

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ БАЛКАХ\*

А. О. Ватulyян<sup>1,2</sup>, Р. Д. Недун<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Южный федеральный университет,

Российская Федерация, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

<sup>2</sup> Владикавказский научный центр РАН, Южный математический институт,

Российская Федерация, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

Одной из важных задач механики деформируемого твердого тела является анализ влияния различных типов неоднородности материальных свойств и факторов предварительного состояния (ПС), включающего в себя предварительные напряжения и деформации, на динамические характеристики материала. В настоящей статье проведен анализ влияния различных типов предварительного состояния на спектр акустических характеристик (собственные частоты, амплитудно-частотные характеристики) в стержнях, изготовленных из функционально-градиентных композитов. В рамках модели Тимошенко рассмотрены такие факторы ПС, как предварительные напряжения, предварительный прогиб стержня и предварительный угол поворота главной оси стержня, обусловленный изгибом. Библиогр. 19 назв. Ил. 4.

*Ключевые слова:* предварительное напряженно-деформированное состояние, функциональная градиентность, неоднородность, стержень, модель Тимошенко, амплитудно-частотная характеристика.

**Введение.** Важным направлением в механике деформируемого твердого тела является разработка и совершенствование моделей неоднородных материалов при наличии полей предварительных напряжений и деформаций. С точки зрения применения на практике одним из наиболее перспективных типов неоднородности является класс функционально-градиентных композитов (ФГК), материальные свойства которых меняются некоторым образом в зависимости от координат. Градиентность свойств таких материалов появляется из-за неоднородной структуры химического состава, микроструктуры или атомного порядка. В традиционных многослойных композитных структурах однородные упругие слои соединены друг с другом, образуя многослойную конструкцию. Однако подобные материалы обладают существенным недостатком, связанным с образованием концентраторов остаточных напряжений в пограничных зонах между слоями, особенно при высоких температурах. Это приводит к расслоению, растрескиванию матрицы и другим типам разрушения. Одним из наиболее эффективных способов преодоления этих проблем является использование ФГК, материальные свойства которых изменяются непрерывно. Меняющиеся градиентным образом свойства материала позволяют исключить растрескивание и рост остаточных напряжений [1].

Исследование стержневых функционально-градиентных структур является первым глобальным этапом изучения свойств ФГК. Стержни, изготовленные из ФГК, все чаще используют в аэрокосмической и автомобильной промышленности из-за плавного изменения их материальных свойств вдоль некоторого направления. Несмотря на то что существует множество работ, посвященных анализу стержней с функциональной градиентностью вдоль поперечной координаты, исследований колебаний

---

\*Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования», при поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00196, № 16-38-60157 мол\_а\_дк) и гранта Президента РФ МК-5440.2016.1.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

ФГК-стержней очень немного. К примеру, функциональная градиентность в осевом направлении (т. е. варьирование упругих модулей вдоль оси стержня) в режиме свободных колебаний исследовалась в работе Кандана и Элишакоффа [2]. Ву и соавторы [3] использовали полуобратный метод для получения решений динамических уравнений свободно опертых стержней с осевой функциональной градиентностью.

Ключевым вопросом в проблеме мониторинга технического состояния объекта часто является выбор физического метода определения характеристик поврежденности материала, а также проведение комплекса соответствующих экспериментальных исследований. Разрушение при нагрузках ниже допускаемых зачастую связано с неучтенным предварительным напряженным состоянием (ПС) [4–6]. В производстве ФГК для осуществления контроля качества требуются надежные технологии идентификации материальных свойств ФГК, позволяющие подтвердить совпадение полученных реальных свойств с теми, что были спроектированы [7]. При этом важно, чтобы такие технологии были быстродействующими, простыми и недорогими. Акустический метод зондирования удовлетворяет этим требованиям [8]. С этой точки зрения представляется важным проведение анализа различных типов неоднородности материальных свойств и факторов ПС, включающего в себя предварительные напряжения (ПН) и деформации, на динамические характеристики [9, 10].

В настоящей статье проведен анализ влияния различных типов ПС на спектр акустических характеристик (собственные частоты, амплитудно-частотные характеристики) в ФГК-стержнях. При этом в рамках модели Тимошенко рассмотрены такие факторы ПС, как предварительные напряжения, предварительный прогиб стержня и предварительный угол поворота главной оси стержня, обусловленный изгибом.

**1. Общая постановка краевой задачи для предварительно напряженного неоднородного тела.** Линеаризованная краевая задача о колебаниях предварительно напряженного тела с неоднородными материальными свойствами имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ T_{ij} &= u_{i,m}\sigma_{mj}^0 + u_{i,m}^0\sigma_{mj} + \sigma_{ij}, \quad (u_{i,m}^0\sigma_{mj}^0 + \sigma_{ij}^0)_{,j} + \rho^0 b_i^0 = 0, \\ u_i|_{S_u} &= f_i^0, \quad (u_{i,m}^0\sigma_{mj}^0 + \sigma_{ij}^0)n_j|_{S_\sigma} = P_i^0, \\ u_i|_{S_u} &= 0, \quad T_{ij}n_j|_{S_\sigma} = \dot{P}_i. \end{aligned}$$

Здесь величины с верхним индексом «ноль» относятся к начальному состоянию, величины без индекса — компоненты соответствующих добавочных векторов и тензоров:  $P_i$  — поверхностной нагрузки,  $u_i$  — перемещений,  $\sigma_{ij}$  — компонент симметричного тензора напряжений;  $T_{ij}$  — компоненты несимметричного добавочного тензора напряжений Пиолы. Здесь использована модель предварительных напряжений Треффтца, позволяющая описывать в ФГК неоднородные поля ПН различной природы, в частности возникающие в телах при разгрузке после образования локализованных пластических зон [11–15]. Постановка задачи в таком виде интересна тем, что позволяет учитывать не только компоненты тензора ПН  $\sigma_{ij}^0$ , но также и начальную деформацию, определяемую через компоненты вектора начальных перемещений  $u_i^0$ .

Сформулируем вариационную и слабую постановки задачи.

Среди всех кинематически возможных полей смещений истинные доставляют стационарное значение функционалу

$$\Lambda = \Pi + \Pi_0 - \omega^2 K, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V L_{ij} e_{ij} dV - \int_{S_\sigma} P_i u_i dS_\sigma = \frac{1}{2} \int_V L_{ij} u_{i,j} dV - \int_{S_\sigma} P_i u_i dS_\sigma,$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \int_V \Gamma_{ij} u_{i,j} dV, \quad K = \frac{1}{2} \int_V \rho u_i^2 dV.$$

Здесь  $\Pi$  и  $K$  — классические квадратичные функционалы потенциальной и кинетической энергий соответственно,  $\Pi_0$  — квадратичный функционал, определяемый ПС,  $\Gamma_{ij} = u_{i,m} \sigma_{mj}^0 + u_{i,m}^0 \sigma_{mj}$ ,  $L_{ij} = \sigma_{ij}$ .

На основе общей постановки задачи можно также получить следующую формулировку принципа возможных мощностей для ПС (что является слабой постановкой исходной задачи):

$$\int_{S_\sigma} P_i v_i dS_\sigma - \int_V L_{ij} v_{i,j} dV - \int_V \Gamma_{ij} v_{i,j} dV + \omega^2 \int_V \rho u_i v_i dV = 0. \quad (2)$$

На основе представленных слабой и вариационной постановок задачи можно достаточно просто выводить уравнения движения и граничные условия для конкретного тела и способа приложения нагрузки. Для этого необходимо использовать соответствующие гипотезы, описывающие напряженно-деформированное состояние тела, выделить независимые переменные и следовать общим методам вариационного исчисления [6].

**2. Колебания неоднородного стержня с учетом предварительных напряжений и деформаций.** В настоящее время активно развиваются и уточняются различные неклассические модели стержней и пластин, в частности на основе теорий Тимошенко, Рейсснера, Миндлина и др., позволяющие описывать динамическое поведение стержней с учетом различных факторов, требуемых в рамках той или иной постановки задачи. В настоящем разделе приводятся постановки задач о колебаниях предварительно напряженного стержня в рамках теории Тимошенко для общего случая неоднородности всех параметров задачи, включая материальные характеристики и объемное распределение ПС.

Приведем постановку краевой задачи для совместных продольно-изгибных колебаний упругого изотропного стержня длины  $l$  с поперечным сечением  $F$ , консольно-закрепленного на левом конце, вызываемых во времени периодически меняющейся поперечной сосредоточенной силой интенсивности  $-P$ , приложенной к свободному концу. Будем считать, что все характеристики стержня заданы в виде неоднородных зависимостей:  $\rho = \rho(x_k)$ ,  $F = F(x_1)$ ,  $E = E(x_k)$ ,  $\mu = \mu(x_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Пусть в стержне существует неоднородное объемное распределение ПН  $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(x_k)$ .

Воспользуемся гипотезами типа Тимошенко для добавочных перемещений  $u_1 = \theta x_3 + \zeta$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = w$  (где  $\theta = \theta(x_1)$  — угол поворота главной оси стержня, обусловленный изгибом,  $\zeta = \zeta(x_1)$  — продольное смещение,  $w = w(x_1)$  — прогиб стержня) и для начальных перемещений  $u_1^0 = 0$ ,  $u_2^0 = 0$ ,  $u_3^0 = w_0$ .

На основе постановок (1), (2) с применением гипотез Тимошенко приведем вывод краевой задачи для предварительно напряженного упругого изотропного консольно-закрепленного стержня:

$$[(E_2 + \Sigma_{11}^2)\theta' + (E_1 + \Sigma_{11}^1)\zeta' + \Sigma_{13}^1\theta + E_1 w' w_0']' - M w' -$$

$$-\Sigma_{13}^0 \zeta' - \Sigma_{13}^1 \theta' - (M + \Sigma_{33}^0)\theta + \omega^2 (P_1 \zeta + P_2 \theta) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& [(E_1 + \Sigma_{11}^1)\theta' + (E_0 + \Sigma_{11}^0)\zeta' + E_0 w' w'_0 + \Sigma_{13}^0 \theta]' + \omega^2 (P_0 \zeta + P_1 \theta) = 0, \\
& [E_1 w'_0 \theta' + (M + \Sigma_{11}^0 + E_0 (w'_0)^2) w' + E_0 w'_0 \zeta' + M \theta]' + \omega^2 P_0 w = 0, \\
& w(0) = 0, \theta(0) = 0, \zeta(0) = 0, \\
& [(E_2 + \Sigma_{21}^2)\theta' + (E_1 + \Sigma_{11}^1)\zeta' + \Sigma_{13}^1 \theta + E_1 w' w'_0] (l) = 0, \\
& [(E_1 + \Sigma_{11}^1)\theta' + (E_0 + \Sigma_{11}^0)\zeta' + \Sigma_{13}^0 \theta + E_0 w' w'_0] (l) = P_1, \\
& [E_1 w'_0 \theta' + (M + \Sigma_{11}^0 + E_0 (w'_0)^2) w' + E_0 w'_0 \zeta' + M \theta] (l) = -P_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения, представляющие собой осредненные характеристики соответствующих функций, зависящие от осевой координаты  $x_1$ :

$$\begin{aligned}
M &= \int_F \mu dF, \quad E_0 = \int_F E dF, \quad E_1 = \int_F E x_3 dF, \quad E_2 = \int_F E x_3^2 dF, \\
\Sigma_{11}^0 &= \int_F \sigma_{11}^0 dF, \quad \Sigma_{11}^1 = \int_F \sigma_{11}^0 x_3 dF, \quad \Sigma_{11}^2 = \int_F \sigma_{11}^0 x_3^2 dF, \\
\Sigma_{13}^0 &= \int_F \sigma_{13}^0 dF, \quad \Sigma_{13}^1 = \int_F \sigma_{13}^0 x_3 dF, \quad \Sigma_{33}^0 = \int_F \sigma_{33}^0 dF, \\
P_0 &= \int_F \rho dF, \quad P_1 = \int_F \rho x_3 dF, \quad P_2 = \int_F \rho x_3^2 dF,
\end{aligned}$$

где  $w_0(x_1)$  — функция начального прогиба балки; массовыми силами пренебрегаем.

Введенные функции  $E_p$ ,  $p = 0, 1, 2$ , позволяют моделировать материальные свойства различных ФГК в зависимости от их типа и структуры. Заметим также, что такая постановка краевой задачи позволяет учитывать неоднородность материала ФГК не только вдоль оси стержня, но и по двум другим координатам.

В случае, когда рассматривается ПС, при котором начальным прогибом, а также компонентами  $\sigma_{13}^0$  и  $\sigma_{33}^0$  можно пренебречь по сравнению с  $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x_1, x_3)$ , а параметры ФГК стержня неоднородны только по  $x_1$ , система (3) примет вид

$$\begin{aligned}
& [(EJ + \Sigma_{11}^2)\theta' + \Sigma_{11}^1 \zeta']' - \mu F (w' + \theta) + \rho J \omega^2 \theta = 0, \\
& [\Sigma_{11}^1 \theta' + (EF + \Sigma_{11}^0)\zeta']' + \rho F \omega^2 \zeta = 0, \quad [(\mu F + \Sigma_{11}^0)w' + \mu F \theta]' + \rho F \omega^2 w = 0, \\
& w(0) = \theta(0) = \zeta(0) = 0, \quad [(EJ + \Sigma_{11}^2)\theta' + \Sigma_{11}^1 \zeta'] (l) = 0, \\
& [\Sigma_{11}^1 \theta' + (EF + \Sigma_{11}^0)\zeta'] (l) = P_1, \quad [(\mu F + \Sigma_{11}^0)w' + \mu F \theta] (l) = -P_2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что в том случае, когда поле ПС таково, что  $\Sigma_{11}^1 \neq 0$ , эта система не распадается на две независимые задачи о продольных и изгибных колебаниях консольно-закрепленного стержня. Таким образом, при рассмотрении установившихся колебаний ФГК-стержня следует учитывать как продольную, так и изгибную составляющие [16].

Теперь рассмотрим более общий случай, при котором учитываются как предварительный прогиб  $w_0$ , так и предварительный угол  $\theta_0$ . Соответствующие гипотезы для начальных перемещений имеют вид  $u_1^0 = \theta_0 x_3$ ,  $u_2^0 = 0$ ,  $u_3^0 = w_0$ . В этом случае постановку задачи для стержня удобно записать в виде

$$(Q^\ominus)' - R^\ominus = 0, \quad (Q^Z)' - R^Z = 0, \quad (Q^W)' - R^W = 0,$$

$$w(0) = 0, \theta(0) = 0, \zeta(0) = 0, \quad (5)$$

$$Q^\ominus|_{x=l} = -SP_1/F, \quad Q^Z|_{x=l} = -P_1, \quad Q^W|_{x=l} = -P_2,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} Q^\ominus &= T_{13}^2 \theta'_0 + T_{13}^1 + T_{11}^1 \theta_0 + \Sigma_{11}^2 \theta' + \Sigma_{11}^1 \zeta' + \Sigma_{13}^1 \theta, \\ Q^Z &= T_{13}^1 \theta'_0 + T_{13}^0 + T_{11}^0 \theta_0 + \Sigma_{11}^1 \theta' + \Sigma_{11}^0 \zeta' + \Sigma_{13}^0 \theta, \\ Q^W &= T_{13}^0 w'_0 + T_{11}^0 + T_{11}^1 w', \\ R^\ominus &= T_{11}^1 \theta'_0 + T_{11}^0 + \Sigma_{13}^1 \theta' + \Sigma_{13}^0 \zeta' + \Sigma_{33}^0 \theta - \omega^2(\theta P_2 + \zeta P_1), \\ R^Z &= -\omega^2(\theta P_1 + \zeta P_0), \quad R^W = -\omega^2 w P_0, \\ M_k &= \int_F \mu x_3^k dF, \\ T_{11}^p &= M_{p+1}(\theta \theta_0)' + M_p(\zeta \theta_0 + \theta + w'), \\ T_{13}^p &= E_{p+2} \theta' \theta'_0 + E_{p+1}(\zeta \theta'_0 + \theta') + E_p(w' w'_0 + \zeta'). \end{aligned}$$

Остальные обозначения введены выше.

**3. Анализ влияния предварительного напряженного состояния на динамические характеристики.** С помощью метода конечных элементов получено численное решение поставленных выше задач для стержня при различных граничных условиях. Решение проанализировано для различных случаев распределения ПС и неоднородности материальных свойств. При моделировании функционально-градиентной структуры материала использовались различные аналитические законы изменения модуля Юнга: гладкие и кусочно-непрерывные, с использованием степенных и экспоненциальных законов [17, 18]. При решении задач для стержня в качестве ПС выбрано несколько типов начального напряженно-деформированного состояния, описываемого функциями ПН и начальных перемещений, соответствующих следующим трем задачам: 1) предварительный чистый пластический изгиб ФГК-балки; 2) предварительный пластический изгиб ФГК-балки под действием сосредоточенной силы; 3) предварительный пластический изгиб ФГК-балки под действием равномерно распределенной нагрузки. Исследовано влияние уровней различных типов ПН на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) точек области.

Ниже представлены результаты этого анализа для шарнирно закрепленного с обоих концов стального бруса прямоугольного поперечного сечения, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой, на основе краевой задачи (3). Параметры задачи:  $l = 200$  см,  $b = 10$  см,  $2h = 10$  см,  $q = 5$  кг/см. В этом примере предварительное начальное напряженно-деформированное состояние соответствует первой задаче чистого пластического изгиба. Из трех описанных выше задач эта является наиболее наглядной с точки зрения степени влияния ПС на АЧХ, так как в предельном пластическом случае ПС распределено по всей длине стержня. Таким образом, степень влияния ПС на АЧХ в этой задаче по крайней мере больше, чем в двух других.

Поле остаточных напряжений после разгрузки имеет вид кусочно-линейной функции по  $x_3$ :

$$\sigma_{11}^0(x_3) = \begin{cases} (\text{sign} x_3) \sigma_T & \text{при } x_3 \in [h_T, h] \cup [-h_T, -h], \\ \frac{\sigma_T}{h_T} x_3 & \text{при } x_3 \in [-h_T, h_T], \end{cases}$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести материала,  $2h$  и  $b$  — размеры поперечного сечения балки;  $h_T = \sqrt{(h^2 - \frac{M}{b\sigma_T})}$  — значение  $x_3$  для границы раздела упругой и пластической зон [19]. В этом случае единственной отличной от нуля (в силу нечетности по  $x_3$ )

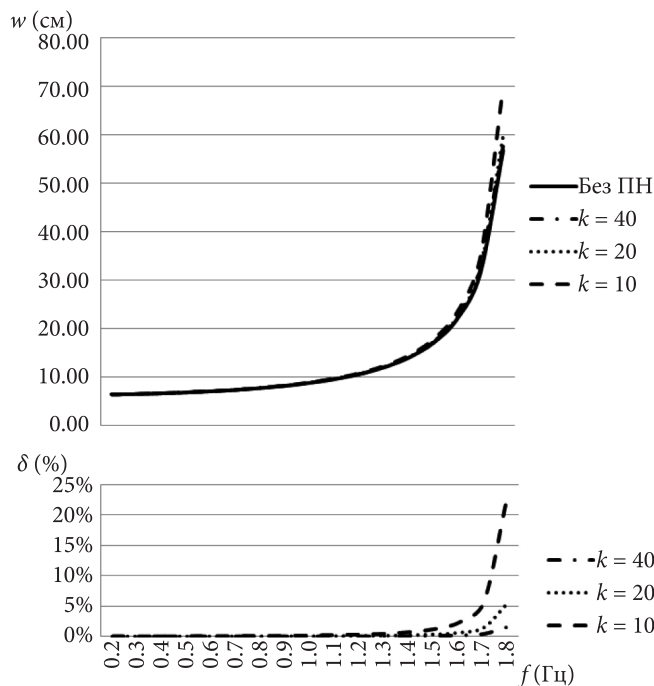


Рис. 1. Влияние уровня начального прогиба на АЧХ ФГК-стержня для первого частотного диапазона (т. е. ниже первой резонансной частоты;  $f \in [0.2, 1.8]$  Гц)

интегральной характеристикой ПН выступает  $\Sigma_{11}^1$ . Остаточный прогиб имеет вид  $w_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_T/h_T - M/J)(lx_1 - x_1^2)$ .

При этом рассмотрены три типа ПС: 1) из всех факторов ПС учитываются только компоненты тензора ПН; 2) помимо компонент ПН учитывается также поле начальных прогибов  $w_0(x_1)$ ; 3) учитываются все факторы ПС, включая угол поворота  $\theta_0^1$ .

На рис. 1 и 2 показаны ветви АЧХ, соответствующие ненапряженному состоянию и напряженному состоянию 2-го типа. Влияние уровня начального прогиба на АЧХ определяется коэффициентом  $k = l/\max(w_0)$ , характеризующим относительный начальный прогиб. Нижние графики отражают это влияние в процентном соотношении.

Здесь  $\delta(x_1) = \frac{|w(x_1) - w^+(x_1)|}{\max_{x_1 \in [0, l]} |w(x_1)|} 100\%$ , где  $w^+(x_1)$  — амплитуда поперечной составляющей колебаний балки при учете начального прогиба  $w_0(x_1)$ . Обратим внимание, что в этом эксперименте при образовании ПС упругая разгрузка не происходит. Таким образом, величина максимального остаточного прогиба существенно больше, чем в аналогичной задаче с разгрузкой. На всех рисунках частоты колебаний  $f = \omega/2\pi$  приведены в Гц.

На рис. 3 аналогичным образом изображены ветви АЧХ для ПС 3-го типа, т. е. с учетом всех его факторов. Из графиков видно, что влияние существенно по сравне-

<sup>1</sup> Отметим, что класс моделей ПН, в которых пренебрегают начальными деформациями по сравнению с полем ПН, довольно широк (он включает в себя несколько вариантов моделей в зависимости от структуры несимметричного тензора Пиолы в определяющих соотношениях) и более распространен, чем модель, учитывающая ПН (этот вывод сделан исходя из анализа отечественной и западной литературы, посвященной вопросу моделирования ПН в телах).

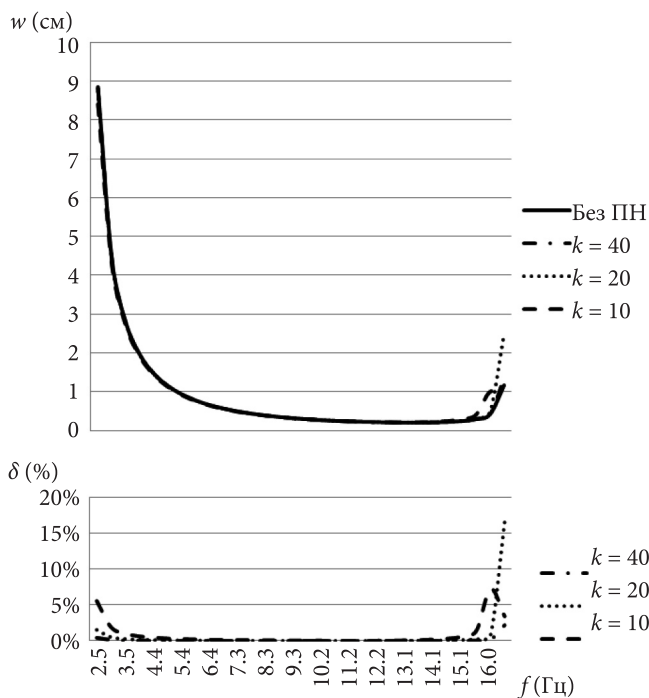


Рис. 2. Влияние уровня начального прогиба на АЧХ ФГК-стержня для второго частотного диапазона (между первой и второй резонансными частотами;  $f \in [2.5, 16.5]$  Гц)

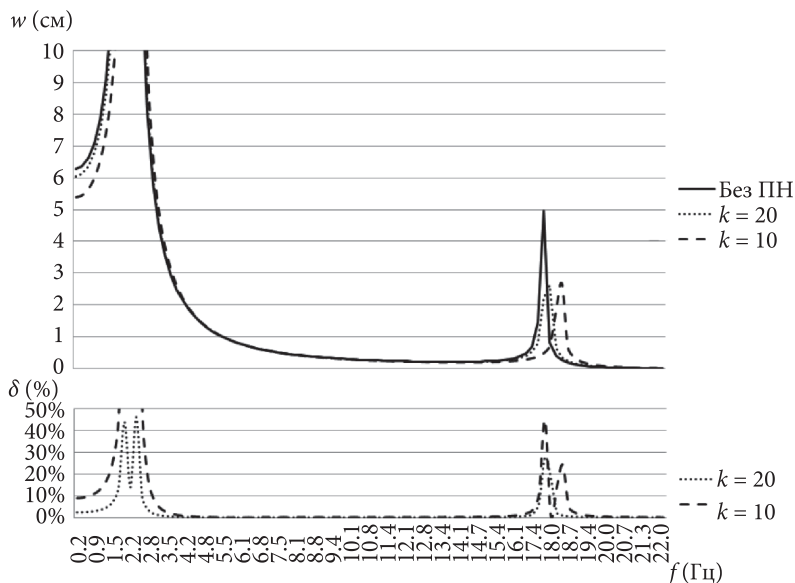


Рис. 3. Влияние всех факторов ПС  $\sigma_{11}^0$ ,  $\theta_0$ ,  $w_0$  на АЧХ ФГК-стержня на частотном диапазоне  $f \in [0, 22]$  Гц для различных значений  $k = l/\max(w_0)$

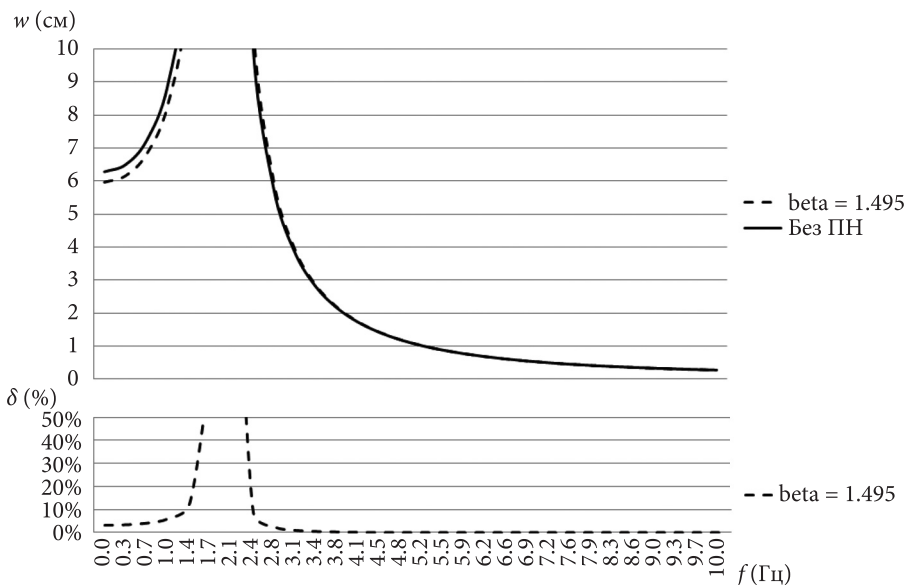


Рис. 4. Влияние всех факторов ПС  $\sigma_{11}^0$ ,  $\theta_0$ ,  $w_0$  на АЧХ ФГК-стержня на частотном диапазоне  $f \in [0, 10]$  Гц

нию с предыдущим случаем. На рис. 4 приведены результаты влияния всех факторов ПС на АЧХ в случае наличия в стержне ПС, образованного в результате чистого пластического изгиба и последующей упругой разгрузки, после чего балка была шарнирно оперта и подвержена режиму изгибных колебаний. Коэффициент  $\beta$  входит в формулу для определения диапазона возможных величин изгибающего момента, формирующего начальную деформацию:  $M = \frac{2}{3}(b + \beta)h^2\sigma_T$ ,  $\frac{2}{3}bh^2\sigma_T \leq M < bh^2\sigma_T$ . Значение коэффициента  $\beta = 1.495$  соответствует модельному случаю, когда пластическая зона заполняет более 90% области сечения балки.

Как можно видеть из результатов расчетов, рассмотренные примеры интересны тем, что при выбранном начальном напряженно-деформированном состоянии ПН практически не оказывают влияния на АЧХ по сравнению с начальными деформациями (без учета  $w^0$  и  $\theta_0$  ПН меняют амплитуды колебаний менее чем на один процент). При этом учет предварительного прогиба и угла поворота оказывает большее влияние на АЧХ. Тем не менее в последней рассмотренной задаче о колебаниях стержня с ПС, образованным в результате чистого пластического изгиба и последующей разгрузки, влияние факторов ПС на АЧХ совсем невелико (менее 10% вдали от резонансных частот) даже в модельном случае, когда пластическая зона практически заполнила всю область сечения балки. Исходя из этого результата, можно сделать вывод о том, что для ПС, образованного с помощью пластической деформации и последующей разгрузки, подобно рассмотренному выше, представляется проблематичным осуществить реконструкцию параметров ПС.

#### Литература

1. Birman V., Byrd L. W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // Applied Mechanics Reviews. 2007. Vol. 60. Issue 5. P. 195–216.
2. Candan S., Elishakoff I. Apparently first closed-form solution for vibrating inhomogeneous beams // Int. J. Solids Struct. 2001. Vol. 38. Issue 19. P. 3411–3441.



3. Wu L., Wang Q., Elishakoff I. Semi-inverse method for axially functionally graded beams with an anti-symmetric vibration mode // J. Sound Vib. 2005. Vol. 284. Issue 3–5. P. 1190–1202.
4. Товстух П. Е. Колебания и устойчивость предварительно напряженной пластины, лежащей на упругом основании // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 106–120.
5. Товстух П. Е. Реакция предварительно напряженного ортотропного основания // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 4. С. 98–108.
6. Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. 206 с.
7. Kieback B. et al. Processing techniques for functionally graded materials // Materials Science and Engineering A. 2003. Vol. 362. Issue 1–2. P. 81–105.
8. Углов А. Л., Ерофеев В. И., Смирнов А. Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 279 с.
9. Nedin R. D., Vatulyan A. O. Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate // ZAMM: Z. Angew. Math. Mech. 2014. Vol. 94, N 1–2. P. 142–149.
10. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J. Solids Struct. 2014. Vol. 51. Issue 3–4. P. 767–773.
11. Trefftz E. Zur theorie der stabilitat des elastischen gleichgewichts // ZAMM: Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 12, N 2. P. 160–165.
12. Nedin R. D., Vatulyan A. O. Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates // Int. J. Solids Struct. 2013. Vol. 50. Issue 13. P. 2107–2114.
13. Nedin R. D., Vatulyan A. O. Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications / ed. by H. Altenbach, V. Eremeyev. Ch. 13: On the Reconstruction of Inhomogeneous Initial Stresses in Plates. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
14. Bogachev I. V., Dudarev V. V., Nedin R. D., Vatulyan A. O. Identification of inhomogeneous residual stress state in elastic cylinder within the framework of plane strain // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 996. P. 404–408.
15. Ватульян А. О., Недин Р. Д. Модели предварительного напряженного состояния и принципы его идентификации // Математический форум. Итоги науки. Юг России. Т. 8, Ч. 2. Владикавказ, 2014. С. 32–52.
16. Dudarev V. V., Nedin R. D., Vatulyan A. O. Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 996. P. 409–414.
17. Handbook of Advanced Materials / ed. by J. K. Wessel. Ch. 10: Functionally graded materials. John Wiley & Sons, Inc., 2004.
18. Suresh S., Mortensen A. Fundamentals of functionally graded materials. London: IOM Communications, 1998.
19. Маллин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

#### Сведения об авторах

*Ватульян Александр Ованесович* — доктор физико-математических наук, профессор; vatulyan@sfedu.ru

*Недин Ростислав Дмитриевич* — кандидат физико-математических наук; Rdn90@bk.ru

### COMPARATIVE ANALYSIS OF INITIAL STATE IN INHOMOGENEOUS RODS

*Aleksandr O. Vatulyan*<sup>1,2</sup>, *Rostislav D. Nedin*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Southern Federal University, ul. Milchakova, 8a, Rostov-on-Don, 344090,

Russian Federation; vatulyan@sfedu.ru, Rdn90@bk.ru

<sup>2</sup> Vladikavkaz Research Center of RAS, Southern Mathematical Institute, ul. Markusa, 22, Vladikavkaz, 362027, Russian Federation; vatulyan@sfedu.ru, Rdn90@bk.ru

The development and improvement of models of inhomogeneous bodies in the presence of residual stress and deformation fields plays an important role in the mechanics of deformable solid body. From the viewpoint of practical applications, one of the most prospective inhomogeneity type is the class of functionally graded composites (FGC), which material properties vary depending on coordinates. The gradient of properties in such materials is due to the inhomogeneous chemical composition, or the microstructure, or the atomic order. Research on beam-like FGC is the very first global step of exploration of FGC properties.

A key question in the problem of monitoring of technical conditions of an object is often a question of proper selection of material's damage characteristics detection technique, and conducting a set of corresponding experimental investigations. A failure under loading below the allowable one is often due to unaccounted preliminary state (PS). It is important to provide the analysis of different types of inhomogeneity of material properties and PS factors (including residual stress and deformations) on dynamic characteristics.

In the present paper the effect of various types of PS on acoustical characteristics spectrum (eigenfrequencies, frequency-response functions) is analyzed in FGC-beams. In the framework of the Timoshenko model, such PS factors are considered as residual stress, residual deflection, and residual angle of rotation of the principal axis of the beam due to bending. The computational experiments are conducted and analyzed. Refs 19. Figs 4.

*Keywords:* initial stress-strain state, functional gradient, inhomogeneity, rod, Timoshenko's model, frequency-response function.

## References

1. Birman V., Byrd L. W., "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures", *Applied Mechanics Reviews* **60**, Issue 5, 195–216 (2007).
2. Candan S., Elishakoff I., "Apparently first closed-form solution for vibrating inhomogeneous beams", *Int. J. Solids Struct.* **38**, Issue 19, 3411–3441 (2001).
3. Wu L., Wang Q., Elishakoff I., "Semi-inverse method for axially functionally graded beams with an anti-symmetric vibration mode", *J. Sound Vib.* **284**, Issue 3–5, 1190–1202 (2005).
4. Tovstik P. E., "The vibrations and stability of a prestressed plate on an elastic foundation", *J. Appl. Math. Mech.* **73**(1), 77–87 (2009).
5. Tovstik P. E., "Response of residually stressed orthotropic foundation", *Vestn. St. Petersburg Univ. Ser. 1* Issue 4, 98–108 (2006) [in Russian].
6. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Nedin R. D., *Residual stress: modelling and identification* (SFedU Publ., Rostov-on-Don, 2014, 206 p.) [in Russian].
7. Kieback B. et al., "Processing techniques for functionally graded materials", *Materials Science and Engineering A.* **362**, Issue 1–2, 81–105 (2003).
8. Uglov A. L., Erofeev V. I., Smirnov A. N., *Acoustical testing of an equipment while its production and exploitation* (Nauka, Moscow, 2009, 279 p.) [in Russian].
9. Nedin R. D., Vatulyan A. O., "Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate", *ZAMM: Z. Angew. Math. Mech.* **94**(1–2), 142–149 (2014).
10. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A., "On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod", *Int. J. Solids Struct.* **51**, Issue 3–4, 767–773 (2014).
11. Trefftz E., "Zur theorie der stabilitat des elastischen gleichgewichts", *ZAMM: Z. Angew. Math. Mech.* **12**(2), 160–165 (1933) [in German].
12. Nedin R. D., Vatulyan A. O., "Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates", *Int. J. Solids Struct.* **50**, Issue 13, 2107–2114 (2013).
13. Nedin R. D., Vatulyan A. O., *Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Ch. 13: On the Reconstruction of Inhomogeneous Initial Stresses in Plates* (Eds H. Altenbach, V. Eremeyev, Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 2011).
14. Bogachev I. V., Dudarev V. V., Nedin R. D., Vatulyan A. O., "Identification of inhomogeneous residual stress state in elastic cylinder within the framework of plane strain", *Advanced Materials Research* **996**, 404–408 (2014).
15. Vatulyan A. O., Nedin R. D., "Models of residually stressed state and principles of its identification", *Mathematical Forum. Results of science. The South of Russia* **8**, Part 2, 32–52 (2014) [in Russian].
16. Dudarev V. V., Nedin R. D., Vatulyan A. O., "Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method", *Advanced Materials Research* **996**, 409–414 (2014).
17. *Handbook of Advanced Materials. Ch. 10: Functionally graded materials* (Ed. by J. K. Wessel. John Wiley & Sons, Inc., 2004).
18. Suresh S., Mortensen A., *Fundamentals of functionally graded materials* (IOM Communications, London, 1998).
19. Malinin N. N., *Applied theory of plasticity and creep* (Mashinostroyeniye, Moscow, 1968) [in Russian].