УДК 515.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3
MSC 47H10; 54H25

Результаты о неподвижной точке для уплотняющих операторов через меру некомпактности

Ю. Туаль, А. Джейд, Д. Аль-Мутавакиль

Университет Султана Мулай Слимана, Марокко, 23000, Бени-Меллал, 591

Для цитирования: *Туаль Ю., Джейд А., Аль-Мутавакиль Д.* Результаты о неподвижной точке для уплотняющих операторов через меру некомпактности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 542–549. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.314

В этой статье мы доказываем некоторые теоремы о неподвижных точках для уплотняющих операторов в условиях банаховых пространств через меру некомпактности без использования регулярности. Наши результаты улучшают и обобщают многие известные в литературе результаты.

Ключевые слова: неподвижная точка, мера некомпактности, регулярность.

1. Введение. Классические принципы неподвижной точки Шаудера [1] и Банаха [2] являются одними из наиболее полезных результатов в метрической теории неподвижной точки. Благодаря приложениям в математике и других смежных дисциплинах эти результаты были обобщены во многих направлениях. Теорема Шаудера о неподвижной точке утверждает, что любое компактное выпуклое непустое подмножество нормированного пространства обладает свойством неподвижной точки. В 2013 г. в работе [3] эта теорема была обобщена на полулинейные пространства. Расширения банахова принципа сжатия были получены либо путем обобщения свойств расстояния лежащей в основе области, либо путем изменения условия сжатия на отображениях.

В 1930 г. Куратовский [4] ввел понятие меры некомпактности, определяемое следующим образом:

$$\alpha(\Omega) = \inf\Big\{ \varepsilon > 0 \ : \ \Omega \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k,\ B_k \subset X,\ \mathrm{Diam}\,(B_k) \leq \varepsilon : k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}\Big\},$$

где $\mathrm{Diam}\,(B)$ обозначает диаметр ограниченного множества B.

В 1955 г. Дарбо [5] использовал эту меру для обобщения как классического принципа неподвижной точки Шаудера, так и принципа банахова сжатия для k-уплотняющих операторов, удовлетворяющих условию $\alpha(T(\Omega)) \leq k\alpha(\Omega)$ для некоторого $k \in [0, 1)$. В том же направлении исследований Садовский [6] в 1967 г. изучил класс так называемых уплотняющих отображений, удовлетворяющих условию $\alpha(T(\Omega)) < \alpha(\Omega)$, и обобщил теорему Дарбо.

Теорема Красносельского о неподвижной точке (1955) [7] для суммы двух операторов $T + S$ представляет собой комбинацию банахова принципа отображения сжатия и теоремы Шаудера о неподвижной точке. Она утверждает, что сумма $T + S$

имеет хотя бы одну неподвижную точку в непустом замкнутом выпуклом подмножестве C банахова пространства X, где S и T удовлетворяют следующим условиям:

(i) T — сжатие с константой $\gamma \in [0, 1)$,

(ii) S непрерывна,

(iii) $S(C)$ принадлежит компактному подмножеству X,

(iv) любые $x, y \in C$ влекут, что $Tx + Sy \in C$.

Этот результат был распространен в различных направлениях (см., например, [8, 9]).

В 1962 г. Эдельштейн [10] доказал теорему о неподвижной точке для сжимающих отображений на метрическом пространстве (X, d) в предположении, что это пространство компактно. В статье [11] авторы доказали результат для сжимающих отображений в ограниченном метрическом пространстве (X, d), удовлетворяющих условию $\inf_{x \neq y \in X}\{d(x, y) - d(Tx, Ty)\} > 0$ без добавления компактности пространства; другие работы в этом направлении можно найти в [12–16].

Руководствуясь вышеуказанными работами, в этой статье мы используем концепцию мер некомпактности, чтобы доказать новую неподвижную точку для нового класса уплотняющих отображений $T : C \to C$, определяемых следующим образом:

$$\inf \left\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\right\} > 0. \quad (1)$$

При сравнении с основной теоремой в [6] отметим, что наши результаты доказываются без использования регулярности меры, что на практике является очень трудным предположением.

Кроме того, мы доказываем теорему для нового класса уплотняющих отображений в себя, которые мы называем μE-слабоуплотняющими отображениями, определяемыми следующим образом:

$$\mu(T(\Omega)) \leq \mu(\Omega) - \phi(1 + \mu(\Omega)), \quad (2)$$

где $\phi : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ — функция, удовлетворяющая $\phi(1) = 0$ и $\inf_{t>1} \phi(t) > 0$.

Кроме того, мы используем первую теорему для доказательства новой некомпактной неподвижной точки типа Красносельского, которая является расширением известной теоремы Красносельского о неподвижной точке, поскольку условие (iii) заменено на $\inf \left\{\mu(\Omega) - \mu((I - T)^{-1}S(\Omega)) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\right\} > 0$.

Наконец, чтобы показать применимость нашего основного результата, дается приложение для интегрального уравнения Вольтерра при новых и слабых условиях.

2. Постановка задачи. Всюду в этой статье X — банахово пространство, $\mathcal{M}_X$ — семейство всех ограниченных подмножеств в X, $\mathcal{N}_X$ — семейство всех относительно компактных множеств в X и $D(T)$ обозначает область определения оператора T. Пусть $\overline{B}$ и $\mathrm{Cov}\,(B)$ обозначают замыкание и замкнутую выпуклую оболочку $B \subset X$ соответственно. Напомним некоторые определения и результаты, необходимые в дальнейшем.

Определение 1 (Банас и Гобель, 1980 [18]). Отображение $\mu : \mathcal{M}_X \to [0, +\infty[$ называется *мерой некомпактности*, определенной на X, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

(i) семейство $\ker \mu = \{B \in \mathcal{M}_X : \mu(B) = 0\}$ непусто и $\ker \mu \subset \mathcal{N}_X$,

(ii) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,

(iii) $\mu(B) = \mu(\overline{B}) = \mu(\mathrm{Cov}\,(B))$,

(iv) $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \le \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B)$ для всех $\lambda \in [0,1]$ и A, $B \in \mathcal{M}_X$,

(v) если $\{B_n\}$ — убывающая последовательность непустых, замкнутых и ограниченных подмножеств X с $\lim \mu(B_n) = 0$, то $B_\infty = \cap_n B_n \ne \emptyset$.

Определение 2 [18]. Пусть μ — мера некомпактности в банаховом пространстве X. Мера μ однородна, если $\mu(\lambda A) = |\lambda|\mu(A)$ для $\lambda \in \mathbb{R}$. Если мера μ удовлетворяет условию $\mu(A+B) \le \mu(A) + \mu(B)$, то она называется *субаддитивной.*

Мера μ, будучи одновременно однородной и субаддитивной, называется *сублинейной.*

Определение 3 [18]. Говорят, что мера некомпактности μ обладает *свойством максимума*, если $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$.

Определение 4 [18]. Сублинейная мера некомпактности μ, имеющая максимум и такая, что $\ker \mu = \mathcal{N}_X$, называется *регулярной мерой.*

Пример. В каждом метрическом пространстве X отображение

$$\phi(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega \text{ предварительно компактен,} \\ 1, & \text{если иначе,} \end{cases}$$

есть мера некомпактности, называемая дискретной мерой некомпактности. Эта мера обладает свойством максимума, инвариантна при переходе на выпуклую оболочку и не является однородной.

Теорема 1 (Шаудер [1]). *Пусть C — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства X. Тогда каждое компактное непрерывное отображение $T : C \to C$ имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

В качестве существенного обобщения теоремы Шаудера о неподвижной точке мы имеем следующую теорему о неподвижной точке.

Теорема 2 (Дарбо, 1955 [5]). *Пусть C — непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства X, и пусть $T : C \to C$ — непрерывное отображение. Предположим, что существует константа $k \in [0,1)$ такая, что*

$$\mu(T(\Omega)) \le k\mu(\Omega)$$

для любого подмножества Ω в C. Тогда T имеет хотя бы одну неподвижную точку. Здесь μ — произвольная мера некомпактности.

Обобщение теоремы 2, где μ — регулярная мера некомпактности, было доказано Садовским, мы приводим его в следующей теореме.

Теорема 3 (Садовский [6]). *Предположим, что C — непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства X и $T : C \to C$ — непрерывное отображение. Если для любого непустого подмножества Ω в C с $\mu(\Omega) > 0$ имеем*

$$\mu(T(\Omega)) < \mu(\Omega),$$

где μ — регулярная мера некомпактности в X, то T имеет хотя бы одну неподвижную точку в C.

Лемма 1 [9]. *Пусть $(X, ||.||)$ — нормированное пространство, $C \subset X$. Предположим, что отображение $T : C \to X$ является сжатием с константой $\gamma < 1$,* *тогда обратное $F := I - T : C \to (I-T)(C)$ существует и*

$$||F^{-1}(x) - F^{-1}(y)|| \le \frac{1}{1-\gamma}||x-y|| \text{ для всех } x, y \in F(C).$$

3. Основные результаты. Сначала докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Если μ — мера некомпактности, то $\nu = e^{\mu} - 1$ — мера некомпактности.*

Доказательство. Мы имеем $\nu(B) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(B) = 0$ для всех $B \in \mathcal{M}_X$. Так как функция exp непрерывна, неубывающа и выпукла, то ν удовлетворяет всем свойствам меры некомпактности. □

Теперь мы можем сформулировать наш основной результат.

Теорема 4. *Пусть C — непустое ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства X и $T : C \to C$ — непрерывное отображение такое, что*

$$\inf\left\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\right\} > 0.$$

Тогда T имеет хотя бы одну неподвижную точку. Здесь μ — произвольная мера некомпактности.

Доказательство. Пусть

$$I = \inf\left\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\right\}, \tag{3}$$

тогда

$$\mu(T(\Omega))) \le \mu(\Omega) - I \tag{4}$$

для всех $\Omega \subset C$, где $\mu(\Omega) > 0$.

Отсюда получаем

$$e^{\mu(T(\Omega))} \le ke^{\mu(\Omega)}, \tag{5}$$

где $k = e^{-I} < 1$. Тогда имеем

$$\nu(T(\Omega)) \le k\nu(\Omega) \tag{6}$$

для всех $\Omega \subset C$, где $\nu = e^{\mu} - 1$.

По лемме 2 ν является мерой некомпактности. Тогда согласно теореме 2 получаем, что T имеет хотя бы одну неподвижную точку. □

Определение 5. Пусть C — непустое ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства X и $T : C \to C$ — отображение. T будем называть μE-*слабоуплотняющим отображением*, если оно непрерывно и

$$\mu(T(\Omega)) \le \mu(\Omega) - \phi(1 + \mu(\Omega))$$

для всех $\Omega \subset C$, где $\mu(\Omega) > 0$ и $\phi : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ — функция, удовлетворяющая $\phi(1) = 0$ и $\inf_{t>1} \phi(t) > 0$.

Теорема 5. *Пусть C — непустое ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства X и $T : C \to C$ — μE-слабоуплотняющее отображение. Тогда T имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C$, из определения 7 имеем

$$0 < \inf_{t>1} \phi(t) \le \phi(1 + \mu(\Omega)) \le \mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)). \tag{7}$$

Тогда

$$\inf \left\{ \mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0 \right\} > 0. \tag{8}$$

Согласно теореме 4, отображение T имеет хотя бы одну неподвижную точку. $\square$

Пример. Мера некомпактности Хаусдорфа определяется следующим образом (см. [18]):

$$\chi(\Omega) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \ : \ \Omega \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r_k), \ x_k \in X, \ r_k \le \varepsilon : k = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N} \right\} =$$
$$= \inf\{ \ \varepsilon > 0 \ : \ \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

Теперь пусть $X = l_2 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_i, ...) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty, ||x|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}\}$ — пространство всех абсолютно 2-суммируемых рядов и $C = \overline{B}(0,1)$ — единичный замкнутый шар пространства X.

Определим T и ϕ по

$$Tx = (\sqrt{1 - ||x||^2}, x_1, x_2, ..., x_i, ...) \tag{9}$$

для всех $x \in C$, а также

$$\phi(t) = 0 \tag{10}$$

для всех $t \in [1, +\infty)$. Имеем

$$\chi(T(\Omega)) = \chi(\Omega) \tag{11}$$

для любого набора $\Omega \subset C$.

Действительно, если элементы

$$x_s = (x_{s_1}, x_{s_2}, ..., x_{s_i}, ...), \quad s = 1, 2, ..., n, \tag{12}$$

образуют ε-сеть множества Ω, компакт K, состоящий из элементов

$$y_s = (x_0, x_{s_1}, x_{s_2}, ..., x_{s_i}, ...), \quad x_0 \in [0, 1], \ s = 1, 2, ..., n, \tag{13}$$

образует ε-сеть множества $T(\Omega)$.

С другой стороны, если элементы (12) образуют ε-сеть множества $T(\Omega)$, то конечная ε-сеть для Ω может быть составлена из вектора

$$z_s = (x_{s_2}, ..., x_{s_i}, ...), \quad s = 1, 2, ..., n. \tag{14}$$

Следовательно,

$$\chi(T(\Omega)) \le \chi(\Omega) - \phi(1 + \chi(\Omega))) \tag{15}$$

для всех $\Omega \subset C$.

Тем не менее T не является μE-слабоуплотняющим отображением, так как $\inf_{t>1} \phi(t) = 0$ и T не имеет неподвижных точек. Поэтому условие $\inf_{t>1} \phi(t) > 0$ является существенным.

Далее мы даем новую версию теоремы Красносельского о неподвижной точке [7].

Теорема 6. *Пусть C — непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства X с $C \subset D(T) \subset X$. Предположим, что $T : D(T) \to X$ и $S : C \to X$ такие, что*

(i) S непрерывна,

(ii) T — сжатие с константой $\gamma < 1$,

(iii) $S(C) \subset (I - T)(D(T))$,

(iv) $\inf\left\{\mu(\Omega) - \mu((I-T)^{-1}S(\Omega)) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\right\} > 0$.

Тогда $T + S$ имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Доказательство. Так как T — это сжатие с константой $\gamma < 1$, то по лемме 1 обратное сжатие $(I - T)$ существует на ее образе $(I - T)(D(T))$ и является непрерывным. Из (i) и (iii) заключаем, что отображение $N = (I - T)^{-1}S : C \to D(T)$ корректно определено и непрерывно. Тогда из (iv) и теоремы 4 мы заключаем, что N имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Это завершает доказательство теоремы. □

4. Приложение. В этом разделе мы исследуем существование решения интегрального уравнения Вольтерра. Для этого предложим, что $X = \mathcal{C}([0,\tau], \mathbb{R})$ — пространство всех непрерывных функций из $[0,\tau]$ в $\mathbb{R}$ с $\tau > 0$. Заметим, что X является банаховым пространством, учитывая стандартную норму $||x|| = \max_{t\in[0,\tau]} |x(t)|$.

Пусть B — выпуклое, замкнутое и ограниченное подмножество $\mathbb{R}$, обозначим через $C = \mathcal{C}([0,\tau], B)$ пространство всех непрерывных функций из $[0,\tau]$ в B.

Ясно, что C — замкнутое, ограниченное и выпуклое подмножество X.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = \int_0^t k(s, x(s))ds, \tag{16}$$

где $x \in C$ и $k : [0,\tau] \times B \to B$ — непрерывное отображение.

Пусть μ — мера некомпактности, определяемая следующим образом (см. [18]):

$$\mu(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} ||x|| \tag{17}$$

для всех $\Omega \in \mathcal{M}_X$. Пусть

$$\theta : [0,\tau] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 0.$$

Отметим, что μ — сублинейная мера некомпактности со свойством максимума и $\ker\mu = \{\theta\} \neq \mathcal{N}_X$, поэтому μ не является регулярным.

Рассмотрим теперь оператор $T : C \mapsto C$, определенный следующим образом:

$$T(x)(t) = \int_0^t k(s, x(s))ds. \tag{18}$$

Итак, (1) имеет решение тогда и только тогда, когда T имеет хотя бы одну неподвижную точку.

При сделанных предположениях сформулируем следующую теорему.

Теорема 7. *Если существует $A > 0$ такое, что*

$$|k(t, x(t))| \leq \frac{1}{\tau}(|x(t)| - A) \tag{19}$$

для всех $t \in [0, \tau]$ и $x \in C$. Тогда нелинейное интегральное уравнение (1) *имеет решение.*

Доказательство. Пусть $t \in [0, \tau]$, $\Omega \subset C$ и $x \in \Omega$ такие, что $\mu(\Omega) > 0$, тогда имеем

$$|T(x)(t)| \leq \int_0^t |k(s, x(s))| ds \leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (|x(s)| - A) ds \leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (||x|| - A) ds \leq \sup_{x \in \Omega} ||x|| - A.$$

Итак,

$$||Tx|| \leq \sup_{x \in \Omega} ||x|| - A. \tag{20}$$

Следовательно,

$$\mu(T\Omega) \leq \mu(\Omega) - A \tag{21}$$

для всех $\Omega \subset C$ с $\mu(\Omega) > 0$.

Далее мы имеем

$$\inf \left\{ \mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0 \right\} > 0. \tag{22}$$

Согласно теореме 4 заключаем, что T имеет хотя бы одну неподвижную точку. $\square$

Авторы выражают сердечную благодарность профессору Н. А. Широкову за помощь в переводе рукописи на русский язык.

Литература/References

1. Schauder J. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Math.* **2**, 171–180 (1930).

2. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. *Fund. Math.* **3**, 133–181 (1922).

3. Agarwal R. P., Arshad S., O'Regan D., Lupulescu V. A Schauder fixed point theorem in semilinear spaces and applications. *Fixed Point Theory Appl.* **2013**, 306 (2013). https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-306

4. Kuratowski K. Sur les espaces complets. *Fundam. Math.* **15**, 301–309 (1930).

5. Darbo G. Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **24**, 84–92 (1955).

6. Sadovskii B. N. A fixed-point principle. *Funct. Anal. Its Appl.* **1**, 151–153 (1967). https://doi.org/10.1007/BF01076087

7. Krasnosel'skii M. A. Two remarks on the method of successive approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* **10**, 123–127 (1955).

8. Burton T. A fixed-point theorem of Krasnosel'skii. *Appl. Math. Lett.* **11**, 85–88 (1998).

9. Dhage B. C. Remarks on two fixed-point theorems involving the sum and the product of two operators. *Computers and Mathematics with Applications* **46**, 1779–1785 (2003).

10. Edelstein M. On fixed and periodic points under contractive mappings. *J. of Lon. Math. Soc.* **37** (1), 74–79 (1962).

11. Touail Y., El Moutawakil D., Bennani S. Fixed Point theorems for contractive selfmappings of a bounded metric space. *J. Func. Spac.* **2019**, 4175807 (2019). https://doi.org/10.1155/2019/4175807

12. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point results for new type of multivalued mappings in bounded metric spaces with an application. *Ricerche di Matematica* (2020). https://doi.org/10.1007/s11587-020-00498-5

13. Touail Y., El Moutawakil D. New common fixed point theorems for contractive self mappings and an application to nonlinear differential equations. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **12** (1), 903–911 (2021). https://doi.org/10.22075/IJNAA.2021.21318.2245

14. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed Point Theorems for New Contractions with Application in Dynamic Programming. *Vestnik St Petersb. Univ. Math.* **54**, 206–212 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121020126

15. Touail Y., El Moutawakil D. Some new common fixed point theorems for contractive selfmappings with applications. *Asian. Eur. J. Math.* **15** (4), 2250080 (2022). https://doi.org/10.1142/S1793557122500802

16. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems on orthogonal complete metric spaces with an application. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **12** (2), 1801–1809 (2021). https://doi.org/10.22075/IJNAA.2021.23033.2464

17. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. New contribution in fixed point theory via an auxiliary function with an application. *Ricerche di Matematica* (2021). https://doi.org/10.1007/s11587-021-00645-6

18. Banas J., Goebel K. *Measures of Non-compactness in Banach Spaces.* New York, Marcel Dekker (1980).

Статья поступила в редакцию 21 декабря 2021 г.;
доработана 14 февраля 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Туаль Юсеф — аспирант; youssef9touail@gmail.com
Джейд Амине — аспирант; aminejaid1990@gmail.com
Аль-Мутавакиль Дрисс — проф.; d.elmoutawakil@gmail.com

Fixed point results for condensing operators via measure of non-compactness

Y. Touail, A. Jaid, D. El Moutawakil

Sultan Moulay Slimane University, 591, Beni-Mellal, 23000, Morocco

For citation: Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. Fixed point results for condensing operators via measure of non-compactness. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 542–549.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.314 (In Russian)

In this paper, we prove some fixed point theorems for condensing operators in the setting of Banach spaces via measure of non-compactness, without using regularity. Our results improve and generalize many known results in the literature.

Keywords: fixed point, measure of non-compactness, regularity.

Received: December 21, 2021
Revised: February 14, 2022
Accepted: March 3, 2022

Authors' information:

Youssef Touail — youssef9touail@gmail.com
Amine Jaid — aminejaid1990@gmail.com
Driss El Moutawakil — d.elmoutawakil@gmail.com