2\lambda^2 + q^2 = 0 \quad (7.10)$$

имеет два тождественно кратных чисто мнимых корня $\lambda = \pm iq$, поэтому вырождение задачи (7.9) в задачу

$$q \frac{d^2}{dx^2}(qy_0) + \Lambda_0 y_0 = 0, \quad y_0(0) = y_0(1) = 0 \quad (7.11)$$

не является регулярным.

Из шести интегралов уравнения (7.9) два имеют вид (2.2.11), четыре интеграла имеют вид (2.2.1) и являются осциллирующими ($p = 3, 4, 5, 6$)

$$y^{(p)}(x, \mu) \approx \sum_{k=0}^{\infty} y_k^{(p)}(x) \mu^k \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_0^x \lambda_p(x) dx\right), \quad \lambda_p = \pm iq.$$

В связи с тем, что корни уравнения (7.10) кратные, функции $y_k^{(p)}$ находим из дифференциальных уравнений второго порядка. В частности,

$$2 \frac{d}{dx} \left(q^2 \frac{dy_0^{(p)}}{dx} \right) + \Lambda_* y_0^{(p)} = 0. \quad (7.12)$$

Уравнение частот (7.2) имеет вид

$$\Delta_0(\Lambda) \Delta_*^2(\Lambda) + o(1) = 0, \quad \mu \rightarrow 0,$$

где уравнение $\Delta_0(\Lambda) = 0$ дает собственные значения Λ_0 задачи (7.11), уравнение $\Delta_*(\Lambda) = 0$ — собственные значения Λ_* задачи, состоящей из уравнения (7.12) и граничных условий $y(0) = y(1) = 0$. Пусть корни уравнений $\Delta_0(\Lambda) = 0$ и $\Delta_*(\Lambda) = 0$ различны. В этом случае построение старших приближений показывает, что для собственных значений полной краевой задачи (7.9) имеет место разложение (7.5). При этом корню Λ_* соответствуют два близких собственных значения задачи (7.9), различающиеся на величину порядка μ .

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Система уравнений теории оболочек является довольно громоздкой системой уравнений в частных производных. Она содержит естественный малый параметр, связанный с относительной толщиной оболочки, поэтому асимптотическое представление решений является необходимым элементом качественного анализа, а также может дать существенное упрощение при построении приближенных численных решений.

В данной главе будут рассмотрены линейные задачи, в которых путем разделения переменных система уравнений теории оболочек может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Линейные задачи, в которых переменные не разделяются, обсуждаются в главе 4, а в главе 5 рассмотрены некоторые нелинейные задачи.

3.1. Основные уравнения теории тонких оболочек

Приведем основные соотношения простейшего двумерного варианта теории оболочек. Подробнее с уравнениями теории оболочек можно познакомиться по монографиям [36, 40, 41, 50, 52, 88, 107, 227] и др.

1°. Пусть произвольная точка M поверхности S определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$, где α_1, α_2 — система ортогональных криволинейных координат, совпадающих с линиями кривизны.

Оболочка представляет собой тело, занимающее объем

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in G, \quad |z| \leq \frac{h}{2},$$

где z — расстояние по нормали до поверхности S , h — толщина оболочки. Пусть Γ — граница области G . Поверхность S

называется *срединной* поверхностью оболочки. Оболочку называют тонкой, если мала ее относительная толщина h/R , где R характерный линейный размер срединной поверхности.

Введем местную ортогональную систему координат с ортами e_1, e_2, n , где

$$e_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}, \quad A_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \right| \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad n = e_1 \times e_2. \quad (1.1)$$

Здесь и далее в этом пункте $(1 \leftrightarrow 2)$ означает, что аналогичные формулы имеют место и при замене индексов 1 и 2.

Первая и вторая квадратичные формы поверхности таковы:

$$I = ds^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2, \quad II = \frac{A_1^2}{R_1} d\alpha_1^2 + \frac{A_2^2}{R_2} d\alpha_2^2, \quad (1.2)$$

где ds — длина дуги кривой на поверхности, A_1, A_2 — коэффициенты Ламе, R_1, R_2 — радиусы кривизны. Будем использовать также обозначение $k_i = R_i^{-1}$.

Опишем деформацию срединной поверхности. Пусть u_1, u_2, w — проекции перемещения точки M на орты e_1, e_2, n до деформации. В линейном приближении тангенциальные (мембранные) деформации поверхности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 - \frac{w}{R_1},$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad \omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (1.3)$$

углы поворота γ_1, γ_2 нормали n

$$\gamma_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{R_1} \quad (1 \leftrightarrow 2). \quad (1.4)$$

Изгибные деформации поверхности κ_1, κ_2, τ

$$\kappa_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \gamma_2 \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\tau = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \gamma_2 + \frac{\omega_1}{R_2}. \quad (1.5)$$

2°. Уравнения равновесия элемента срединной поверхности при малых деформациях

$$\frac{\partial(A_2 T_1)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{\partial(A_1 S_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S_1 - \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 + A_1 A_2 F_1 = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 Q_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 Q_2)}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + F_n \right) = 0, \quad (1.6)$$

$$A_1 A_2 Q_2 + \frac{\partial(A_2 H_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H_2 = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$S_1 - S_2 + \frac{H_1}{R_1} - \frac{H_2}{R_2} = 0,$$

где T_i, S_i, Q_i — проекции равнодействующей внутренних усилий, действующих в сечении $\alpha_i = \text{const}$, на орты e_1, e_2, n , H_i, M_i — проекции момента внутренних усилий, F_1, F_2, F_n — проекции интенсивности внешней нагрузки.

Соотношения (1.1)–(1.6) одни и те же для всех линейных двухмерных теорий оболочек. Различия заключаются в формулах связи между усилиями и деформациями. Гипотезы Кирхгофа — Лива, заключающиеся, главным образом, в том, что элемент оболочки, нормальный к срединной поверхности, до деформации не меняет свою длину и остается нормальным к ней и после деформации, приводят к соотношениям упругости [107]

$$T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad S_1 = \frac{K(1 - \nu)}{2} \left(\omega + \frac{h^2 \tau}{6R_2} \right),$$

$$M_1 = D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad H_1 = H = D(1 - \nu)\tau \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (1.7)$$

$$K = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},$$

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона (предполагается, что материал оболочки однородный и изотропный).

Именно через соотношения упругости (1.7) проникает в систему уравнений малый параметр, связанный с относительной толщиной оболочки и отражающий тот факт, что жесткость тонкой оболочки на растяжение значительно больше, чем на изгиб.

В большинстве задач ту же точность дают и более простые соотношения упругости [88], где

$$S_1 = S_2 = S = \frac{1}{2} K(1 - \nu) \omega.$$

Недостаток этих соотношений в том, что последнее из уравнений равновесия (1.6) выполняется неточно. Более громоздкие соотношения упругости, чем (1.7), приводятся в [41, 86].

Система уравнений (1.6) имеет восьмой порядок, поэтому на каждом из краев оболочки должны быть заданы четыре граничных условия. Простейшие варианты граничных условий на крае $\alpha_1 = \alpha_1^0$ заключаются в том, что считаются заданными обобщенные перемещения (u_1, u_2, w, γ_1) или соответствующие им обобщенные усилия

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 \quad \text{или} \quad T_1 = T_1^0, \\ u_2 &= u_2^0 \quad \text{или} \quad S_1 + \frac{H}{R_2} = S_1^0 + \frac{H^0}{R_2}, \\ w &= w^0 \quad \text{или} \quad Q_1 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = Q_1^0 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial H^0}{\partial \alpha_2}, \\ \gamma_1 &= \gamma_1^0 \quad \text{или} \quad M_1 = M_1^0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

3°. Как видно, полная система уравнений общей теории оболочек довольно сложна. Однако в ряде случаев эти уравнения можно упростить. В задачах по устойчивости оболочек, например, если выпучивание сопровождается появлением мелких волн (размеры которых хотя бы в одном направлении малы по сравнению с характерными размерами оболочки) применяют уравнения теории пологих оболочек. В этом случае система уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций сводятся к разрешающей системе двух уравнений относительно прогиба w и функции усилий Φ (см. [52]):

$$D \Delta^2 w - \Delta_k \Phi + F_n = 0, \quad (Eh)^{-1} \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0. \quad (1.9)$$

Здесь операторы Δ и Δ_k определены следующим образом:

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right],$$

$$\Delta_k = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{R_2} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{R_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right].$$

Внутренние усилия связаны с функцией усилий Φ следующими соотношениями:

$$T_1 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$S = -\frac{1}{2} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right) \right].$$

В соотношения (1.7) не входят такие, из которых определяют перерезывающие усилия Q_1, Q_2 . Они вычисляются из уравнений (1.6).

Отказ от гипотез Кирхгофа—Лява, заключающийся во введении в рассмотрение углов сдвига δ_1, δ_2 , повышает число основных неизвестных системы до пяти ($u_1, u_2, w, \delta_1, \delta_2$). При этом соотношениям упругости типа (1.7) добавляются

$$Q_1 = Gh\delta_1, \quad Q_2 = Gh\delta_2,$$

где G — приведенный модуль сдвига, а суммарный порядок системы повышается с 8 до 10. При этом элемент оболочки, нормальный к срединной поверхности до деформации, предполагается не меняющим своей длины. Существуют теории, описываемые системами двенадцатого порядка и допускающие растяжение нормального элемента (см., например, [130]). Двухмерные теории оболочек более высокого порядка, основанные на разложениях в ряды по толщине [31, 69], не получили широкого применения. В [239] предложена двухмерная теория оболочек, в которой оболочка моделируется оснащенной поверхностью, каждая точка которой наделяется шестью степенями свободы — тремя поступательными и тремя вращательными. Вопросы связанные с погрешностью уравнений двухмерной теории оболочек по сравнению с уравнениями трехмерной теории упругости, обсуждаются в п. 4.5.

4°. С учетом соотношений (1.3)—(1.7) систему уравнений теории оболочек можно привести к системе такого вида, что неизвестными будут только перемещения $u_1, u_2, u_3 = w$ [41]:

$$\sum_{j=1}^3 (\mu^4 N_{ij} + L_{ij}) u_j + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.10)$$

Здесь N_{ij} , L_{ij} — линейные дифференциальные операторы (в общем случае с переменными по α_1 , α_2 коэффициентами), $F_3 = F_n$, $\mu > 0$ — геометрический малый параметр,

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}.$$

При $\mu = 0$ система (1.10) называется *безмоментной*.

Рассматриваем задачи, в которых F_i пропорциональны спектральному параметру Λ . В случае колебаний

$$F_i = -\Lambda u_i, \quad \omega^2 = \frac{E\Lambda}{\rho R^2}, \quad (1.11)$$

где ρ — плотность, ω — искомая частота свободных колебаний.

Для задачи устойчивости безмоментного начального напряженного состояния, определяемого усилиями T_1^0 , T_2^0 , S_0 , имеем

$$F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = \Lambda \Delta_1 w,$$

$$\Delta_1 w = \frac{1}{A_1 A_2} \sum_{i=1,2} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{A_j t_i}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + t_3 \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right), \quad i \neq j, \quad (1.12)$$

$$(T_1^0, T_2^0, S_0) = -\Lambda E h \mu^2 (t_1, t_2, t_3),$$

где $w = u_3$ — нормальный прогиб при потере устойчивости, $\Lambda > 0$ — параметр нагружения.

При $\mu \neq 0$ система (1.10) эллиптическая и имеет восьмой порядок. На границе Γ области G заданы четыре однородных граничных условия. Если эти условия самосопряженные, задача (1.10) имеет дискретный спектр. Отметим, что однородные условия (1.8) — самосопряженные.

При $\mu = 0$ система (1.10) имеет четвертый порядок, число граничных условий сокращается до двух. В зависимости от знака гауссовой кривизны K срединной поверхности система (1.10) может быть эллиптической, гиперболической или параболической (соответственно при $K > 0$, $K < 0$ или $K = 0$). Краевая задача для безмоментной системы может иметь участки непрерывного спектра, что влечет за собой трудности при предельном переходе при $\mu \rightarrow 0$ [47, 81].

3.2. Колебания оболочек вращения с большим числом волн по параллели

1°. При рассмотрении колебаний оболочки вращения в криволинейных координатах α_1, α_2 целесообразно взять s, φ (s — длина дуги образующей, φ — угол в окружном направлении) (рис. 11).

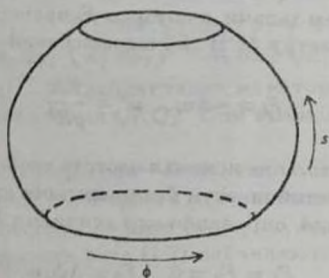


Рис. 11.

Тогда

$$A_1 = 1, \quad A_2 = B, \quad R_1 = \frac{d\theta}{ds}, \quad R_2 = \frac{B}{\sin \theta},$$

где B — расстояние от точки срединной поверхности до оси вращения, θ — угол между нормалью к оболочке и осью вращения. В связи с тем, что функции B, R_1, R_2 зависят только от s , коэффициенты системы (1.10) не будут зависеть от φ . Если оболочка ограничена двумя параллелями или имеет форму купола, задача допускает разделение переменных

$$w(s, \varphi) = w(s) \exp(im\varphi), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

Остальные неизвестные также имеют множитель $\exp(im\varphi)$, который после подстановки в систему (1.10) сокращается. В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами μ, m, Λ . Структура асимптотических разложений интегралов системы (1.10) зависит от соотношений между порядками этих параметров.

Далее при анализе частных случаев будем ссылаться на систему (1.10), явный вид коэффициентов которой из-за громоздкости не приводится, и на менее точную систему

$$\mu^4 \Delta \Delta w - \Delta_k \Phi - \Lambda w = 0, \quad \Delta \Delta \Phi + \Delta_k w = 0, \quad (2.2)$$

$$\Delta w = \frac{1}{B} \frac{d}{ds} \left(B \frac{dw}{ds} \right) - \frac{m^2 w}{B^2}, \quad \Delta_k w = \frac{1}{B} \frac{d}{ds} \left(\frac{B}{R_2} \frac{dw}{ds} \right) - \frac{m^2 w}{B^2 R_2^2},$$

получающуюся из (1.9) после разделения переменных (2.1). Система (2.2) позволяет правильно определить старшие члены асимптотических разложений интегралов во всех рассматриваемых далее случаях, кроме безмоментных интегралов (см. п. 3.5).

2°. Предположим, что

$$m = \mu^{-1} \rho, \quad \rho \sim 1, \quad \Lambda \sim 1.$$

Тогда все решения системы (1.10) будут иметь большой показатель изменчивости $t = 1$ (см. п. 1.7). Система (1.10) может быть приведена к системе вида (2.1.1), и ее решения имеют вид (2.2.1):

$$w(s, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} w_k(s) \mu^k \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{s_0}^s \lambda(s) ds \right\}, \quad (2.3)$$

где $\lambda(s)$ удовлетворяет характеристическому уравнению, которое имеет восемь корней и может быть записано в виде, разрешенном относительно Λ :

$$\Lambda = f(p, s) = \frac{(p^2 + q^2)^4 + (k_2 p^2 + k_1 q^2)^2}{(p^2 + q^2)^2}, \quad (2.4)$$

$$\lambda = ip, \quad q = \frac{\rho}{B}.$$

В [47] исследованы различные случаи поведения корней уравнения (2.4) в зависимости от формы срединной поверхности (см. также [152, 153, 161]).

Осциллирующие интегралы системы (1.10), (2.2) существуют лишь в том случае, когда уравнение (2.4) имеет вещественные корни p . Найдем Λ_0 по формуле (2.5.9)

$$\Lambda_0 = \min_{p, s} \{f\} = f(p_0, s_0) \quad (2.5)$$

и положим

$$\Lambda^+ = \max_s f(0, s).$$

Тогда при $\Lambda < \Lambda_0$ точек спектра нет. Если $\Lambda_0 < \Lambda < \Lambda^+$, внутри промежутка интегрирования есть точки поворота. Если же, наоборот, $\Lambda > \Lambda^+$, система (1.10) имеет одну пару осциллирующих интегралов, а уравнение частот приводится к уравнению вида (2.4.10) [47, 152].

Рассмотрим подробнее случаи с точками поворота. Для нулевой оболочки и оболочки в форме параболоида вращения в (2.5) имеем $p_0 = 0$, а параллель s_0 совпадает с крайней параллелью $s_0 = s_2$. Для этих оболочек при $\Lambda \in (\Lambda_0, \Lambda^+)$ существует одна простая точка поворота s_* ($\Lambda = f(0, s_*)$), и уравнение частот приводится к уравнению вида (2.4.12) [47, 152]. Для оболочки, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения, по-прежнему, $p_0 = 0$, однако s_0 совпадает с экватором. Частоты собственных колебаний, близкие к Λ_0 , можно найти по формулам (2.5.8), (2.5.11).

Как уже упоминалось, расстояние между корнями уравнений (2.4.10), (2.4.12) имеет порядок μ . Среднее расстояние между частотами колебаний при данном m назовем *плотностью* распределения частот при данном m . Суммируя плотности частот при всех m , можно получить полную плотность распределения частот. При этом оказывается, что при вычислении плотности можно ограничиться случаем $m \sim \mu^{-1}$ и воспользоваться формулами (2.4.10), (2.4.12) [160]. Для пологих оболочек вопрос о плотности распределения частот рассмотрен в [20], а для оболочек произвольной формы — в [8]. В [135] обсуждается вопрос о плотности частот для различных упругих систем.

3.3. Некоторые задачи об устойчивости оболочек вращения

1°. Вопрос о потере устойчивости оболочки в общем случае обсуждается в п. 5.4. Здесь рассмотрим устойчивость оболочки вращения. Исследование потери устойчивости осесимметричного начального безмоментного состояния оболочки вращения при бифуркации в неосесимметричную форму с m волнами в окружном направлении в значительной мере аналогично

исследованию ее неосесимметричных колебаний. Различие, во-первых, состоит в том, что уравнение (2.5) заменяется на уравнение

$$\Lambda = f(p, s, \rho) = \frac{(p^2 + q^2)^4 + (k_2 p^2 + k_1 q^2)^2}{(p^2 + q^2)^2 (t_1 p^2 + 2t_3 pq + t_2 q^2)}, \quad (3.1)$$

где приняты те же обозначения, что и в (2.5). Во-вторых, при решении задач об устойчивости нас интересует только наименьшее собственное значение параметра нагружения Λ (и, быть может, близкие к нему). Поэтому необходимым этапом решения задачи об устойчивости является минимизация Λ по числу m волн в окружном направлении (или по параметру ρ).

Как и в (2.6), найдем сначала

$$\Lambda_0 = \min_{p, s, \rho}^{(+)} \{f\} = f(p_0, s_0, \rho_0), \quad (3.2)$$

где p вещественно, а минимум, как и в (2.5.9) вычисляется лишь по тем значениям p, s, ρ , для которых $f > 0$.

Для существования минимума $\Lambda_0 > 0$ на параметры задачи следует наложить ряд ограничений [44]. Во-первых, должны существовать направления, по которым начальные напряжения сжимающие. Математически это означает, что квадратичная форма $t_1 p^2 + 2t_3 pq + t_2 q^2$ не является отрицательной.

Во-вторых, в ряде случаев оказывается, что минимум

$$\Lambda_0 = 0 \quad \text{при} \quad p_0 = q_0 = 0, \quad (3.3)$$

что говорит о нарушении исходных предположений, в том числе, $m \sim \mu^{-1}$. Равенство (3.3), в частности, выполнено для всех задач об устойчивости оболочек отрицательной гауссовой кривизны ($k_1 k_2 < 0$) и для части задач об устойчивости оболочек нулевой кривизны ($k_1 = 0$), в которых потеря устойчивости связана с внешним давлением или кручением ($t_2, t_3 \neq 0$). Здесь эти задачи исключаем из рассмотрения, но к некоторым из них мы обратимся в п. 3.7.

При определенных вариантах граничных условий, называемых *слабыми закреплениями* края $s = s_2$, потеря устойчивости происходит в окрестности этого края при $\Lambda < \Lambda_0$ [174, 234]. При этом система (1.10) или (2.2) не имеет осциллирующих интегралов, а форма потери устойчивости суть линейная комбинация

четырёх интегралов краевого эффекта вблизи края $s = s_2$. Для определения Λ служит равенство (2.4.9). В частности, по такой форме происходит потеря устойчивости круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии в случае слабого закрепления края [50, 223 и др.].

Отметим, что не только сами граничные условия, но и форма оболочки и характер начального нагружения в окрестности края $s = s_2$ влияют на то, будет ли закрепление слабым. Свободный край всегда является слабым закреплением.

2°. Пусть закрепление не является слабым и при s_0 в (3.2) достигается изолированный минимум. Тогда параллель $s = s_0$ назовем *наиболее слабой*, ибо именно в окрестности этой параллели локализуется форма потери устойчивости [158, 234]. Если параллель s_0 расположена достаточно далеко от краев оболочки, форма потери устойчивости и критическая нагрузка не зависят от граничных условий и определяются по формулам (2.5.8). Этот случай имеет место, в частности, при потере устойчивости вытянутого эллипсоида вращения под действием внешнего давления (см. [36, 118, 158, 203, 234] и рис. 12, на котором показана форма потери устойчивости).

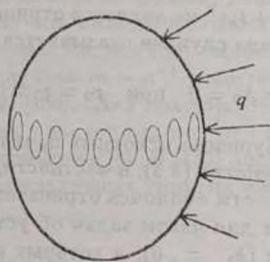


Рис. 12.

Если параллель s_0 совпадает с краем ($s_0 = s_2$), в окрестности края появляется точка поворота $s = s_*$ и для определения критической нагрузки используется уравнение (2.4.14). В частности, в задаче об устойчивости выпуклой оболочки вращения

при кручении вследствие моментов, приложенных к ее краям, наиболее слабой всегда оказывается крайняя параллель [158, 234]. При этом критическое значение параметра нагружения Λ представим в виде ряда по степеням $\mu^{1/3}$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu^{2/3}\Lambda_2 + \mu\Lambda_3 + O(\mu^{4/3}),$$

где Λ_0 определяется формулой (3.2), Λ_2 зависит только от функции (3.1), а Λ_3 зависит и от граничных условий при $s = s_2$.

3°. Интерес представляют две задачи об устойчивости, для которых функция (3.1) не зависит от s , т.е. наиболее слабая параллель не выделяется, а все точки оболочки в равной мере предрасположены к потере устойчивости. Речь идет о круговой цилиндрической оболочке при равномерном осевом сжатии и о сферической оболочке при равномерном внешнем давлении (рис. 13). Эти задачи сыграли решающую роль в развитии теории устойчивости оболочек, во-первых, в связи с широкими приложениями для расчета инженерных конструкций и, во-вторых, в связи с тем, что, несмотря на простоту формулировки, строгое решение этих задач (в нелинейной постановке) сосредоточило в себе все основные трудности задач об устойчивости оболочек [36, 50, 52, 118, 176, 200, 227, 238 и др.].

Путем подходящего выбора безразмерных переменных для цилиндрической оболочки при осевом сжатии и для сферической оболочки при внешнем давлении функции (3.1) можно представить в виде

$$f_c = (p^2 + q^2)^2 p^{-2} + (p^2 + q^2)^{-2} p^2, \quad f_s = p^2 + q^2 + (p^2 + q^2)^{-1}.$$

Минимум $\Lambda_0 = 2$ достигается на множестве значений p, q , что говорит о многообразии форм потери устойчивости, соответствующих одной и той же критической нагрузке. Например, для цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями форма потери устойчивости имеет вид

$$w_{mn} = w_0 \sin \frac{p_n s}{\mu} \sin \frac{q_m \varphi}{\mu}; \quad q_m = \mu m, \quad p_n = \frac{\mu n \pi R}{L},$$

где L — длина оболочки, а m и n — целые числа, такие, чтобы было выполнено приближенное равенство $p_n^2 + q_m^2 \approx p_n$. Приве-

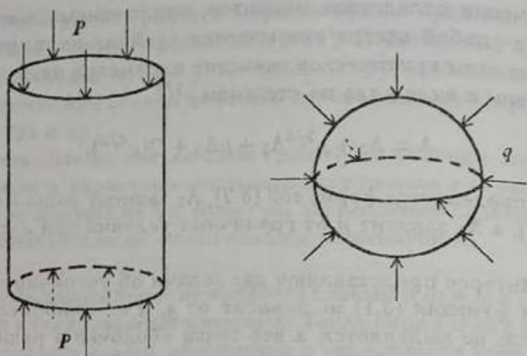


Рис. 13.

дем еще значения критических нагрузок в этих задачах в размерных переменных

$$T_1^0 = -\frac{Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R}, \quad q^0 = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R^2}, \quad (3.4)$$

где T_1^0 — критическое значение осевого усилия при потере устойчивости цилиндрической оболочки [50, 218], а q^0 — критическое давление для сферы [240]. Значения (3.4) принято называть классическими. Последующее развитие теории устойчивости оболочек в значительной мере связано с учетом различных возмущающих факторов (начальные несовершенства, граничные условия, моментные начальные напряжения, нелинейность), существенно влияющих на значения (3.4), в основном в сторону их уменьшения.

3.4. Колебания и устойчивость цилиндрических оболочек с шарнирно опертыми краями

1°. Остановимся еще на одном классе одномерных задач теории оболочек, которые приводятся к уравнению (2.1.1). Речь

идет о цилиндрических оболочках постоянной длины L с шарнирно опертыми криволинейными краями. Коэффициенты систем (1.9) или (1.10) не зависят от координаты s вдоль образующей, и после разделения переменных

$$w(s, x) = w(x) \sin \beta_n s, \quad \beta_n = \frac{n\pi R}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной x ($0 \leq x \leq x_0$), являющейся координатой вдоль направляющей. Для замкнутой в окружном направлении оболочки граничные условия заменяются условиями периодичности.

Для исследования нижней части спектра частот свободных колебаний запишем систему (1.9) в виде [16, 47]

$$\begin{aligned} \mu_1^4 \Delta \Delta w + \beta_n^2 k_2(x) \Phi + F_3 = 0, \quad \mu_1^4 \Delta \Delta \Phi - \beta_n^2 k_2(x) w = 0, \\ \Delta w = \frac{d^2 w}{dx^2} - \beta_n^2 w, \quad \mu_1^2 = \mu, \quad F_3 = -\Lambda w, \quad \omega^2 = \frac{\mu_1^4 \Lambda E}{\rho R^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $\mu_1 > 0$ — малый параметр, $k_2(x)$ — переменная (в общем случае) кривизна направляющей, Λ — искомый параметр частоты. В связи с различием выражений для ω^2 в (1.11) и (4.1) здесь порядок частоты снижается.

Задача об устойчивости оболочки такой формы под действием начальных усилий T_1^0, T_2^0 описывается той же системой уравнений (4.1), в которой

$$\begin{aligned} F_3 = \Lambda \left[\frac{d}{dx} \left(t_2(x) \frac{dw}{dx} \right) - \beta_n^2 t_1(x) w \right], \\ (T_1^0, T_2^0) = -\Lambda E h \mu_1^6 (t_1, t_2). \end{aligned}$$

В частности, в случае однородного внешнего нормального давления $t_1 = 0, t_2 = k_2(x)$.

Задача об устойчивости цилиндрической оболочки при неоднородном осевом сжатии описывается системой (1.9) при

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{dx^2} - \beta_n^2 w, \quad F_3 = -\Lambda t_1(x) \beta_n^2 w, \quad T_1^0 = -\Lambda E h t_1 \mu^2.$$

Во всех перечисленных случаях система (4.1) или (1.9) может быть представлена в виде (2.1.1). Поведение ее решений и

существование локализованных решений определяется наличием чисто мнимых корней характеристического уравнения (2.1.6). Положим в нем $\lambda = ip$ и разрешим его относительно Λ . Тогда для исследования колебаний оболочки получаем

$$\Lambda = f_1(p, x) = p^4 + \beta_n^4 k_2^2(x) p^{-4} \quad (\beta_n \sim 1),$$

а для исследования устойчивости при нормальном давлении и осевом сжатии имеем соответственно

$$\Lambda = f_2(p, x, \beta_n) = (p^2 + \beta_n^4 k_2^2(x) p^{-6}) t_2^{-1}(x), \quad (4.2)$$

$$\Lambda = f_3(p, x, q_n) = \frac{(p^2 + q_n^2)^4 + k_2^2(x) q_n^4}{t_1(x) q_n^2 (p^2 + q_n^2)^2}; \quad q_n = \mu \beta_n.$$

Во всех случаях при отыскании минимума функций f_i ($i = 1, 2, 3$) по p, x (см. (2.5.9)) находим, что минимум достигается при $p = p_0 > 0$. Если минимум достигается при изолированном значении $x = x_0$ (наиболее слабая образующая) и выполнено неравенство (2.5.10), то собственные значения $\Lambda^{(m)}$ асимптотически двукратны (см. (2.5.13)), а собственные функции имеют вид (2.5.12). Приведем некоторые результаты.

2°. Нижняя часть спектра асимптотически двукратных частот собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки определяется по формуле [16, 47]

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E\mu_1^4}{\rho R^2} 2\beta_n^2 k_{20} \left[1 + 4(m + 1/2)\mu_1 \beta_n^{-1} k_{20}^{-3/4} (k_{20}'')^{1/2} + O(\mu_1^2) \right], \quad (4.3)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots,$$

где k_{20} и k_{20}'' — значения кривизны $k_2(x)$ и ее второй производной, вычисленные на наиболее слабой образующей $x = x_0$, на которой кривизна $k_2(x)$ минимальна. Наименьшая частота получается при $m = 0, n = 1$.

Критическое значение внешнего давления p_0 при потере устойчивости некруговой цилиндрической оболочки средней длины таково [166]:

$$p_0 = \frac{4\pi\mu_1^6 E h}{3^{3/4} L} \left[1 + 3^{7/8} \mu_1 \left(\frac{L k_{20}''}{2\pi R} \right)^{1/2} + O(\mu_1^2) \right]. \quad (4.4)$$

При этом в продольном направлении образуется одна полуволна деформации ($\beta_n = \beta_1$ в (4.2)).

Критическое значение осевого сжимающего усилия T_1 при потере устойчивости некруговой цилиндрической оболочки при неоднородном осевом сжатии [144, 146, 234]

$$T_1 = T_1^0 \left[1 + \mu \left(\frac{8(1 - q_n)}{q_n} \gamma_0'' \right)^{1/2} + O(\mu^2) \right], \quad \gamma = \frac{k_2}{t_1}, \quad (4.5)$$

где T_1^0 — классическое значение критической нагрузки для круговой оболочки при однородном сжатии (см. (3.4)). На наиболее слабой образующей $x = x_0$ функция $\gamma(x)$ принимает наименьшее значение. Формула (4.5) применима лишь при $q_n < 1$. Случаи $q_n \approx 1$ и $q_n > 1$ требуют отдельного рассмотрения (см. [234]). В [144] рассмотрена задача об изгибе оболочки под действием момента. На примере этой задачи путем численного интегрирования системы уравнений отдельно найдены критические нагрузки для четной и нечетной форм потери устойчивости. Эти критические нагрузки оказались очень близки между собой, что подтверждает оценку (2.5.13) для асимптотически двукратных собственных значений (см. также [234]).

Переход в формулах (4.3), (4.4), (4.5) к случаю круговой цилиндрической оболочки осуществляется путем замены квадратной скобки на единицу. В частности, формула (4.4) дает классическое значение [233] критического давления при потере устойчивости круговой цилиндрической оболочки средней длины.

3.5. Колебания оболочек вращения с малым числом волн по параллели

Перейдем к исследованию таких соотношений между параметрами μ , m , Λ , при которых система уравнений (1.10) имеет одновременно интегралы с большим и с нулевым показателями изменчивости. В этом случае краевая задача для системы (1.10) вырождается в краевую задачу меньшего порядка.

В случае осесимметричных колебаний оболочки вращения $m = 0$, и систему уравнений (1.10) можно записать в виде (2.2.12)

$$\mu^4 \sum_{k=1}^6 a_k(s) \frac{d^k w}{ds^k} + \sum_{k=0}^2 b_k(s) \frac{d^k w}{ds^k} = 0,$$

$$b_2(s) = \frac{1}{R_2^2(s)} - \Lambda, \quad a_6 = 1, \quad (5.1)$$

где Λ то же, что и в формулах (1.11). На краях $s = s_1$ и $s = s_2$ заданы по три однородных граничных условия. Вырожденная (или безмоментная) задача заключается в отыскании решения уравнения

$$\sum_{k=0}^2 b_k(s) \frac{d^k w_0}{ds^k} = 0, \quad (5.2)$$

удовлетворяющего на каждом из краев по одному (тангенциальному) граничному условию. Тангенциальными называются условия, накладывающие ограничения на проекции перемещений или усилий на касательные к срединной поверхности направления. Например, в случае жесткой заделки края ($u = w = \frac{dw}{ds} = 0$) тангенциальным будет условие $u = 0$, накладывающее ограничение на проекцию перемещения u на направление образующей.

Уравнение (2.6.5) имеет вид

$$\lambda^4 + b_2(s) = 0. \quad (5.3)$$

Поэтому, если при всех s будет $b_2(s) > 0$, вырождение моментной задачи (5.1) в безмоментную задачу (5.2) регулярно.

В частности, в статике (т.е. при $\Lambda = 0$) вырождение всегда регулярно за исключением случая оболочки типа тора, у которой $R_2(s) = \infty$ на некоторых параллелях. Расчет статических напряжений в оболочках использует расчленение ее напряженного состояния на безмоментное состояние и краевой эффект [40, 41, 107, 109, 191].

Вырождение будет регулярным, если $\Lambda < \Lambda^{(1)}$, где $\Lambda^{(1)}$ вводится по формуле (2.3.10). При рассмотрении свободных колебаний собственные значения Λ будут иметь разложение (2.6.10), в котором в общем случае $\Lambda_1 \neq 0$, несмотря на то, что возмущающий оператор в (5.1) имеет множитель μ^4 . Слагаемое $\mu \Lambda_1$ в (2.6.10) появляется в результате удовлетворения граничных условий с помощью интегралов краевого эффекта.

При $\Lambda^{(1)} \leq \Lambda \leq \Lambda^{(2)}$ (см. (2.3.10)) промежуток интегрирования содержит точку (точки) поворота. Этот промежуток состоит из точек непрерывного спектра безмоментной задачи (5.2) [8,

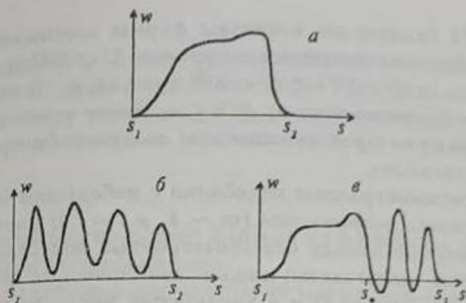


Рис. 14.

47]. При $\Lambda > \Lambda^{(1)}$ для моментной задачи (5.1) расстояния между соседними точками спектра имеют порядок μ [47].

Пусть $\Lambda > \Lambda^{(2)}$. В этом случае точек поворота нет. Уравнение (5.3) имеет одну пару чисто мнимых корней, ибо $b_2 < 0$. Вырождение (5.1) в (5.2) регулярным не является, а уравнение (2.7.2) имеет вид [47]

$$\Delta(\Lambda, \mu) = \Delta_0(\Lambda) \cos[\mu^{(-1)} \delta(\Lambda)] + O(\mu) = 0, \quad \delta = \int_{s_1}^{s_2} (-b_2)^{1/4} ds, \quad (5.4)$$

где уравнение $\Delta_0(\Lambda) = 0$ дает точки спектра Λ_0 безмоментной задачи (5.2) (спектр которой при $\Lambda > \Lambda^{(2)}$ дискретен и имеет точку сгущения при $\Lambda = \infty$). Если $\Delta_0(\Lambda)$ не близко к нулю (точнее, $|\mu^{-1} \Delta_0| \gg 1$), уравнение (5.4) принимает вид

$$\cos(\mu^{-1} \delta) = o(1), \quad \mu \rightarrow 0 \quad (5.5)$$

и дает спектр, расстояния между соседними точками которого имеют порядок μ [47, 123, 133, 154]. Пусть $\Lambda - \Lambda_0 \sim \mu$, где $\Delta_0(\Lambda_0) = 0$. Можно показать, что вблизи $\Lambda = \Lambda_0$ корни (5.5) раздвигаются и появляется один лишний корень. Говорить же, что корню Λ_0 соответствует определенный корень уравнения (5.4), не всегда возможно. Эволюция форм собственных колебаний оболочки при переходе через точку $\Lambda = \Lambda_0$ рассматривается в [47].

На рис. 14 схематично показаны формы осесимметричных колебаний оболочки вращения в случаях $\Lambda < \Lambda^{(1)}$ (рис. 14, а), $\Lambda > \Lambda^{(2)}$ (рис. 14, б) и $\Lambda^{(1)} < \Lambda < \Lambda^{(2)}$ (рис. 14, в). В последнем случае $R_2' > 0$, промежуток $s_1 \leq s \leq s_2$ имеет точку поворота $s = s_*$, справа от которой функция $w(s)$ содержит быстро осциллирующее слагаемое.

Для неосесимметричных колебаний с небольшим числом волн в окружном направлении ($m \sim 1$, $\mu \rightarrow 0$) справедливы все изложенное по поводу осесимметричных колебаний [8, 47, 159]. Различие заключается лишь в повышении на два порядка уравнений (5.1) и (5.2) и в увеличении числа тангенциальных граничных условий на одно (нетангенциальных граничных условий, которые отбрасываются при переходе от задачи (5.1) к задаче (5.2), по-прежнему, два).

3.6. Низкочастотные колебания оболочек вращения

1°. Обсудим ряд задач о свободных колебаниях оболочек вращения, в которых $\Lambda(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, т.е. происходит уменьшение порядка некоторых частот собственных колебаний. Это уменьшение связано со слабым закреплением краев $s = s_1$ и $s = s_2$ оболочки и (или) с формой ее срединной поверхности.

Вводим в рассмотрение *тангенциальные закрепления* $u = 0$ и $v = 0$ и *нетангенциальные закрепления* $w = 0$ и $dw/ds = 0$ (здесь u, v, w — проекции перемещения на касательные к координатным линиям срединной поверхности и нормаль). При отсутствии закрепления обращается в нуль соответствующее обобщенное усилие (см. (1.8)).

Вопрос о влиянии слабого закрепления краев на снижение частот собственных колебаний рассматривался в работах [22, 42, 47, 113, 132, 162, 163]. Перемещения оболочки, при которых срединная поверхность не испытывает тангенциальных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$, называются *изгибаниями*. Малые изгибания оболочки вращения с m волнами в окружном направлении удовлетворяют системе уравнений

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \omega = 0, \quad (6.1)$$

где в соответствии с (1.3)

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{B'}{B}u + \frac{mv}{B} - \frac{w}{R_2}, \quad \omega = B \frac{d}{ds} \left(\frac{v}{B} \right) - \frac{mu}{B}$$

Если существует ненулевое решение системы (6.1), удовлетворяющее всем закреплениям, будем говорить, что оболочка имеет *истинное изгибание*. При наличии истинных изгибаний происходит наибольшее снижение частоты колебаний [47, 88, 134]

$$\Lambda \sim \mu^4, \quad (6.2)$$

а сами колебания по форме, близкой к изгибаниям, называются колебаниями *Рэлея* типа.

Частоты собственных колебаний могут быть также найдены из условия минимума функционала Рэлея

$$\Lambda = \min_{u,v,w} \frac{\Pi_\epsilon + \mu^4 \Pi_\kappa}{T}, \quad (6.3)$$

где

$$\Pi_\epsilon = \frac{1}{1-\nu^2} \iint (\epsilon_1^2 + 2\nu\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 + \frac{1-\nu}{2}\omega^2) dG,$$

$$\Pi_\kappa = \iint (\kappa_1^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1-\nu)\tau^2) dG,$$

$$T = \iint (u^2 + v^2 + w^2) dG.$$

В (6.3) минимум берется по перемещениям u, v, w , удовлетворяющим всем закреплениям, а интегрирование ведется по всей срединной поверхности. Через Π_ϵ , Π_κ и T обозначены соответственно величины, пропорциональные потенциальным энергиям растяжения и изгиба оболочки и ее кинетической энергии.

Из условия (6.3) становится ясно, почему наличие изгибаний или близких к ним деформаций ведет к существенному снижению частот колебаний.

Для определения низших частот колебаний оболочек энергетический метод Рэлея был использован в работах [47, 134, 163].

2°. Пусть система (6.1) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее всем тангенциальным закреплениям и не удовлетворяющее нетангенциальным закреплениям. Такое решение называем *тангенциально возможным изгибанием* (этот термин введен А.Л. Гольденвейзером). Тогда для определения частот

и форм колебаний эффективным оказывается метод Вишика-Люстерника. Решение системы (6.1) удовлетворяет и системе безмоментных уравнений (1.10) при $\mu = 0$, $\Lambda_0 = 0$. Построение интегралов краевого эффекта, ликвидирующих невязки в выполнении нетангенциальных закреплений, позволяет найти нулевые члены в разложении (2.6.10) параметра Λ . При этом $\Lambda \sim \mu$, если имеются невязки в выполнении условий $w = 0$, $\Lambda \sim \mu^3$, если тангенциально возможное изгибание не удовлетворяет лишь условиям $w' = 0$.

Приведенные оценки порядка Λ (т.е. $\Lambda \sim \mu^\alpha$) неравномерны по m , ибо при $m \sim \mu^{-1}$ имеем $\Lambda \sim 1$ (см. п. 3.2).

3°. Снижение порядка частот колебаний происходит для оболочек нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. При построении нижней части спектра хорошо закрепленной оболочки нулевой гауссовой кривизны ($R_1^{-1} = 0$) следует считать [4, 155]

$$m \sim \mu^{-1/2}, \quad \Lambda \sim \mu^2. \quad (6.4)$$

При этом предположении система (1.10) или (2.2) имеет четыре интеграла краевого эффекта вида (2.2.1) и четыре интеграла, имеющие разложение (2.2.11):

$$w(s, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(s),$$

где $w_0(s)$ удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$\frac{1}{R_2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{B^4}{R_2} \frac{d^2 w_0}{ds^2} \right) + \left(\frac{\mu^4 m^8}{B^4} - \Lambda m^4 \right) w_0 = 0. \quad (6.5)$$

В силу оценок (6.4) $\mu^4 m^8 \sim 1$, $\Lambda m^4 \sim 1$, поэтому все коэффициенты уравнения (6.5) имеют порядок единицы. Для конической оболочки B , R_2 — линейные функции s ($B = R_2 \cos \alpha$, α — угол при вершине конуса), а для цилиндрической оболочки можно считать $B = R_2 = 1$ (вследствие подходящего выбора безразмерных переменных).

Вырождение при $\mu \rightarrow 0$ краевой задачи (1.10) в задачу, состоящую из уравнения (6.5) и двух (как правило, тангенциальных) граничных условий на каждом из краев $s = s_1$, $s = s_2$, явля-

ется регулярным. Уравнение (6.5) принято называть *полубезмоментным*, ибо при его выводе сохранена жесткость оболочки на изгиб в окружном направлении (слагаемое с множителем m^8).

4°. Исследованию нижней части спектра оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны ($R_1 R_2 < 0$) посвящены работы [82, 83] (см. также [47, 163]). Рассмотрим сначала случай, когда закрепление краев оболочки препятствует появлению изгибов. Тогда в окрестности наименьшей частоты

$$m \sim \mu^{2/3}, \quad \Lambda \sim \mu^{4/3}, \quad (6.6)$$

система (1.10) имеет четыре интеграла краевого эффекта вида [47]

$$w^{(p)}(s, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/3} w_k^{(p)}(s) \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{s_0}^s \lambda_p(s) ds + \mu^{-1/3} \int_{s_c}^s \lambda_p'(s) ds \right\},$$

$$\lambda_p^4 + \frac{1}{R_2^2(s)} = 0, \quad w_0^{(p)} = B^{-1/2} \lambda_p^{-3/2}, \quad p = 1, 2, 3, 4. \quad (6.7)$$

Четыре других интеграла системы (1.10) имеют показатель изменчивости $t = 2/3$ и являются осциллирующими. Они представимы в виде асимптотических рядов

$$w^{(p)}(s, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k^{(p)}(s) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{s_0}^s \lambda_p(s) ds \right), \quad \varepsilon = \mu^{2/3} > 0, \quad (6.8)$$

где

$$\left(\lambda_p^2 - \frac{\rho R_2}{B R_1} \right)^2 = 0, \quad \rho = m \varepsilon, \quad p = 5, 6, 7, 8. \quad (6.9)$$

Уравнение (6.9) имеет кратные чисто мнимые корни, поэтому функции $w_k^{(p)}$ удовлетворяют уравнениям второго порядка, причем

$$\frac{d}{ds} \left(g(s) \frac{dy}{ds} \right) + \left(\rho^2 \Lambda_0' f(s) - \frac{\rho^6}{g(s)} \right) y = 0, \quad (6.10)$$

$$\Lambda = \varepsilon^2 \Lambda', \quad w_0^{(p)} = \left| \frac{R_1 R_2}{B} \right|^{1/4} y, \quad f(s) = \frac{\rho R_2}{2|\lambda_p|},$$

$$g(s) = \frac{2R_1^2 B^3 |\lambda_p|}{\rho R_2 (R_2 - R_1)^2}.$$

Приближенное решение получаем, подставляя интегралы в тангенциальные граничные условия. В результате для невозмущенной функции $y(s)$ в зависимости от рассматриваемого варианта тангенциальных граничных условий приходим к той или иной задаче Штурма—Лиувилля [47, 82, 83]. Построение следующих приближений и удовлетворение нетангенциальным граничным условиям с помощью интегралов (6.7) позволяет получить разложение Λ в виде

$$\Lambda \approx \mu^{4/3}(\Lambda'_0 + \mu^{2/3}\Lambda'_2 + \mu\Lambda'_3 + \dots),$$

где Λ'_0 и Λ'_2 зависят только от тангенциальных граничных условий, а Λ'_3 зависит от нетангенциальных граничных условий интегралов (6.7).

При приближении параметров оболочки к таким, для которых при небольших m имеются изгибания (истинные или тангенциально возможные), происходит дальнейшее уменьшение вплоть до величин порядка μ^4 [47, 82, 83, 113, 114].

5°. Интересным с точки зрения асимптотического интегрирования является рассмотрение оболочки вращения, имеющей участки положительной и отрицательной гауссовой кривизны. Пусть при $s_1 \leq s < s_*$ будет $R_1 > 0$, при $s_* < s \leq s_2$ будет $R_1 < 0$, причем $k_1(s_*) = 0$, $k'_1(s_*) < 0$, где $k_1(s) = (R_1(s))^{-1/2}$. Точка s_* изменения знака кривизны k_1 является точкой перегиба. В окрестности этой точки интегралы (6.8) неприменимы, ибо уравнение (6.10) имеет особую точку при $s = s_*$ ($g(s_*) = 0$). Построение асимптотических разложений четырех интегралов системы (1.10) использует эталонные функции Эйри [115, 116, 169], подобно (2.3.5). В этих же работах рассмотрен ряд краевых задач для свободных колебаний и устойчивости оболочек такой формы.

3.7. Вырождение краевых задач устойчивости оболочек

1°. Рассмотрение задач об устойчивости оболочек вращения под действием осесимметричной нагрузки в значительной мере аналогично анализу задач о свободных колебаниях. Повторимся, остановимся лишь на некоторых обстоятельствах, отличающих

эти задачи друг от друга, и назовем работы, в которых опубликованы соответствующие результаты.

В первом уравнении (2.2) третье слагаемое $-\Lambda w$ заменяется $\mu^2 \Delta_1 w$, причем

$$\Delta_1 w = -\frac{m^2}{B^2} t_2 w + \frac{im}{B} \left(2t_3 \frac{dw}{ds} + w \frac{dt_3}{ds} \right) + \frac{1}{B} \frac{d}{ds} \left(B t_1 \frac{dw}{ds} \right), \quad (7.1)$$

где t_i — безразмерные начальные усилия (1.12).

Качественное исследование устойчивости оболочек в линейном приближении проведено в работах [36, 42, 44, 50, 118, 173, 174, 200, 234] и др. Проанализируем некоторые результаты.

2°. Если оболочка с любой формой срединной поверхности имеет истинное изгибание с небольшим числом m волн в окружном направлении, то [42, 44, 173]

$$\Lambda \sim \mu^2, \quad (7.2)$$

если нагрузочный член (7.1) производит работу на этом изгибании. Сравнение оценки (7.2) с оценкой (6.2) для колебаний показывает, что в случае задач устойчивости наличие изгибаний приводит к меньшему снижению параметра Λ , чем в случае колебаний. Это же различие сохраняется и для слабо закрепленных оболочек. В частности, наличие тангенциально возможных изгибаний в общем случае не ведет к снижению порядка критической нагрузки [173]. Однако если изгибание не удовлетворяет только условию $w' = 0$, то снижение порядка Λ происходит.

3°. Для оболочки вращения нулевой кривизны вместо уравнения (6.5) получаем уравнение

$$\frac{1}{R_2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{B^4}{R_2} \frac{d^2 w_0}{ds^2} \right) + \frac{\mu^4 m^8}{B^4} w_0 + \mu^2 \Lambda m^4 \Delta_1 w_0 = 0, \quad (7.3)$$

где $\Delta_1 w$ определено в (7.1). Уравнение (7.3) позволяет получить приближенные решения некоторых задач устойчивости оболочек, которые, как и в случае колебаний, могут быть уточнены путем введения в рассмотрение интегралов краевого эффекта.

В частности, для хорошо закрепленной оболочки в случае внешнего нормального давления $t_2 > 0$ и

$$m \sim \mu^{-1/2}, \quad \Lambda \sim \mu;$$

в случае кручения под действия моментов, приложенных к торцам, имеем $t_2 = 0, t_3 \neq 0$ и

$$m \sim \mu^{-1/2}, \quad \Lambda \sim \mu^{1/2};$$

наконец, в случае возникновения осевой сжимающей силы $t_2 = t_3 = 0, t_1 > 0$ и $\Lambda \sim 1$. В последнем случае уравнение (7.3) не дает приближенного решения, и следует исходить из системы (2.2).

Устойчивость цилиндрической оболочки под действием внешнего давления и (или) кручения исследована во многих работах [50, 176, 200, 238]. В [99] рассмотрена устойчивость конической оболочки под действием нормального внешнего давления. В [170] обсуждается вопрос о расщеплении граничных условий, т.е. о выборе двух условий (на каждом из краев), которым нужно удовлетворить при решении уравнения (7.3).

Отметим еще работы [101, 102, 172], в которых исследуются свободные колебания и устойчивость оболочек, близких к оболочкам нулевой гауссовой кривизны. Степень близости определяется тем, что кривизна образующей $k_1 = 1/R_1$ мала ($k_1 \sim \mu$). Построение нулевого приближения для задач об устойчивости сводится к уравнению четвертого порядка

$$\Delta_k(B^4 \Delta_k w_0) + \frac{\mu^4 m^8}{B^4} w_0 + \mu^2 m^4 \Lambda \Delta_t w_0 = 0, \quad (7.4)$$

где дифференциальный оператор Δ_k определен в (2.2). Уравнение (7.4) при $1/R_1 = 0$ переходит в (7.3).

4°. Устойчивость оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны под действием осесимметричной нагрузки рассматривалась в работах [3, 84, 113, 114]. Исследование устойчивости аналогично исследованию низкочастотных колебаний. Построение асимптотических разложений для формы потери устойчивости и критической нагрузки в нулевом приближении приводится к задаче Штурма—Лиувилля для уравнения вида (6.10). При этом

$$m \sim \mu^{-2/3}, \quad \Lambda \sim \mu^{-2/3}.$$

Если же при небольшом m возможны изгибания, удовлетворяющие всем закреплениям (кроме, быть может, $w' = 0$), то происходит дальнейшее снижение критической нагрузки вплоть до величин порядка μ^2 [113, 114].

3.8. Колебания вращающихся оболочек вращения

В данном разделе мы рассмотрим особенности спектра частот собственных колебаний вращающихся тонких упругих оболочек. К основной особенности спектра следует отнести связанное с вращением расщепление двукратных при $m \geq 1$ собственных частот [81]. Кроме того, вращение оболочки вызывает сдвиг частот.

1°. Рассмотрим колебания оболочки вращения, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси симметрии. Пусть оболочка ограничена двумя параллелями или имеет форму купола. В отличие от невращающейся оболочки (см. п. 3.2) в этом случае при разделении переменных частные решения представляются в виде суперпозиции бегущих волн [220, 221]

$$u[w](s, \varphi, t) = u[w](s) \cos(m\varphi - \omega t + \alpha),$$

$$v(s, \varphi, t) = v(s) \sin(m\varphi - \omega t + \alpha),$$

где $U = (u, v, w)$ — вектор перемещений.

Уравнения, описывающие такие колебания, после разделения переменных имеют вид (1.10) с дополнительными операторами, порожденными вращением,

$$(\mu^4 N + L + \omega_*^2 + 2\omega_* \Omega_* L_c + \Omega_*^2 L_\Omega) U = 0, \quad (8.1)$$

где Ω_* и ω_* — безразмерные частота колебаний и угловая скорость вращения оболочки, связанные с соответствующими размерными величинами по формулам (см. (1.11))

$$\omega_* = \sqrt{\frac{\rho R^2}{E}} \omega, \quad \Omega_* = \sqrt{\frac{\rho R^2}{E}} \Omega$$

(далее * опускаем). Операторы N и L в (8.1) те же, что и в (1.10), оператор L_c , учитывающий силы инерции Кориолиса, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -B' & 0 \\ -B' & 0 & B/R_2 \\ 0 & B/R_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее слагаемое в уравнении (8.1) учитывает силы инерции переносного движения и связанные с ними начальные осесимметричные напряжения. Конкретный вид последнего слагаемого

может быть различным в зависимости от сохранения или отбрасывания тех или иных малых членов [36, 205, 218]. Главная часть этого оператора получена в [146].

Предположение о малости начальных деформаций влечет за собой малость Ω^2 по сравнению с 1.

2°. Краевая задача для определения собственных частот невращающихся оболочек рассмотрена в п. 3.2, 3.5, 3.6. Пусть ω_0 простое собственное значение, а U_0 собственная функция для этой задачи. Перейдем к случаю $\Omega \neq 0$, $\Omega^2 \ll 1$. Через ω_1, ω_2 и $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ обозначим собственные значения и функции задачи для вращающейся оболочки, соответствующие ω_0^2 при $\Omega = 0$. Представим $\omega_{1,2}$ в виде

$$\omega_{1,2} = \pm \alpha(\Omega) + \beta(\Omega),$$

$$\alpha(\Omega) = \omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Omega^{2i} \alpha_{2i}, \quad \beta(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega^{2i-1} \beta_{2i-1},$$

$$U^{(k)}(\Omega) = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{ik} \Omega^i U_i, \quad k = 1, 2.$$

Тогда метод возмущений дает следующие выражения для определения первых коэффициентов в указанных разложениях

$$\beta = \beta_1 \Omega + O(\Omega^3), \quad \beta_1 = - \frac{(L_c U_0, U_0)}{(U_0, U_0)}, \quad (8.2)$$

$$\alpha_2 = \frac{\beta_1^2}{2\omega_0} - \frac{(L_c U_1, U_0) + \beta_1 (U_1, U_0)}{(U_0, U_0)} - \frac{L_{\Omega}(U_0, U_0)}{2\omega_0 (U_0, U_0)}, \quad (8.3)$$

где через (f, g) обозначено скалярное произведение в L_2 , определяемое формулой

$$(f, g) = \int_{s_1}^{s_2} \sum_i f_i g_i B ds.$$

Отметим, что для осесимметричных колебаний ($m = 0$) коэффициент $\beta = 0$ и вращение вызывает только сдвиг частот без расщепления. Расщепление частот в поле гироскопических

сил и прецессия форм собственных колебаний имеют аналогом, например, прецессию Лармора или колебания маятника Фуко.

Подробнее эффект расщепления частот обсуждается в [220, 221, 230, 241].

Иследуем влияние вращения на различные виды колебаний в соответствии с классификацией монографии [47]. Для удобства введем обозначения

$$\Omega = \mu^q, \quad q > 0, \quad \Delta_{1,2} = \frac{|\omega_{1,2}| - \omega_0}{\omega_0}.$$

Тогда для квазипоперечных колебаний малой изменяемости получим

$$\Delta \sim \mu^{p+q} + \mu^{kc}, \quad c = q - p, \quad 0 \leq p \leq 1,$$

для квазипоперечных колебаний большой изменяемости —

$$\Delta \sim \mu^{3p+q-2} + \mu^{kc}, \quad c = q + p - 1, \quad 1 \leq p < 2,$$

и для квазитангенциальных колебаний —

$$\Delta \sim \mu^{p+q} + \mu^{2q}, \quad 0 \leq p < 1,$$

где p — показатель изменяемости главного напряженнодеформированного состояния оболочки, а $k = 2$ при $c > 0$ и $k = 1$ при $c < 0$.

В указанных оценках первые слагаемые дают порядок величины $\beta\omega_0^{-1}$, а вторые — порядок величины $(\alpha - \omega_0)\omega_0^{-1}$. Отсюда следует, что для рассмотренных видов колебаний разность 2β , между частотами ω_1 и $-\omega_2$ относительно мала. Что касается абсолютного значения β , то в работе [32] было показано, что $-1 \leq \beta \leq 0$, а в статье [55] — что $\beta = -1$ только для $m = 1$ и только для кольца и цилиндра, не испытывающих осевого смещения ($u = 0$).

Для квазитангенциальных колебаний малыми оказываются величины Δ . Для квазипоперечных колебаний влияние вращения на указанные разности описывается параметром c . При $c > 0$ частоты сдвигаются относительно мало, а при $c \leq 0$ сдвиг оказывается весьма значительным. Наиболее существенное влияние вращение оказывает на частоты квазипоперечных колебаний с промежуточной изменяемостью ($p = 1$), так как в этом случае параметр c минимален. Это влияние растёт с

уменьшением толщины оболочки h и с увеличением скорости ее вращения Ω .

При $c \leq 0$ метод возмущений, описанный выше, не применим, а при $c > 0$ он позволяет оценить влияние вращения. Пусть $c > 0$ и пусть известны ω_0 и $U_0(s)$ для невращающейся оболочки. Коэффициент расщепления (бифуркации) β определяется по формулам (8.2), а для вычисления α_2 по формуле (8.3) необходимо знать решение U_1 .

Для квазипоперечных колебаний с $p > 0$ порядки различных слагаемых в выражении для α_2 различны, и с погрешностью порядка μ^{2p} находим

$$\alpha_2 = -\frac{(L_{\Omega}U_0, U_0)}{2\omega_0(U_0, U_0)}$$

Для квазипоперечных колебаний с $p = 0$ и любых квазитангенциальных колебаний подобные упрощения не вводятся, однако они и не нужны, поскольку в этих случаях $\alpha_2 \simeq h^0$, и с погрешностью порядка Ω^2 можно считать $\alpha = \omega_0$.

3°. Особый интерес представляют колебания с низшими частотами ω_0 , среди которых мы выделим класс сверхнизких частот, величины которых имеют порядок μ^{γ} ($\omega_0 \simeq \mu^{\gamma}$, $\gamma > 0$).

Появление сверхнизких частот может быть обусловлено различными обстоятельствами. Одно из них — это существование у оболочки истинных изгибов (см. п. 3.6). Для оболочек простой геометрии (конус, сфера) первые члены в разложении решений по h имеют простые аналитические выражения [137]. Приведем здесь формулы описывающие влияния вращения на частоты колебаний 1) — конических или цилиндрических оболочек средней длины для больших m [137]; 2) — длинных цилиндрических оболочек [55, 137] и 3) — сферических оболочек [55, 60, 137].

В первом случае

$$\omega = \beta_1 \Omega \pm (\omega_0^2 + m^2 \Omega^2)^{1/2}, \quad \beta_1 = -\frac{2 \sin^2 \theta}{m}, \quad \sin \theta = \frac{B}{R_2}, \quad (8.4)$$

причем для цилиндрической оболочки $\theta = \pi/2$. Отметим, что ω_0 принимает наименьшее значение $\omega_0 \sim \mu$ при $m \sim \mu^{-1/2}$ (см.

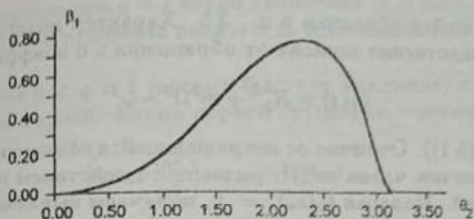


Рис. 15.

п. 3.5), а формула (8.4) справедлива для частот, лежащих вблизи наименьшей частоты, для которых $m \sim \mu^{-p}$ ($0 < p < 1$).

Во втором случае ($l \gg 1$)

$$\beta_1 = -\frac{2m}{m^2 + 1 + D_k m^{-2l-2}}.$$

Здесь коэффициент D_k зависит от граничных условий и числа волн вдоль меридиана, $l = L/R$ — безразмерная длина оболочки. Интересно, что только в этом случае при $k = 0$, $m = 1$ возможно обращение частоты колебаний в 0, свидетельствующее о потере устойчивости, связанной с вращением оболочки.

В статье [60] был исследован случай низкочастотных колебаний сферического купола $B = \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \theta_2$, для которого в случае чисто изгибных колебаний

$$\beta_1 = -2m \frac{I_m^1}{I_m^2 + I_m^3 + I_m^4},$$

где I_m^i — функции от θ_2 , выражаемые через квадратуры. На рис. 15 приведена зависимость коэффициента расщепления β_1 от величины угла раствора купола.

Более подробно влияние граничных условий, а также края θ_1 исследовано в [55].

4°. Рассмотрим теперь влияние вращения на решения системы (8.1). Начнем со случая осесимметричных колебания и колебаний с малым числом волн по параллели, рассмотренного для

невращающейся оболочки в п. 3.5. Характер интегралов при $\mu \rightarrow 0$ существенно зависит от обращения в 0 коэффициента

$$b_2(s) = R_2^{-2} + m^2 \Omega^2 - \omega^2$$

(сравни с (5.1)). Отличие от невращающейся оболочки проявляется в наличии члена $m^2 \Omega^2$, вызванного действием начальных напряжений. Полагая $b_2(s_*) = 0$, получаем выражение, определяющее точку поворота s_* . Таким образом, в случае малого m в промежутках, не содержащих точки поворота, а также при $B \neq 0$ система содержит четыре регулярных безмоментных интеграла и четыре квазипоперечных интеграла с большой изменчивостью, имеющие вид (2.2.1)

$$x_n(s) = \mu^{\gamma(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k x_n^{(k)}(s) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{s_1}^s \lambda_n ds\right),$$

где

$$\lambda_n = b^{1/4} \exp\left(\frac{(n-1)\pi i}{2}\right), \quad n = 1, \dots, 4.$$

Рассмотрим теперь неосесимметричные колебания при ($m \sim \mu^{-1}$, $\omega \sim 1$). В этом случае все интегралы системы будем искать в виде (2.3)

$$x_{kn}(s, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i x_{kn}^{(i)}(s) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{s_1}^s \lambda_n ds\right), \quad k, n = 1, \dots, 8.$$

Для определения λ получаем уравнение (см. (2.1.6)) четвертой степени относительно λ^2 , где s , ω , Ω , m являются параметрами:

$$\det(A^{(0)} - \lambda E) = 0. \quad (8.5)$$

В формировании λ участвуют только коэффициенты $a_{kn}^{(0)}$ системы уравнений колебаний. Определим, в каких случаях вращение оказывает влияние на величину λ . Считая $\Omega = \mu^q$, определим, что порядок старшего члена матрицы $L_c \Omega$ равен $\mu^{q/2}$, а порядок старшего члена матрицы $\Omega^2 L_\Omega^2$ равен μ^{-2+2q} . Следовательно, при $q > 1$ вращение не оказывает влияния на формирование λ . При $0 < q \leq 1$ изменится коэффициент $a_{85}^{(0)}$, входящий в уравнение (8.5).

В результате при $q = 1$ корни уравнения (8.5) имеют порядок $\lambda \sim 1$ и во всех решениях показатель изменяемости равен 1 (по μ).

В случае $0 < q < 1$ (весьма быстрое вращение) существует две группы корней. Корни первой группы определяются уравнением

$$\left(\lambda^2 - \frac{m^2}{B^2}\right)^2 + m^2 \Omega^2 \mu^{q-2} = 0.$$

Эти корни имеют порядок $\mu^{(q-1)/2}$, а интегралы уравнений имеют показатель изменяемости $(3 - q)/2$. Порядок корней второй группы, определяемых уравнением

$$(1 - \nu^2) \left(\frac{m^2}{B^2 c R_1}\right)^2 + m^2 \Omega^2 \mu^{q-2} \lambda^4 = 0,$$

равен $\mu^{(1-q)/2}$, а интегралы уравнений имеют показатель изменяемости $(q + 1)/2$. Данный случай менее интересен, так как при таких q не существует чисто мнимых корней и, следовательно, осциллирующих интегралов. Для того чтобы они существовали, следует рассмотреть частоту ω порядка не менее μ^{q-1} . Более подробно интегралы уравнений колебаний вращающихся оболочек представлены в [137].

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

4.1. Введение

В зависимости от круга рассматриваемых задач асимптотические методы интегрирования уравнений с частными производными отличаются большим разнообразием. Ограничимся анализом методов, находящих применение в задачах механики деформируемого твердого тела, особенно в задачах теории тонких оболочек и пластин. Методы, используемые в задачах вязкой жидкости, не обсуждаются.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lw \equiv \sum_{|k|=0}^m a_k(x) \frac{\partial^k w}{\partial x_k} = f(x), \quad (1.1)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad k = (k_1, \dots, k_n), \quad |k| = k_1 + \dots + k_n$$

в области D пространства R_n . Основная форма асимптотических разложений решений уравнения (1.1)

$$w(x, \mu) \simeq \Phi(x, \mu) \exp\{\lambda S(x, \mu)\}, \quad (1.2)$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, $\lambda = \mu^{-t}$ — связанный с ним большой параметр (t — показатель изменчивости функции (1.2) (см. п. 1.7)), функции Φ и S ищутся в виде рядов

$$\Phi(x, \mu) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{\alpha_j} \Phi_j(x), \quad \alpha_{j+1} > \alpha_j,$$

$$S(x, \mu) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{\beta_j} S_j(x), \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_{j+1} > \beta_j. \quad (1.3)$$

Существенными у функции S являются лишь слагаемые, для которых $\beta_j - t < 0$. Остальные слагаемые могут быть взяты

равными нулю за счет изменения функции Φ . Часто функция S может быть выбрана не зависящей от μ .

В одних задачах от параметра μ зависят коэффициенты a_k в (1.1), в других параметр μ содержит граничные условия [34, 39], в третьих параметр μ вводится формально для построения решений с большим показателем изменчивости.

Если $\operatorname{Re} S$ отлична от постоянной, функция (1.2) описывает экспоненциально растущие или затухающие решения; если $\operatorname{Re} S = 0$, $\operatorname{Im} S$ отлична от постоянной, то функция (1.2) быстро осциллирующая. В окрестностях отдельных поверхностей или линий (называемых *каустиками*) представление (1.2) становится непригодным. Каустикам в одномерном случае соответствуют точки поворота.

Для построения коэффициентов Φ_j , S_j в (1.3) решение (1.2) подставляется в уравнение (1.1) и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях μ . Для определения $S_0(x)$ старшие коэффициенты дают нелинейное уравнение

$$H(p, x) = 0, \quad p = \left\{ \frac{\partial S_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial x_n} \right\}$$

относительно частных производных первого порядка функции S_0 . Из последующих приближений находятся уравнения для определения S_j ($j > 0$) и Φ_j . Для частных случаев эти уравнения будут рассмотрены далее.

Вопрос о том, являются ли решения (1.2), формально удовлетворяющие уравнению (1.1), асимптотическими разложениями точных решений при $\mu \rightarrow 0$, не имеет в настоящее время окончательного решения и далее не обсуждается.

4.2. Уравнение Гельмгольца и его обобщение

1°. Коротковолновую асимптотику решений уравнения Гельмгольца в R_n

$$\Delta w + \frac{\lambda^2}{c^2} w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (2.1)$$

рассмотрим в качестве примера, отражающего основные особенности асимптотических разложений (1.2). Здесь λ — большой параметр, а функция $c = c(x)$ предполагается бесконечно дифференцируемой.

При $n = 3$ уравнение (2.1) описывает распространение звука с переменной скоростью $c(x)$. При $n = 2$ оно описывает установившиеся колебания мембраны с переменной плотностью $\rho(x) = (c(x))^{-2}$. В обоих случаях λ — частота колебаний.

Формальное асимптотическое решение уравнения (2.1) имеет вид [9, 24]

$$w(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i\mu)^k w_k(x) e^{i\lambda\tau(x)}, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad (2.2)$$

где $\tau(x)$ удовлетворяет уравнению эйконала

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad \nabla = \bar{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \bar{i}_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

а коэффициенты $w_k(x)$ находятся из уравнений переноса

$$2\nabla\tau\nabla w_k + w_k\Delta\tau = \Delta w_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad w_{-1} = 0. \quad (2.3)$$

Введем систему лучевых ортогональных криволинейных координат α, τ таким образом, что

$$x_i = x_i(\alpha, \tau), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

При фиксированных α_j формулы (2.4) дают линии, называемые лучами и являющиеся экстремальными функционала Ферми

$$\tau = \int_{x_0}^x \frac{ds}{c(s)}, \quad ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

В результате интегрирования уравнения (2.3) при $k = 0$ получаем [9]

$$w_0(x) = \psi(\alpha)c(x)J^{-1/2},$$

где $\psi(\alpha)$ — произвольная функция, определяемая из граничных условий, а J — якобиан преобразования (2.4). В [9] приведены в виде квадратур также коэффициенты $w_k(x)$ при $k > 0$.

На огибающих семейства лучей (2.4) $J = 0$, и представление (2.2) становится непригодным. Далее рассматриваются частные случаи, в которых вместо (2.2) построены другие разложения.

Лучевые решения (2.2) описывают достаточно широкий класс решений уравнения (2.1). Произвол имеется как при выборе криволинейных координат (2.4), так и при интегрировании уравнения (2.3). Этим произволом следует воспользоваться для удовлетворения граничным условиям. Как правило, при выборе криволинейных координат (2.4) принимается во внимание форма рассматриваемой области. Граничные же условия удовлетворяются при интегрировании уравнения (2.3).

2°. Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda^2}{c^2} w = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad (x_1, x_2) \in \Gamma$$

на собственные значения в области G на плоскости ($n = 2$), ограниченной гладкой замкнутой выпуклой кривой Γ . За исключением случаев, когда переменные x_1, x_2 разделяются, эта задача не имеет аналитического решения даже при $c(x) = \text{const}$. Неизвестно, как ведут себя собственные функции $w^{(n)}(x_1, x_2)$ при $n \rightarrow \infty$, где n — номер собственной функции. Рассмотрим асимптотику двух двухпараметрических наборов собственных функций, характерных тем, что они локализируются в окрестности некоторой линии Γ_0 и экспоненциально убывают при удалении от нее.

Для первого из них собственные функции $w^{(m,p)}(x_1, x_2)$ локализируются в окрестности границы Γ области G (т.е. $\Gamma_0 = \Gamma$). Здесь m — число волн вдоль границы, p — число полуволн в направлении, перпендикулярном границе. Если $c = \text{const}$ и область G выбрана в форме круга, переменные разделяются и задача имеет точное решение (см. п. 2.4.10). Такие собственные функции называются функциями типа *шепчущей галереи* и рассмотрены в [9, 79].

Термин "шепчущая галерея" связан с тем, что при некоторых условиях звук хорошо распространяется вдоль стен выпуклого зала и не проникает в его середину.

Вводится связанная с кривой Γ система криволинейных координат s, n (рис. 16), где s — длина дуги Γ , n — расстояние до Γ по нормали (внутри G считаем $n < 0$).

Тогда частоты $\lambda_{m,p}$ и формы $w^{(m,p)}$ рассматриваемой серии

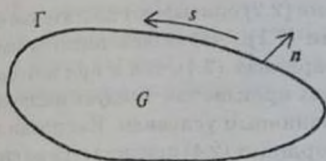


Рис. 16.

собственных колебаний представимы в виде

$$\lambda_{m,p} \simeq \lambda_m \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_m^{-k/3}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

$$\lambda_m = 2m\pi b, \quad b = \left(\int_0^L \frac{ds}{c_0(s)} \right)^{-1},$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_3 = 0, \quad a_2 = \frac{b|\eta_p|}{2^{1/3}} \int_0^L \frac{ds}{c_0^{1/3}(s) P^{2/3}(s)},$$

$$c(s, n) = c_0(s) + nc_1(s) + \dots, \quad P(s) = \left(\frac{1}{\rho(s)} - \frac{c_1(s)}{c_0(s)} \right)^{-1},$$

$$w^{(m,p)} \simeq e^{i\lambda\alpha} Ai(\beta), \quad m \rightarrow \infty,$$

$$\alpha = \alpha(s, n, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s, \nu) \lambda^{-k/3}, \quad \beta = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s, \nu) \lambda^{-k/3},$$

$$\nu = \lambda^{2/3} n, \quad \lambda = \lambda_{m,p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Здесь $m \rightarrow \infty$, p фиксировано. Как и в п. 2.4, решение $w^{(m,p)}$ представлено с использованием эталонной функции Эйри, η_p — p -й корень уравнения $A_i(\eta) = 0$. В результате растяжения масштаба $\nu = \lambda^{2/3} n$ и разложения в ряды по степеням ν произошло асимптотическое разделение переменных в окрестности Γ . Здесь α_k, β_k — полиномы по степеням ν , приведенные в [9]. Кроме того, в (2.5) L — длина дуги Γ , $\rho(s)$ — ее радиус кривизны, предполагается, что $P > 0$.

Форма $w^{(m,p)}$ в известной мере аналогична формам колебаний и потери устойчивости оболочек, локализованным в окрестности края (см. п. 2.6.6, 2.6.10).

3°. Другой двухпараметрической серией частот $\lambda_{m,p}$ и форм $w^{(m,p)}$ собственных колебаний, для которой известно асимптотическое разложение при $\lambda \rightarrow \infty$, являются форма типа прыгающего мячика [9, 80]. В частности, такие формы возможны в окрестности меньшей оси эллиптической мембраны при $(z_1, z_2) = \text{const}$. Необходимое условие существования таких форм — наличие луча Γ_0 , пересекающего в двух точках под прямыми углами границу Γ области G .

Термин "прыгающий мячик" связан с тем, что искомая форма колебаний может быть построена методами геометрической оптики путем последовательного зеркального отражения луча от границ области. Траектория же луча повторяет траекторию мячика.

Рассмотрим сначала простейший пример, в котором переменные разделяются и может быть записано точное решение. Пусть область G — это полоса

$$0 \leq s \leq L, \quad -\infty < n < \infty,$$

а уравнение (2.1) и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \lambda^2 \left[1 - \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 \right] w = 0,$$

$$w(0, n) = w(L, n) = 0.$$

После разделения переменных $w(s, n) = w(n) \sin(m\pi s/L)$ приходим к уравнению Вебера

$$\frac{d^2 w}{dn^2} + \left[\lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \lambda^2 \frac{n^2}{n_0^2} \right] w = 0,$$

которое интегрируется в функциях параболического цилиндра (см. (2.5.2), (2.5.3))

$$w^{(m,p)}(n) = D_p \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{n_0}} n \right), \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\frac{d^2 D_p}{d\zeta^2} + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{\zeta^2}{4} \right) D_p = 0, \quad D_p(\zeta\sqrt{2}) = e^{-\zeta^2/2} H_p(\zeta),$$

причем $\lambda = \lambda_{m,p}$ находится из уравнения

$$\lambda_{m,p}^2 = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{\lambda_{m,p}}{n_0} (2p+1).$$

В общем случае при выполнении некоторых условий устойчивости собственная функция также может быть выражена через функции параболического цилиндра. Для этого сначала вводим криволинейные координаты s, n , связанные с лучом Γ_0 . Тогда

$$w^{(m,p)}(s, n) = e^{i\lambda_0} D_p(\beta\sqrt{2}), \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

$$\alpha \approx \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k/2} \alpha_k(s, \nu), \quad \beta \approx \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k/2} \beta_k(s, \nu), \quad \nu = \lambda^{1/2} n,$$

$$\lambda = \lambda_{m,p} \approx \lambda_m \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_m^{-k}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{L}, \quad L = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{c_0(s)}, \quad a_0 = 1,$$

где, как и в (2.5), α_k и β_k — полиномы по степеням ν .

Сравним между собой разложения функций w , даваемые формулами (2.2), (2.5) и (2.6). Показатель изменчивости всех этих функций $t = 1$. Более детальное рассмотрение показывает, что в различных направлениях изменчивость этих функций различна. В направлении n функции w меняются медленнее, чем в направлении s . Обозначим частный показатель изменчивости в направлении n , перпендикулярном лучу, через t_1 (см. п. 1.7). Тогда для функции (2.2) $t_1 = 0$, для функции (2.5) $t_1 = 2/3$, для функции (2.6) $t_1 = 1/2$.

4°. Еще одна задача связана с построением высокочастотной асимптотики волнового поля, рассеянного телом [9]. В связи с тем, что здесь рассматривается бесконечная область G , кроме условий на поверхности тела необходимо поставить еще условия на бесконечности для отраженного поля. В двухмерном случае эти условия имеют вид

$$\sqrt{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - i\lambda w \right) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Построена асимптотика отраженного волнового поля как в освещенной области, так и в зоне тени [9]. Наибольшие трудности представляет построение асимптотики на границе света и тени, причем в этом случае используются эталонные функции Эйри.

Указанная задача имеет обширные приложения к гидроупругости [30, 106, 195]. В отличие от отражения от твердых тел отражение звука от упругих тел, в частности от тонких упругих оболочек, значительно сложнее, ибо в теле возбуждаются упругие колебания, порождающие дополнительные звуковые волны в жидкости. По этим волнам можно судить о параметрах тела.

Большой цикл работ выполнен по исследованию спектра частот колебаний тонких оболочек, погруженных в жидкость либо содержащих жидкость внутри [7, 28, 48, 81, 121, 122, 124]. Спектр частот колебаний оболочек, содержащих жидкость, дискретный и вещественный. Что касается спектра частот колебаний оболочек, погруженных в жидкость, то он не является вещественным. Колебания затухают, ибо энергия колебаний уносится волнами в бесконечность. Однако существует обширный класс форм колебаний, для которых это затухание очень мало.

5°. Лучевой метод находит приложения и в задачах динамики упругих тел [11, 38, 199]. В твердом теле с различными скоростями распространяются волны растяжения и волны сдвига. Кроме того, возможно появление волн Рэлея, распространяющихся по поверхности тела [88]. Кроме теории колебаний, результаты асимптотического интегрирования находят приложение в сейсмологии, сейсморазведке [10].

При исследовании колебаний тонких стержней, пластин и оболочек обычно используются одномерные или двумерные уравнения (см. п. 4.5). Однако при повышении частоты колебаний использование таких уравнений дает ошибочные результаты, и приходится исходить из трехмерных уравнений теории упругости. Трехмерные уравнения необходимо использовать в случаях, когда длина волны деформации соизмерима с толщиной пластины (стержня, оболочки) или меньше ее. Высоочастотные колебания пластин и оболочек с использованием асимптотических разложений, учитывающих малость относительной толщины, рассмотрены в работах [18, 46, 66, 67, 175].

В работе [175] для анизотропной пластины переменной тол-

щины построено трехпараметрическое семейство частот и форм колебаний, локализованных в окрестности точки максимальной толщины пластины. Эти формы обобщают формы (2.14), в качестве эталонных функций используются функции параболического цилиндра.

Интерес представляет вопрос об асимптотике распределения частот собственных колебаний тела. Этот вопрос уже затрагивался в п. 3.2.2 в связи с одномерными задачами. Распределение частот для двумерных и трехмерных упругих тел обсуждается в обзорной статье [27].

6°. Возвращаясь к асимптотическим разложениям (2.2), (2.5), (2.6), отметим, что в работах [24, 93, 94, 95] содержится описание другого способа построения асимптотических разложений — метода канонического оператора Маслова. Решение ищется в том же виде (1.2), причем разработан эффективный способ построения функций Φ и S . Этот метод может быть использован и для нелинейных уравнений с параметром. Основная область его приложений — это квантовая механика. В п. 4.4 для задач локальной потери устойчивости оболочек будет использован упрощенный вариант этого метода.

4.3. Вырождение двумерных краевых задач

1°. Рассмотрим краевую задачу A_μ

$$\mu^n N_{m+p} w + L_m w = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \quad (3.1)$$

$$t_i w = t_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, (m+p)/2, \quad x \in \Gamma,$$

в двумерной области G с границей Γ . Здесь $\mu > 0$ — малый параметр, L_m, N_{m+p} — линейные дифференциальные операторы вида (1.1) порядков m и $m+p$ соответственно (числа m, p четные), t_i — дифференциальные операторы граничных условий.

При $\mu = 0$ задача A_μ вырождается в задачу A_0 :

$$L_m w_0 = f(x), \quad (3.2)$$

$$l_i w_0 = l_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m/2, \quad x \in \Gamma,$$

где граничные условия либо получаются отбрасыванием части граничных условий (3.1), либо являются линейными комбинациями условий (3.1). Далее будут рассмотрены и другие варианты вырожденных задач.

Асимптотические методы в теории упругости обсуждаются в [105]. Для задач теории тонких оболочек вопросы асимптотического интегрирования рассмотрены в [40, 41, 43]. В этом случае $m = p = 4$, оператор N_{m+p} эллиптический. Что касается оператора L_m , то его тип зависит от знака гауссовой кривизны K срединной поверхности. При $K > 0$ оператор L_m эллиптический, при $K = 0$ — параболический и при $K < 0$ — гиперболический.

2°. Подобно п. 3.1, здесь также может быть введено понятие *регулярного вырождения* [33]. Для введения этого понятия для уравнения (3.1) в окрестности кривой Γ перейдем к местной системе координат s, n , где n — внутренняя нормаль к Γ , s — длина дуги Γ . Пусть старшие производные в операторах $\mu^n N_{m+p}$ и L_m по n имеют вид

$$\mu^p a_{m+p} \frac{\partial^{m+p} w}{\partial n^{m+p}} + a_m \frac{\partial^m w}{\partial n^m}.$$

По аналогии с (2.6.5) вводим дополнительное характеристическое уравнение

$$a_{m+p}(s, 0)\lambda^p + a_m(s, 0) = 0, \quad (3.3)$$

коэффициенты которого зависят от s как от параметра. Вырождение задачи A_μ в задачу A_0 будем называть *регулярным*, если уравнение (3.3) имеет $p/2$ корней с отрицательными вещественными частями (в [33] рассмотрен более общий, чем (3.1), случай).

Пусть решение задач A_0 существует и единственно при любых $f(x)$ и l_i^0 . Тогда решение задачи A_μ , подобно (2.6.6), ищем в виде суммы двух формальных рядов

$$w(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(x) + \mu^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(s, \eta), \quad \eta = \frac{n}{\mu}, \quad (3.4)$$

где на функции z_k накладываем условие

$$z_k(s, \eta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Решение (3.4) складывается из *основного* решения (первая сумма) и *дополнительного* решения, имеющего характер *пограничного слоя* или *краевого эффекта*. Основное решение определяется из краевых задач типа (3.2). Дополнительное решение, как и в (2.6.8), определяется из краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_{m+p}(s, 0) \frac{d^{m+p} z_k}{d\eta^{m+p}} + a_m(s, 0) \frac{d^m z_k}{d\eta^m} = F_k(s, \eta), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Здесь s — параметр, $F_0 \equiv 0$, а функции F_k ($k > 0$) зависят от ранее найденных функций z_j ($j < k$). Ищем решение уравнений (3.6), удовлетворяющее условиям (3.5) и (в сумме с основным решением) тем из условий (3.1), которые не вошли в (3.2).

3°. В качестве примера рассмотрим две задачи о неабсолютно гибкой мембране. Равновесие заземленной мембраны в безразмерной форме описывается краевой задачей

$$-\mu^2 \Delta^2 w + \Delta w = f(x), \quad w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3.7)$$

где, подобно п. 3.1.4, $\mu > 0$ — малый параметр, учитывающий жесткость на изгиб, w — нормальный прогиб, $f(x)$ — интенсивность поверхностной нагрузки. Задача решается в области G с гладкой границей Γ (см. рис. 16).

В этой задаче вырождение регулярно, и вырожденная задача

$$\Delta w_0 = f(x); \quad w_0 = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma \quad (3.8)$$

соответствует абсолютно гибкой мембране.

Пусть решение $w_0(x)$ задачи (3.8) известно. Решение полной задачи (3.7) имеет вид (3.4). Первые члены рядов в (3.4) таковы:

$$w(x, \mu) = w_0(x) + \mu w_1(x) + \mu \left(\frac{\partial w_0}{\partial n} \right)_{\Gamma} \exp \left(-\frac{n}{\mu} \right) + O(\mu^2),$$

где $w_1(x)$ суть решение задачи Дирихле

$$\Delta w_1 = 0; \quad w_1 = -\frac{\partial w_0}{\partial n} \quad \text{при} \quad x \in \Gamma.$$

Свободные колебания той же мембраны находятся из решения краевой задачи

$$-\mu^2 \Delta^2 w + \Delta w + \Lambda w = 0; \quad w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3.9)$$

которая при $\mu \rightarrow 0$ вырождается в задачу для абсолютно гибкой мембраны

$$\Delta w_0 + \Lambda_0 w_0 = 0; \quad w_0 = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (3.10)$$

Здесь Λ — искомый параметр, пропорциональный квадрату частоты собственных колебаний (см. (2.4.22)).

Пусть Λ_0 — простое собственное значение задачи (3.10), которому соответствует собственная функция w_0 . Тогда вырождение задачи (3.9) в задачу (3.10) регулярно и

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1 + O(\mu^2),$$

причем

$$\Lambda_1 = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial w_0}{\partial n} \right)^2 ds \left(\iint_G u_0^2 dG \right)^{-1},$$

где Λ_1 находится из условия совместности находящейся на спектре краевой задачи для определения функции $u_1(x)$.

4°. Уравнение теории тонких оболочек схематично можно представить в виде (3.1) при $m = p = 4$. Вопрос о вырождении полной задачи A_μ в безмоментную задачу A_0 для теории оболочек обсуждается в обзоре [43].

Сравнительно просто решается вопрос о том, является ли вырождение регулярным. Пусть Γ — граница области G , занятой срединной поверхностью. Введем местную систему координат s, n , связанную с линией Γ , и пусть K_2 — нормальная кривизна поверхности в направлении Γ . Тогда вырождение регулярно, если

$$K_2^2(s) - \Lambda > 0$$

во всех точках Γ . Здесь Λ — параметр частоты при установившихся колебаниях.

В задачах статики ($\Lambda = 0$) регулярность вырождения нарушается лишь в случаях, когда $K_2 = 0$, а именно, на асимптотических линиях оболочек нулевой и отрицательной гауссовой

кривизны. Построения решений в окрестности совпадающего с асимптотической линией края для оболочек нулевой и отрицательной гауссовой кривизны выполнены в [35, 128]. Сложнее построение в случаях, когда край касается асимптотических линий в отдельных точках [87].

Как уже упоминалось (см. п. 4.3.1), для того чтобы задачу A_μ в нулевом приближении можно было заменить задачей A_0 , кроме регулярности вырождения требуется однозначная разрешимость задачи A_0 при любых правых частях в (3.2). Условия, при которых задача A_0 однозначно разрешима, в характерных для теории оболочек задачах выполнены далеко не всегда. Ее разрешимость связана со знаком гауссовой кривизны поверхности, характером граничных условий, наличием *изгибов* или *псевдоизгибов* [42, 43]. Под последними понимаются перемещения, удовлетворяющие закреплениям, при которых тангенциальные деформации срединной поверхности относительно малы.

В задачах динамики тонких оболочек возможности расчета по безмоментной теории (задача A_0) по сравнению с задачами статики еще более сужаются. Начиная с некоторой частоты колебаний вырождение задачи A_μ в задачу A_0 регулярным не является. Особые трудности представляет исследование колебаний в случае, когда параметр частоты Λ (см. (3.1.11)) лежит в интервале [43, 47, 81]

$$\Lambda^- \leq \Lambda \leq \Lambda^+, \quad \Lambda^- = \min_{x,y,\Theta} \{K\}, \quad \Lambda^+ = \max_{x,y,\Theta} \{K\}, \quad (3.11)$$

$$K = k_1 \cos^2 \Theta + k_2 \sin^2 \Theta,$$

где k_1, k_2 — главные кривизны срединной поверхности. Интервал (3.11) — это область непрерывного спектра однородной задачи A_0 . В области интегрирования G при этом появляются *переходные* линии, при переходе через которые изменяется тип безмоментного оператора L_m (с эллиптического на гиперболический). Эти линии являются обобщением точек поворота на двухмерный случай. Исследование поведения решений в окрестностях переходных линий содержится в [8, 47, 192], однако полное асимптотическое решение задачи, в отличие от одномерного случая, не найдено. В п. 4.4 будут построены решения, локализованные в окрестностях точек и линий.

При $\Lambda > \Lambda^+$ переходные линии отсутствуют, и возможно провести классификацию свободных колебаний оболочки, выделив квазитангенциальные и квазипоперечные колебания в зависимости от того, преобладают ли перемещения в тангенциальном или нормальном к поверхности направлении (см. [47]). При $\Lambda \gg 1$ для исследования этих колебаний можно использовать упрощенные уравнения, аналогичные уравнениям тангенциальных и поперечных колебаний пластинки.

Классификация свободных колебаний проведена также для оболочек, содержащих жидкость [124], для оболочек в магнитном поле [125], для пьезокерамических оболочек [129].

Для оболочки, колеблющейся в безграничной жидкости, построены переходные поверхности в жидкости [121].

5°. Общий способ проведения классификации решений систем дифференциальных уравнений в частных производных, разработанный А.Л. Гольденвейзером применительно к задачам теории тонких оболочек [41, 47], заключается в следующем. В результате анализа задачи выделяются неизвестные и параметры, определяющие решение того или иного вида. При этом желательно, чтобы выделенных величин было возможно меньше (из двух величин с одинаковым характером поведения берется одна и т.п.). Например, при исследовании колебаний оболочек такими выделенными величинами могут быть

$$\Lambda, w, u, \varepsilon, t, t_1, \dots \quad (3.12)$$

— параметр частоты, нормальный прогиб, тангенциальный прогиб, тангенциальная деформация, показатели изменчивости и т.д. соответственно. Порядок каждой из величин (3.12) (кроме t, t_1) сравнивается с основным малым параметром μ :

$$\Lambda \sim \mu^a, \quad w \sim \mu^b, \quad u \sim \mu^c, \quad \varepsilon \sim \mu^d, \quad \dots$$

Некоторые из показателей (например, a, b) задаются произвольно и ищутся непротиворечивые значения остальных показателей (c, d, t, t_1). Признаком непротиворечивости является, как правило, равенство порядков не менее чем двух главных членов в каждом уравнении системы и непротиворечивость самой системы при сохранении в ней только главных членов (см. также

[68]). В зависимости от того, какие члены оказываются главными, получаем тот или иной вариант упрощенной системы и соответственно тот или иной характер решения.

6°. В качестве простого примера рассмотрим систему уравнений (см. (3.2.2))

$$\begin{aligned} \mu^4 \Delta^2 w - \Lambda w - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= 0, \\ \Delta^2 \Phi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

описывающую квазипоперечные колебания цилиндрической оболочки. При выводе уравнений (3.13) уже были отброшены тангенциальные силы инерции и некоторые другие слагаемые, поэтому анализ этой системы дает лишь частичное представление о колебаниях цилиндрической оболочки, однако рассмотрение здесь полной системы было бы громоздким (см. [47]).

Исключая Φ , для неизвестной функции w получим уравнение восьмого порядка

$$\mu^4 \Delta^4 w - \Lambda \Delta^2 w + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (3.14)$$

Положим

$$\Lambda \sim \mu^a, \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \mu^{-t}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim \mu^{-t_1},$$

причем будем считать, что $0 \leq t, t_1 < 2$. При $t = 2$ длина волны деформации соизмерима с толщиной оболочки, и система (3.13) становится неприменимой.

При рассмотрении порядков слагаемых в (3.14) удобно выделить два случая $t_1 \geq t$ и $t_1 \leq t$. В этих случаях порядки слагаемых в (3.14) соответственно равны:

$$\begin{array}{cccc} 4 - 8t_1 & a - 4t_1 & -4t & (t_1 \geq t) \\ 4 - 8t & a - 4t & -4t & (t_1 \leq t) \end{array} \quad (3.15)$$

Будем придавать показателям изменчивости t, t_1 разные значения и сравнивать порядки (3.15) слагаемых в (3.14).

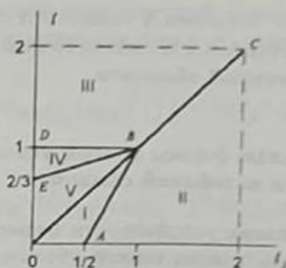


Рис. 17.

В результате область параметров t_1, t разобьется на пять подобластей (см. рис. 17), в каждой из которых уравнение (3.14) можно заменить упрощенным уравнением

$$(I) \quad -\Lambda \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad \alpha = 4(t_1 - t),$$

$$(II) \quad \mu^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \Lambda w = 0, \quad \alpha = 4(1 - t_1),$$

$$(III) \quad \mu^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \Lambda w = 0, \quad \alpha = 4(1 - t), \quad (3.16)$$

$$(IV) \quad \mu^4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} - (\Lambda - 1) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad \Lambda - 1 \sim \mu^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = 4(1 - t),$$

$$(V) \quad -(\Lambda - 1) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \Lambda - 1 \sim \mu^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = 2(t - t_1).$$

Уравнениями (3.16) можно пользоваться в открытых областях I - V. На границах областей уравнения усложняются. Например, на отрезке AB (не включая точку B)

$$\mu^4 \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} - \Lambda \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad \alpha = 2 - 2t.$$

В точке B все члены уравнений (3.14) имеют одинаковый порядок ($\alpha = 0$).

В областях IV и V значения Λ близки к $\Lambda = 1$. Действительно (см. [135, 160]), точка $\Lambda = 1$ является точкой сгущения частот колебаний цилиндрической оболочки.

4.4. Локальные формы потери устойчивости и колебаний оболочек

1°. Для исследования устойчивости безмоментного начального напряженного состояния тонкой оболочки используем систему уравнений (3.1.9), (3.1.12). Если коэффициенты этой системы постоянны, вмятины при потере устойчивости покрывают всю оболочку:

$$w = w_0 e^{iz}, \quad \Phi = \Phi_0 e^{iz}, \quad z = \mu^{-1}(p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2),$$

где волновые числа p_j удовлетворяют уравнению

$$\Lambda = H(p_j) = \frac{(q_1^2 + q_2^2)^4 + (k_2 q_1^2 + k_1 q_2^2)^2}{(q_1^2 + q_2^2)^2 (t_1 q_1^2 + 2t_3 q_1 q_2 + t_2 q_2^2)}, \quad (4.1)$$

$$q_j = p_j A_j^{-1}, \quad k_j = R_j^{-1}.$$

Критическое значение Λ получается в результате минимизации функции H по всем вещественным p_j (см. [196]).

Если коэффициенты k_i , t_i переменны, форма потери устойчивости может локализоваться в окрестностях некоторых наиболее слабых точек или линий на срединной поверхности.

Исследуем сначала выпуклую ($k_1 k_2 > 0$) оболочку и будем искать наиболее слабую точку $\alpha_i = \alpha_i^0$. Рассмотрим функцию

$$\Lambda = H(p_i, \alpha_i),$$

где H — та же функция (4.1), и будем искать ее минимум по четырем переменным p_i, α_i . Пусть минимум достигается при $p_i = p_i^0, \alpha_i = \alpha_i^0$ и равен Λ_0 .

Если точка α_i^0 удалена от краев оболочки и матрица четвертого порядка

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}, \quad A = \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^0 \partial p_j^0} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^0 \partial \alpha_j^0} \right\}, \quad C = \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha_i^0 \partial \alpha_j^0} \right\}$$

является положительно определенной, решение системы (2.6.4), локализованное в окрестности точки α_j^0 , имеет вид [164, 234]

$$w(\alpha_j, \mu) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} w_k(\xi_j) \exp \left\{ i \left(\mu^{-1/2} \xi^T p^0 + \frac{1}{2} \xi^T S \xi \right) \right\}, \quad (4.2)$$

$$\Lambda \approx \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \mu^k, \quad \xi_j = \mu^{-1/2} (\alpha_j - \alpha_j^0), \quad \xi^T = (\xi_1, \xi_2), \quad p^{0T} = (p_1^0, p_2^0).$$

Здесь w_k — искомые полиномы по ξ_j , $\mu^k \Lambda_k$ — искомые поправки к критической нагрузке Λ_0 , S — искомая постоянная матрица второго порядка, мнимая часть которой положительно определена.

Формула (4.2) обобщает формулу (2.5.8) на случай двух независимых переменных. Она является частным случаем формулы (1.2).

Не останавливаясь на определении $w_k(\xi)$, S , укажем лишь, что формула (4.2) определяет двухпараметрическую серию близких собственных значений Λ , у которых общее Λ_0 , а

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(m_1, m_2)} = d^{-1} ((1/2 + m_1) \omega_1 + (1/2 + m_2) \omega_2), \quad (4.3)$$

$$m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega_i > 0, \quad d > 0.$$

Потеря устойчивости происходит при наименьшем собственном значении, соответствующем $m_1 = m_2 = 0$, причем $\omega_0 \equiv 1$.

Отделяя вещественную и мнимую части в (4.2), получаем, что каждое собственное значение (4.3) является асимптотически двукратным. Форма прогиба имеет вид

$$w = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} w_k(\xi_j) e^{iz} \right) e^{-1/2 \xi^T S_2 \xi},$$

$$z = \mu^{-1/2} \xi^T p^0 + \frac{1}{2} \xi^T S_1 \xi + \Theta, \quad S = S_1 + i S_2.$$

Используемый метод не дает возможности определить фазу Θ , которая принимает одно из двух значений: $0 \leq \Theta_1, \Theta_2 < 2\pi$. Вытянуты имеют вытянутую форму и заполняют эллипс $\xi^T S_2 \xi = C$.



Рис. 18.

Этим методом в [98] построена форма потери устойчивости эллипсоида вращения при комбинированном нагружении (рис. 18).

2°. Если наиболее слабая точка попадает на границу Γ области, занятой оболочкой, построение формы потери устойчивости резко усложняется, ибо возникает необходимость в удовлетворении граничным условиям. Форма потери устойчивости представляется в этом случае в виде суммы функций с различными асимптотическими представлениями [90].

Для оболочек нулевой и отрицательной гауссовой кривизны формы потери устойчивости, локализованные вблизи точек, не характерны. Дело в том, что возмущения по оболочке имеют тенденцию распространяться вдоль характеристик. (У оболочек отрицательной кривизны две системы действительных характеристик, у оболочек нулевой кривизны — одна система, а оболочки положительной гауссовой кривизны не имеют вещественных характеристик.) Исключение составляет задача о потере устойчивости цилиндрической оболочки переменной толщины при неоднородном осевом сжатии, в которой возможны формы потери устойчивости, локализованные в окрестностях точек [168].

Локализованные в окрестностях характеристик формы потери устойчивости оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны возможны только при их неосесимметричном нагружении. Одна из задач такого типа рассмотрена в [89].

Локальные формы потери устойчивости и колебаний оболо-

и нулевой гауссовой кривизны обсуждаются ниже.

3°. Свободные колебания и устойчивость конической оболочки описываются системой уравнений (3.1.9), (3.1.10). Систему координат s, φ на срединной поверхности оболочки введем таким образом, что

$$A_1 = 1, \quad A_2 = s, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = k(\varphi)s^{-1}.$$

Здесь $s = s^0/R$, s^0 — расстояние до вершины конуса.

Предположим, что оболочка замкнута в окружном направлении и ограничена двумя краями

$$s = s_1(\varphi), \quad s = s_2(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \quad (4.4)$$

на каждом из которых заданы четыре однородных граничных условия.

Приближенное решение системы (3.1.9) представим в виде суммы основного полубезмоментного решения и краевого эффекта вблизи краев (4.4). Основное решение ищем в виде [165, 167]

$$u(s, \varphi, \mu_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^{k/2} w_k(s, \xi) \exp \left[i \left(\mu_1^{-1/2} p_0 \xi + \frac{1}{2} \alpha \xi^2 \right) \right], \quad (4.5)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu_1 \Lambda_1 + \mu_1^2 \Lambda_2 + \dots,$$

где $\mu_1^2 = \mu$ — малый параметр, $\xi = \mu_1^{-1/2}(\varphi - \varphi_0)$, $w_k(s, \xi)$ — полиномы по ξ , $\text{Im } p_0 = 0$, $\text{Im } \alpha > 0$.

Асимптотическое разложение (4.5) отличается от разложения (2.5.8) только тем, что его коэффициенты w_k зависят от параметра s . Решение (4.5) убывает при удалении от наиболее слабой образующей $\varphi = \varphi_0$.

В нулевом приближении получаем

$$\frac{k^2(\varphi)}{p_0^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} \right) + \frac{p_0^4}{s^3} w_0 + \Lambda_0 N w_0 = 0. \quad (4.6)$$

В задаче устойчивости $N w_0 = -t_2 p_0^2 s^{-1} w_0$, в задаче о свободных колебаниях $N w_0 = -s w_0$. Порядок уравнения (4.6) позволяет удовлетворить на каждом крае (4.4) лишь двум граничным

условиям. Вопрос о выборе таких граничных условий для уравнения (4.6), которые обеспечивают регулярное вырождение краевой задачи, рассмотрен в [171]. Остальные два граничных условия на каждом крае удовлетворяются путем выбора интегралов краевого эффекта. Отметим аналогию рассматриваемой задачи с одномерной (уравнение (3.6.5)).

Собственное значение Λ_0 является функцией величин p_0 и φ_0 : $\Lambda_0 = f(p_0, \varphi_0)$. Значения параметров p_0 и φ_0 находятся из условий

$$\frac{\partial f}{\partial p_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} = 0. \quad (4.7)$$

Параметр a является корнем квадратного уравнения

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p_0^2} + 2a \frac{\partial^2 f}{\partial p_0 \partial \varphi_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_0^2} = 0.$$

Из условия совместности второго приближения следует

$$w_0^{(m,n)}(s, \xi) = w_0^{(n)}(s) H_m(\xi),$$

$$\Lambda_1^{(m,n)} = -i(m + 1/2) \left(a^{(n)} \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial p_0^2} + \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial p_0 \partial \varphi_0} \right),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $H_m(\xi)$ — полином Эрмита степени m , $w_0^{(n)}$ — собственная функция краевой задачи для уравнения (4.6), соответствующая собственному значению $\Lambda_0^{(n)}$. Собственные значения рассматриваемой задачи $\Lambda^{(m,n)} = \Lambda_0^{(n)} + \mu_1 \Lambda_1^{(m,n)} + \dots$ являются асимптотически двукратными.

4°. Данный асимптотический метод можно использовать для исследования колебаний и устойчивости цилиндрической оболочки. В этом случае множитель s в уравнении (4.6) следует заменить на единицу. Для цилиндрической оболочки решение ряда задач можно получить в явном виде.

Рассмотрим в качестве примера задачу об устойчивости свободно опертой круговой цилиндрической оболочки с косым краем под действием однородного внешнего давления [166]. В этом

случае $A_1 = A_2 = k_2 = t_2 = 1$. Для уравнения (4.6) следует взять граничные условия

$$w_0 = w_0'' = 0 \quad \text{при } s = s_1, \quad s = s_2. \quad (4.8)$$

Пусть $s_1(\varphi) = 0$, $s_2(\varphi) = l + \text{tg}\beta \cos \varphi$, где $\beta \neq 0$ — угол наклона края. Тогда решение краевой задачи (4.6), (4.8) имеет вид

$$w_0^{(n)} = \sin \frac{\pi n s}{s_2(\varphi)}, \quad f^{(n)} = p_0^2 + \frac{\pi^4 n^4}{s_2^4(\varphi) p_0^6}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В задаче устойчивости практический интерес представляет наименьшее собственное значение, соответствующее $n = 1$. Решив систему (4.7) при $n = 1$, получим

$$\varphi_0 = 0, \quad p_0^2 = 3^{1/4} \pi / l_0, \quad l_0 = s_2(0).$$

Таким образом, наиболее слабой образующей оказывается наиболее длинная образующая $\varphi = 0$. Нулевое приближение для собственного значения $\Lambda_0^{(1)} = 4\pi 3^{-3/4} / l_0$ дает для критического давления формулу Саутуэлла—Папковича, соответствующую оболочке длиной l_0 с прямыми краями.

Легко проверяется, что

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial p_0^2} = 16, \quad \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial p_0 \partial \varphi_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial \varphi_0^2} = \frac{4\pi \text{tg}\beta}{3^{3/4} l_0}.$$

Поправка первого приближения, учитывающая влияние косяго края, определяется по формуле

$$\Lambda_1^{(m,1)} = \left(\frac{1}{2} + m\right) \sqrt{\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial p_0^2} \cdot \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial \varphi_0^2}} = 4 \left(\frac{1}{2} + m\right) \sqrt{\frac{\Lambda_0^{(1)} \text{tg}\beta}{l_0}},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Для построения следующих приближений необходимо использовать более точную систему уравнений (3.1.10).

В работе [170] приводится модификация данного асимптотического метода, которая в ряде случаев оказывается более удобной, чем изложенная выше. Основное решение предлагается искать в виде

$$w(s, \varphi, \mu_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^k w_k(s, \varphi) \exp \left[\frac{i}{\mu_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} p(\varphi) d\varphi \right]. \quad (4.9)$$

В отличие от (4.5) в (4.9) разложение в ряд ведется по целым степеням параметра μ_1 .

Появление форм колебаний и потери устойчивости, локализованных вблизи образующей конической или цилиндрической оболочки, связано с переменностью геометрических и физических параметров оболочки, наличием косоугольного края, неравномерностью распределения начальных усилий. Решения различных задач устойчивости оболочек нулевой гауссовой кривизны с помощью описанных здесь асимптотических методов содержатся в работах [90, 97, 99, 144, 145].

В работах [101, 172] рассмотрены колебания и устойчивость оболочек, близких к цилиндрическим и коническим. Для таких оболочек решение можно представить в виде (4.9), если отклонение формы срединной поверхности от идеальной мало (имеет порядок μ) и меняется достаточно плавно.

4.5. Асимптотическое интегрирование уравнений в узких областях и приложение к теории тонких оболочек и стержней

1°. Интенсивное развитие этого направления асимптотического интегрирования связано в значительной мере с приложениями к тонким стержням и оболочкам. Первоначально для вывода двумерных уравнений равновесия пластин и оболочек и одномерных уравнений равновесия стержней использовались гипотезы о распределении перемещений и напряжений по толщине [70]. Для оценки погрешности гипотез и вытекающих из них уравнений необходимо провести сравнение с решениями трехмерных уравнений теории упругости. Однако лишь очень немногие трехмерные задачи имеют точное решение, поэтому построение асимптотических разложений может оказать здесь неоценимую услугу.

Асимптотические разложения используют малый параметр, который появляется в результате растяжения масштаба. При этом, как и в п. 4.2, решение имеет вид суммы функций, получаемых в результате двух итерационных процессов — основного и дополнительного. В результате основного процесса строится решение вдали от краев области (пусть речь идет о пластине

или оболочке), трехмерная задача сводится к двумерной. Дополнительный итерационный процесс позволяет удовлетворить граничным условиям на крае и корректно сформулировать граничные условия двумерной задачи, получающейся в результате основного процесса.

Полное рассмотрение вопросов асимптотического интегрирования трехмерных уравнений для стержней и оболочек слишком громоздко, поэтому мы ограничимся рассмотрением двух простейших задач с целью иллюстрации метода асимптотического интегрирования в узких областях, а затем дадим краткий обзор литературы.

2°. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости в узкой прямоугольной области

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (5.1)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq h, \quad h/l = \mu,$$

$$\sigma_x = K(\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad \sigma_y = K(\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\omega,$$

$$K = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

где u, v — проекции перемещения, E, G — упругие модули, $\epsilon_x, \epsilon_y, \omega$ — деформации, σ_x, σ_y, τ — напряжения.

Пусть сторона $y = 0$ закреплена, а на остальных сторонах заданы напряжения

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (5.2)$$

$$\sigma_y = \sigma_y^*, \quad \tau = \tau^* \quad \text{при} \quad y = h,$$

$$\sigma_x = \sigma_x^{*0}, \quad \tau = \tau^{*0} \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$\sigma_x = \sigma_x^{*l}, \quad \tau = \tau^{*l} \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функции в правых частях (5.2) считаем бесконечно дифференцируемыми.

Рассмотрим сначала основной итерационный процесс. Сделаем замены

$$x = l\xi, \quad y = h\eta. \quad (5.3)$$

Тогда слагаемые системы (5.1) с $\partial/\partial y$ приобретут множитель μ^{-1} . Решение полученной системы можно искать в виде

$$z = \mu^{\alpha_z} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(\xi, \eta), \quad (5.4)$$

где $z_k(\xi, \eta)$ — полиномы по η , коэффициенты которых выражаются через производные функций $\sigma_y^*(\xi)$, $\tau^*(\xi)$. Здесь буква z заменяет любую из неизвестных в (5.1), причем значения показателя α_z при старшем члене таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_z &= 0 \quad \text{при } z = (\sigma_x, \sigma_y, \tau, \varepsilon_y, \omega), \\ \alpha_z &= 1 \quad \text{при } z = (u, v, \varepsilon_x). \end{aligned}$$

На каждом шаге основного итерационного процесса неизвестные функции определяются единственным образом.

В общем случае решение (5.4) условиям при $x = 0, l$ не удовлетворяет. Рассмотрим дополнительный итерационный процесс в окрестности края $x = 0$. После замен

$$x = h\zeta, \quad y = h\eta \quad (5.5)$$

для построения погранслоя π получим задачу, аналогичную (5.1), в области $0 \leq \zeta \leq \mu^{-1}$, $0 \leq \eta \leq 1$, причем на краях $\eta = 0$ и $\eta = 1$ заданы однородные граничные условия $u = v = \sigma_y = \tau = 0$, а на крае $\zeta = 0$

$$\sigma_x = \sigma_x^\pi(\eta, \mu), \quad \tau = \tau^\pi(\eta, \mu),$$

где σ_x^π и τ^π — ряды по степеням μ — берутся такими, чтобы сумма $z + \pi$ удовлетворяла условиям (5.2) при $x = 0$. Взаимным влиянием краев $x = 0$ и $x = l$ пренебрегаем, поэтому, считая, что решение при подходе к противоположному краю затухает, поставим условие

$$\sigma_x^\pi, \sigma_y^\pi, \tau^\pi, u^\pi, v^\pi \rightarrow 0 \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty.$$

Сформулированная задача при любых функциях σ_x^π, τ^π имеет единственное решение.

Если на обеих сторонах $y = 0$, $y = h$ заданы перемещения, для пластин из малосжимаемого материала асимптотика решений оказывается отличной от (5.4) [92].

3°. Рассмотрим ту же задачу (5.1), но при других граничных условиях. Предположим, что на всех четырех краях заданы напряжения. Рассматриваемая задача может быть разделена на сумму симметричной и антисимметричной относительно срединной линии задач. Рассмотрим последнюю (это задача изгиба балки). Граничные условия возьмем в виде

$$\sigma_y = \pm \sigma_y^*, \quad \tau = \tau^* \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{h}{2}. \quad (5.6)$$

На функции, входящие в условия при $x = 0, l$, накладываем соответствующие требования четности. Усилия, действующие на балку, предполагаем самоуравновешенными.

Рассмотрим основной итерационный процесс. После растяжения масштаба (5.3) решение ищем в том же виде (5.4), однако порядки α_z неизвестных функций будут другими:

$$\begin{aligned} \alpha_z &= -3 & \text{при} & \quad z = (v), \\ \alpha_z &= -2 & \text{при} & \quad z = (\sigma_x, u, \epsilon_x, \epsilon_y), \\ \alpha_z &= -1 & \text{при} & \quad z = (\tau, \omega), \\ \alpha_z &= 0 & \text{при} & \quad z = (\sigma_y). \end{aligned}$$

Для построения только старших членов в (5.4) приходится делать четыре итерации. Для облегчения выкладок определим сначала напряжения. Для этого введем в рассмотрение уравнение совместности в напряжениях. Оно вместе с уравнениями равновесия образует замкнутую систему

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial \eta^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi \partial \eta} + \mu^2 \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \tau}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} = 0,$$

которая может быть проинтегрирована без определения перемещений. Находим первые члены в (5.4):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c(\xi)\eta, \quad \tau = \mu \left(\frac{1}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \frac{\partial c}{\partial \xi}, \\ \sigma_y &= \mu^2 \left(\frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta}{8} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} = -\frac{24}{\mu^2} \sigma_y^*. \end{aligned}$$

Теперь из системы (5.1) вычисляем старшие члены для перемещений:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{l}{E} c(\xi)\eta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{l}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = -\frac{lc(\xi)}{E\mu}$$

откуда получаем уравнение прогиба балки

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = \frac{24l}{E\mu^3} \sigma_y^* \quad \text{или} \quad \frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 2\sigma_y^*. \quad (5.7)$$

В построенное приближение касательные усилия τ^* из (5.6) не вошли. Они могут быть учтены лишь в следующем приближении. Для уравнения (5.7) на каждом крае $\xi = 0$, $\xi = 1$ нужно поставить два граничных условия. Эти условия могут быть найдены из дополнительного итерационного процесса.

После растяжения масштаба (5.5) в нулевом приближении для дополнительного итерационного процесса получаем задачу (рассматриваем край $\zeta = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau}{\partial \eta} &= 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} = 0, \\ \sigma_x &= \sigma_x^* - c(0)\eta, \quad \tau = \tau^* - \mu \left(\frac{1}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \right)_0, \quad \zeta = 0, \\ \sigma_x, \sigma_y, \tau &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Эта задача имеет решение, удовлетворяющее условию затухания при $\zeta \rightarrow \infty$ лишь в случае, когда нагрузка на крае $\zeta = 0$ самоуравновешена, т.е.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \eta \sigma_x d\eta = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \tau d\eta = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0.$$

Самоуравновешенность нагрузки достигается путем выбора $c(0)$ и $(\partial c / \partial \xi)_0$, т.е. путем задания при $\zeta = 0$ граничных условий

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{12l}{E\mu} \int_{-1/2}^{1/2} \eta \sigma_x^* d\eta = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} = -\frac{12l}{E\mu^2} \int_{-1/2}^{1/2} \tau^* d\eta = 0$$

для уравнения (5.7). Эти условия совпадают с обычными граничными условиями, когда на конце балки задаются перерезывающая сила и изгибающий момент.

4°. Переходя к обзору работ по стержням и оболочкам, остановимся кратко на тонких стержнях. Основы инженерных одномерных теорий тонких стержней были заложены трудами Сен-Венана [229], Кирхгофа [70, 212] и Клебша [202]. В дальнейшем

в большинстве работ, посвященных выводу одномерных уравнений, использовались гипотезы, связанные с распределением перемещений и напряжений по толщине стержня. В простейшей модели Кирхгофа—Клебша учитываются только деформации изгиба и кручения. Более точные модели (С.П. Тимошенко) учитывают также деформации сдвига и растяжение осевой линии.

Вопросу вывода одномерных уравнений стержней исходя из трехмерных уравнений теории упругости посвящено (в отличие от уравнений теории оболочек) сравнительно немного работ [56, 62, 119, 201, 224 и др.]. В качестве первого приближения получаются уравнения Кирхгофа—Клебша. Последующие приближения приводят к уточненным моделям.

Интересным объектом асимптотического анализа являются тонкостенные стержни. Они занимают промежуточное положение между обычными стержнями и оболочками. При построении инженерной теории вводится дополнительная степень свободы — депланация поперечного сечения. При асимптотическом подходе к выводу одномерных уравнений тонкостенных стержней приходится решать задачу с двумя малыми геометрическими параметрами. Первый из них равен отношению максимального размера поперечного сечения к длине стержня, а второй — отношению максимального и минимального размеров сечения. Асимптотическому исследованию посвящены работы [57, 120].

5°. Методы исследования уравнений теории оболочек и пластин, основанные на асимптотическом интегрировании трехмерных уравнений теории упругости, разработаны А.Л. Гольдштейном [41] и его учениками [51, 76, 127], (см. также работы [1, 17, 206]). Подробный обзор публикаций по этой проблеме содержится в [43]. Обсудим некоторые результаты.

В статических задачах теории оболочек напряженнодеформированное состояние складывается из основного состояния и состояния пограничного слоя. Основное состояние охватывает внутреннюю часть оболочки и определяется основным итерационным процессом. В нулевом приближении основной итерационный процесс приводит к двумерным уравнениям Кирхгофа—Ламе. Пограничный слой сосредоточен вблизи границы Γ обла-

сти G , занятой оболочкой (а также, возможно, вблизи других линий искажения, например, сосредоточенных нагрузок, разрывов в геометрии поверхности). На расстояниях порядка толщины оболочки h пограничный слой затухает.

Асимптотическое интегрирование уравнений теории упругости позволило ответить на вопрос о порядке погрешности Δ двумерных теорий оболочек. Первый результат в этом направлении был получен в [108]:

$$\Delta \sim h_*,$$

где h_* — относительная толщина оболочки ($h_* = h/R$). Позднее [41] (см. также [213]) было установлено, что погрешность Δ зависит от изменчивости напряженного состояния. Пусть t — показатель изменчивости, вычисленный по отношению к параметру h_* (т.е. $\partial\Phi/\partial\alpha \sim h_*^{-t}\Phi$). Тогда

$$\Delta \sim \max(h_*, h_*^{2-2t}), \quad (5.8)$$

т.е. при $t = 1$ возможности двумерной теории для описания напряженного состояния оказываются исчерпанными.

Оценка (5.8) касается внутреннего напряженного состояния. Два обстоятельства могут повлиять на величину погрешности Δ в сторону ее увеличения — это влияние пограничного слоя и близости деформации к изгибанию срединной поверхности. Подробнее об этом см. в [43].

Для стационарных динамических задач теории оболочек и пластин оценка (5.8) нуждается в уточнении, связанном с влиянием частоты колебаний. Исследованию этого вопроса посвящены работы [46, 64, 65]. Вопрос о двумерных динамических уравнениях для пластин обсуждается в [112]. Вопрос о погрешности двумерных уравнений для оболочек простой геометрической формы может быть решен в результате сравнения с точным решением трехмерной задачи теории упругости [96].

Обратим внимание на работы [2, 26, 45, 59, 117], опубликованные в 1992 г., в которых рассматривается область применимости различных двумерных теорий для пластин и оболочек.

Асимптотическое интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений

Асимптотические разложения решений нелинейных дифференциальных уравнений отличаются большим разнообразием. Сошлемся на монографии [19, 23, 78, 91, 93, 94, 100, 103, 104, 189] и др. Ограничимся небольшим кругом вопросов, связанных с сингулярными возмущениями, введением решений нелинейных уравнений и имеющих приложения к нелинейным задачам теории оболочек.

5.1. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Рассмотрим задачу Коши для системы $m+n$ нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(y, z, t), \quad y^T = (y_1, \dots, y_m), \\ \mu \frac{dz}{dt} &= F(y, z, t), \quad z^T = (z_1, \dots, z_n), \\ y(0) &= y^0, \quad z(0) = z^0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (1.1)$$

которая при $\mu \rightarrow 0$ вырождается в систему m дифференциальных и n алгебраических уравнений

$$\frac{dy_0}{dt} = f(y_0, z_0, t), \quad F(y_0, z_0, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$y_0(0) = y^0.$$

Здесь y, f — векторы размерности m , а z, F — размерности n .

Пусть система уравнений (1.2)

$$F(y_0, z_0, t) = 0 \quad (1.3)$$

имеет изолированное решение

$$z_0 = z_0(y_0, t). \quad (1.4)$$

Подставляя это решение в систему (1.2), приходим к вырожденной задаче

$$\frac{dy_0}{dt} = f(y_0, z_0(y_0, t), t), \quad y_0(0) = y^0. \quad (1.5)$$

В связи с описанным вырождением задачи (1.1) в (1.5) возникают два вопроса: во-первых, в каком соотношении находятся решения задач (1.1) и (1.5) при $\mu \rightarrow 0$ и, во-вторых, какова аналитическая структура решения задачи (1.1) при $\mu > 0$. Ответ на первый вопрос дает теорема Тихонова [147], в которой при определенных ограничениях (в основном, на функции f и F в (1.1)) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} y(t, \mu) &\rightarrow y_0(t) && \text{при } \mu \rightarrow 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ z(t, \mu) &\rightarrow z_0(t) = z_0(y_0(t), t) && \text{при } \mu \rightarrow 0, \quad \varepsilon \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Естественно, что функция $z_0(t)$ граничному условию (1.1) в общем случае не удовлетворяет.

2°. Решение задачи (1.1) в виде асимптотического ряда по степеням μ построено в [29] и кратко излагается далее.

Пусть x заменяет любой из символов y, z . Решение $x(t, \mu)$ задачи (1.1) ищем в виде

$$x(t, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\tau) \mu^k, \quad (1.7)$$

где $\tau = t/\mu$ — быстрая переменная, а на функции $X_k(\tau)$ накладываем ограничение

$$X_k(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

т. е. $X_k(\tau)$ — это функции пограничного слоя.

Для того чтобы ряды (1.7) давали асимптотическое решение задачи (1.1), достаточно потребовать, чтобы

- 1) функция (1.4) была изолированным решением системы (1.3);
- 2) правые части $F(y, z, t)$ и $f(y, z, t)$ были аналитическими функциями своих аргументов;

3) решение (1.4) было асимптотически устойчивой точкой по отношению к присоединенной системе

$$\frac{dz}{d\tau} = F(y, z, t), \quad (1.9)$$

причем все корни дополнительного характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad A = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{z=z_0(y_0, t)} \quad (1.10)$$

имели отрицательные вещественные части;

4) начальная точка z^0 принадлежала области притяжения устойчивого решения (1.4).

Отметим, что в (1.9) y и t рассматриваются как параметры.

При решении краевых задач целесообразно ввести более общее, чем в пункте 3, определение устойчивости: если все корни дополнительного характеристического уравнения (1.10) имеют отрицательные вещественные части, будем говорить, что корень $z(y, t)$ устойчив вправо. Если все корни уравнения (1.10) имеют положительные вещественные части, говорят об устойчивости влево и корень $z(y, t)$ называют устойчивым влево.

Условия 1)–4) могут быть ослаблены, если мы хотим получить лишь соотношения (1.6).

3°. Построение последовательных членов в рядах (1.7) в значительной мере аналогично алгоритму метода Вишика—Люстернака (см. п. 2.6). Нулевое приближение для $y_0(t)$ вычисляется по формуле (1.5), а $Y_0(\tau) \equiv 0$. Функция $z_0(t)$ определяется по формуле (1.4). Для построения $Z_0(\tau)$ приходим к задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{dZ_0}{d\tau} &= F(y^0, z_0(0) + Z_0(\tau), 0) - F(y^0, z_0(0), 0), \\ Z_0(0) &= z^0 - z_0(0), \end{aligned} \quad (1.11)$$

которая в силу условий 3) и 4) имеет решение, удовлетворяющее соотношению (1.8).

Последующие члены рядов (1.7) определяются из линейных уравнений в следующем порядке: $Y_1, y_1, z_1, Z_1, Y_2, \dots$. Функции Y_1 находим в виде квадратуры

$$Y_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} [f(y^0, z_0(0) + Z_0(\tau), 0) - f(y^0, z_0(0), 0)] d\tau. \quad (1.12)$$

Для определения y_1, z_1 решаем линейную задачу Коши

$$\frac{dy_1}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 z_1, \quad y_1(0) = -Y_1, \quad (1.13)$$

$$\frac{dz_0}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 z_1, \quad (1.14)$$

где индекс 0 означает, что соответствующие производные вычислены на решении (1.4). В силу условия 4) матрица $A = (\partial F / \partial z)_0$ имеет отличный от нуля определитель, и из (1.14) находим величины z_1 , которые подставляем в (1.13).

При построении последовательных приближений правые части уравнений (1.1) представим в виде

$$F(x, t) = F(\bar{x}, t) + F^*(X, \tau), \quad (1.15)$$

где через \bar{x} и X обозначены соответственно первая и вторая суммы в правой части (1.7). Соотношение (1.15) определяет функцию F^* :

$$F^*(X, \tau) = F(\bar{x}(\mu\tau) + X(\tau), \mu\tau) - F(\bar{x}(\mu\tau), \mu\tau)$$

и было уже использовано при написании (1.11) и (1.12).

Уравнение для определения $Z_1(\tau)$ оказывается уже достаточно громоздким

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{d\tau} = & \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{00} (Y_1(\tau) + y_1(0) + \tau y'_0(0)) + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{00} (Z_1(\tau) + z_1(0) + \tau z'_0(0)) + \tau \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_{00} - \\ & - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 (y_1(0) + \tau y'_0(0)) - \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) (z_1(0) + \tau z'_0(0)) - \tau \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_0, \\ & Z_1(0) = -z_1(0). \end{aligned}$$

Здесь $(\)_{00}$ означает, что производная вычисляется при $y = y^0$, $z = z_0(0) + Z_0(\tau)$, $t = 0$.

4°. В [29] приводится доказательство того, что формальные ряды (1.7) являются асимптотическими разложениями точных решений при $\mu \rightarrow 0$ ($\mu > 0$).

Задача (1.1) допускает обобщение и на случай, когда правые части системы (1.1) регулярно зависят от μ .

5.2. Вырождение нелинейных краевых задач

1°. При рассмотрении краевых задач ограничимся случаями, когда решение может быть представлено в виде суммы медленно меняющихся функций и функций типа пограничного слоя. Кроме пограничного слоя в окрестностях концов промежутка интегрирования возможно появление и *внутреннего пограничного слоя*.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(y, z, t), \quad \mu \frac{dz}{dt} = F(y, z, t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

где y и z — m -мерный и n -мерный векторы. Пусть задано $m+n$ граничных условий общего вида

$$l_i(y(0), y(1), z(0), z(1)) = 0, \quad i = 1, \dots, m+n. \quad (2.2)$$

Вырожденная система уравнений имеет тот же вид (1.2), однако вопрос о соответствующих ей граничных условиях становится нетривиальным.

Пусть $z_0(y_0, t)$ — изолированное решение уравнения (1.3). В окрестности этого решения рассмотрим присоединенную систему (1.9), в которой y, t считаем параметрами. Пусть уравнение (1.10) при всех t, y_0 из некоторой области, содержащей решение уравнения (1.3), имеет n_1 корней с отрицательными вещественными частями и n_2 корней с положительными вещественными частями ($n_1 + n_2 = n$). В этом случае решение задачи (2.1) ищем в виде, аналогичном (1.7), но с двумя пограничными слоями:

$$x(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(0)}(\tau_0) \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(1)}(\tau_1) \mu^k, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} X_k^{(0)}(\tau_0) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau_0 \rightarrow \infty, \\ X_k^{(1)}(\tau_1) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau_1 \rightarrow -\infty, \\ \tau_0 &= t/\mu, \quad \tau_1 = (t-1)/\mu. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ограничимся обсуждением вопроса о граничных условиях для вырожденной задачи (1.2). В нулевом приближении условия (2.2) можно записать в виде

$$l_i \left(y_0(0), y_0(1), z_0(0) + Z_0^{(0)}(0), z_0(1) + Z_0^{(1)}(1) \right) = 0. \quad (2.5)$$

В силу (2.4) семейство функций $Z_0^{(0)}$ ($Z_0^{(1)}$) содержит n_1 (n_2) постоянных. Исключение этих функций из условий (2.5) приводит к m соотношениям, которые не содержат функций пограничного слоя и служат граничными условиями для вырожденной задачи (1.2).

Далее приведен пример, содержащийся в книге [29].

2°. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \mu \frac{dz}{dt} = -(z - y - 1)(z - y)(z - y + 1), \quad (2.6)$$

$$y(1) = 0, \quad z(0) = z^0,$$

где y, z — скалярные функции. Уравнение $F(y, z, t) = 0$ имеет в данном случае три изолированных решения: 1) $z = y + 1$, 2) $z = y$, 3) $z = y - 1$, каждое из которых может дать решение краевой задачи (2.6). Этим решениям соответствуют медленно меняющиеся функции нулевого приближения и присоединенные уравнения (1.9):

$$1) \quad y_0 = e^{t-1} - 1, \quad z_0 = e^{t-1}, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -Z(Z+1)(Z+2)$$

$$2) \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -(Z-1)Z(Z+1) \quad (2.7)$$

$$3) \quad y_0 = 1 - e^{t-1}, \quad z_0 = -e^{t-1}, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -(Z-2)(Z-1)Z$$

1) Корень $z = y + 1$ уравнения $F = 0$ устойчив вправо, область притяжения корня $Z = 0$ уравнения (2.7) суть $-1 < Z(0) < \infty$, или в силу (1.11) для z^0 , удовлетворяющих неравенству

$$-1 + e^{-1} < z^0 < \infty,$$

задача (2.6) имеет решение, стремящееся к y_0, z_0 при $\mu \rightarrow 0, t \geq \varepsilon > 0$.

2) Корень $z = y$ устойчив влево, поэтому краевая задача (2.6) не имеет решений вида (2.3), стремящихся к $y_0 = z_0 \equiv 0$ при $\mu \rightarrow 0$ (если $z^0 \neq 0$).

3) Корень $z = y - 1$ устойчив вправо с областью притяжения

$$-\infty < z^0 < 1 - e^{-1}.$$

Суммируя рассмотренные варианты, видим, что при $-\infty < z^0 < -1 + e^{-1}$ задача (2.6) имеет одно решение, стремящееся при $\mu \rightarrow 0$ к функциям y_0, z_0 (см. (2.7), случай 3); рис. 19, а).

При $-1 + e^{-1} < z^0 < 1 - e^{-1}$ задача (2.6) имеет два решения, одно из которых соответствует случаю 1), а другое — случаю 3) (рис. 19, б).

При $1 - e^{-1} < z^0 < \infty$ снова получаем одно решение, соответствующее случаю 1) (см. рис. 19, а).

3°. При рассмотрении внутреннего пограничного слоя ограничимся одним примером, отсылая за более подробным обсуждением к [29]:

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \mu \frac{dz}{dt} = 1 - z^2, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (2.8)$$

Для этого примера несложно записать точное решение

$$y = \mu \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\mu^{-1}(t - 1/2))}{\operatorname{ch}(\mu^{-1}/2)} \right), \quad z = \operatorname{th}(\mu^{-1}(t - 1/2)). \quad (2.9)$$

При рассматриваемом здесь асимптотическом подходе получаем, что уравнение $F = 0$ имеет два решения: 1) $z = -1$ и 2) $z = 1$, первое из которых устойчиво влево, а второе — вправо. В связи с тем, что оба граничных условия в (2.8) наложены на функцию y , оба решения уравнения $F = 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= -1, \quad y = -t + C, \quad C = 0, \quad t < 1/2 \\ 2) \quad z &= 1, \quad y = t + C, \quad C = -1, \quad t > 1/2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

участвуют в построении решения задачи (2.8). Прямые $y = -t$ и $y = t - 1$ пересекаются во внутренней точке $t = 1/2$, и в окрестности этой точки возникает внутренний пограничный слой, сглаживающий разрывы функций (2.10) при $t = 1/2$ (ср. с точным решением (2.9); см. рис. 20).

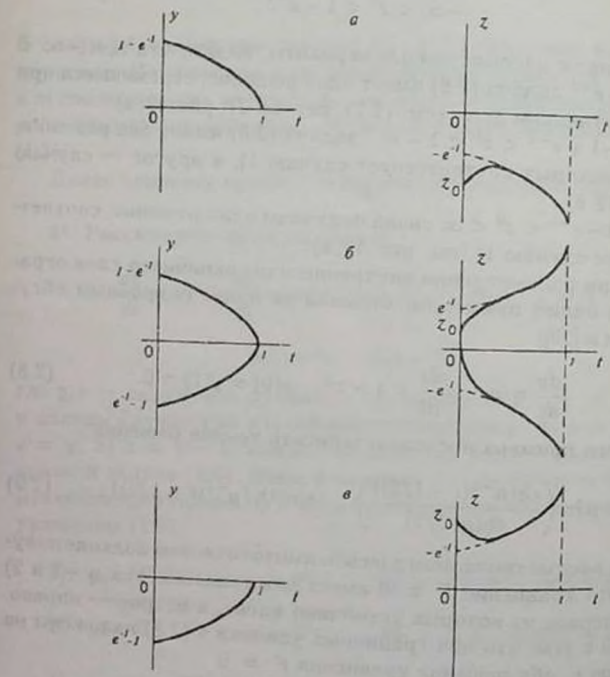


Рис. 19.

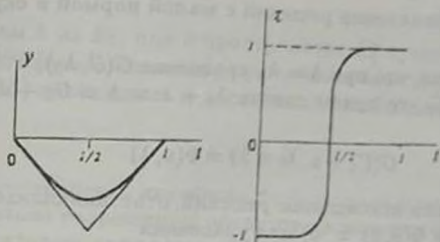


Рис. 20.

5.3. Метод возмущений Ляпунова—Шмидта в теории ветвления решений нелинейных уравнений

1°. Основы теории ветвления решений нелинейных уравнений были заложены в начале века в работах А. М. Ляпунова и Э. Шмидта. Было показано, что задача о числе и поведении решений интегральных или дифференциальных уравнений может быть сведена к исследованию систем неявных аналитических функций, называемых "уравнениями разветвления".

Метод Ляпунова—Шмидта, его различные варианты и его развитие подробно рассмотрены в [15, 25].

Идея метода заключается в разложении исследуемого уравнения на два: одно в конечномерном подпространстве размерности n , а другое — в его бесконечномерном ортогональном дополнении.

Математически задача о ветвлении решений нелинейного уравнения может быть представлена следующим образом. Пусть $G(U, \Lambda)$ — нелинейный оператор, заданный на прямой сумме линейных пространств E, E_0 ($U \in E, \Lambda \in E_0$) со значениями в линейном пространстве E_1 . Задача подразделяется на три части [15]:

- 1) определение значений параметра Λ (например, λ_0), в которых меняется число решений уравнения $G(U, \Lambda) = 0$;
- 2) определение числа решений с малой нормой в окрестности $\Lambda = \lambda_0$;

3) изучение поведения решений с малой нормой в окрестности $\Lambda = \lambda_0$.

Если известно, что при $\Lambda = \lambda_0$ уравнение $G(U, \lambda_0) = 0$ имеет решение $U = U_0$, то путем сдвига $\lambda_0 + \lambda = \Lambda$ и $U_0 + u = U$ и замены

$$G(U_0 + u, \lambda_0 + \lambda) = \Phi(u, \lambda)$$

задача сводится к нахождению решений, ответвляющихся от нулевого (так как $\Phi(0, 0) = 0$) для уравнения

$$\Phi(u, \lambda) = 0. \quad (3.1)$$

2°. Пусть оператор $\Phi(u, \lambda)$ непрерывно дифференцируем. Обозначим

$$B = -\Phi_u(0, 0).$$

Тогда уравнение (3.1) записывается в следующем виде:

$$Bu = R(u, \lambda), \quad (3.2)$$

где

$$R(u, \lambda) \equiv \Phi(u, \lambda) - \Phi_u(0, 0)u.$$

Элемент $\varphi \in E$ назовем нулем оператора B , если он является решением уравнения $Bu = 0$.

Множество $N(B)$ всех нулей оператора B линейно и замкнуто, т. е. является подпространством в E . Назовем размерность $N(B)$ числом нулей оператора B .

Если оператор B не имеет нулей, то оператор B^{-1} существует и ограничен и уравнение

$$Bu = h \quad (3.3)$$

разрешимо при любом h из E_1 .

Напомним некоторые определения. Пространство E^* , сопряженное к E , — это пространство, состоящее из линейных непрерывных функционалов на E . Линейный оператор B называется нормально разрешимым, если или уравнение (3.3) разрешимо

при любом h из E_1 , или в пространстве E_1^* существует множество $N^*(B)$ функционалов ψ , такое, что для разрешимости уравнения (3.3) необходимо и достаточно, чтобы для любого ψ из $N^*(B)$

$$(h, \psi) = 0,$$

где (h, ψ) — значение линейного функционала ψ на элементе h .

Нормально разрешимый оператор называется фредгольмовым оператором, если размерности множеств $N(B)$ и $N^*(B)$ конечны и равны. Будем дальше считать, что оператор B — фредгольмовский оператор и $n \geq 1$, где n — число нулей оператора B . Пусть $\varphi_1 \dots \varphi_n$ — базис подпространства $N(B)$, а ψ_1, \dots, ψ_n — базис в $N^*(B)$. Тогда общее решение однородного уравнения $Bu = 0$ имеет вид $u = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$, где ξ_i — произвольные числа, а условие разрешимости неоднородного уравнения (3.3) можно представить в виде

$$(h, \psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Введем оператор P — проектор E на $N(B)$; для $u \in E$

$$Pu = \sum_{i=1}^n (u, \gamma_i) \varphi_i,$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — такие функционалы из E^* , что

$$(\varphi_i, \gamma_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

(В общем случае $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ могут не совпадать с ψ_1, \dots, ψ_n .) Оператор P порождает разложение пространства E в прямую сумму:

$$E = N(B) \oplus N(B)^\perp,$$

где $N(B)^\perp$ состоит из тех элементов $u \in E$, для которых

$$(u, \gamma_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Аналогично можно построить оператор Q — проектор в E_1 ; для $h \in E_1$ положим

$$Qh = \sum_{k=1}^n (h, \psi_k) z_k. \quad (3.4)$$

Здесь z_1, \dots, z_n — такие элементы E_1 , что

$$(z_k, \psi_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Оператор Q порождает следующее разложение пространства E_1 в прямую сумму подпространств:

$$E_1 = E_{1,n} \oplus E_{1,n}^\perp.$$

Отметим, что если $E = E_1$, то равенство $N(B) = E_{1,n}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\det \|(\varphi_i, \psi_j)\| \neq 0$, и тогда можно считать

$$(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и

$$Pu = Qu = \sum_{k=1}^n (u, \psi_k) \varphi_k.$$

Вернемся к уравнению (3.2). Положив $u = x + y$, где

$$\begin{aligned} x &= (I - P)u \in N(B)^\perp, \\ y &= Pu \in N(B), \end{aligned}$$

спроектируем уравнение (3.2) на $E_{1,n}$ и $E_{1,n}^\perp$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}x &= (I - Q)R(x + y, \lambda), \\ 0 &= QR(x + y, \lambda). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Система (3.5) эквивалентна уравнению (3.2), где \tilde{B} — сужение оператора B на $N(B)^\perp$, Q — проектор, определенный формулой (3.4), а I — тождественный оператор.

Первое уравнение (3.5) может быть упрощено (с учетом второго):

$$\tilde{B}x = R(x + y, \lambda). \quad (3.6)$$

По теореме о неявных операторах [25], так как существует и ограничен \tilde{B}^{-1} , в достаточно малой окрестности точки $x = y = \lambda = 0$ существует и единственно решение $x = x(y, \lambda)$ уравнения (3.6), непрерывное и такое, что

$$x(0, 0) = 0.$$

Подставив это решение во второе уравнение (3.5), получим

$$QR(x(y, \lambda) + y, \lambda) = 0. \quad (3.7)$$

Это уравнение принято называть уравнением Ляпунова—Шмидта. Его можно записать в виде системы n скалярных уравнений с n числовыми неизвестными.

Поскольку элемент $y \in N(B)$ можно однозначно представить в виде

$$y = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i,$$

то

$$x(y, \lambda) \equiv x(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda),$$

и с учетом соотношения (3.4) уравнение (3.7) можно записать так:

$$L^{(k)}(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda) \equiv \left(R \left(x(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, \lambda \right), \psi_k \right) = 0, \quad (3.8)$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Уравнения (3.8) называются уравнениями разветвления.

Функции $L^{(k)}(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda)$ непрерывны при всех достаточно малых $\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n$, и

$$L^{(k)}(0, \dots, 0, 0) = 0; \quad k = 1, \dots, n.$$

Ценность уравнений разветвления (3.8) состоит в том, что число их малых решений равно числу малых решений уравнения (3.2) [25].

3°. Уравнения разветвления (3.8) могут быть получены и другим способом.

Введем оператор \tilde{B} , связанный с оператором B соотношением

$$\tilde{B}u = Bu + \sum_{i=1}^n (u, \gamma_i) z_i. \quad (3.9)$$

Оператор \tilde{B} называется оператором Шмидта и является расширением оператора B на E .

По обобщенной лемме Шмидта [25] оператор \bar{B}^{-1} существует и ограничен. Обозначим $\bar{B}^{-1} = \Gamma$. Уравнения (3.2) с учетом (3.9) можем представить в виде эквивалентной системы

$$\bar{B}u = R(u, \lambda) + \sum_{i=1}^n \xi_i z_i, \quad (3.10)$$

$$\xi_k = (u, \gamma_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

После замены переменной

$$u = x + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$$

для определения x имеем

$$\bar{B}x = R\left(x + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, \lambda\right)$$

(так как из (3.9) $\bar{B}\varphi_i = z_i$, а $\Gamma z_i = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$).

Это уравнение при всех малых $\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n$ имеет единственное решение x , и, значит, уравнение (3.10) имеет единственное малое решение

$$g = x(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i.$$

Но это решение должно удовлетворять уравнению (3.11).

Учитывая, что $(\varphi_i, \gamma_j) = \delta_{ij}$, для определения ξ_1, \dots, ξ_n получаем

$$(x(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda), \gamma_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Эта система также представляет уравнения разветвления. (По определению сопряженного оператора B^* , действующего на E^* со значениями в E_1^* : $(x, B^*\psi) = (Bx, \psi)$, можно получить $\gamma_k = (\bar{B})^*\psi_k$ и уравнения (3.12) переписать в виде

$$(\bar{B}x(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda), \psi_k) = 0$$

что с учетом (3.10) полностью совпадает с уравнением (3.8).

4°. Если оператор $\Phi(u, \lambda)$ — аналитический в некоторой окрестности начала координат, то все функции $L^k(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda)$ — аналитические по своим аргументам и уравнения разветвления (3.8) или (3.12) можно записать в виде [25]

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n \geq 2} L_{i_0}^{(k)}(\lambda) \xi^i + \sum_{i_1 + \dots + i_n \geq 0} \sum_{l=1}^{\infty} L_{i_l}^{(k)}(\lambda) \xi^i = 0, \quad (3.13)$$

$$k = 1, \dots, n,$$

$$i = i_1, \dots, i_n, \quad \xi = \xi_1, \dots, \xi_n,$$

$$\xi^i = \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}.$$

Здесь i и ξ — субиндексы. $L_{i_l}^{(k)}(\lambda)$ — коэффициенты уравнения разветвления — степенные функционалы порядка l по λ при $l \geq 1$ и числа при $l = 0$.

В случае, если λ — числовой параметр, то

$$L_{i_l}(\lambda) \equiv L_{i_l} \lambda^l$$

уравнение разветвления (3.13) имеет вид

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n \geq 2} L_{i_0}^{(k)} \xi^i + \sum_{i_1 + \dots + i_n \geq 0} \xi^i \sum_{l=1}^{\infty} L_{i_l}^{(k)} \lambda^l = 0, \quad (3.14)$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Если число нулей оператора B равно единице, то говорят, что имеет место одномерный случай ветвления. В этом случае уравнение (3.2) можно записать так:

$$Bu = F_{01} \lambda + \sum_{i+j \geq 2} F_{ij} u^i \lambda^j, \quad (3.15)$$

а система уравнений разветвления (3.14) переходит в уравнение

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0} \xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{l=1}^{\infty} L_{kl} \lambda^l = 0.$$

5°. Метод Ляпунова—Шмидта позволяет не только определить число решений, ответвляющихся от основного, но и построить эти решения в окрестности точки ветвления.

Наиболее просто решение определяется для одномерного случая ветвления. В этом случае исходное уравнение может быть записано как

$$\bar{B}u = F_{01}\lambda + \sum_{i+j \geq 2} F_{ij}u^i\lambda^j + \xi z, \quad (3.16)$$

$$\xi = (u, \gamma),$$

где

$$F_{ij} = \frac{1}{i! \cdot j!} \frac{\partial^{i+j} \Phi(0, 0)}{\partial u^i \partial \lambda^j}.$$

Малое решение $u = u(\xi, \lambda)$ уравнения (3.16) можно искать в виде ряда

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i0} \xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \lambda^j. \quad (3.17)$$

Подстановка этого ряда в уравнение $\xi = (u, \gamma)$ дает уравнение разветвления. Поэтому

$$L_{ij} = (x_{ij}, \gamma) \quad (3.18)$$

и, подставляя ряд (3.17) в (3.16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ и ξ , можно получить рекуррентную систему для определения x_{ij} :

$$\begin{aligned} \bar{B}x_{01} &= F_{01}, \\ \bar{B}x_{02} &= F_{02} + 2F_{11}x_{01} + F_{20}x_{01}^2, \\ &\dots \\ \bar{B}x_{10} &= z, \\ \bar{B}x_{20} &= F_{20}x_{10}^2, \\ &\dots \\ \bar{B}x_{11} &= 2F_{11}x_{10} + 2F_{20}x_{10}x_{01}, \\ \bar{B}x_{21} &= 2F_{11}x_{20} + 2F_{20}x_{01}x_{20} + 3F_{21}x_{10}^2 + 3F_{30}x_{01}x_{10}^2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.19) последовательно можно определить

$$x_{ij} = \Gamma \bar{F}_{ij},$$

где \tilde{F}_{ij} — правые части в (3.19).

По соотношению (3.18), учитывая, что $(\Gamma^* \gamma = \psi)$, можно найти коэффициенты уравнения разветвления:

$$\begin{aligned} L_{01} &= (F_{01}, \psi), \\ L_{02} &= (F_{02} + 2F_{11}(\Gamma F_{01}) + F_{20}(\Gamma F_{01})^2, \psi), \\ &\dots \\ L_{20} &= (F_{20}\varphi^2, \psi), \\ &\dots \\ L_{11} &= (2F_{11}\varphi + 2F_{20}\varphi(\Gamma F_{01}), \psi). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Если число нулей оператора B больше или равно 2 ($n \geq 2$), то можно проделать аналогичные выкладки. При этом уравнение (3.10) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} u &= a_{0, \dots, 0} \lambda + \sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j + \sum_{i_1 + \dots + i_n \geq 2} a_{i_1, \dots, i_n} \xi^i \lambda^k, \\ &L_j(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda) \equiv \\ &\equiv \sum_{i_1 + \dots + i_n \geq 2} L_{i_0}^{(j)} \xi^i + \sum_{i_1 + \dots + i_n \geq 0} \xi^i \sum_{k \geq 1} L_{i_k}^{(j)} \lambda^k = 0, \end{aligned}$$

где i и ξ — субиндексы, определенные в (3.13); $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ — базис подпространства $N(B)$.

6°. Применим описанную теорию к задаче о продольном изгибе однородного стержня, шарнирно опертого на концах и находящегося под действием сжимающей силы. Угол поворота $\theta(x)$ касательной к стержню удовлетворяет следующему уравнению равновесия и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \theta_{xx} + \Lambda \cdot \sin \theta &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \theta_x(0) &= \theta_x(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Величина Λ в (3.21) пропорциональна осевому усилию.

Функция $\theta_0(x) \equiv 0$ является решением уравнения (3.21) при всех значениях Λ , и линеаризованная около $\theta_0(x)$ задача имеет вид

$$\theta_{xx} + \Lambda \cdot \theta = 0, \quad \theta_x(0) = \theta_x(1) = 0.$$

Эта задача имеет собственные числа $\Lambda_i = (\pi i)^2$, а соответствующие им собственные функции $\theta(x) = \cos(\pi i x)$. Рассмотрим решения задачи в окрестности первого собственного числа $\Lambda = \pi^2$. Пусть $\Lambda = \pi^2 + \lambda$. Уравнение (3.21) представим (аналогично (3.15)) в виде

$$B\theta = \theta_{xx} + \pi^2\theta = -\theta \cdot \lambda - (\pi^2 + \lambda) \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \theta^{2i-1} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!}. \quad (3.22)$$

Условие существования решения уравнения $B\theta = h(x)$ имеет вид

$$\int_0^1 h(x) \cdot \cos(\pi x) dx = 0.$$

В данном случае $E = E_1$, $n = 1$, $\varphi = \cos(\pi x)$, а функционал γ совпадает с функционалом ψ , и из условия $(\varphi, \gamma) = 1$ следует

$$(\theta, \gamma) = \int_0^1 2\theta \cdot \cos(\pi x) dx.$$

Решение θ уравнения (3.22) будем искать в виде

$$\theta = \xi \cos(\pi x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{2i+1} \theta_{2i+1,0} + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^{2i+1} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{2i+1,j} \lambda^j, \quad (3.23)$$

$$\xi \ll 1$$

(решение раскладывается по нечетным степеням ξ , так как оператор B является нечетной функцией ψ). Подставляем решение (3.23) в систему (3.24), эквивалентную уравнению (3.22):

$$\begin{aligned} \tilde{B}\theta &= \theta_{xx} + \pi^2\theta + \left(\int_0^1 2\theta \cdot \cos(\pi x) dx \right) \cdot \cos(\pi x) = \\ &= -\theta\lambda - (\pi^2 + \lambda) \sum_{i=2}^{\infty} \theta^{2i-1} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} + \xi \cdot \cos(\pi x) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\xi = \int_0^1 2\theta \cdot \cos(\pi x) dx$$

и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях λ и ξ .

Первые из уравнений (3.19) для определения θ_{ij} имеют вид

$$\bar{B}\theta_{3,0} = \frac{\pi^2}{6} \cos^3(\pi x),$$

$$\bar{B}\theta_{1,1} = -\cos(\pi x).$$

Решение этой системы

$$\theta_{3,0} = -\frac{\cos(3\pi x)}{24 \cdot 8} + \frac{\pi^2}{8} \cos(\pi x),$$

$$\theta_{1,1} = -\cos(\pi x).$$

Приведем первые коэффициенты уравнения разветвления (аналогично (3.20)):

$$L_{30} = (\theta_{3,0}, \gamma) = \int_0^1 2\theta_{3,0} \cdot \cos(\pi x) dx = \frac{\pi^2}{8},$$

$$L_{11} = (\theta_{1,1}, \gamma) = \int_0^1 2\theta_{1,1} \cdot \cos(\pi x) dx = -1.$$

Уравнение разветвления

$$\frac{\pi^2}{8} \xi^3 - \lambda \xi + \lambda^2 \xi + \lambda \xi^3 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \xi^5 \cdot \frac{3\pi^2}{64} \left(\pi^2 - \frac{1}{8} \right) + \dots = 0. \quad (3.25)$$

Угол поворота стержня при нагрузках, близких к критическим,

$$\theta \approx \xi \cos(\pi x) - \frac{\xi^3}{24 \cdot 8} \cos(3\pi x) + \left(\xi^3 \frac{\pi^2}{8} - \xi \cdot \lambda \right) \cos(\pi x) + \dots,$$

или с учетом уравнения разветвления

$$\theta \approx \xi \cos(\pi x) - \frac{\xi^3}{24 \cdot 8} \cos(3\pi x) + \dots$$

Зависимость величины ξ от параметра λ в окрестности критического значения $\lambda = \pi^2$ представлена на рис. 21.

Как и следует из уравнения разветвления (3.25), при малых значениях λ (в окрестности критического значения осевого усилия) существует три решения уравнения (3.21), т. е. три положения равновесия.

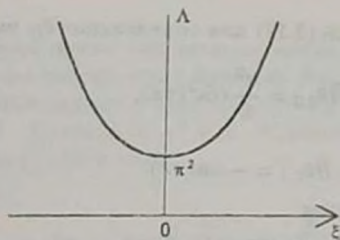


Рис. 21.

5.4. О нелинейных задачах устойчивости

1°. В теории устойчивости упругих консервативных систем различают два типа потери устойчивости. Первый тип по классификации Пуанкаре связан с понятием предельной точки, т. е. точки строгого максимума на кривых деформирования нагрузка-прогиб. (Потеря устойчивости в этом случае обычно называется прощелкиванием.) Примером конструкции, теряющей устойчивость прощелкиванием, является ферма Мизеса, упрощенный вариант которой представлен на рис. 22.

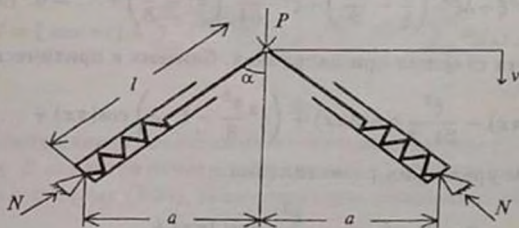


Рис. 22.

Предполагается, что стержни абсолютно жесткие, соединенные с ними пружины имеют жесткость k . При $P = 0$ угол $\alpha = \alpha_0$ и $l = l_0$. Рассматриваем только симметричные формы равновесия. Имеют место следующие соотношения:

из условия равновесия узла — $N = P/2 \cos \alpha$,

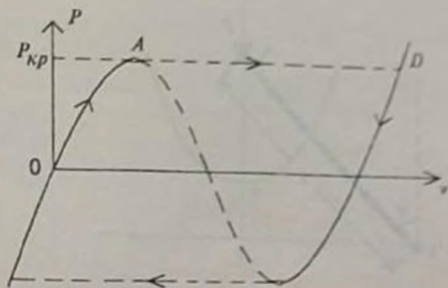


Рис. 23.

при деформировании пружины —

$$N = k \frac{\Delta l}{l_0} = k \left(1 - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \right).$$

Приравняв правые части этих выражений, можно определить связь между нагрузкой P и величиной угла α :

$$P = 2k \left(1 - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \right) \cos \alpha.$$

Если от угла α перейти к линейному перемещению v , то получится

$$P = 2k \left(1 - \frac{v}{a} \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \left[\left(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \left(1 - \frac{v}{a} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2} \right)^{-1} - \cos \alpha_0 \right]. \quad (4.1)$$

Графически зависимость (4.1) представлена на рис. 23.

Если сила P возрастает от нуля, то после достижения системой состояния, соответствующего точке A , произойдет перескок системы в точку D . Таким образом предельная точка A соответствует критической нагрузке.

Второй тип связан с точкой бифуркации (ветвления), т. е. точкой, в которой существует два или более равновесных состо-

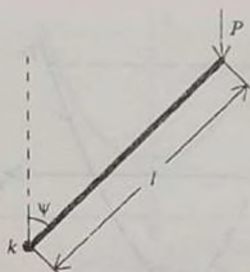


Рис. 24.

яний конструкции. (В этом случае потеря устойчивости обычно называется выпучиванием.) Простейший пример такой конструкции представлен на рис. 24: абсолютно жесткий стержень, один конец которого закреплен в упругом шарнире с жесткостью k_1 , а другой нагружен силой P , не меняющей своего направления.

В отклоненном состоянии имеем уравнение равновесия

$$Pl \sin \psi = k_1 \psi. \quad (4.2)$$

В точке B на рис. 25 от исходного положения равновесия $\psi = 0$ ответвляется еще одно: $P = k_1 \psi / (l \sin \psi)$. Точка B является точкой бифуркации.

Отметим, что математическая задача об определении точек бифуркации обычно проще, чем задача об определении предельных точек, так как точки бифуркации определяются как собственные значения линейных задач, получающихся после линеаризации относительно основного докритического состояния равновесия. Ищется нагрузка, при которой наряду с исходной формой равновесия существуют бесконечно близкие, смежные с исходным состоянием. (Для рассмотренного примера линеаризация около основного положения равновесия $\psi = 0$ из (4.2) дает $(Pl - k_1)\psi = 0$, и если $\psi \neq 0$, то $P = k_1/l$.)

Таким же образом были получены в начале века и первые (классические) критические нагрузки для оболочек (С.П. Ти-

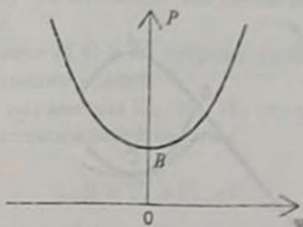


Рис. 25.

иошенко, Р. Саутуэлл [50]). Однако сравнение экспериментальных и теоретических критических нагрузок показало, что экспериментальные, имея большой разброс, составляют меньше третьей части классических (полученных из линейных задач) критических нагрузок.

В 1939 г. Т. Карман и Г.С. Тзянь [209, 210] ввели фундаментально новый метод исследования устойчивости оболочек. Вместо бесконечно малых отклонений от докритического состояния они рассматривали конечные перемещения. Это исследование показало существенную роль нелинейных эффектов в выпучивании оболочек. Выяснилось, что новые формы равновесия, несмежные с безмоментной, существуют при нагрузках, существенно меньших, чем классические критические значения.

В работе [209] впервые были введены понятия верхней и нижней критических нагрузок. Верхней (точка *B*, рис. 26) была названа наибольшая нагрузка, до которой исходное состояние не имеет смежных форм равновесия, а нижней (точка *C*, рис. 26) — наименьшая нагрузка, до которой первоначальное состояние единственно. Пунктирная линия соответствует неидеальной конструкции (т. е. конструкции, имеющей начальный прогиб).

2°. В качестве исходных уравнений в работах [209, 210] использовались нелинейные уравнения пологих оболочек

$$D\Delta^2 w = \Delta_k \Phi + L(\Phi, w), \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{Bh} \Delta^2 \Phi = -\Delta_k w - \frac{1}{2} L(w, w),$$

(функция g_0 соответствует функции f , см. (3.3.1)) и, минимизируя функцию g_0 по n, m , можно получить классическую критическую нагрузку, которая достигается, как известно, для пар (n, m) , связанных соотношением

$$\frac{\eta(1 + \mu^2)^2}{\mu^2} = 2\sqrt{3(1 - \nu^2)}; \quad \eta = n^2 \frac{h}{R}, \quad \mu = \frac{m}{n}.$$

Зависимость $\min_{m,n} \sigma_x(\zeta)$ имеет вид кривой *ОBC* на рис. 26.

Таким образом, в работах [209, 210] выявлено снижение выдерживаемой оболочкой нагрузки с ростом закритических деформаций.

3°. После работ [209, 210] появилось большое число аналогичных исследований, различающихся в основном только видом выражения (4.4), аппроксимирующего прогиб оболочки. Величины нижних критических нагрузок, полученные в этих работах, лучше соответствовали экспериментальным данным, чем классическая верхняя нагрузка, и возникло предложение в качестве критерия устойчивости принимать нижнюю критическую нагрузку. Однако позднее с помощью ЭВМ было обнаружено, что величина нижней критической нагрузки уменьшается при увеличении числа членов, удерживаемых в разложении прогибов, а в некоторых работах были получены даже отрицательные значения этой величины.

Л. Донцелл [204] предложил объяснять низкие экспериментальные критические нагрузки наличием начальных несовершенств формы срединной поверхности и ввел начальный прогиб в нелинейные уравнения. Этот факт подтвердили и эксперименты Р. Теннисона [141], проведенные на моделях оболочек, достаточно точно изготовленных в вакуумных условиях, и показавшие хорошее соответствие с классической линейной теорией. Однако еще некоторое время общая нелинейная теория оболочек привлекала мало внимания из-за больших трудностей решения нелинейных уравнений.

4°. Поведение различных упругих систем вблизи точки бифуркации на основе нелинейной теории в случае малых конечных отклонений от основного состояния исследовал В.Т. Койтер. Кратко основные результаты теории Койтера изложены в

работе [75]. Обзор исследований, возникших на основе теории Койтера, приведен в [187, 214]. Рассмотрим основные положения этой теории.

Пусть внешние нагрузки заданы в виде произведения величин, характеризующих единичную систему сил, и единственного параметра нагрузки Λ . Будем считать, что для основного состояния I перемещения $W(\Lambda)$ известны. Считаем, что при переходе к смежному состоянию II возникают дополнительные малые (но не бесконечно малые) перемещения u . Как и большинство исследователей в области устойчивости механических систем при консервативном нагружении, Койтер принял энергетический критерий устойчивости. Приращение энергии при переходе от состояния I к состоянию II можно разложить в ряд по функции u и ее производным:

$$\Pi_{II} - \Pi_I = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i[u; \Lambda], \quad (4.5)$$

где $\Pi_i[u; \Lambda]$ — группа членов, содержащих i -ю степень величины u и ее производных.

Условие равновесия основного состояния имеет вид $\Pi_1[u; \Lambda] = 0$. Необходимым условием устойчивости основного состояния является соотношение

$$\Pi_2[u; \Lambda] \geq 0. \quad (4.6)$$

Если знак равенства соответствует только перемещениям $u = 0$, то это условие является и достаточным. При достижении параметром Λ критического значения неравенство (4.6) справедливо, но знак равенства выполняется теперь не только для $u = 0$, но и для $u = \xi u_1$, где u_1 — функция, определяющая форму потери устойчивости, а ξ — параметр, характеризующий амплитуду выпучивания. Критическое значение Λ_1 и форма потери устойчивости u_1 определяются из решения задачи о собственных значениях:

$$\min_u \Pi_2[u; \Lambda] = 0.$$

Исследуем новое положение равновесия при параметре нагрузки, близком к Λ_1 , характеризуемое малым дополнительным перемещением u . Представим u в виде $u = \xi u_1 + \bar{u}$, а функциона-

лы $\Pi_i[u; \Lambda]$ разложим в ряд Тейлора в окрестности Λ_1 :

$$\Pi_i[u; \Lambda] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi^{(i)}[u] \lambda^i,$$

где $\lambda = \Lambda - \Lambda_1$.

С учетом этого выражение (4.5) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi_{II} - \Pi_I &= \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi^i \lambda^j \Pi_i^{(j)}[u_1] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \Pi_k^{(j)}[\bar{u}] \lambda^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi^i \lambda^j \Pi_{ik}^{(j)}[u_1, \bar{u}] \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\Pi_{11}[u_1, \bar{u}] = 0, \quad \Pi_2[u_1] = 0.$$

Здесь $\Pi_{ik}^{(j)}[u_1, \bar{u}]$ — однородные функционалы i -й степени от функции u_1 и ее производных и k -й степени от функции \bar{u} и ее производных. В (4.12) слагаемые в первой строчке не зависят от \bar{u} , во второй строчке являются линейными относительно \bar{u} , в последней строчке суммируются члены, содержащие \bar{u} в степени k .

Условие минимума выражения (4.7) при постоянном значении амплитуды выпучивания a в первом приближении имеет вид

$$\min_{\bar{u}} (\Pi_{II} - \Pi_I) = \min_{\bar{u}} (\Pi_2[\bar{u}] + \xi \lambda \Pi'_{11}[u_1, \bar{u}] + \xi^2 \Pi_{21}[u_1, \bar{u}]).$$

Из решения этой задачи вытекает, что функция \bar{u} является малой второго порядка по отношению к величинам ξ и λ и может быть представлена в виде

$$\bar{u} = \xi \lambda \varphi + \xi^2 \psi.$$

С учетом этого минимальное значение величины (4.7) в первом приближении может быть представлено следующим образом:

$$\Pi(\xi, \lambda) = A_2 \xi^2 \lambda + A_n \xi^n,$$

где

$$A_2 = \Pi'_2[u_1],$$

$n = 3$, если $A_3 = \Pi_3[u_i] \neq 0$;

$n = 4$ и $A_4 = \Pi_4[u_i] - \Pi_2[\psi]$, если $A_3 = 0$.

Из условия равновесия смежного состояния

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Pi(\xi; \lambda) = 2A_2 \xi \lambda + n A_n \xi^{(n-2)} = 0. \quad (4.8)$$

Для определения, является ли состояние равновесия устойчивым или неустойчивым, вычисляем вторую производную по

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi(\xi; \lambda) = 2A_2 \lambda + n(n-1) A_n \xi^{(n-2)}.$$

Уравнение (4.8) удовлетворяется при $\xi = 0$, и в этом случае $\lambda = 0$, что соответствует основному состоянию равновесия, которое является устойчивым при $\Lambda < \Lambda_1$ и неустойчивым при $\Lambda > \Lambda_1$. Остальные решения уравнения (4.8) определяются соотношением

$$\xi^{(n-2)} = -\frac{2A_2}{nA_n} \lambda. \quad (4.9)$$

Соответствующее условие устойчивости имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi(\xi; \lambda) = -2A_2(n-2)\lambda. \quad (4.10)$$

В случае $n = 3$ равновесие при критической силе будет неустойчивым; смежные состояния равновесия, описываемые соотношением (4.9), в соответствии с (4.10) устойчивы при нагрузках больше критических и неустойчивы при нагрузках меньше критических (рис. 27, а).

В случае $n = 4$, если $A_4 > 0$, то равновесие при критической силе будет устойчивым и существуют устойчивые смежные состояния равновесия для нагрузок, больших, чем критические (рис. 28, а). Этот случай иллюстрирует поведение сжатого стержня или плоских пластин.

При $A_4 < 0$ равновесие при критической силе будет неустойчивым, и существуют неустойчивые состояния равновесия для нагрузок меньше критических (рис. 29, а). Этот случай относится к большинству задач, связанных с устойчивостью оболочек.

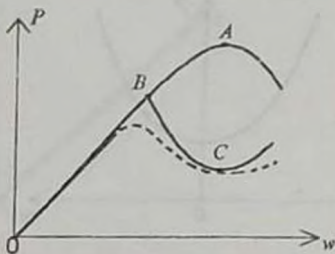


Рис. 26.

отличающиеся от линейных уравнений (3.1.9) подчеркнутыми членами. Операторы Δ , Δ_k и функция усилий Φ определены в п. 3.1.3

$$L(w, \Phi) = L_1 w \cdot L_2 \Phi + L_2 w \cdot L_1 \Phi - 2L_3 w \cdot L_3 \Phi,$$

где

$$L_1 w = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \quad (1 \rightarrow 2),$$

$$L_3 w = -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}.$$

Для полного представления о поведении оболочки после потери устойчивости необходимо решать оба уравнения системы (4.3). Из-за сложности задачи в [209, 210] использовался приближенный вариационный метод Ритца.

Функция прогиба w отыскивалась, например, в случае цилиндрической оболочки при осевом сжатии в виде

$$w = W_0 + W_1 \cos \frac{mx}{R} \cos \frac{ny}{R} + W_2 \cos^2 \frac{(mx + ny)}{2R} \cos^2 \frac{(mx - ny)}{2R}. \quad (4.4)$$

Член W_0 характеризует возможность радиального расширения оболочки, член с коэффициентом W_1 отвечает классической линейной теории, последний член дает ромбовидные вмятины,

направленные внутрь оболочки, что соответствует экспериментальным данным.

По соотношению (4.4) и по второму уравнению (4.3) может быть найдена функция усилий.

Неизвестные параметры W_0 , W_1 , W_2 определяются из условия минимума потенциальной энергии

$$\Pi = U_\epsilon + U_\kappa - U,$$

где

$$U_\epsilon = \frac{1}{2Eh} \iint_G [(\Delta\Phi)^2 - (1+\gamma)L(\Phi, \Phi)] dG$$

— энергия растяжения-сжатия срединной поверхности,

$$U_\kappa = \frac{D}{2} \iint_G [(\Delta w)^2 - (1-\gamma)L(w, w)] dG$$

— энергия изгиба, U — работа внешних сил.

В случае цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия

$$\begin{aligned} U &= h \int_0^{2\pi R} (\sigma_x)_{x=0,L} \int_0^L \frac{\partial U}{\partial x} dx dy = \\ &= \frac{1}{Eh} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x=0,L} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{Eh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

Исключая из уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_i} = \Phi_i(W_0, W_1, W_2, \sigma_x) = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

параметры W_0 , W_1 , получаем связь между напряжением сжатия и амплитудой выпучивания:

$$\frac{\sigma_x R}{Eh} = g_0(n, m) + \zeta g_1(n, m) + \zeta^2 g_2(n, m).$$

Здесь $\zeta = W_2 R/h$, g_i — функции от числа волн в окружном направлении (m) и направлении образующей (n).

При $\zeta \rightarrow 0$

$$\frac{\sigma_x R}{Eh} = g_0(n, m),$$

(функция g_0 соответствует функции f , см. (3.3.1)) и, минимизируя функцию g_0 по n, m , можно получить классическую критическую нагрузку, которая достигается, как известно, для пар (n, m) , связанных соотношением

$$\frac{\eta(1 + \mu^2)^2}{\mu^2} = 2\sqrt{3(1 - \nu^2)}; \quad \eta = n^2 \frac{h}{R}, \quad \mu = \frac{m}{n}.$$

Зависимость $\min_{m,n} \sigma_x(\zeta)$ имеет вид кривой *ОBC* на рис. 26.

Таким образом, в работах [209, 210] выявлено снижение выдерживаемой оболочкой нагрузки с ростом закритических деформаций.

3°. После работ [209, 210] появилось большое число аналогичных исследований, различающихся в основном только видом выражения (4.4), аппроксимирующего прогиб оболочки. Величины нижних критических нагрузок, полученные в этих работах, лучше соответствовали экспериментальным данным, чем классическая верхняя нагрузка, и возникло предложение в качестве критерия устойчивости принимать нижнюю критическую нагрузку. Однако позднее с помощью ЭВМ было обнаружено, что величина нижней критической нагрузки уменьшается при увеличении числа членов, удерживаемых в разложении прогибов, а в некоторых работах были получены даже отрицательные значения этой величины.

Л. Донцелл [204] предложил объяснять низкие экспериментальные критические нагрузки наличием начальных несовершенств формы срединной поверхности и ввел начальный прогиб в нелинейные уравнения. Этот факт подтвердили и эксперименты Р. Теннисона [141], проведенные на моделях оболочек, достаточно точно изготовленных в вакуумных условиях, и показавшие хорошее соответствие с классической линейной теорией. Однако еще некоторое время общая нелинейная теория оболочек привлекала мало внимания из-за больших трудностей решения нелинейных уравнений.

4°. Поведение различных упругих систем вблизи точки бифуркации на основе нелинейной теории в случае малых конечных отклонений от основного состояния исследовал В.Т. Койтер. Кратко основные результаты теории Койтера изложены в

работе [75]. Обзор исследований, возникших на основе теории Койтера, приведен в [187, 214]. Рассмотрим основные положения этой теории.

Пусть внешние нагрузки заданы в виде произведения величин, характеризующих единичную систему сил, и единственного параметра нагрузки Λ . Будем считать, что для основного состояния I перемещения $W(\Lambda)$ известны. Считаем, что при переходе к смежному состоянию II возникают дополнительные малые (но не бесконечно малые) перемещения u . Как и большинство исследователей в области устойчивости механических систем при консервативном нагружении, Койтер принял энергетический критерий устойчивости. Приращение энергии при переходе от состояния I к состоянию II можно разложить в ряд по функции u и ее производным:

$$\Pi_{II} - \Pi_I = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i[u; \Lambda], \quad (4.5)$$

где $\Pi_i[u; \Lambda]$ — группа членов, содержащих i -ю степень величины u и ее производных.

Условие равновесия основного состояния имеет вид $\Pi_1[u; \Lambda] = 0$. Необходимым условием устойчивости основного состояния является соотношение

$$\Pi_2[u; \Lambda] \geq 0. \quad (4.6)$$

Если знак равенства соответствует только перемещениям $u = 0$, то это условие является и достаточным. При достижении параметром Λ критического значения неравенство (4.6) справедливо, но знак равенства выполняется теперь не только для $u = 0$, но и для $u = \xi u_1$, где u_1 — функция, определяющая форму потери устойчивости, а ξ — параметр, характеризующий амплитуду выпучивания. Критическое значение Λ_1 и форма потери устойчивости u_1 определяются из решения задачи о собственных значениях:

$$\min_u \Pi_2[u; \Lambda] = 0.$$

Исследуем новое положение равновесия при параметре нагрузки, близком к Λ_1 , характеризуемое малым дополнительным перемещением u . Представим u в виде $u = \xi u_1 + \bar{u}$, а функциона-

лы $\Pi_i[u; \Lambda]$ разложим в ряд Тейлора в окрестности Λ_1 :

$$\Pi_i[u; \Lambda] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi^{(i)}[u] \lambda^i,$$

где $\lambda = \Lambda - \Lambda_1$.

С учетом этого выражение (4.5) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi_{II} - \Pi_I &= \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi^i \lambda^j \Pi_i^{(j)}[u_1] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \Pi_k^{(j)}[\bar{u}] \lambda^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi^i \lambda^j \Pi_{ik}^{(j)}[u_1, \bar{u}] \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\Pi_{11}[u_1, \bar{u}] = 0, \quad \Pi_2[u_1] = 0.$$

Здесь $\Pi_{ik}^{(j)}[u_1, \bar{u}]$ — однородные функционалы i -й степени от функции u_1 и ее производных и k -й степени от функции \bar{u} и ее производных. В (4.12) слагаемые в первой строчке не зависят от \bar{u} , во второй строчке являются линейными относительно \bar{u} , в последней строчке суммируются члены, содержащие \bar{u} в степени k .

Условие минимума выражения (4.7) при постоянном значении амплитуды выпучивания a в первом приближении имеет вид

$$\min_{\bar{u}} (\Pi_{II} - \Pi_I) = \min_{\bar{u}} (\Pi_2[\bar{u}] + \xi \lambda \Pi'_{11}[u_1, \bar{u}] + \xi^2 \Pi_{21}[u_1, \bar{u}]).$$

Из решения этой задачи вытекает, что функция \bar{u} является малой второго порядка по отношению к величинам ξ и λ и может быть представлена в виде

$$\bar{u} = \xi \lambda \varphi + \xi^2 \psi.$$

С учетом этого минимальное значение величины (4.7) в первом приближении может быть представлено следующим образом:

$$\Pi(\xi, \lambda) = A_2 \xi^2 \lambda + A_n \xi^n,$$

где

$$A_2 = \Pi'_2[u_1],$$

$n = 3$, если $A_3 = \Pi_3[u_i] \neq 0$;

$n = 4$ и $A_4 = \Pi_4[u_i] - \Pi_2[\psi]$, если $A_3 = 0$.

Из условия равновесия смежного состояния

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Pi(\xi; \lambda) = 2A_2 \xi \lambda + n A_n \xi^{(n-2)} = 0. \quad (4.8)$$

Для определения, является ли состояние равновесия устойчивым или неустойчивым, вычисляем вторую производную по

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi(\xi; \lambda) = 2A_2 \lambda + n(n-1)A_n \xi^{(n-2)}.$$

Уравнение (4.8) удовлетворяется при $\xi = 0$, и в этом случае $\lambda = 0$, что соответствует основному состоянию равновесия, которое является устойчивым при $\Lambda < \Lambda_1$ и неустойчивым при $\Lambda > \Lambda_1$. Остальные решения уравнения (4.8) определяются соотношением

$$\xi^{(n-2)} = -\frac{2A_2}{nA_n} \lambda. \quad (4.9)$$

Соответствующее условие устойчивости имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Pi(\xi; \lambda) = -2A_2(n-2)\lambda. \quad (4.10)$$

В случае $n = 3$ равновесие при критической силе будет неустойчивым; смежные состояния равновесия, описываемые соотношением (4.9), в соответствии с (4.10) устойчивы при нагрузках больше критических и неустойчивы при нагрузках меньше критических (рис. 27, а).

В случае $n = 4$, если $A_4 > 0$, то равновесие при критической силе будет устойчивым и существуют устойчивые смежные состояния равновесия для нагрузок, больших, чем критические (рис. 28, а). Этот случай иллюстрирует поведение сжатого стержня или плоских пластин.

При $A_4 < 0$ равновесие при критической силе будет неустойчивым, и существуют неустойчивые состояния равновесия для нагрузок меньше критических (рис. 29, а). Этот случай относится к большинству задач, связанных с устойчивостью оболочек.

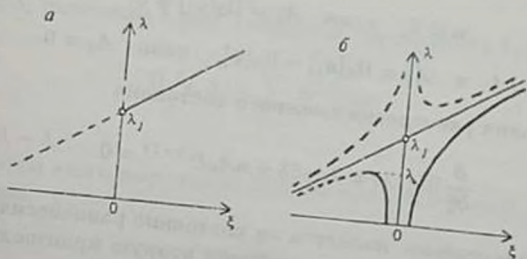


Рис. 27.

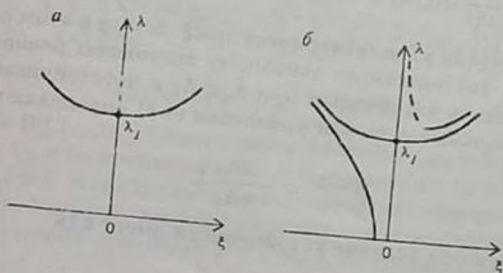


Рис. 28.

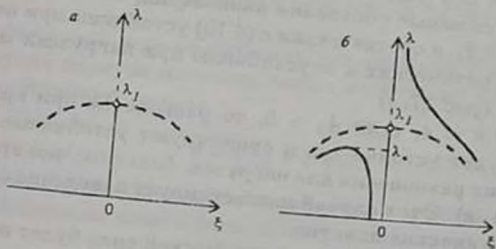


Рис. 29.

При нагрузках меньше критической все смежные состояния равновесия являются неустойчивыми (отмечены пунктирной линией на рис. 27, а—29, а).

5°. Если конструкция имеет начальные прогибы, то основное состояние равновесия, отображающее равновесную форму прогнутой модели, не соответствует форме равновесия реальной конструкции. Приращение энергии при переходе от основного состояния к смежному имеет дополнительный член, линейный относительно перемещения u , и, если начальные несовершенства формы малы (имеют порядок толщины оболочки), то этот дополнительный член будет линейным и относительно этих несовершенств.

В этом случае в первом приближении выражение (4.7) имеет вид

$$\Pi_{II} - \Pi_I = \Pi_2[u; \lambda] + \Pi_3[u; \lambda] + \Pi_4[u; \lambda] + \bar{u}_0 \Lambda Q_1[u].$$

где \bar{u}_0 — параметр, определяющий глубину начальных несовершенств формы, $Q_1[u]$ — линейный функционал, зависящий от характера начальных несовершенств. Если провести такое же исследование, как и выше, то получим

$$\Pi^*(\xi, \lambda) = A_2 \xi^2 \lambda + A_n \xi^n + \bar{u}_0 \Lambda B \xi,$$

где $B = Q_1[u_1]$. Условие равновесия при этом имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Pi^*(\xi, \lambda) = 2A_2 \xi \lambda + n A_n \xi^{(n-1)} + \bar{u}_0 \Lambda B = 0. \quad (4.11)$$

Критерий устойчивости в данном случае остается тем же — (4.10). Рассматривая уравнение (4.11) вместе с условием потери устойчивости $\partial^2 \Pi(\xi; \Lambda) / \partial \xi^2 = 0$, для критического значения Λ^* можно получить асимптотическую формулу, связывающую параметр начальных несовершенств с отклонением значения критической нагрузки от классического, вычисленного для "идеальной" конструкции. При $n = 3$ находим

$$(\Lambda_1 - \Lambda^*)^2 = 3 \frac{B A_3}{A_2^2} \bar{u}_0 \Lambda^*. \quad (4.12)$$

При $n = 4$ и $A_4 < 0$ имеем

$$(\Lambda_1 - \Lambda^*)^3 = \frac{27B^2 A_4}{8A_2^3} \bar{u}_0^2 \Lambda^{*2}. \quad (4.13)$$

Полученные зависимости показаны на рис. 27, б—29, б. Наиболее важным результатом является появление предельных точек, соответствующих Λ^* в случае неустойчивого критического состояния "идеальной" упрощенной модели. Значение истинной критической нагрузки Λ^* оказывается в таких случаях очень чувствительным к влиянию начальных несовершенств.

Наиболее просто получаются формулы типа (4.12) и (4.13) в случае, если несовершенство имеет классическую форму выпучивания. Некоторые такие формулы, полученные В.Т. Койтером, приведены в работах [75, 187]. В [5] для наиболее чувствительной к несовершенствам цилиндрической оболочки, испытывающей действие осевого сжатия, получена асимптотическая формула, аналогичная (4.13), характеризующая влияние осесимметричного локального или случайного прогиба. В [12, 13] приведены аналогичные соотношения для локализованных в осевом направлении неосесимметричных несовершенств, а также для регулярных и локализованных отклонений в толщине оболочки.

6°. В работе [140] на основе метода Ляпунова—Шмидта построена общая теория выпучивания и начального послекритического поведения пологих упругих оболочек с малыми несовершенствами формы срединной поверхности при близких или совпадающих критических нагрузках. Определяется число новых форм равновесия с построением рядов Ляпунова—Шмидта для каждой из них.

Уравнения пологих оболочек при наличии начальных прогибов w_0 имеют вид

$$D\Delta^2 w = L(w_0 + w, \Phi) + \Delta_k \Phi, \\ \frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - L(w, w_0) - \Delta_k w. \quad (4.14)$$

Здесь w — дополнительный прогиб, Φ — функция усилий, операторы Δ , L , Δ_k описаны в пп. 3.1.3, 5.4.2.

Предположим, что нагрузка зависит от одного параметра Λ . Λ_1 — наименьшее собственное значение, соответствующее параметру нагрузки для совершенной оболочки (при $\bar{w}_0 = 0$, где \bar{w}_0 — малая амплитуда начального прогиба). Выделим в функциях прогиба и усилий члены, описывающие докритическое состояние (w_*, Φ_*) , и разложим функции (w, Φ) в окрестности Λ_1 ряд по параметру $\lambda = \Lambda - \Lambda_1$:

$$w_*(\Lambda) = w_*(\Lambda_1) + \sum_{j=1}^{\infty} w_j^* \lambda^j,$$

$$\Phi_*(\Lambda) = \Phi_*(\Lambda_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j^* \lambda^j.$$

Положим $w = w_1 + w_*$, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_*$. Тогда систему (4.14) для малых возмущений w_1, Φ_1, λ можно записать так:

$$BU = (M + M_T)U = M_1 U + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j C_j U + \bar{w}_0 M_0 U. \quad (4.15)$$

Здесь

$$U = \begin{pmatrix} w_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} D\Delta^2 & -\Delta_k \\ \Delta_k & \frac{1}{E\kappa}\Delta^2 \end{pmatrix},$$

M — линейный оператор, описывающий деформацию оболочки; M_T — линейный дифференциальный оператор, вызванный докритическими усилиями; M_0 — оператор, порожденный начальными несовершенствами; M_1 — нелинейный оператор;

$$C_j U = \begin{pmatrix} L(w_j^*, \Phi_1) + L(w_1, \Phi_j^*) \\ -L(w_j^*, w_1) \end{pmatrix}.$$

Асимптотическое решение системы (4.15) ищется в виде

$$U = \sum_{j=1}^n U_j \xi_j + \lambda \sum_{k=1}^n \xi_k U_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n U_{j,k} \xi_j \xi_k + O(|\xi^3|), \quad (4.16)$$

где U_j — формы выпучивания, соответствующие собственному числу Λ_1 кратности n , ξ_j — малые числа.

Подставляя (4.16) в (4.15), получаем неоднородную систему линейных уравнений относительно неизвестных ξ_j и $U_{j,k}$.

Уравнения разветвления в этом случае могут быть представлены в виде

$$L^{(j)} \equiv \xi_j \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k^2 + b_j \lambda \right) + w_{0j} = 0, \quad (4.17)$$

где $w_{0j} = \bar{w}_0(U_0, U_j)$.

Система (4.17) решается в [140] численно для нагруженных равномерным внешним давлением несовершенных сферической и конической оболочек с учетом двух собственных форм. При этом одновременно ставится условие

$$\det \|\partial L_i / \partial \xi_k\| = 0, \quad i, k = 1 \dots n,$$

при котором происходит потеря устойчивости. Такой способ позволяет, не отыскивая всех ветвей решений, находить значения критических нагрузок как функцию n параметров, характеризующих несовершенство оболочки.

В работе [143] аналогичное исследование выполнено для непологих оболочек вращения. Так же как и в [140], отмечается, что учет взаимодействия собственных форм приводит к дополнительному уменьшению критической нагрузки.

Указатель литературы

1. Аксетян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние лит малой толщины // Прикл. мат. и мех. 1963. Т. 27. Вып. С.1057-1074.
2. Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких пружин пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. Вып. 3. С. 65-72.
3. Алумяз Н.А. Определение критического давления оболочек, очерченных по однополостному гиперболоиду // Прикл. мат. и мех. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 397-408.
4. Алумяз Н.А. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметрических установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения // Изв. АН Уст.ССР. Сер. техн. и физ.-мат. н. 1960. Т. 10. Вып. 1. С. 3-15.
5. Амазиго Дж., Будявски Б. Асимптотические формулы для критических напряжений выпучивания цилиндрических оболочек с локализованными или случайными осесимметричными неправильностями формы, сжимаемых в осевом направлении // Прикл. мех., перевод с англ., 1972, №3, С. 219-223.
6. Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М., 1985. 224 с.
7. Асланян А.Г., Васильев Д.Г., Лидский В.Б. Частоты свободных колебаний тонкой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // Функци. анал. 1981. Т. 15. Вып. 3. С. 1-9.
8. Асланян А.Г., Лидский В.Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М., 1974. 156 с.
9. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972. 456 с.
10. Бабич В.М., Киселев А.П. Геометросейсмическое описание нелучевой волны S^* // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. Вып. 10. С. 67-71.
11. Бабич В.М., Молотков И.А. Математические методы в теории упругих волн // Итоги науки. Механика деформируемого твердого тела. 1977. Т. 10. С. 5-62.
12. Бауэр С.М. О влиянии локализованных в осевом направлении несовершенств формы на устойчивость оболочек враще-

ния, близких к цилиндрическим // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1978. Вып. 3. С. 131-134.

13. Бауэр С.М. Об устойчивости цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1984. Вып. 2. С. 51-55.

14. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. - М., 1984. 352 с.

15. Бергер М.С. Теория бифуркаций в случае нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений и систем. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М., 1974. С.114-128.

16. Бергман Р.М. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек // Прикл. мат. и мех. 1973. Т. 37. Вып. 6. С. 1125-1134.

17. Бердичевский В.Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек // Прикл. мат. и мех. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 664-687.

18. Бердичевский В.Л., Ле Хань Чау. Высокочастотные длинноволновые колебания оболочек // Прикл. мат. и мех. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 737-744.

19. Боголюбов И.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974. 504 с.

20. Болотин В.В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек // Прикл. мат. и мех. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 362-364.

21. де Брейн Н.Г. Асимптотические методы в анализе. М., 1961. 248 с.

22. Булыгин В.А. Об одном классе оболочек, меняющих знак гауссовой кривизны // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. Вып. 5. С. 97-105.

23. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1968. 464 с.

24. Вайнберг Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М., 1982. 296 с.

25. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969. 528 с.

26. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. Вып. 3. С. 26-47.

27. Васильев Д.Г., Гольденвейзер А.Л. Распределение

частот свободных колебаний двухмерных и трехмерных упругих тел // *Механика и научно-технический прогресс. Механика твердого деформируемого тела*. М., 1988. Т. 3. С. 223-236.

28. Васильев Д.Г., Лидский В.Б. Колебания оболочек, контактирующих с жидкостью // *Успехи мат. наук*. 1982. Т. 17. Вып. 5. С. 224-225.

29. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 272 с.

30. Векслер Н.Д. Информационные проблемы гидроупругости. Таллин, 1982. 246 с.

31. Векуа Н.И. Об одном методе расчета призматических оболочек // *Труды Тбилисского матем. ин-та*. 1955. Т. 21. С. 191-259.

32. Вильке В.Г. Об инерциальных свойствах собственных форм осесимметричного упругого тела // *Вестн. Московск. ун-та*. 1986. Сер. 2. Вып. 2. С.66-72.

33. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи мат. наук*. 1957. Т. 12. Вып. 5 (77). С.3-122.

34. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // *Успехи матем. наук*. 1960. Т. 15. Вып. 4(94). С.27-95.

35. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. - М., 1949. 784 с.

36. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967. 984 с.

37. Воробьев Ю.С., Детистов С.И. О влиянии центробежных сил на собственные частоты круговых конических оболочек. *Проблемы машиностроения*. 1981. №14. С. 27-29.

38. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М., 1979. 319 с.

39. Гольденвейзер А.Л. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с крайними условиями, зависящими от параметра // *Прикл. мат. и*

мех. 1950. Т. 22. Вып. 5. С.657-672.

• 40. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., 1953. 544 с.

41. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., 1976. 512 с.

42. Гольденвейзер А.Л. Математическая жесткость поверхностей и физическая жесткость оболочек // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1979. Вып. 6. С.65-77.

43. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 1/2. С.137-182.

44. Гольденвейзер А.Л. О геометрической теории устойчивости оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. Вып. 1. С.143-154.

45. Гольденвейзер А.Л. Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. Вып. 3. С.5-17.

46. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. Динамический погранслои в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1988. Вып. 4. С. 152-162.

47. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979. 384 с.

48. Гольденвейзер А.Л., Радовинский А.Л. Асимптотический анализ колебаний и излучение оболочки вращения в жидкости. М., 1986. 61 с. Препринт N 275.: Инст. пробл. механики АН СССР.

49. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1977. 1100 с.

50. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М., 1978. 360 с.

51. Гуссейн-Заде М.И. Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок // Прикл. мат. и мех. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 899-907.

52. Дойнелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М., 1982. 568 с.

53. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. Т. 7. Вып. 6 (52). С. 3-96.

54. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М., 1979. 320 с.
55. Егармин Н.Е. О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1986. Вып. 1. С. 142-148.
56. Елисеев В.В. Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1977. Вып. 3. С. 145-150.
57. Елисеев В.В. Одномерные и трехмерные модели в механике упругих стержней: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. С.-Петербург. 1992. 27 с.
58. Ершов В.И. Низкочастотные колебания куполов // Прикл. мех. Л., 1979. Вып. 4. С. 175-182.
59. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. Вып. 3. С. 48-64.
60. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М., 1985. 126 с.
61. Зимин В.И. О применении асимптотического интегрирования к решению одного уравнения теории оболочек // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н. 1957. Вып. 4.
62. Иванов Б.П., Илюхин А.А., Козлов С.В. К обоснованию теории Кирхгофа-Клебша // Математич. физика и нелинейная механика. 1984. Т. 2. Вып. 36. С.19-24.
63. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965. 704 с.
64. Каплунов Ю.Д. Интегрирование уравнений динамического погранслоя // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1990. Вып. 1. С. 148-160.
65. Каплунов Ю.Д. Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в тонких упругих оболочках // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1990. Вып. 5. С.147-157.
66. Каплунов Ю.Д. Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в оболочках, погруженных в жидкость // Прикл. мат. и мех. 1991. Вып. 3. С.478-485.
67. Каплунов Ю.Д. Колебания оболочек вращения при высокочастотном краевом возбуждении. // Изв. АН СССР. Ме-

ханика тверд. тела. 1991. Вып. 6. С.151-159.

68. Квасников Б.Н. К проблеме построения приближенных методов расчета в теории тонких оболочек // Прикл. мех. Л. 1984. Вып. 6. С.126-138.

69. Кильчевский Н.А. Обобщение современной теории оболочек // Прикл. мат. и мех. 1939. Т. 2. Вып. 4. С.427-438.

70. Кирхгоф Г. Механика. М., 1962. 402 с.

71. Ковалевский М.А. Нахождение связи между двумя фундаментальными семействами решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения // Вести. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1981. Вып. 1 С.32-37.

72. Ковалевский М.А. Построение множителей Стокса для уравнений с двумя особыми точками // Вести. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1981. Вып. 2 С.49-54.

73. Ковалевский М.А. О разностных уравнениях для определения множителей связи // Докл. АН СССР. 1984. Т.277. Вып. 6. С.1315-1318.

74. Ковалевский М.А. Асимптотика решений эталонного уравнения для задач с точкой поворота // Сибирский мат. журнал. 1984. Т.25. Вып. 4 С. 82-92.

75. Койтер В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем. Механика. Сб. переводов. 1960. №5. С.99-110.

76. Колос А.В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // Прикл. мат. и мех. 1965. Т. 29. Вып. 4. С.771-781.

77. Корнев В.М. К формулировке граничных условий упрощенных уравнений колебаний оболочек вращения // Прикл. мат. и мех. 1970. Т. 34. Вып. 1. С.84-94.

78. Коул Р.Г. Методы возмущений в прикладной математике. М., 1972. 274 с.

79. Лазуткин В.Ф. Асимптотика собственных функций оператора Лапласа, сосредоточенных вблизи границы области // Журн. выч. мат. и мат. физики. 1967. Т. 7. Вып. 6. С.1237-1249.

80. Лазуткин В.Ф. Построение асимптотического ряда для собственных функций типа прыгающего мячика // Тр. МИАН. 1968. Т. 95. С.106-118.

81. Лидский В.Б., Товстик П.Е. Спектры в теории оболочек // Успехи механики. 1984. Вып. 7. С.25-54.

82. Лийва Т.В. О собственных неосесимметричных колебаниях оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны // Тр. Таллинск. политех. ин-та. Сер. А. 1970. Вып. 5. С.47-60.
83. Лийва Т.В., Товстик П.Е. Свободные неосесимметричные колебания оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны // Тр. 7-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М. 1970. С.365-369.
84. Лийва Т.В., Товстик П.Е. Об устойчивости в линейном приближении оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Л., 1970. С.231-238.
85. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981. 400 с.
86. Лурье А.И. Общая теория упругих тонких оболочек // Прикл. мат. и мех. 1940. Т. 4. Вып. 2. С.7-34.
87. Лурье А.И. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра // Прикл. мат. и мех. 1946. Т. 10. Вып. 3. С.397-406.
88. Ляв А. Математическая теория упругости. М., 1935 676 с.
89. Майборода А.Л. Об устойчивости оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при неосесимметричном нагружении // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1989. Вып. 4. С. 61-65.
90. Майборода А.Л. Устойчивость круговой конической оболочки при изгибе силой // Прикл. мех. Л., 1990. Вып. 8. С. 209-214.
91. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., 1956. 492 с.
92. Мальков В.М. Линейная теория тонкого слоя из малодеформируемого материала // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. Вып. 1. С. 52-54.
93. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М., 1977. 384 с.
94. Маслов В.П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М., 1987. 408 с.
95. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. М., 1988. 312 с.
96. Мехтиев М.Ф. Свободные колебания изотропного поло-

го цилиндра // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1985. Вып. 5. С. 83-88.

97. Михасев Г.И. Локальная потеря устойчивости оболочек нулевой кривизны с переменными толщиной и модулем упругости // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех, астроном. 1984. Вып. 2. С. 104-105.

98. Михасев Г.И. Локальная потеря устойчивости тонкого усеченного цилиндра под действием комбинированной нагрузки // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех, астроном. 1984. Вып. 4. С. 85-90.

99. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Устойчивость конических оболочек под действием внешнего давления // Механика тверд. тела. 1990. Вып. 4. С. 99-104.

100. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1969. 480 с.

101. Молчанов А.И. Свободные колебания некруговых оболочек, близких к оболочкам нулевой гауссовой кривизны // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1986. Вып. 4. С.43-45.

102. Молчанов А.И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений свободных колебаний некруговых оболочек, близких к оболочкам нулевой гауссовой кривизны // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех, астроном. 1987. Вып. 2. С.106-107.

103. Найфэ А. Методы возмущений. М., 1976. 456 с.

104. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М., 1984. 536 с.

105. Назаров С.А. Введение в асимптотические методы теории упругости. - Л., 1983. 117 с.

106. Нигул У.К., Метсавэар Я.А., Векслер Н.Д., Кутсер М.Э. Эхо-сигналы от упругих объектов. Таллин, 1974. 345 с.

• 107. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л., 1962. 432 с.

108. Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // Прикл. мат. и мех. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 331-340.

• 109. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л., 1991. 656 с.

110. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостен-

ых конструкций. М., 1991. 416 с.

111. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М., 1990. 528 с.

112. Петрашень Г.И. К теории колебаний тонких пластин // Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук. 1951. Т. 24. Вып. 49. С. 172-249.

113. Петров М.Б. Исследование потери устойчивости оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны по формам чистого изгиба // Прикл. мех. Л., 1979. Вып. 4. С. 211-224.

114. Петров М.Б. О собственных и критических размерах оболочек вращения отрицательной кривизны // Прикл. мех. Л., 1981. Вып. 5. С. 228-238.

115. Петров М.Б. Интегралы уравнений сверхнизкочастотных колебаний оболочек вращения знакопеременной кривизны // Прикл. мех. Л., 1984. Вып. 6. С. 161-168.

116. Петров М.Б., Товстик П.Е. Низкочастотные колебания оболочек вращения знакопеременной гауссовой кривизны // Тр. 12-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван. 1980. Т. 3. С. 118-124.

117. Пикуль В.В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. Вып. 3. С. 18-25.

118. Погорелов А.В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М., 1966. 296 с.

119. Понятовский В.В. Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1968. Вып. 5. С. 139-143.

120. Понятовский В.В. Вывод уравнений тонкостенных стержней - оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования // Исслед. по упругости и пластичности. Л., 1980. Вып. 13. С. 40-48.

121. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Переходные поверхности при коротковолновых колебаниях эллипсоидальной оболочки в жидкости // Прикл. мат. и мех. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 808-814.

122. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. О резонансных частотах оболочек, колеблющихся в бесконечной жидкости // Прикл. мат. и мех. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 869-876.

123. Пшеничнов Г.И. Малые свободные колебания упругих

оболочек вращения // Инженерный журн. 1965. Т. 5. Вып. 4. С. 685-690.

124. Радовинский А.Л. Классификация свободных колебаний оболочек, содержащих жидкость // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1979. Вып. 6. С.124-135.

125. Радовинский А.Л. Динамика упругих электропроводящих оболочек в постоянных и нестационарных магнитных полях // Прикл. мат. и мех. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 796-804.

126. Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига, 1974. Т.1. 391 с.; 1977. Т.2. 370 с.; 1981. Т.3. 370 с.

127. Рогачева Н.Н. Уточненная теория термоупругих оболочек // Тр. 10-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Тбилиси. 1975. Т. 1. С. 251-259.

128. Рогачева Н.Н. О методе расчленения напряженного состояния в оболочках отрицательной гауссовой кривизны с асимптотическими краями // Прикл. мат. и мех. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 333-341.

129. Рогачева Н.Н. Классификация свободных колебаний пьезокерамических оболочек // Прикл. мат. и мех. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 147-154.

130. Родионова В.А. Теория тонких анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия. Л., 1983. 116 с.

131. Росс Е.В. (мл.) Асимптотическое исследование осесимметричных колебаний оболочек // Прикладная механика. М., 1966. Вып. 1. С. 72-80.

132. Росс Е.В. (мл.) Колебания тонких оболочек без растяжения // Прикладная механика. М., 1968. Вып. 3. С. 93-103.

133. Росс Е.В. (мл.), Мэтьюз В.Т. Частоты и формы осесимметричных колебаний оболочек // Прикладная механика. М., 1967. Вып. 1. С. 85-92.

134. Рэлей Л. Теория звука. М., 1955. Т.1. 504 с.; Т.2. 476 с.

135. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М., 1971. 588 с.

136. Савчес-Палексия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984. 472 с.

137. Смирнов А. Л. Интегралы уравнений колебаний вращающихся оболочек // Вести. Ленингр. ун-та. Сер.

ат., мех., астрон. 1981. Вып. 3. С. 114-117.

138. Смирнов А.Л., Товстик П.Е. Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения // Современные проблемы механики и авиации. М., 1982. С. 280-290.

139. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М., 1979. 832 с.

140. Срубщик Л.С. Выпучивание и послекритическое поведение оболочек. Ростов-на-Дону, 1981. 96 с.

141. Теннисон Р. Замечания по поводу классической критической нагрузки круговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Ракетная техника и космонавтика. 1963. Т.1, №2. С. 234-235.

142. Территив Х.Л. Асимптотические разложения решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сб. переводов. Математика. 1957. 1:2. С. 29-59.

143. Тетерин И.Ю. К вопросу об устойчивости тонких упругих несовершенных оболочек вращения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1984. Вып. 4. С. 54-62.

144. Тимофеева Г.В. Потеря устойчивости цилиндрических оболочек при изгибе силой и моментами // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1984. Вып. 4. С. 99-101.

145. Тимофеева Г.В. Локальная потеря устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном осевом давлении. // Прикл. мех. Л., 1984. Вып. 6. С. 184-188.

146. Тимофеева Г.В., Товстик П.Е. Об одном представлении решений в задачах динамики и устойчивости оболочек // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1985. Вып. 1. С. 73-79.

147. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31. Вып. 3. С. 575-586.

148. Товстик П.Е. Нормальное вырождение краевых задач // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1963. Вып. 4. С. 124-134.

149. Товстик П.Е. Колебания плоской спиральной пружины // Исслед. по упругости и пластичности. Л., 1963. Вып. 2. С. 105-119.

150. Товстик П.Е. Интегралы уравнений осесимметричных

установившихся колебаний оболочки вращения // Исслед. по упругости и пластичности. Л., 1965. Вып. 4. С. 117-122.

151. Товстик П.Е. Свободные колебания тонкого сферического купола // Изв. АН СССР. Механика. 1965. Вып. 6. С. 111-113.

152. Товстик П.Е. Интегралы уравнений неосесимметричных колебаний оболочки вращения // Исслед. по упругости и пластичности. Л., 1966. Вып. 5. С. 45-56.

153. Товстик П.Е. О спектре частот колебаний оболочки вращения с большим числом волн по параллели в особом случае // Исслед. по упругости и пластичности. Л., 1966. Вып. 5. С. 57-69.

154. Товстик П.Е. Свободные осесимметричные колебания оболочки вращения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1967. Вып. 4. С. 124-132.

155. Товстик П.Е. Об определении наименьшей частоты колебаний конической оболочки вращения. // Исслед. по упругости и пластичности. Л., 1967. Вып. 6. С. 109-116.

156. Товстик П.Е. К задаче об осесимметричных колебаниях оболочки вращения в случае двойной точки поворота // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1967. Вып. 1. С. 118-124.

157. Товстик П.Е. Интегралы линейного уравнения с малым параметром при производных // Дифференциальные уравнения. 1970. Вып. 6. С. 989-999.

158. Товстик П.Е. Устойчивость оболочек вращения в линейном приближении // Расчеты пространственных конструкций. М., 1970. Вып. 13. С. 118-138.

159. Товстик П.Е. Неосесимметричные колебания оболочек вращения с небольшим числом волн по параллели // Исслед. по упругости и пластичности. Л., 1971. Вып. 8. С. 131-140.

160. Товстик П.Е. О плотности частот колебаний тонких оболочек вращения // Прикл. мат. и мех. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 291-300.

161. Товстик П.Е. Интегралы уравнений колебаний оболочки вращения с большим числом волн по параллели при наличии кратной точки поворота. Исслед. по упругости и пластичности. Л., 1973. Вып. 10. С. 103-109.

162. Товстик П.Е. Низкочастотные колебания выпуклой

оболочки вращения // Изв. АН СССР, Металлика тверд. тела. 1975. Вып. 6. С. 110-116.

163. Товстик П.Е. Об определении наименьшей частоты свободных колебаний тонкой оболочки // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск. 1975. Вып. 8. С. 5-22.

164. Товстик П.Е. К вопросу о локальной потере устойчивости оболочек. // Вести. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1982. Вып. 3. С. 72-78.

165. Товстик П.Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. Вып. 1. С. 69-71.

166. Товстик П.Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек // Прикл. мат. и мех. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 815-822.

167. Товстик П.Е. Метод ВКБ в двумерных задачах устойчивости и колебаний тонких оболочек // Тр. 13-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин. 1981. С. 194-199.

168. Товстик П.Е. Локальная потеря устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Вести. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1984. Вып. 1. С. 84-89.

169. Товстик П.Е. К вопросу о колебаниях и устойчивости оболочек вращения, имеющей участки положительной и отрицательной гауссовой кривизны // Прикл. мех. Л., 1984. Вып. 6. С. 145-152.

170. Товстик П.Е. Подубезмоментные формы потери устойчивости цилиндрических и конических оболочек // Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси. 1987. Т. 2. С. 501-506.

171. Товстик П.Е. Влияние граничных условий на устойчивость цилиндрических оболочек // Вести. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1989. Вып. 3. С. 66-71.

172. Товстик П.Е. Устойчивость оболочек, близких к цилиндрическим // Вести. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1990. Вып. 1. С. 76-80.

173. Товстик П.Е. Изгибания поверхности и устойчивость оболочек // Прикл. мех. Л., 1990. Вып. 8. С. 137-162.

174. Товстик П.Е. Потеря устойчивости тонких оболочек, связанная со слабым закреплением края // Вести. Ленингр. ун-

та. Сер. мат., мех., астрон. 1991. Вып. 3. С. 76-81.

175. Товстик П.Е. Свободные высокочастотные колебания анизотропных пластин переменной толщины // Прикл. мат. и мех. 1992. Вып. 3. С. 473-477.

176. Тонкостенные оболочечные конструкции. Теория, эксперимент и проектирование / Ред. Э.И. Григолюк. М., 1980. 608 с.

177. Треюгин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. Вып. 4 (154). С. 125-156.

178. Треюгин В.А. Функциональный анализ. М., 1980. 496 с.

179. Федорюк М.Ф. Метод перевала. М., 1977. 468 с.

180. Федорюк М.Ф. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1983. 352 с.

181. Федорюк М.Ф. Асимптотика: интегралы и ряды. М., 1987. 544 с.

182. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, 1966. 282 с.

183. Филиппов С.Б. Осесимметричные колебания эллиптической оболочки вращения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1981. Вып. 2. С. 90-95.

184. Филиппов С.Б. Низкочастотные колебания конической оболочки, подкрепленной дискретно расположенными шпангоутами // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1989. Вып. 5. С. 191-197.

185. Филиппов С.Б. Низкочастотные колебания сопряженных конических оболочек // Прикл. мех. Л., 1990, Вып. 8. С. 188-199.

186. Фреман Н., Фреман П.У. ВКБ-приближение. М., 1967. 168 с.

187. Хатчинсон Дж., Койтер В.Т. Теория и послекритическое поведение конструкций // Механика; Сб. переводов. №4. С. 129-149.

188. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ) М., 1965. 238 с.

189. Холшевников К.В. Асимптотические методы небесной механики. Л., 1985. 208 с.

190. Цирулис Т.Т. Метод градиентных линий для асимптотического представления контурных интегралов. Рига, 1973. 128 с.

191. Черных К.Ф. Простой краевой эффект и расщепление граничных условий в линейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. Механика. 1965. Вып. 1. С. 89-98.

192. Чернышев Г.Н. О некоторых свойствах интегралов динамических уравнений теории оболочек // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1973. Вып. 2. С. 68-76.

193. Черри Т.М. Равномерные асимптотические разложения для функций с точками поворота // Математика; Сб. переводов. 1965. Т. 9. Вып. 4. С. 87-119.

194. Шабат А.Б. Краевые задачи с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 1 (103). С. 1237-1249.

195. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., 1972. 352 с.

196. Ширшов В.П. Локальная устойчивость оболочек // Теория пластин и оболочек. Тр. 2-й Всесоюз. конф. Киев. 1962. С. 314-317.

197. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., 1962. 128 с.

198. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., 1968. 344 с.

199. Babich V.M., Kiselev A.P. Non-geometrical waves — are there any? An asymptotic description in some non-geometrical phenomena in seismic wave propagation // International Geophysical Journal. 1989. Vol. 99. N 2. P.415-420.

200. Bushnell D. Buckling of shell — Pitfall for designers // AIAA J. 1981. No 19. P.1183-1226.

201. Cicala P. Asymptotic theories of elastic beams and rods. Meccanica-J. Ital. Assoc. Theoret. Appl. Mech. 1981. Vol. 16. N 2. P. 85-92.

202. Clebsch A. Théorie de l'élasticité des corps solides. Paris. 1883. 900 p.

203. Danielson D. A. Buckling and initial postbuckling behavior of spheroidal shells under pressure // AIAA J. 1969. N 5. P. 936-944.

204. Donnell L.N. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending // Trans. ASME. 1934. Vol. 59.

N 11. P.795-806.

205. DiTaranto R.A., Lessen M. Coriolis acceleration effect on the vibration of a rotating thin-walled circular cylinder // Trans. ASME Ser. E J. Appl. Mech. 1964. N 12. P.700-701.

206. Friedrichs K.O. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates // Proc. Symp. Appl. Math., Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 3. P.117-124.

207. Geckeler Von J.W. Zur Theorie der Elastizität flacher rotations-symmetrischer Schalen // Ing. Arch. 1930. Bd. 1. P.255-270.

208. Hansen J. S. Influence of general imperfections in axially loaded cylindrical shells. // J. Solids and Structures, 1975. Vol. 11. N 11. P.1223-1233.

209. Karman T., Tsien H.S. The buckling of spherical shells by external pressure // J. of the Aeronautical Sciences. 1939. Vol. 7. N 2. P.43-50.

210. Karman T., Tsien H.S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression // J. of the Aeronautical Sciences. 1941. Vol. 8. N 8. P.303-312.

211. Kazarinoff N.D. Asymptotic theory of second order differential equation with two turning points // Arch. Rat. Mech. Anal. 1958. N. 2. P.129-150.

212. Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes // J. Reine und Angew. Math. Berlin. 1858. Bd. 56. P.285-313.

213. Koiter W.T. On the nonlinear theory of thin elastic shells // Proc. Kon. Nederl. Acad. Westensch. 1966. N 69. P.1-54.

214. Koiter W.T. Current trends in the theory of buckling // Buckling of Structures. Berlin. 1976. P.1-16.

215. Langer R.E. The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of second order with special reference to a turning point // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 67. P.461-490.

216. Langer R.E. The asymptotic solutions of linear differential equations of second order with two turning points // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 90. P.113-142.

217. Lin C.C., Rabenstein A.L. On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of fourth order // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. N 94. P.24-57.

218. Lorenz R. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünn-

wandiger Hohlzylinder // *Physikal. Zeitschrift*. 1911. Bd. 12. N 7. P. 241-260.

219. Nachbar W., Hoff N.I The buckling of a free edge of a axially compressed circular cylindrical shell // *Quart. Appl. Mech.* 1962. Vol. 20. N 3. P.160-172.

220. Padovan J. Natural frequencies of rotating prestressed cylinders // *Journal of Sounds and Vibrations*. 1973. Vol. 31. N 4. P.469-482.

221. Padovan J. Orthogonality principle for the vibrational modes of anisotropic composite domain problem // *Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech.* 1974. N 9. P.832-834.

222. Padovan J. On gyroscopic problems in elasticity // *Int. J. of Engineering Science*. 1978. Vol. 16. P.1061-1073.

223. Panc V.. Theories of elastic plates. Noordhoff. Leyden. 1975. P. 716.

224. Parker D.F. An asymptotic analysis of large deflections and rotations of elastic rods // *Int. J. Solids Struct.* 1979. Vol. 15. No 5. P.361-377.

225. Rabesntein A.L. Asymptotic solutions of $u^{(4)} + \lambda^2(zu'' + \alpha u' + \beta u) = 0$ for large $|\lambda| = 0$ // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1958. N 1. P. 418-435.

226. Rabesntein A.L. The determination of the inverse matrix for a basic reference equation for the theory of hydrodynamic stability // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1959. N 2. P.355-366.

227. Reissner E. On some problems in shell theory //in book "Structural Mechanics". Pergammon Press. Oxford. London. New York. Paris. 1960. P. 74-114.

228. Rigolot A. Théorie asymptotique des milieux curvilignes et équilibre élastique d'un cylindre infiniment élancé // *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A.* 1971. 272. N 11. P.753-756.

229. Saint-Venant B. de Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre interieur des solids elastiques en general, et des formules prati ques pour le calcul de leur resistance a divers efforts s'exercant simultanément. Mémoire à l'Académie des Sciences. Mémoires des Savants étrangers. Paris. 1856. Vol. 14. P.233-560.

230. Shih-sen Wang and Chen Yu Effect of rotation on vibrations of circular cylindrical shells // *Journal Acoust. Soc. Am.* 1974. Vol. 55. N 6. P.1340-1342.

231. Sibuya Y. Uniform simplification in a full neighbourhood of a transition point // Mem. Amer. Math. Soc. 1974. N 149. P. 106.
232. Smirnov A.L. Free vibrations of the rotating shells of revolution // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. Vol. 56. 1989. N. 2. P. 423-429.
233. Southwell R. On the collapse of tubes by external pressure // Philos. Mag. Ser. 6. I - 1913. N 25. P. 687-697; II - 1913. N 26. P. 502-510; III - 1915. N 29. III- P.67-76.
234. Tovstik P. E. On the forms of local buckling of thin elastic shells // Trans. CSME. 1991. Vol. 15. N 3. P.199-211.
235. Turrittin H. L. A Stokes multipliers for asymptotic solutions of a certain differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. N 68. P.304-329.
236. Wasow W. A study of solutions of differential equation $y^{(4)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ for large values of λ // Ann. Math. (2) 1950. Vol. 52. N 2. P.350-361.
237. Wasow W. Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point // Ann. Math. (2) 1953. Vol. 58. P. 222-252.
238. Yamaki N. Elastic stability of circular cylindrical shells // in book Series in Appl. Math. and Mech. Amsterdam. New York. Oxford. 1984. Vol. 27. P. 558.
239. Zhilin P.A. Mechanics of deformable directed surfaces // J. Solids and Structures. 1976. Vol. 12. P.635-648.
240. Zoelly P. Uber ein Knickungsproblem an der Kugelschale // Dissertation. Zurich. 1915.
241. Zohar A., Aboudi J. The free vibrations of a thin circular finite rotating cylinder // Int. J. Mech. Sci. 1973. Vol. 15. P. 269-278.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ	4
1.1. Оценки функций	4
1.2. Асимптотические ряды	5
1.3. Метод Лапласа	8
1.4. Интегралы с осциллирующей подынтегральной функцией. Метод стационарной фазы	12
1.5. Метод перевала	14
1.6. Асимптотические свойства функций Эйри	16
1.7. Понятие о показателе изменяемости функций	20
1.8. Диаграмма Ньютона	22
Глава 2. СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ	26
2.1. Введение	26
2.2. Решение системы (1.1) при отсутствии точек поворота	28
2.3. Построение решений при наличии точек поворота	36
2.4. Краевые задачи. Задача Штурма-Лиувилля	44
2.5. Локализованные решения обыкновенных дифференциальных уравнений	54
2.6. Регулярное вырождение краевых задач	59
2.7. Случаи нерегулярного вырождения	64
Глава 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК	69
3.1. Основные уравнения теории тонких оболочек	69
3.2. Колебания оболочек вращения с большим числом волн по параллели	75
3.3. Некоторые задачи устойчивости оболочек вращения	77
3.4. Колебания и устойчивость цилиндрических оболочек с шарнирно опертыми краями	81

3.5. Колебания оболочек вращения с малым числом волн по параллели	84
3.6. Низкочастотные колебания оболочек вращения	87
3.7. Вырождение краевых задач устойчивости оболочек	91
3.8. Колебания вращающихся оболочек вращения	94
Глава 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ	101
4.1. Введение	101
4.2. Уравнение Гельмгольца и его обобщение	102
4.3. Вырождение двухмерных краевых задач	109
4.4. Локальные формы потери устойчивости и колебаний оболочек	116
4.5. Асимптотическое интегрирование уравнений в узких областях и приложение к теории тонких оболочек и стержней	123
Глава 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	130
5.1. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	130
5.2. Вырождение нелинейных краевых задач	134
5.3. Метод возмущений Ляпунова-Шмидта в теории ветвления решений нелинейных уравнений	138
5.4. О нелинейных задачах устойчивости	149
Указатель литературы	164
Оглавление	182

Учебное издание

Товстик Петр Евгеньевич
Бауэр Светлана Михайловна
Смирнов Андрей Леонидович
Филиппов Сергей Борисович

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Редактор Т. Ф. Шагалева

Издание подготовлено в ТЭХ^с

ИБ №4274

Лицензия ЛР №040050 от 05.08.91 г.

Подписано в печать 21.03.95. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 10,69. Усл. кр.-отт. 10,86.

Уч.-изд. л. 9,07. Тираж 414 экз. Заказ 51.

Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург,
Университетская наб., 7/9.

Участок оперативной полиграфии типографии
Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.