

## ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПОГРАНСЛОЙ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

*И. В. Кириллова, Л. Ю. Коссович*

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,  
Российская Федерация, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

В работе получены асимптотические уравнения, описывающие эллиптический погранслоя в оболочках вращения при действии ударных нормальных поверхностных нагрузок. Рассматриваемый вид погранслоя имеет место только при поверхностных и торцевых нагрузках нормального типа и сосредоточен в малой окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Используются асимптотические методы в комбинациях с символическим методом Лурье. Для погранслоя получены эллиптические уравнения, описывающие поведение погранслоя по толщине оболочки, и гиперболические уравнения, задающие граничные условия на лицевых поверхностях. Библиогр. 18 назв. Ил. 1.

*Ключевые слова:* оболочки вращения, асимптотические методы, ударные нагрузки, символический метод Лурье, волна Рэлея, погранслоя.

Настоящая работа посвящена построению погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея при ударных нормальных поверхностных нагрузках. Рассматриваемый погранслоя используется в общей асимптотической схеме расчленения нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) на составляющие с различными показателями изменчивости [1–7], когда на различных участках фазовой плоскости применяются безмоментная и изгибная составляющие теории Кирхгофа—Лява, квазистатистический погранслоя типа Сен-Венана, уравнения квазиплоской и квазиантиплоской задач теории упругости, а также погранслоя разных типов.

Представленный вывод асимптотически оптимальных уравнений рассматриваемого погранслоя обобщает исследования, проведенные для случаев полуплоскости, слоя и цилиндрической оболочки [8–17]. Особенностью данного исследования является характер выведенных асимптотических уравнений: эллиптические уравнения описывают изменение погранслоя по толщине, а гиперболические уравнения задают граничные условия и характеризуют волновой процесс на поверхности оболочки.

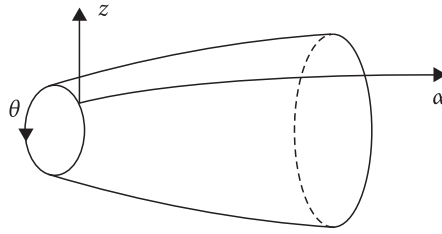
Рассмотрим оболочку вращения относительно криволинейных координат  $(\alpha, \theta, z)$ , изображенную на рисунке. Здесь  $\alpha$  — длина дуги вдоль образующей срединной поверхности,  $\theta$  — угол в окружном направлении,  $z$  — внешняя нормаль к срединной поверхности.

Если мы обозначим напряжения и перемещения как  $\sigma_{ij}$  и  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), граничные условия на лицевых поверхностях запишутся в виде

$$\sigma_{33} = -P(\alpha, t), \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad (1)$$

где  $h$  — полутолщина оболочки. Также рассмотрим однородные начальные условия

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2)$$



Оболочка вращения

Разрешающие динамические уравнения теории упругости для осесимметричного случая запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \\ + \frac{z}{R_1} \left( -\varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \\ + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_1}{\partial z} + \left( \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\ + \frac{\zeta}{R_1} \left( -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \right) - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \\ + \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \varkappa^{-2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

где  $E, \nu, \rho$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки,  $B$  — расстояние до оси вращения,  $\varkappa^2 = (1-2\nu)/(2-2\nu)$ ,  $R_1, R_2$  — радиусы кривизн, а уравнения связи между напряжениями и перемещениями имеют форму

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} - \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right), \\ \sigma_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right), \\ \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{v_1}{R_1} + \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\alpha}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{tc_2}{h}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}. \quad (5)$$

Тогда разрешающие уравнения (3)–(4) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{a}^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} + \eta \frac{\zeta}{R_1} \left( -\mathfrak{a}^{-2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} \right) + \\
 & + \eta \mathfrak{a}^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \eta \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \eta \left( \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \xi} = 0, \\
 & \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \mathfrak{a}^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \eta \frac{\zeta}{R_1} \left( -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \mathfrak{a}^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} \right) - \\
 & - \eta \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \eta \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \eta \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} + \eta \mathfrak{a}^{-2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} = 0; \\
 \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\mathfrak{a}^2 h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \eta \left( -\frac{\zeta}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right) \right), \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\mathfrak{a}^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \eta \left( -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\zeta}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right) \right), \\
 \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} - \eta \left( \frac{v_1}{R_1} + \frac{\zeta}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) \right),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где малый параметр  $\eta = h/R$ ,  $R$  – характерное значение радиуса кривизны. Здесь обозначения  $R_i$  используются для приведенных значений радиусов кривизн ( $R_i^* = R_i/R$ , звездочка опускается).

Анализ разрешающих уравнений показывает, что рассматриваемый тип НДС, который строится при единичных значениях показателей изменяемости и динамичности, может быть классифицирован как коротковолновый и представлен с погрешностью  $O(\eta)$  в виде комбинации симметричной и антисимметричной составляющих, каждая из которых имеет вид

$$\sigma_{kl} = E(\sigma_{kl}^0 + \eta \sigma_{kl}^1), \quad v_m = R\eta(v_m^0 + \eta v_m^1), \quad k, l, m = 1, 2, 3, \tag{8}$$

где индекс «0» обозначает асимптотически главную компоненту (симметричную или антисимметричную относительно срединной поверхности), асимптотически второстепенная компонента обозначается индексом «1» (соответственно антисимметричная или симметричная). Тогда разрешающие уравнения для основной компоненты могут быть переписаны в форме

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{a}^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} + \eta \mathfrak{a}^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \\
 & \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \mathfrak{a}^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \eta \left( \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right) = 0;
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\mathfrak{a}^2 h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \eta \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\mathfrak{a}^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \eta \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\
 \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Построение уравнений погранслоя может быть выполнено с помощью символического метода Лурье. Выпишем систему уравнений (9)–(10) в операторной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{d\zeta^2} + \left( \varkappa^{-2} \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \eta \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) v_1 + (\varkappa^{-2} - 1) \partial_\xi \frac{dv_3}{d\zeta} &= 0, \\ (\varkappa^{-2} - 1) \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \frac{dv_1}{d\zeta} + \varkappa^{-2} \frac{d^2 v_3}{d\zeta^2} + \left( \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \eta \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) v_3 &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left( \partial_\xi v_1 + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{dv_3}{d\zeta} + \eta \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \partial_\xi v_1 + \frac{dv_3}{d\zeta} + \eta \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \frac{dv_1}{d\zeta} + \partial_\xi v_3 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где операторы  $\partial_\xi$ ,  $\partial_\tau$  выражаются следующим образом:  $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$ ,  $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$ .

Решим систему (11), рассматривая ее как систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_\xi e^{-i(1-\zeta)\alpha_1} D_1 + \partial_\xi e^{-i(1+\zeta)\alpha_1} D_2 + i\beta_1 e^{-i(1-\zeta)\beta_1} D_3 - i\beta_1 e^{-i(1+\zeta)\beta_1} D_4, \\ v_3 &= i\alpha_1 e^{-i(1-\zeta)\alpha_1} D_1 - i\alpha_1 e^{-i(1+\zeta)\alpha_1} D_2 - \\ &\quad - \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) e^{-i(1-\zeta)\beta_1} D_3 - \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) e^{i(1+\zeta)\beta_1} D_4, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $D_i$  — произвольные операторы,  $\alpha_1^2 = \partial_\xi^2 - \varkappa^2 \partial_\tau^2 + \eta \frac{B'}{B} \partial_\xi$ ,  $\beta_1^2 = \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 - \varkappa^2 \partial_\tau^2 + \eta \frac{B'}{B}$ .

Проанализируем символическое решение, основываясь на прямой аналогии символического метода с методом интегральных преобразований. Решение (13) соответствует изображению двойного интегрального преобразования Лапласа (по времени) и Фурье (по продольной координате) при  $\partial_\tau \sim s$ ,  $\partial_\xi \sim i\chi$ , где  $s$  и  $\chi$  — параметры преобразования Лапласа и Фурье соответственно. В рассматриваемом решении слагаемые с множителями  $(1-\zeta)$  в показателях степени экспоненты соответствуют волнам, инициируемым лицевой поверхностью  $\zeta = 1$  и распространяющимся в отрицательном направлении оси  $\zeta$ , а слагаемые с множителями  $(1+\zeta)$  — волнам, инициируемым лицевой поверхностью  $\zeta = -1$  и распространяющимся в положительном направлении оси  $\zeta$ .

Подставляя решение (13) в граничные условия (1), получим следующую систему алгебраических уравнений для  $D_i$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 D_1 + \gamma_1^2 e^{-i2\alpha_1} D_2 + i \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_3 - i \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 e^{-i2\beta_1} D_4 &= -P, \\ i\partial_\xi \alpha_1 D_1 - i\partial_\xi \alpha_1 e^{-i2\alpha_1} D_2 - \gamma_1^2 D_3 - \gamma_1^2 e^{-i2\beta_1} D_4 &= 0, \\ \gamma_1^2 e^{-i2\alpha_1 \zeta} D_1 + \gamma_1^2 D_2 + i \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 e^{-i2\beta_1 \zeta} D_3 - i \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_4 &= -P, \\ i\partial_\xi \alpha_1 e^{-i2\alpha_1} D_1 - i\partial_\xi \alpha_1 D_2 - \gamma_1^2 e^{-i2\beta_1} D_3 - \gamma_1^2 D_4 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для упрощения вычислений пренебрежем членами с множителями  $e^{-i2\alpha_1}$  и  $e^{-i2\beta_1}$  в граничных условиях (14). Это соответствует, в конечном итоге, пренебрежению

членами с множителями  $\exp(-2\sqrt{1-\alpha^2\alpha_R^2}\chi)$  и  $\exp(-2\sqrt{1-\alpha_R^2}\chi)$  ( $c_R$  — скорость поверхностных волн Рэлея) в асимптотике для первого корня уравнения Рэлея—Лэмба при  $\chi \rightarrow \infty$  [18]:

$$\omega_1(\chi) = \alpha_R\chi - B_\omega\chi \exp\left(-2\sqrt{1-\alpha_R^2}\chi\right) + B_\omega\chi \exp\left(-2\sqrt{1-\alpha^2\alpha_R^2}\chi\right), \quad (15)$$

$$B_\omega = 2 \left[ \frac{\alpha_R}{1-\alpha_R^2} + \frac{\alpha\alpha_R}{1-\alpha^2\alpha_R^2} - \frac{4\alpha\alpha_R}{2-\alpha_R^2} \right]^{-1}, \quad \alpha_R = \frac{c_R}{c_2} < 1.$$

Коэффициент  $\alpha_R$  является корнем известного трансцендентного уравнения

$$(2-\alpha_R^2)^2 - 4\sqrt{1-\alpha_R^2}\sqrt{1-\alpha^2\alpha_R^2} = 0. \quad (16)$$

Тогда уравнения (14) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 D_1 + i \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_3 &= -P, \\ i \partial_\xi \alpha_1 D_1 - \gamma_1^2 D_3 &= 0, \\ \gamma_1^2 D_2 - i \left( \partial_\xi + \eta \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_4 &= -P, \\ -i \partial_\xi \alpha_1 D_2 - \gamma_1^2 D_4 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим большие значения времени, когда  $\tau \gg 1$  (т.е. когда фронты волн проходят расстояние, много большее толщины оболочки:  $\tau = O(T), T \gg 1$ ). Введем малый параметр  $\varepsilon = 1/T$  и масштабированные переменные  $y, \tau_0$ :

$$y = \frac{\xi - \alpha_R\tau}{\varepsilon}, \quad \tau_0 = \varepsilon\tau, \quad (18)$$

позволяющие построить прифронтовую асимптотику в дальнем поле волны Рэлея. Введем новые операторы  $\partial_y, \partial_{\tau_0}$ :

$$\partial_y = \partial/\partial y, \quad \partial_{\tau_0} = \partial/\partial \tau_0. \quad (19)$$

Раскладывая уравнения (14) и выражения для перемещений и напряжений в ряд по малому параметру  $\varepsilon$ , оставим в них асимптотически главные части. Затем вернемся к исходным операторам  $\partial_\xi, \partial_\tau$  и, соответственно, к дифференциальной форме искомого уравнений. Введем объемные и сдвиговые потенциалы Ламе:  $\phi_1, \phi_2$  и  $\psi_1, \psi_2$ , где индексом «1» будем обозначать отрицательное, индексом «2» — положительное по  $\zeta$  направление распространения возмущений. Тогда потенциальные функции  $\phi_i, \psi_i$  в исходных размерных координатах будут определяться эллиптическими уравнениями

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} &= 0, \\ \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (20)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} - c_R^2 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \alpha^2} - \varkappa_R K_\omega \frac{B'}{B} \frac{\partial \chi_1}{\partial \alpha} &= -\frac{\varkappa_R B_\omega b}{a} \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad z = h, \\
 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} - c_R^2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \alpha^2} - \varkappa_R K_\omega \frac{B'}{B} \frac{\partial \chi_2}{\partial \alpha} &= \frac{\varkappa_R B_\omega b}{a} \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad z = -h, \\
 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{1}{a^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= g \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha}, \quad z = h, \\
 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \alpha \partial z} + \frac{1}{a^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= -g \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha^2} - \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha}, \quad z = -h, \\
 a &= \sqrt{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}, \quad b = \sqrt{1 - \varkappa_R^2}, \quad K_\omega = B_\omega + 2, \quad g = 1 - \frac{1}{2} \varkappa^2 \varkappa_R^2,
 \end{aligned} \tag{21}$$

где  $\chi_i = \partial \psi_i / \partial z$ . Перемещения и напряжения выражаются через потенциальные функции по формулам

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \\
 v_3 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} - \frac{B'}{B} (\psi_1 + \psi_2), \\
 \sigma_{33} &= -g \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha \partial z} - \frac{B'}{B} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right), \\
 \sigma_{13} &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha \partial z} - g \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha^2} \right) - \frac{B'}{B} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} \right).
 \end{aligned} \tag{22}$$

В качестве примера проанализируем распространение волны Рэлея по лицевой поверхности цилиндрической оболочки, для которой в граничных условиях (1)  $P(\alpha, t) = p\delta(\alpha)H(t)$ , где  $\delta$  – дельта-функция,  $H$  – функция Хевисайда, а  $p$  – заданная постоянная. Использование аппарата интегральных преобразований Фурье по пространственной переменной  $\alpha$  и Лапласа по времени дает следующее ожидаемое выражение для перемещения  $v_3$  на поверхности  $z = h$ , задающее граничные условия для малых окрестностей условных фронтов поверхностной волны Рэлея:

$$\begin{aligned}
 v_3 &= \frac{\varkappa_R B_\omega p}{\sqrt{2\pi a}} \left[ -g \ln \frac{a^2(h+z)^2 + (\alpha - c_R t)^2}{a^2(h+z)^2 + \alpha^2} - g \ln \frac{a^2(h+z)^2 + (\alpha + c_R t)^2}{a^2(h+z)^2 + \alpha^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \ln \frac{b^2(h+z)^2 + (\alpha - c_R t)^2}{b^2(h+z)^2 + \alpha^2} + \ln \frac{b^2(h+z)^2 + (\alpha + c_R t)^2}{a^2(h+z)^2 + \alpha^2} \right].
 \end{aligned} \tag{23}$$

Формула (23) иллюстрирует механизм распространения участка возмущения НДС в районе условного фронта поверхностной волны Рэлея (точнее, квазифронта). Поверхностная волна распространяется со скоростью  $c_R$  вдоль границы и формирует участок возмущения в теле оболочки в малой окрестности рассматриваемого квазифронта.

## Литература

1. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во СГУ, 1986. 176 с.
2. Karlnov J. D. On the quasi-front in 2D shell theories // C. R. Acad. Sci. Paris, France. Vol. 313, N 2. P. 731–736 (1991).

3. *Kaplanov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998.
4. *Шевцова Ю. В.* Погранслои в окрестности квазифронта в трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Проблемы прочности материалов и конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами. Межвуз. науч. сб. Саратов: СГТУ, 2000. С. 114–117.
5. *Коссович Л. Ю.* Асимптотический анализ нестационарных, упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях / Л. Ю. Коссович, Ю. Д. Каплунов // Известия Саратовского университета. Саратов, 2001. Т. I, № 2. С. 111–131.
6. *Кириллова И. В.* Области согласования динамического погранслоя и коротковолнового высокочастотного приближения // Математическое моделирование и управление в технических системах: сб. науч. тр. Саратов. гос. агроинженер. ун-т. Саратов: Изд-во СГУ, 1998. С. 3–11.
7. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Int. J. Solids Struct. 1969. Vol. 5, issue 6. P. 607–627.
8. *Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю.* Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в упругой плоскости // Докл. АН. 2004. Т. 395. № 4. С. 482–484.
9. *Kaplanov J., Kossovich L., Zakharov A.* An explicit asymptotic model for the Bleustein–Gulyaev wave // C. R. Mecanique. 2004. Vol. 332. P. 487–492.
10. *Коссович Л. Ю.* Поле Рэлея в бесконечном упругом слое / Л. Ю. Коссович, А. Н. Кушекалиев // Математика, механика. Саратов: Изд-во СГУ, 2003. Вып. 5. С. 159–161.
11. *Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Таранов О. В.* Поле Рэлея в задаче Лэмба для цилиндрической оболочки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спец. вып. 2004. С. 52–54.
12. *Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Таранов О. В.* Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуполосы при действии торцевой нагрузки // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 89–96.
13. *Кушекалиев А. Н.* Решение задач о распространении волн в трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке при нормальных воздействиях // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во СГУ, 2002. Вып. 14. С. 106–115.
14. *Кушекалиев А. Н.* Волны типа Рэлея в полубесконечной пластине при нормальном воздействии поперечного типа // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во СГУ, 2004. С. 66–73.
15. *Коссович Л. Ю.* Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя / Л. Ю. Коссович, А. Н. Кушекалиев // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003. № 9. С. 10–22.
16. *Коссович Л. Ю.* Расчленение нестационарного НДС в задаче Лэмба для бесконечного слоя на составляющие с разными показателями изменчивости / Л. Ю. Коссович, А. Н. Кушекалиев // Тр. III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов-на-Дону, 2003. С. 232–234.
17. *Ковалев В. А., Таранов О. В.* Расчленение нестационарного НДС цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа // Смешанные задачи механики деформированного тела: Материалы V Рос. конф. с международным участием. Саратов: Изд-во СГУ, 2005. С. 191–193.
18. *Аймола Л. Я., Нигул У. К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3–63.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

#### Сведения об авторах

*Кириллова Ирина Васильевна* — кандидат физико-математических наук, доцент; nano-bio@sgu.ru  
*Коссович Леонид Юрьевич* — доктор физико-математических наук, профессор; nano-bio@sgu.ru

### ELLIPTIC BOUNDARY LAYER IN SHELLS OF REVOLUTION UNDER NORMAL SHOCK SURFACE LOADING

*Irina V. Kirillova, Leonid Yu. Kossovich*

Saratov State University, ul. Astrakhanskaya, 83, Saratov, 410012, Russian Federation;  
 nano-bio@sgu.ru

Asymptotic equations for the elliptic boundary layer in shells of revolution at shock normal surface loading are derived in the present paper. Considered boundary layer type has place only at surface and edge shock loading and is localized in the small vicinity of the front of the Rayleigh surface waves. There are

used asymptotic methods together with A. I. Lourier's symbolic integration. There are obtained elliptic equations describing the boundary layer behaviour with respect to the normal coordinate and hyperbolic equations defined the boundary layer on the shell faces. Refs 18. Figs 1.

*Keywords:* shell of revolution, asymptotic methods, shock loading, symbolic method Lourier, Rayleigh wave, boundary layer.

## References

1. Kossovich L. Yu., *Non-stationary Problems in Theory of Thin Elastic Shells* (Izd-vo Saratov Univ., Saratov, Russia, 1986) [in Russian].
2. Kaplunov J. D., "On the quasi-front in 2D shell theories", *C. R. Acad. Sci.* **313**(2), 731–736 (Paris, France, 1991).
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V., *Dynamics of thin walled elastic bodies* (Academic Press, San Diego, 1998).
4. Shevtsova Yu. V., "Boundary layer in the vicinity of quasi-front in transversal isotropic cylindrical shell", *On the strength of the elements of constructions under the action of loads and working media* (Izd-vo Saratov Technical Univ. Saratov, Russia, 2000, 114–117) [in Russian].
5. Kossovich L. Yu. "Asymptotic Analysis of the Non-stationary Elastic Waves in Thin-walled Shells of Revolution Initiated by the Edge Shock Load", *J. Izvestiya Saratov University* **1**(2), 111–131 (Izd-vo Saratov Univ., Saratov, Russia, 2001) [in Russian].
6. Kirillova I. V., "Overlap regions of the boundary layer and short-wave high-frequency approximation", *Mathematical simulation and control in the technical systems* (Izd-vo Saratov Agrarian Univ., Saratov, Russia, 1998, 3–11) [in Russian].
7. Nigul U., "Regions of effective of application of the methods of 3D and 2D of analysis of transient of stress waves in shells and plates", *Int. J. Solids Struct.* **54**, issue 6, 607–627 (1969).
8. Kaplunov Yu. D., Kossovich L. Yu., "An asymptotic model for the Rayleigh wave far-field in the case of an elastic half-plane", *J. Russian Phys. Dokl.* **395**(4), 482–484 (2004) [in Russian].
9. Kaplunov J., Kossovich L., Zakharov A. "An explicit asymptotic model for the Bleustein–Gulyaev wave", *C. R. Mecanique* **332**, 487–492 (2004).
10. Kossovich L. Yu., Kushekkaliev A. N., "Rayleigh's field in the infinite elastic layer", *Mathematics. Mechanics* issue 5 (Izd-vo Saratov Univ., Saratov, Russia, 2003, 159–161) [in Russian].
11. Kovalev V. A., Kossovich L. Yu. Taranov O. V., "Rayleigh's field in Lamb's problem for the cylindrical shell", *J. Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskii region. Natural sciences. Special issue* (Rostov-na-Donu, Russia, 2004, 52–54) [in Russian].
12. Kovalev V. A., Kossovich L. Yu., Taranov O. V., "Rayleigh wave far-field in the case of an elastic semi-strip under the edge loading", *J. Solid Mechanics* **5** (Moscow, Russia, 2005, 89–96) [in Russian].
13. Kushekkaliev A. N., "Solution of the problems about the propagation of waves in the transversal-isotropic cylindrical shell under the normal loading", *Continuum mechanics* issue 14 (Izd-vo Saratov Univ., Saratov, Russia, 2002, 106–115) [in Russian].
14. Kushekkaliev A. N., "Rayleigh's wave in the semi-infinite plate under the transverse normal loading", *Continuum mechanics* (Izd-vo Saratov Univ., Saratov, Russia, 2004, 66–73) [in Russian].
15. Kossovich L. Yu., Kushekkaliev A. N., "The analysis of approximations in Lamb's problem for the infinite elastic layer", *J. Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskii region. Natural sciences* **5** (Rostov-na-Donu, Russia, 2003, 10–22) [in Russian].
16. Kossovich L. Yu., Kushekkaliev A. N., "The separation of non-stationary SSS in Lamb's problem for the infinite layer into the components with the different values of variability", *The Theory of Elasticity. Proceedings of the III Russian conference* (Izd-vo Rostov Univ., Rostov-na-Donu, Russia, 2003, 232–234) [in Russian].
17. Kovalev V. A., Taranov O. V., "The separation of non-stationary SSS of cylindrical shells under normal type edge loading", *Mixed Problems of Mechanics of Solid. Proceedings of the V Russian conf. with Intern. Participation* (ed. Acad. N. F. Morozov; Izd-vo Saratov Univ., Saratov, Russia, 2005, 191–193) [in Russian].
18. Ainola L. Ya., Nigul U. K., "Wave Strain Processes in Elastic Plates and Shells", *Izv. AN ESSR* **14**(1), 3–63 (1965) [in Russian].