УДК 517.925.42 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3
MSC 34D10

Об устойчивости нулевого решения периодического обратимого дифференциального уравнения второго порядка

Ю. Н. Бибиков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Бибиков Ю. Н.* Об устойчивости нулевого решения периодического обратимого дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 474–479. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.308

Изучается вопрос об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения второго порядка, описывающего периодические возмущения осциллятора с нелинейной восстанавливающей силой. В данной работе изучаются периодические по времени возмущения в предположении, что правая часть уравнения не изменяется при замене времени на противоположное (по знаку). Как известно, для решения вопроса об устойчивости таких возмущений необходимо учитывать все члены разложения правой части уравнения в ряд. Такие случаи Ляпунов называл трансцендентными в отличие от алгебраических, где достаточно учитывать лишь конечное число членов разложения правой части уравнения. Задача решается методами КАМ-теории, согласно которой в любой окрестности положения равновесия в начале координат фазовой плоскости существуют периодические по времени инвариантные двумерные торы, разделяющие трехмерное конфигурационное пространство. Эти торы рассматриваются как двумерные периодические инвариантные поверхности, охватывающие временну́ю ось, откуда вытекает устойчивость (неасимптотическая) нулевого решения. Решаемая задача характерна тем, что невозмущенная часть уравнения содержит диссипативный член (слагаемое, зависящее от скорости) и имеет тот же порядок малости, что и восстанавливающая сила. Установлено, что при достаточной малости диссипативной части возмущения невозмущенное движение устойчиво по Ляпунову.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, периодические возмущения, осциллятор, обратимость, трансцендентность, устойчивость.

1. Введение. Рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения второго порядка, которое описывает периодические возмущения осциллятора с нелинейной восстанавливающей силой. Автономные возмущения таких осцилляторов исследовал еще А. М. Ляпунов. Методы, которые применялись в автономном случае, в трансцендентном случае не работают, поэтому у А. М. Ляпунова он остался неисследованным. В данной работе изучается трансцендентный по Ляпунову случай, когда вопрос об устойчивости решается рассмотрением всех членов разложения в ряды с периодическими коэффициентами. Этот случай имеет место для так называемых обратимых дифференциальных уравнений, т. е. для уравнений, не изменяющихся при замене времени на противоположное значение.

Задача решается методами КАМ-теории (см., например, [1]), точнее с помощью модификации КАМ-теории, предложенной в монографии [2]. Согласно этой теории, в любой окрестности положения равновесия в начале координат фазовой плоскости существуют периодические по времени инвариантные двумерные торы, разделяющие трехмерное конфигурационное пространство, если эти торы рассматривать как двумерные периодические инвариантные поверхности, охватывающие временну́ю ось. Отсюда и вытекает устойчивость (неасимптотическая) нулевого решения.

Особенностью решаемой задачи является то, что невозмущенная часть уравнения содержит диссипативный член, т. е. слагаемое, зависящее от скорости и имеющее тот же порядок малости, что и восстанавливающая сила.

Показано, что если неконсервативная часть возмущения достаточно мала, то невозмущенное движение устойчиво по Ляпунову.

2. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^{2n-1} + b(t)\, x^{n-1}\dot{x} = X(x, \dot{x}, t), \tag{1}$$

где $n \geq 2$ — целое, $X(x, \dot{x}, t)$ — сходящийся в некоторой окрестности точки $x = 0$, $\dot{x} = 0$ ряд по степеням x, $\dot{x}$ с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами, $b(t)$ — непрерывная 2π-периодическая функция. Если переменной x приписать первое измерение, а переменной $y = \dot{x}$ — измерение n, то разложение X не должно содержать членов порядка ниже $2n$.

Заметим, что одночлен $x^{n-1}\dot{x}$ имеет, как и восстанавливающая сила x^{2n-1}, порядок $2n - 1$.

Мы рассматриваем случай, когда уравнение (1) не изменяется при замене t на $-t$, т. е. когда справедливо соотношение

$$X(x, -y, -t) = X(x, y, t), \tag{2}$$

а $b(t)$ — нечетная функция.

Кроме того, предположим, что

$$b^2(t) < 4n. \tag{3}$$

Рассматривается вопрос об устойчивости по Ляпунову нулевого решения

$$x(t) = \dot{x}(t) = 0.$$

Постановка задачи восходит к работе А. М. Ляпунова [3], который в более общем контексте рассмотрел случай, когда функция X так же, как и $b(t)$, не зависит от t (без условия обратимости (2)).

При исследовании использовалась модификация КАМ-теории, описанная в монографии [2].

3. Предварительные преобразования. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^{2n-1} - b(t)\, x^{n-1}y + X(x, y, t), \end{cases} \tag{4}$$

соответствующую уравнению (1). В этой системе сделаем замену:

$$x = r\, Cs(\varphi), \quad y = -r^n Sn(\varphi), \quad r > 0, \tag{5}$$

где $Cs(\varphi)$, $Sn(\varphi)$ — введенные А. М. Ляпуновым в работе [3] функции. Свойства этих функций описаны в [3], в частности $Cs(\varphi)$ — четная функция, $Sn(\varphi)$ — нечетная, и справедливы соотношения

$$Cs'(\varphi) = -Sn(\varphi), \quad Sn'(\varphi) = Cs^{2n-1}(\varphi), \quad Cs(0) = 1, \quad Sn(0) = 0. \tag{6}$$

При $n = 1$ ляпуновские функции превращаются в обычные функции $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Основное тригонометрическое тождество принимает вид

$$Cs^{2n}(\varphi) + n\, Sn^2(\varphi) = 1. \tag{7}$$

Координаты r, φ можно рассматривать как обобщение полярных координат. Замена (5) приводит систему (4) к виду

$$\begin{cases} \dot r = \alpha(\varphi, t)\, r^n + R(r, \varphi, t), \\ \dot\varphi = \beta(\varphi, t)\, r^{n-1} + \Phi(r, \varphi, t), \end{cases} \tag{8}$$

в которой

$$\alpha = b(t) Sn^2(\varphi) Cs^{n-1}(\varphi), \quad \beta = 1 + b(t) Sn(\varphi) Cs^n(\varphi),$$
$$R = \frac{1}{r^{n-1}} X(rCs(\varphi), -r^n Sn(\varphi), t) Sn(\varphi),$$
$$\Phi = \frac{1}{r^n} X(rCs(\varphi), -r^n Sn(\varphi), t) Cs(\varphi).$$

Полученное при этом разложение $R(r, \varphi, t)$ по степеням r не содержит членов порядка меньше $n + 1$, а разложение $\Phi(r, \varphi, t)$ — членов порядка меньше n.

Из условия (3) следует, что $\beta(\varphi, t) > 0$.

В системе (8) сделаем замену

$$r = \rho + q(\varphi, t)\, \rho^n. \tag{9}$$

Очевидно, что после этой замены уравнение для $\dot\varphi$ будет обладать теми же свойствами, что и в системе (8). Рассмотрим $\dot\rho$. Дифференцируя равенство (9) по t, получим

$$\alpha\rho^n(1 + q\rho^{n-1})^n + R(\rho + q\rho^n, \varphi, t) = \dot\rho + n\rho^{n-1}\dot\rho q + \\ + \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} \left(\beta(\rho + q\rho^n)^{n-1} + \Phi \right) + \frac{\partial q}{\partial t} \right) \rho^n.$$

Отсюда имеем

$$\dot\rho(1 + n\rho^{n-1} q) = \left(\alpha - \frac{\partial q}{\partial t} \right) \rho^n + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены, порядок которых по ρ не ниже $n + 1$.

Положим $q(\varphi, t) = \int\limits_0^t \alpha(\varphi, s) ds$. Мы приходим к системе вида

$$\begin{cases} \dot\rho = \mathrm{P}(\rho, \varphi, t), \\ \dot\varphi = \beta(\varphi, t)\rho^{n-1} + \Phi(\rho, \varphi, t), \end{cases} \tag{10}$$

где $\mathrm{P} = O(\rho^{n+1})$, $\Phi = O(\rho^n)$ при $\rho \to 0$.

4. Квазипериодические решения. Положим $\varepsilon = \max|b^2(t)|$. В силу (3) имеем $\varepsilon < 4n$. Представим $b(t)$ в виде $b = \sqrt{\varepsilon}\, d(t,\varepsilon)$, где $|d| \leq 1$. Будем рассматривать ε как малый положительный параметр.

Запишем систему (10) в виде

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \mathrm{P}(\rho,\varphi,t), \\ \dot{\varphi} = \rho^{n-1}\Big(1+\sqrt{\varepsilon}\gamma(\varphi,t,\varepsilon)\Big) + \Phi(\rho,\varphi,t), \end{cases} \tag{11}$$

где $\gamma = d(t,\varepsilon)Sn(\varphi)Cs^n(\varphi)$, γ — ограниченная функция.

Выполним в системе (11) замену

$$\rho = \varepsilon\left(c^{\frac{1}{n-1}} + \sqrt{\varepsilon}z\right), \quad \frac{1}{2} \leq c^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{3}{2}. \tag{12}$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon^{n-\frac{1}{2}} Z(z,\varphi,t,\varepsilon), \\ \dot{\varphi} = \varepsilon^{n-1}\left(c^{\frac{1}{n-1}} + \sqrt{\varepsilon}z\right)^{n-1}\left(1+\sqrt{\varepsilon}\gamma(\varphi,t,\varepsilon)\right) + \varepsilon^n\Psi(z,\varphi,t,\varepsilon), \end{cases} \tag{13}$$

второе уравнение которой имеет вид

$$\dot{\varphi} = \varepsilon^{n-1}c + O(\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}), \tag{14}$$

в (13) Z и Ψ — ограниченные функции.

В монографии [2, гл. 1, § 3; гл. 2, § 6; гл. 3, § 3] показано, что если постоянная ω удовлетворяет условию

$$|q\omega + p| > K\varepsilon^{n-1}q^{-2}, \quad p \text{ и } q \text{ — целые, } q \neq 0, \quad K > 0, \tag{15}$$

то система (13) обладает квазипериодическим решением вида

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega t + \varphi_0 + u(\omega t + \varphi_0, t, \sqrt{\varepsilon}, c), \\ z &= v(\omega t + \varphi_0, t, \sqrt{\varepsilon}, c), \end{aligned}$$

u, v — периодические по первому аргументу функции с периодом, равным периоду функций $Cs(\varphi)$, $Sn(\varphi)$, а параметр c определяется частотой ω в формуле (15).

Важно отметить, что такое решение существует в любой окрестности точки $\rho = 0$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что если $\varepsilon < \varepsilon_0$, $b^2(t) \leq \varepsilon$ и функция $X(x,y,t)$ удовлетворяет условиям, описанным в разделе* 1, *то нулевое решение уравнения* (1) *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Действительно, каждому ω, удовлетворяющему условию (15), соответствует $c = \tilde{c}(\omega,\varepsilon)$ в подстановке (12). Тогда формула

$$\rho = \varepsilon\left(\tilde{c}^{\frac{1}{n-1}} + \sqrt{\varepsilon}v(\varphi,t,\sqrt{\varepsilon},c)\right)$$

определяет инвариантную двумерную поверхность в трехмерном пространстве с циклическими координатами ρ, φ, t. Эта поверхность разделяет пространство на две области: область, содержащую ось t, и область, не содержащую ось t.

Поэтому траектория с достаточно малым начальным значением ρ_0 при возрастании t (как и при его убывании) останется в сколь угодно малой окрестности оси t, а это и означает, что решение $\rho = 0$ устойчиво по Ляпунову, что в свою очередь эквивалентно устойчивости нулевого решения уравнения (1).

При $b(t) = 0$ эта теорема была опубликована в работе [4] (см. также [2, с. 92–93]) в более общем контексте. В работах [5–7] был исследован алгебраический случай.

Таким образом, настоящая работа является заключительной в цикле работ, посвященных исследованию периодических и квазипериодических возмущений осциллятора $\ddot{x} + x^{2n-1} = 0$, $n \geq 2$.

Литература

1. Мозер Ю. К. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды. *УМН* **24**, вып. 2 (146), 165–211 (1969).
2. Бибиков Ю. Н. *Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1991).
3. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. В: *Собрание сочинений.* Т. 2, 272–331. Москва, Ленинград, Изд-во АН СССР (1956).
4. Бибиков Ю. Н. Применение теоремы Мозера к исследованию дифференциальных уравнений нелинейных колебаний. *ДАН СССР* **225** (6), 1241–1244 (1975).
5. Басов В. В., Бибиков Ю. Н. Об устойчивости положения равновесия в одном случае периодического возмущения центра. *Дифференц. уравнения* **33** (5), 583–586 (1997).
6. Бибиков Ю. Н., Савельева А. Г. Периодические возмущения неконсервативного центра. *Дифференц. уравнения* **54** (3), 302–306 (2018). https://doi.org/10.1134/S0374064118030032
7. Басов В. В., Бибиков Ю. Н. Об устойчивости нелинейного центра при квазипериодических возмущениях. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7 (65)**, вып. 2, 269–276 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.209

Статья поступила в редакцию 11 февраля 2022 г.;
доработана 3 марта 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Бибиков Юрий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; bibicoff@yandex.ru

On the stability of the zero solution of a periodic reversible second-order differential equation

Yu. N. Bibikov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Bibikov Yu. N. On the stability of the zero solution of a periodic reversible second-order differential equation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 474–479. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.308 (In Russian)

The problem of the stability of the zero solution of the second-order differential equation describing the periodic perturbations of an oscillator with a nonlinear reducing force is studied. The problem in the autonomous case was solved by A. M. Lyapunov. The so called transcendental case when all members of the decomposition of the right part of the differential equation into series are to be taken into account, is considered. This case takes place for reversible differential equations, i. e. equations that do not change when time is replaced by the opposite value. The problem is solved by the methods of the KAM theory, according to which in any neighborhood of the equilibrium position at the origin of the phase plane there are periodic invariant two-dimensional tori that separate the three-dimensional configuration space. These tori are considered as two-dimensional periodic invariant surfaces covering the time axis from where the stability (non-asymptotic) of the zero solution followed. The problem to be solved is characterized by the fact that the unperturbed part of the equation contains a dissipative term (a term dependent on velocity) which has the same order of smallness as the restoring force. It is established that if a dissipative part of the perturbation is small enough then the unperturbed movement is stable according to Lyapunov.

Keywords: second-order differential equations, periodic perturbations, oscillator, reversibility, transcendence, stability.

References

1. Moser J. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Math. Ann.* **169**, 136–176 (1967). https://doi.org/10.1007/BF01399536 [Rus. ed.: *Uspekhi Mat. Nauk* **24**, iss. 2 (146), 165–211 (1969)].

2. Bibikov Yu. N. *Multifrequency nonlinear oscillations and their bifurcations.* Leningrad, Leningrad University Press (1991). (In Russian)

3. Lyapunov A. M. Investigation of one particular case of the problem of stability of motion. In: *Collected works.* Vol. 2, 272–331. Moscow, Leningrad, Izdatel'stvo AN SSSR (1956). (In Russian)

4. Bibikov Yu. N. Application of Moser's theorem to the study of differential equations of nonlinear oscillations. *Dokl. AN SSSR* **225** (6), 1241–1244 (1975). (In Russian)

5. Basov V. V., Bibikov Yu. N. On the stability of the equilibrium position in one case of periodic perturbation of the center. *Differ. Uravn.* **33** (5), 583–586 (1997). (In Russian) [Eng. transl.: *Differ. Equ.* **33** (5), 587–590 (1997)].

6. Bibikov Yu. N., Savelyeva A. G. Periodic disturbances of the non-conservative center. *Differ. Uravn.* **54** (3), 302–306 (2018). https://doi.org/10.1134/S0374064118030032 (In Russian) [Eng. transl.: *Differ. Equ.* **54** (3), 295–299 (2018). https://doi.org/10.1134/S0012266118030023].

7. Basov V. V., Bibikov Yu. N. On the stability of "nonlinear center" under quasiperiodic perturbations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7 (65)**, iss. 2, 269–276 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.209 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersb. Univ. Math.* **53**, 174–179 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120020041].

Received: February 11, 2022
Revised: March 3, 2022
Accepted: March 3, 2022

Author's information:

Yuri N. Bibikov — bibicoff@yandex.ru