УДК 519.213+517
MSC 60E15, 60D05

Вероятность попадания случайного вектора в многогранный конус: мажоризационный аспект

М. И. Ревяков

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27

Для цитирования: *Ревяков М. И.* Вероятность попадания случайного вектора в многогранный конус: мажоризационный аспект // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 506–516.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.311

В статье приводятся условия, при которых вероятность попадания линейной комбинации случайных векторов в многогранный конус является *Schur*-вогнутой функцией от коэффициентов комбинации. Требуется, чтобы конус содержал точку $\mathbf{0}$, его ребра были параллельны осям координат, а плотность распределения векторов была логарифмически вогнутой знакоинвариантной функцией.

Ключевые слова: прямоугольный конус, предпорядок внутри мажоризации, знакоинвариантная плотность, логарифмическая вогнутость, G-мажоризация.

1. Введение. Ряд работ в области вероятности и статистики связан с попаданием случайного вектора из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в центрально-симметричные выпуклые множества. Стоит отметить, что данное обстоятельство согласуется с понятием остроконечности (концентрации около начала) случайного вектора, введенным в [1], в котором фигурируют именно такие множества.

В разделе 2 мы, используя некоторые подобные результаты, переносим их на прямоугольные многогранные конусы. Дополнительным условием здесь оказывается знакоинвариантность плотности распределения.

В разделе 3 уделяется внимание рассмотренному в [2] предпорядку векторов, более редкому, чем широко известная мажоризация. В то же время этот предпорядок обычно легче проверяется. Теорема 5, сформулированная в разделе 3, представляет собой определенный способ продуцирования такого отношения между векторами.

2. Вероятность попадания вектора в конус. ***2.1. Мажоризация.*** Напомним определение *Schur*-вогнутой функции [2]. Говорят, что вектор $a = (a_1, \dots, a_m)$ *мажорируется* вектором $b = (b_1, \dots, b_m)$, и записывают $a \prec b$, если

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} b_{[i]} \geq \sum_{i=1}^{k} a_{[i]}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

где $b_{[1]} \geq \dots \geq b_{[m]}$, $a_{[1]} \geq \dots \geq a_{[m]}$ — упорядоченные по убыванию (невозрастанию) компоненты векторов b и a соответственно. Функция φ называется *Schur*-вогнутой, если из $a \prec b$ следует $\varphi(a) \geq \varphi(b)$.

Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — независимые одномерные случайные величины с общей плотностью h, которая симметрична (относительно начала) и лог-вогнута. В [2, § 12.J] отмечено, что тогда следующие два результата, восходящие к [3], эквивалентны:

(a) для каждого $t > 0$

$$\psi(a) = P\{\Sigma a_i X_i \leq t\}$$

есть *Schur*-вогнутая функция от a, $a_i \geq 0$ для всех i;

(b) для каждого $t > 0$

$$\tilde{\psi}(a) = P\{|\Sigma a_i X_i| \leq t\}$$

есть *Schur*-вогнутая функция от a, $a_i \geq 0$ для всех i.

Для n-мерных ($n \geq 2$) случайных векторов ситуация в этом отношении усложняется, и мы будем ориентироваться на то, что из (b) следует (a). Поэтому в дальнейших рассуждениях отправной точкой нам служит теорема 3.2 из [4], которую можно сформулировать как аналог утверждения (b).

Теорема 1 [4]. *Пусть $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы в $\mathbb{R}^n$ с общей симметричной (относительно начала) лог-вогнутой плотностью. Тогда*

$$\Psi(a) = P\left\{\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \mathbf{X}_\ell \in A\right\},$$

где A — любое симметричное (относительно начала) выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, есть Schur-вогнутая функция от a.

В $\mathbb{R}^n$ для фиксированных c_i, $i = 1, \ldots, n$, $c_i \neq 0$, обозначим через $\angle(c_1, \ldots, c_n)$ тот многогранный конус с вершиной в точке $(c_1, \ldots, c_n)$ и n ребрами, параллельными осям координат, который содержит $\mathbf{0}$.

Теорема 2. *Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) = h(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ — лог-вогнутая плотность в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\forall\ c_i$, $i = 1, \ldots, n$, $c_i \neq 0$, и $a \succ b$, $a, b \in \mathbb{R}^m$,*

$$P\left\{\sum_{\ell=1}^{m} b_\ell \mathbf{X}_\ell \in \angle(c_1, \ldots, c_n)\right\} \geq P\left\{\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \mathbf{X}_\ell \in \angle(c_1, \ldots, c_n)\right\},$$

где $\mathbf{X}_\ell$, $\ell = 1, \ldots, m$, — независимые одинаково распределенные n-мерные случайные векторы с общей плотностью h.

Доказательство. Прежде всего заметим, что конусы представляют собой прямоугольные многогранники, содержащие $\mathbf{0}$, из чего следует, что $\bigcup_\varepsilon \angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n) = \mathbb{R}^n$. Действительно, возьмем произвольную точку $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, тогда во всяком случае $\mathbf{x} \in \angle(\varepsilon_1 |c_1|, \ldots, \varepsilon_n |c_n|)$, где $\varepsilon_i = -\mathrm{sgn}(x_i)$ и любое $\varepsilon_i = \pm 1$ при $x_i = 0$.

Обозначим через $\langle a, X\rangle$ векторно-матричное произведение. Напомним, что если $a = (a_1, \ldots, a_m)$ и $X = ||x_{\ell i}||$, $\ell = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$, то векторно-матричное произведение определяется как вектор $d = (d_1, \ldots, d_n)$, у которого $d_i = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell x_{\ell i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Пусть $\hat{h}$ — плотность $\langle a, X\rangle$. Поскольку h знакоинвариантна, то такова же функция $\hat{h}$; это легко проверяется с учетом того, что плотность суммы двух независимых векторов есть свертка их плотностей. Покажем, что в силу знакоинвариантности $\hat{h}$ мы имеем для всех $\varepsilon_i = \pm 1$ равенство

$$P\{\langle a, X\rangle \in \angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)\} = P\{\langle a, X\rangle \in \angle(|c_1|, \ldots, |c_n|)\}. \tag{1}$$

Фиксируя $c_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$, установим взаимно-однозначное соответствие между точками двух произвольных конусов: $\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)$ и $\angle(\varepsilon'_1 c_1, \ldots, \varepsilon'_n c_n)$. Поскольку $\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (x_i - \varepsilon_i c_i)\varepsilon_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, то, сопоставляя множества $\{x_i : \varepsilon_i x_i \leq c_i\}$ и $\{x'_i : \varepsilon'_i x'_i \leq c_i\}$, получаем искомое соответствие: $x'_i = \varepsilon_i \varepsilon'_i x_i,\ x_i = \varepsilon_i \varepsilon'_i x'_i$.

Рассмотрим теперь

$$P\{\langle a, X\rangle \in \angle(\varepsilon'_1 c_1, \ldots, \varepsilon'_n c_n)\} = \int_{\angle(\varepsilon'_1 c_1, \ldots, \varepsilon'_n c_n)} \hat{h}(x'_1, \ldots, x'_n) dx'_1, \ldots, dx'_n.$$

Сделав в интеграле замену переменных $x'_i = \varepsilon_i \varepsilon'_i x_i$, получим, что он равен

$$\int_{\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)} \hat{h}(\varepsilon_1 \varepsilon'_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n \varepsilon'_n x_n)|J| dx_1, \ldots, dx_n.$$

Поскольку плотность $\hat{h}$ знакоинвариантная, а матрица Якоби диагональная с элементами $\varepsilon_i \varepsilon'_i$ на диагонали, то отсюда следует (1).

Для краткости, когда речь идет об определенном случайном векторе $\mathbf{W}$, будем под $P[A]$ понимать $P\{\mathbf{W} \in A\}$. Пусть в $\mathbb{R}^n$ имеется набор множеств $A_j^{(n)},\ j = 1, \ldots, s$. Дальнейшие рассуждения базируются на формуле

$$\sum_{j=1}^{s} P[A_j^{(n)}] = \sum_{k=1}^{s} k P[R_k^{(n)}], \qquad P[\emptyset] = 0, \tag{2}$$

где $R_k^{(n)},\ k = 1, \ldots, s,$ — множество тех $x \in \mathbb{R}^n$, которые принадлежат ровно k из s множеств $A_j^{(n)}$; ясно, что $R_k^{(n)}$ попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^{s} R_k^{(n)} = \bigcup_{j=1}^{s} A_j^{(n)}$.

Равенство (2) интуитивно напрашивается, и к нему несложно прийти, если записать левую часть в виде $\int_{\mathbb{R}^n} \sum \chi_{A_j} dP$ и учесть, что $\sum \chi_{A_j} = \sum k \chi_{R_k}$, где χ — индикаторная функция множества.

Далее речь будет идти только о случайном векторе $\mathbf{W} = \langle a, X\rangle$. Поскольку наши последующие рассуждения строятся на индукции, то заметим, что при переходе от $\mathbb{R}^n$ к $\mathbb{R}^{n+1}$ возникает следующий эффект. Обозначим через $L_*^{(n)}$ набор из 2^n конусов $\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$. Предположим, что в $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, существует такой набор из 2^n выпуклых симметричных множеств $D_*^{(n)} = \{D_1^{(n)}, D_2^{(n)}, \ldots, D_{2^n}^{(n)}\},\ D_1^{(n)} = \mathbb{R}^n$, что $\overline{R}_k^{(n)} = R_k^{(n)},\ k = 1, \ldots, 2^n$, где $\overline{R}_k^{(n)}$ относятся к набору $D_*^{(n)}$, а $R_k^{(n)}$ — к набору $\angle_*^{(n)}$. Отсюда, согласно (2), получаем

$$\sum_{j=1}^{2^n} P[D_j^{(n)}] = \sum_{j=1}^{2^n} P[\angle_j^{(n)}]. \tag{3}$$

Нам предстоит показать, что тогда и в $\mathbb{R}^{n+1}$ найдется набор из 2^{n+1} выпуклых симметричных множеств $\{D_1^{(n+1)}, D_2^{(n+1)}, \ldots, D_{2^{n+1}}^{(n+1)}\}$ таких, что $\overline{R}_k^{(n+1)} = R_k^{(n+1)}$, и тем самым выполняется (3) с заменой n на $n+1$.

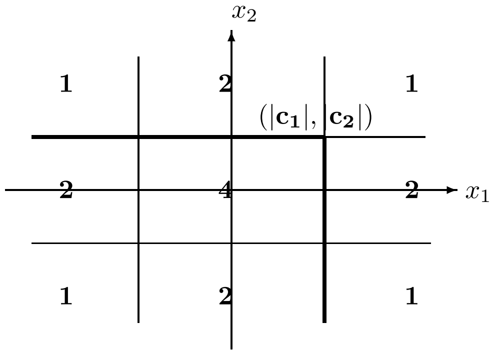

Рис. 1. Число множеств $L_j^{(2)}(D_j^{(2)})$, покрывающих соответствующие области.

Но прежде следует сформировать базу индукции. С этой целью на рис. 1 для $n = 2$ числами N снабжены множества точек, которые принадлежат ровно N конусам из набора $\angle_j^{(2)}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Легко проверяется, что точно такое же расположение N мы получим, если вместо конусов возьмем множества $D_1^{(2)} = \mathbb{R}^2$, $D_2^{(2)}$ — вертикальная полоса, $D_3^{(2)}$ — прямоугольник, $D_4^{(2)}$ — горизонтальная полоса. Важно, что эти фигуры выпуклы и симметричны.

Теперь возьмем произвольный конус $\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)$ из набора $L_*^{(n)}$, иначе говоря, фиксируем ε_i, $i = 1, \ldots, n$, и рассмотрим произвольную точку $\mathbf{x}^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$ в этом конусе. Поскольку мы имеем дело только с конусами, содержащими $\mathbf{0}$, то точка $\mathbf{x}^{(n+1)} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ принадлежит обоим конусам $\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n, c_{n+1})$ и $\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n, -c_{n+1})$ при условии $-|c_{n+1}| \le x_{n+1} \le |c_{n+1}|$ и одному — в противном случае. Пусть $N_{\mathbf{x}^{(n)}}$ — количество конусов в $L_*^{(n)}$, содержащих точку $\mathbf{x}^{(n)} \in \mathbb{R}^n$. Тогда легко следует, что $N_{\mathbf{x}^{(n+1)}} = 2N_{\mathbf{x}^{(n)}}$, если точка $\mathbf{x}^{(n+1)} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ принадлежит неограниченному симметричному выпуклому многограннику $C = \{\mathbf{x}^{(n+1)} \in \mathbb{R}^{n+1} : -|c_{n+1}| \le x_{n+1} \le |c_{n+1}|\}$, и $N_{\mathbf{x}^{(n+1)}} = N_{\mathbf{x}^{(n)}}$ иначе.

Далее, для каждого $j = 1, \ldots, 2^n$ возьмем в качестве $D_j^{(n+1)}$ множество точек $\mathbf{x}^{(n+1)} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, что $\mathbf{x}^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in D_j^{(n)}$, то есть $D_j^{(n+1)} = D_j^{(n)} \times \mathbb{R}$, в частности $D_1^{(n+1)} = \mathbb{R}^{n+1}$. В свою очередь, для $j = 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}$ полагаем $D_j^{(n+1)} = D_{j-2^n}^{(n+1)} \bigcap C$. Ясно, что все $D_j^{(n+1)}$, как и $D_j^{(n)}$, — выпуклые симметричные множества.

Кроме того, если $\overline{N}_{\mathbf{x}^{(n)}}$ — количество множеств в $D_*^{(n)}$, содержащих точку $\mathbf{x}^{(n)} \in \mathbb{R}^n$, то для $\mathbf{x}^{(n+1)} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in C$ оказывается $\overline{N}_{\mathbf{x}^{(n+1)}} = 2\overline{N}_{\mathbf{x}^{(n)}}$, поскольку для каждого $j = 1, \ldots, 2^n$ множества $D_j^{(n+1)}$ и $D_{j+2^n}^{(n+1)}$ одновременно либо содержат $\mathbf{x}^{(n+1)}$, либо не содержат. В свою очередь, для $\mathbf{x}^{(n+1)} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus C$ очевидно $\overline{N}_{\mathbf{x}^{(n+1)}} = \overline{N}_{\mathbf{x}^{(n)}}$.

Для $n = 2$ данное обстоятельство проиллюстрировано на рис. 2, где утолщенными вертикальными отрезками условно представлены (гипер)плоскости $x_3 = -|c_3|$ и $x_3 = |c_3|$.

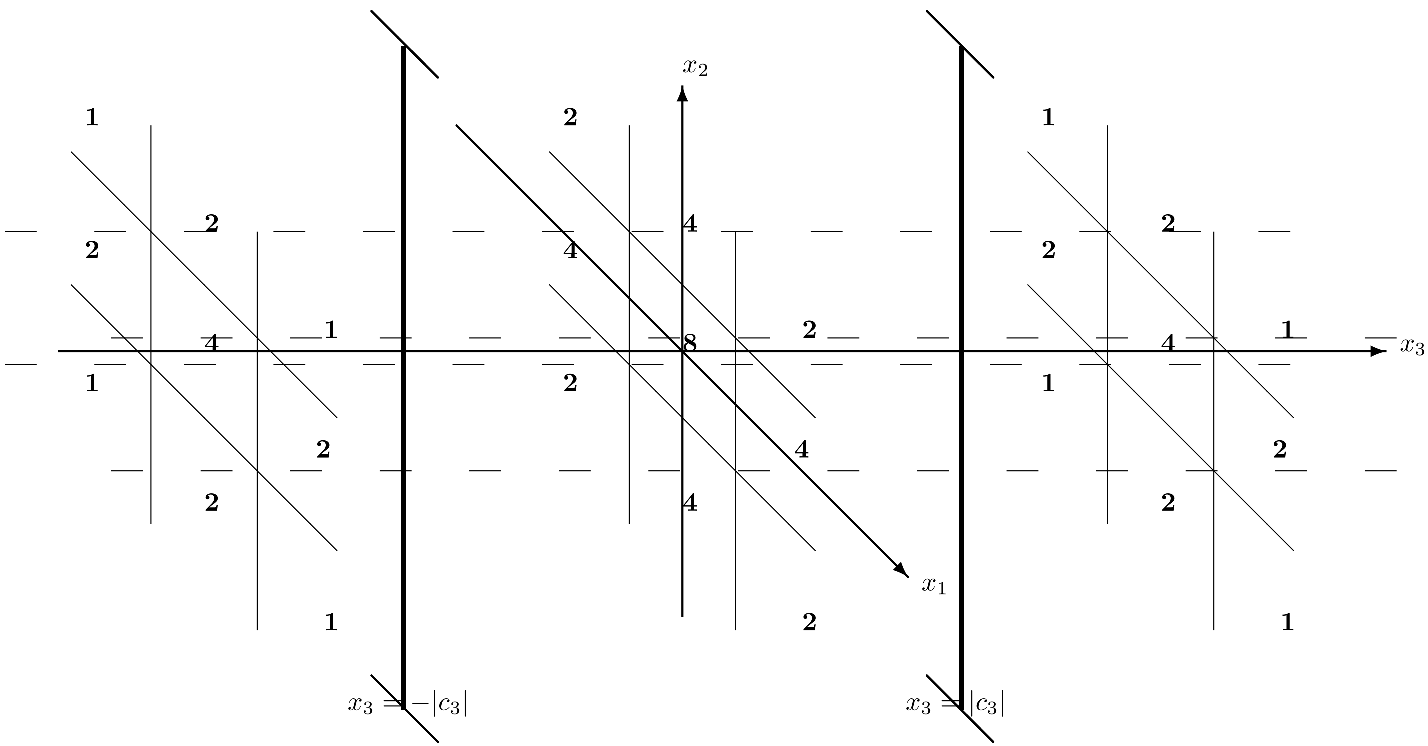

Рис. 2. Число множеств $L_j^{(3)}(D_j^{(3)})$, покрывающих соответствующие области.

При произвольном n для $k=1,\dots,2^n$ имеем

$$\overline{R}_k^{(n+1)} \setminus C = (\overline{R}_k^{(n)} \times \mathbb{R}) \setminus C, \qquad \overline{R}_{2k}^{(n+1)} \bigcap C = (\overline{R}_k^{(n)} \times \mathbb{R}) \bigcap C,$$

$$R_k^{(n+1)} \setminus C = (R_k^{(n)} \times \mathbb{R}) \setminus C, \qquad R_{2k}^{(n+1)} \bigcap C = (R_k^{(n)} \times \mathbb{R}) \bigcap C$$

и $\overline{R}_{2k-1}^{(n+1)} \bigcap C \ = R_{2k-1}^{(n+1)} \bigcap C = \emptyset$.

Исходя из этого, получаем:
для $k=1,3,\dots,2^n-1$

$$\overline{R}_k^{(n+1)} = (\overline{R}_k^{(n)} \times \mathbb{R}) \setminus C, \qquad R_k^{(n+1)} = (R_k^{(n)} \times \mathbb{R}) \setminus C,$$

для $k=2,4,\dots,2^n$

$$\overline{R}_k^{(n+1)} = \left(\overline{R}_k^{(n+1)} \setminus C\right) \bigcup \left(\overline{R}_k^{(n+1)} \bigcap C\right) = \left(\left(\overline{R}_k^{(n)} \times \mathbb{R}\right) \setminus C\right) \bigcup \left(\left(\overline{R}_{k/2}^{(n)} \times \mathbb{R}\right) \bigcap C\right),$$

$$R_k^{(n+1)} = \left(R_k^{(n+1)} \setminus C\right) \bigcup \left(R_k^{(n+1)} \bigcap C\right) = \left(\left(R_k^{(n)} \times \mathbb{R}\right) \setminus C\right) \bigcup \left(\left(R_{k/2}^{(n)} \times \mathbb{R}\right) \bigcap C\right);$$

наконец, для $k=2^n+2, 2^n+4, \dots, 2^{n+1}$

$$\overline{R}_k^{(n+1)} = \left(\overline{R}_{k/2}^{(n)} \times \mathbb{R}\right) \bigcap C, \qquad R_k^{(n+1)} = \left(R_{k/2}^{(n)} \times \mathbb{R}\right) \bigcap C$$

и $\overline{R}_k^{(n+1)} = R_k^{(n+1)} = \emptyset$ для $k = 2^n+1, 2^n+3, \dots, 2^{n+1}-1$.

Поскольку правые части всех «спаренных» равенств различаются только величинами $\overline{R}_k^{(n)}$ и $R_k^{(n)}$, которые равны между собой по индукционному предположению, то равны и соответствующие левые части. Таким образом, в отношении наборов $D_*^{(n+1)}$ и $\angle_*^{(n+1)}$ получаем $\overline{R}_k^{(n+1)} = R_k^{(n+1)}$ для всех $k=1,\dots,2^{n+1}$, и тем самым выполняется (3) с заменой n на $n+1$.

В результате, согласно (3), принимая во внимание (1), получаем соотношение

$$2^n P\{\langle a, X\rangle \in \angle(\varepsilon_1 c_1, \dots, \varepsilon_n c_n)\} = 1 + \sum_{j=2}^{2^n} P\{\langle a, X\rangle \in D_j^{(n)}\}, \tag{4}$$

откуда следует

$$P\{\langle a, X\rangle \in \angle(\varepsilon_1 c_1, \dots, \varepsilon_n c_n)\} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \sum_{j=2}^{2^n} P\{\langle a, X\rangle \in D_j^{(n)}\},$$

где $D_j^{(n)}$ — симметричные выпуклые множества. Остается учесть, что знакоинвариантные плотности, очевидно, симметричны, и поэтому согласно теореме 1 все слагаемые в правой части являются *Schur*-вогнутыми функциями от a. Значит, левая часть тоже обладает этим свойством, что означает справедливость теоремы 2. $\square$

Из теоремы 2 стандартным образом, принимая во внимание соотношение $\left(\frac{1}{m+1}, \dots, \frac{1}{m+1}\right) \prec \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}, 0\right)$, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 справедливо неравенство*

$$P\left\{\frac{1}{m+1}\sum_{\ell=1}^{m+1}\mathbf{X}_\ell \in \angle(c_1,\ldots,c_n)\right\} \geq P\left\{\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m}\mathbf{X}_\ell \in \angle(c_1,\ldots,c_n)\right\}.$$

Замечание 1. Конечно, все вышесказанное справедливо и для случаев, когда некоторые c_i равны нулю. Это устанавливается предельным переходом, с учетом того, что для лог-вогнутых плотностей: (a) область Q, где $h>0$, выпукла в $\mathbb{R}^n$ и (b) в области Q функция h непрерывна (см., например, [5, § 2.1]).

Замечание 2. Существуют различные доказательства того, что мера μ объединения множеств не превосходит суммы мер этих множеств. Еще одно доказательство может быть получено из формулы (2). Действительно, имеем

$$\sum_{j=1}^{s}\mu[A_j^{(n)}] = \sum_{k=1}^{s}\mu[R_k^{(n)}] + \sum_{k=1}^{s}(k-1)\mu[R_k^{(n)}]$$

и, учитывая, что $\mu[\bigcup_{j=1}^{s} A_j^{(n)}] = \mu[\bigcup_{k=1}^{s} R_k^{(n)}] = \sum_{k=1}^{s}\mu[R_k^{(n)}]$, находим

$$\mu[\bigcup_{j=1}^{s} A_j^{(n)}] = \sum_{j=1}^{s}\mu[A_j^{(n)}] - \sum_{k=1}^{s}(k-1)\mu[R_k^{(n)}] \leq \sum_{j=1}^{s}\mu[A_j^{(n)}].$$

2.2. G-мажоризация (см. [2, § 14.C.8]). Пусть $Z : m\times n$ — случайная матрица со строками $Z_1',\ldots,Z_m'$, и обозначим через V векторное пространство $(m\times n)$-матриц. Для данного множества $A\subseteq\mathbb{R}^n$ и вектора $a\in\mathbb{R}^m$ введем в рассмотрение

$$\phi_A(a) = P\left\{\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell Z_\ell' \in A\right\}. \tag{5}$$

Теперь возьмем группу G_0, состоящую из всех $(m\times m)$-матриц перестановок и всех диагональных $(m\times m)$-матриц с элементами ±1 на диагонали. Группа G_0 порождает частичное упорядочение на $\mathbb{R}^m$ следующим образом. Для каждого $b\in\mathbb{R}^m$ пусть $\rho(b)$ обозначает выпуклую оболочку множества $\{gb : g\in G_0\}$, и будем писать $a\leq b$ в случае $a\in\rho(b)$. Такое упорядочение обстоятельно обсуждается в [6].

Функцию τ, определенную на $\mathbb{R}^m$, называют *убывающей* относительно данного упорядочения, если $a\leq b$ влечет за собой $\tau(a)\geq\tau(b)$. Следующая теорема 4.2 работы [7] служит нам здесь отправной точкой так же, как теорема 1 в п. 2.1.

Теорема 3 [7]. *Предположим, что плотность Z, скажем f, удовлетворяет условиям:*

(i) $f(gz) = f(z)$ для всех $g\in G_0$, $z\in V$;

(ii) функция f лог-вогнута.

Тогда функция ϕ_A, определенная в (5), *является убывающей для каждого выпуклого симметричного множества $A\subseteq\mathbb{R}^n$.*

Эта теорема позволяет нам получить следующий результат. Обозначим через G^* множество всех $(m\times m)$-матриц перестановок.

Теорема 4. *Предположим, что*

(i) $f(g^* z) = f(z)$ *для всех* $g^* \in G^*$, $z \in V$;

(ii) векторы $Z'_1, \ldots, Z'_m$ *— независимые со знакоинвариантными лог-вогнутыми плотностями.*

Тогда функция ϕ_A, *определенная в* (5), *является убывающей для каждого конуса* $A \equiv \angle(c_1, \ldots, c_n)$, *фигурирующего в теореме 2.*

Замечание 3. В условии (i) мы ограничиваемся перестановочными матрицами, поскольку условие на диагональные матрицы перекрывается в (ii). Условие (ii) в теореме 3 также перекрывается в условии (ii) теоремы 4, поскольку плотность независимых векторов равняется произведению их плотностей.

Доказательство теоремы 4. Аналогично доказательству теоремы 2. Прежде всего мы должны получить равенство типа (1). Для этого требуется установить знакоинвариантность плотности величины $\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell Z'_\ell$. Она следует по тем же соображениям, которые приведены в начале доказательства теоремы 2: пошагово формируется плотность суммы двух независимых векторов как свертка их знакоинвариантных плотностей. На каждом из $m-1$ шагов оказывается, что плотность суммы знакоинвариантна. Это приводит, как в п. 2.1, к равенству

$$\phi_{\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)}(a) = \phi_{\angle(|c_1|, \ldots, |c_n|)}(a).$$

Далее целиком повторяются рассуждения и выкладки, расположенные между равенствами (2) и (4), и, таким образом, приходим к следующему соотношению взамен (4):

$$2^n \phi_{\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)}(a) = 1 + \sum_{j=2}^{2^n} \phi_{D_j^{(n)}}(a),$$

где $D_j^{(n)}$ — симметричные выпуклые множества. Согласно теореме 3, с учетом замечания 3, все слагаемые в правой части являются убывающими функциями от a. Следовательно, левая часть тоже обладает этим свойством, что означает справедливость теоремы 4. $\square$

Замечание 4. Рассуждая, как в замечании 4.1 работы [7], можно заключить, что теорема 4 является обобщением теоремы 2.

3. Предпорядок внутри мажоризационного предпорядка. В [2, § 5.B] введен следующий предпорядок, который обозначим $\preceq^1$: для $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем писать $x \preceq^1 y$, если разность $y_{[i]} - x_{[i]}$ не возрастает по $i = 1, \ldots, n$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

В [2, § 5.B.1] показано, что $(x \preceq^1 y) \Rightarrow (x \prec y)$. Из этого следует, в частности, что класс функций, сохраняющих предпорядок $\preceq^1$, шире класса $Schur$-выпуклых функций. Кроме того, в [2, § 5.B] говорится о более простой проверке выполнения соотношения $x \preceq^1 y$ по сравнению с $x \prec y$.

Конечно, в силу импликации $(x \preceq^1 y) \Rightarrow (x \prec y)$ теорема 2 остается справедливой при замене в ней условия $b \prec a$ на $b \preceq^1 a$. Следующее утверждение можно воспринимать как один из способов продуцирования отношения $\preceq^1$. Оно является аналогом теоремы в [2, § 5.A.12] (в предложении 5 работы [8] представлена более точная ее версия).

Теорема 5. *Пусть* $D = \{x : x_1 \geq \dots \geq x_n\}$, *а векторы* $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ *из* D *выбраны так, что выполнено*

$$x^{(1)} \ \preceq^1 \dots \ \preceq^1 \ x^{(m)}, \tag{6}$$

и пусть

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{k} \beta_i, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i x^{(i)} \ \preceq^1 \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \tag{7}$$

всякий раз, когда левая часть (7) *принадлежит* D (*в частности, это верно, если* $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$); *при этом оказывается, что и правая часть* (7) *принадлежит* D.

Доказательство. Учитывая, что по условию теоремы $x^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, и левая часть (7) принадлежат D, можем записать $x_j^{(i)} = x_{[j]}^{(i)}$ и также

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \beta_i x^{(i)} \right\}_{[j]} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{[j]}^{(i)}, \quad \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \right\}_{j} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{[j]}^{(i)}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{8}$$

Прежде всего отметим очевидное: $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \sum_{j=1}^{n} x_{[j]}^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_{[j]}^{(i)}$, и покажем, что для $j = 1, \dots, n-1$ справедливо неравенство

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \right\}_{j} - \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{[j]}^{(i)} \geq \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \right\}_{j+1} - \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{[j+1]}^{(i)}, \tag{9}$$

то есть

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \right\}_{j} - \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \right\}_{j+1} \geq \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{[j]}^{(i)} - \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{[j+1]}^{(i)}. \tag{10}$$

Согласно (8), соотношение (10) эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i \geq \sum_{i=1}^{m} \beta_i X_i, \tag{11}$$

где $X_i = x_{[j]}^{(i)} - x_{[j+1]}^{(i)}$. Имеем для $i = 1, \dots, m-1$ соотношение

$$X_{i+1} - X_i = x_{[j]}^{(i+1)} - x_{[j+1]}^{(i+1)} - x_{[j]}^{(i)} + x_{[j+1]}^{(i)} = (x_{[j]}^{(i+1)} - x_{[j]}^{(i)}) - (x_{[j+1]}^{(i+1)} - x_{[j+1]}^{(i)}).$$

Отсюда, учитывая (6), получаем, что X_i не убывает по i ($i = 1, \dots, m$). Согласно [2, § 16A.2.a], это означает выполнение (11), а с ним и (9). Поскольку по условию теоремы правая часть (10) не отрицательна, то такова же и левая часть. Из этого следует, что правая часть (7) также принадлежит D. Таким образом, доказательство теоремы завершено. □

Следствие 2. *Если* $x^{(1)} \preceq^1 x^{(2)} \preceq^1 \cdots \preceq^1 x^{(m)}$ *на* D *и если для некоторого* ℓ, $1 \le \ell \le m$, *выполняется*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \le \begin{cases} 0\,, & k = 1, \dots, \ell - 1, \\ 1, & k = \ell, \dots, m, \end{cases} \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,$$

тогда

$$x^{(\ell)} \preceq^1 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \in D.$$

Утверждение вытекает из теоремы 5 с $\beta_\ell = 1$ и $\beta_i = 0$ при $i \ne \ell$.

Следствие 3. *Если* $x \preceq^1 y$ *на* D, *тогда*

$$x \preceq^1 x + \tau(y - x) \in D \qquad \text{при всех} \qquad \tau > 0.$$

Доказательство. Действительно, из следствия 2 при $m = 2$, $\ell = 1$ и $\alpha_1 = 1 - \tau < 1$, $\alpha_2 = \tau > 0$ получаем

$$x \preceq^1 (1 - \tau)x + \tau y = x + \tau(y - x) \in D.$$

Что и требовалось доказать. □

Автор благодарен В. Солеву за полезные консультации.

Литература

1. Sherman S. A theorem on convex sets with applications. *Ann. Math. Statist.* **26**, 763–767 (1955).
2. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* 2nd ed. New York, Springer-Verlag (2011).
3. Proschan F. Peakedness of distributions of convex combinations. *Ann. Math. Stat.* **36**, 1703–1706 (1965).
4. Olkin I., Tong Y. L. Peakedness in multivariate distributions. In: Gupta S. S., Berger J. O. (eds). *Statistical Decision Theory and Related Topics, IV.* Vol. 2, 373–383. New York, Springer-Verlag (1988).
5. An M. Y. *Log-Concave Probability Distributions: Theory and Statistical Testing.* Duke University Dept of Economics. Working Paper no. 95–03 (1995). http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1933
6. Eaton M. L., Perlman M. D. Reflection groups, generalized Schur functions and the geometry of majorization. *Ann. Probab.* **5**, 829–860 (1977).
7. Eaton M. L. Concentration inequalities for Gauss — Markov estimators. *J. Multivariate Anal.* **25**, 119–138 (1988).
8. Ревяков М. И. Schur-выпуклые функции 2-го порядка в R^n. *Алгебра и анализ* **31** (5), 184–205 (2019).

Статья поступила в редакцию 6 февраля 2022 г.;
доработана 28 февраля 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Ревяков Михаил Ильич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; revyakov.m@gmail.com

Probability of hitting a random vector in a polyhedral cone: Majorization aspect

M. I. Revyakov

St Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute,
27, nab. r. Fontanki, St Petersburg, 191023, Russian Federation

For citation: Revyakov M. I. Probability of hitting a random vector in a polyhedral cone: Majorization aspect. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 506–516. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.311 (In Russian)

The article presents conditions under which the probability of a linear combination of random vectors falling into a polyhedral cone is a *Schur*-concave function of the coefficients of the combination. It is required that the cone contains the point **0**, its edges are parallel to the coordinate axes, and the distribution density of vectors is a logarithmically concave sign-invariant function.

Keywords: rectangular cone, sign-invariant density, logarithmic concavity, G-majorization, preorder within majorization.

References

1. Sherman S. A theorem on convex sets with applications. *Ann. Math. Statist.* **26**, 763–767 (1955).
2. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* 2nd ed. New York, Springer-Verlag (2011).
3. Proschan F. Peakedness of distributions of convex combinations. *Ann. Math. Stat.* **36**, 1703–1706 (1965).
4. Olkin I., Tong Y. L. Peakedness in multivariate distributions. In: Gupta S. S., Berger J. O. (eds). *Statistical Decision Theory and Related Topics, IV*. Vol. 2, 373–383. New York, Springer-Verlag (1988).
5. An M. Yu. *Log-Concave Probability Distributions: Theory and Statistical Testing.* Duke University Dept of Economics. Working Paper no. 95–03 (1995). http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1933
6. Eaton M. L., Perlman M. D. Reflection groups, generalized Schur functions and the geometry of majorization. *Ann. Probab.* **5**, 829–860 (1977).
7. Eaton M. L. Concentration inequalities for Gauss — Markov estimators. *J. Multivariate Anal.* **25**, 119–138 (1988).
8. Revyakov M. I. Schur-convex functions of the 2nd order on R^n. *Algebra i Analiz* **31** (5), 184–205 (2019). (In Russian) [Eng. transl.: *St Petersburg Math. J.* **31** (5), 887–902 (2020). https://doi.org/10.1090/spmj/1627].

Received: February 6, 2022
Revised: February 28, 2022
Accepted: March 3, 2022

Author's information:

Mikhail I. Revyakov — revyakov.m@gmail.com