2022 ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Т. 9 (67). Вып. 3
МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2
MSC 60F99

Обобщение задачи об эгоистичной парковке

С. М. Ананьевский, А. П. Чен

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ананьевский С. М., Чен А. П.* Обобщение задачи об эгоистичной парковке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 464–473. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.307

Работа посвящена исследованию новой модели случайного заполнения отрезка большой длины интервалами меньшей длины. Рассмотрены две новые постановки задачи. В первом случае рассматривается модель, в которой единичные интервалы размещаются на отрезке таким образом, что при каждом последующем размещении интервала слева и справа должно оставаться свободное пространство длиной не менее фиксированного размера. Вторая модель такова, что интервалы длины 2 расположены случайным образом и никакие два интервала не должны быть соседними. В обоих случаях исследуется поведение среднего числа найденных интервалов в зависимости от длины заполненного отрезка.

Ключевые слова: случайное заполнение, задача о парковке, асимптотическое поведение.

1. Введение. Впервые задача случайного заполнения отрезка была представлена в работе Реньи [1]. На отрезке $[0, x]$ для некоторого фиксированного $x > 1$ случайным образом размещается интервал $(t, t+1)$, тем самым разбивая изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+1, x]$. Если какой-либо из них имеет длину меньше единицы, он исключается из дальнейшего рассмотрения. Остальные продолжают заполняться по вышеописанному правилу. Выражение «случайным образом» означает, что t является равномерно распределенной на $[0, x-1]$ случайной величиной, которая не зависит от других аналогичных случайных величин. Данный процесс заканчивается в тот момент, когда не остается отрезков длины хотя бы 1. Затем подсчитывается суммарное количество размещенных на изначальном отрезке интервалов, которое обозначается через N_x. Для $0 \leqslant x < 1$ значение N_x принимается равным нулю.

В работе Реньи [1] было показано, что при любом $n \geqslant 1$

$$E\{N_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + o(x^{-n}) \qquad (x \to +\infty). \tag{1}$$

Для константы λ было получено следующее выражение:

$$\lambda = \int\limits_0^\infty e^{-2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt. \tag{2}$$

В работе [2], которая была посвящена дискретной задаче об эгоистичной парковке для математического ожидания числа разместившихся единичных интервалов, было установлено, что

$$EX_n = \frac{2n-1}{3} \text{ при } n \geq 2 \text{ и } EX_n = 0 \text{ при } n < 2. \tag{3}$$

Другим моделям задачи о парковке посвящены работы [3–7].

В настоящей работе будут рассмотрены две новые модели задачи о парковке.

2. Модель I. Пусть n и k — целые неотрицательные числа, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. На отрезок $[0, n]$ помещаем случайным образом единичный интервал по следующему правилу. Если $n \leq k$, то будем говорить, что единичный интервал не размещается, и отрезок $[0, n]$ остается незаполненным. В противном случае помещаем интервал $(i, i+1)$ на отрезок $[0, n]$, где i — случайная величина, принимающая значения $0, 1, \ldots, n-1$ с равной вероятностью так, чтобы справа или слева от интервала было свободное место размером не менее k. После размещения первого интервала образуются два незанятых отрезка: $[0, i]$ и $[i+1, n]$, которые в свою очередь заполняются независимо друг от друга по такому же правилу. Когда длины всех незанятых отрезков станут не больше k, процесс заполнения отрезка прекращается. Пусть X_n — количество разместившихся единичных интервалов на отрезке $[0, n]$.

Теорема 1. *Для определенной выше случайной величины X_n справедливы равенства:*

$$EX_n = 0 \quad \text{для } 0 \leq n \leq k,$$

$$EX_n = H_{n-k} \quad \text{для } k < n \leq 2k, \tag{4}$$

$$EX_n = \frac{H_k + 1}{2k+1}(n+1) - 1 \quad \text{для } n > 2k, \tag{5}$$

где $H_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.

Доказательство. 1. Если $0 \leq n \leq k$, то по правилу заполнения $X_n = 0$ и $EX_n = 0$.

2. Если $k < n \leq 2k$, то по правилу заполнения левый конец размещаемого первого интервала не может принимать значения из $[n-k, k)$. Предположим, что первый интервал занял место $(i, i+1)$. Обозначим через $X_{n,i}$ число размещенных на отрезке $[0, n]$ единичных интервалов при условии, что левый конец первого интервала занял место i. Тогда справедливо равенство

$$X_{n,i} = X_i + X_{n-i-1} + 1. \tag{6}$$

Введем обозначение $E_n = EX_n$. Учитывая равенство (6) и то, что случайная величина i с равной вероятностью может принимать значения $0, 1, \ldots, n-k-1, k, k+1, \ldots, n-1$, получаем соотношение

$$E_n = \frac{1}{2(n-k)} \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} E_i + \sum_{i=k}^{n-1} E_i \right) + \frac{1}{2(n-k)} \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} E_{n-i-1} + \sum_{i=k}^{n-1} E_{n-i-1} \right) + 1 =$$

$$= \frac{1}{(n-k)} \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} E_i + \sum_{i=k}^{n-1} E_i \right) + 1.$$

Учитываем пункт 1, из которого следует, что $E_i = 0$ для всех $i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда получаем

$$E_n = \frac{1}{(n-k)} \sum_{i=k+1}^{n-1} E_i + 1. \tag{7}$$

Для решения этого уравнения введем еще одно обозначение:

$$S_n = \sum_{j=k+1}^{n} E_j. \tag{8}$$

Тогда будем иметь

$$E_n = S_n - S_{n-1}. \tag{9}$$

Учитывая (7), (8) и (9), получаем рекуррентное соотношение

$$S_n = \frac{n-k+1}{n-k} S_{n-1} + 1, \tag{10}$$

или

$$S_{n+1} = c_n S_n + 1, \tag{11}$$

где $c_n = \frac{n-k+2}{n-k+1}$. Таким образом, учитывая равенство $S_{k+1} = 1$, имеем

$$S_{n+1} = c_n S_n + 1 = c_n(c_{n-1} S_{n-1} + 1) + 1 = \ldots = c_n c_{n-1} \ldots c_{k+1} + c_n c_{n-1} \ldots c_k + \ldots + c_n + 1,$$

или, принимая во внимание, что $c_n = \frac{n-k+2}{n-k+1}$, можем записать

$$S_{n+1} = \sum_{i=k+1}^{n} \prod_{j=i}^{n} c_j + 1 = \sum_{i=k+1}^{n} \prod_{j=i}^{n} \frac{j-k+2}{j-k+1} + 1 =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n} \frac{n-k+2}{i-k+1} + 1 = (n-k+2) \sum_{i=2}^{n-k+1} \frac{1}{i} + 1.$$

Учитывая (7), получаем

$$E_n = \frac{1}{(n-k)} S_{n-1} + 1 = \sum_{i=2}^{n-k-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n-k} + 1 = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} = H_{n-k},$$

где H_{n-k} — частичная сумма первых $n-k$ членов гармонического ряда.

3. Пусть $n > 2k$. Учитывая равенство (6) и то, что i — случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, \ldots, n-1$, получаем равенство

$$E_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_i + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_{n-i-1} + 1 = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_i + 1.$$

Введем следующее обозначение: $c = \sum\limits_{i=0}^{2k} E_i$. Тогда верно равенство

$$E_n = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_i + 1 = \frac{2}{n}\left(c + \sum_{i=2k+1}^{n-1} E_i\right) + 1.$$

Пусть $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n} E_i$. Тогда $E_n = T_n - T_{n-1}$ и $T_{2k} = c$.

С другой стороны, учитывая равенство

$$E_n = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_i + 1 = \frac{2}{n}T_{n-1} + 1,$$

получаем

$$T_n = \frac{n+2}{n}T_{n-1} + 1$$

или

$$T_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}T_n + 1.$$

Если введем обозначение $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ и учтем равенство $T_{2k} = c$, получим

$$\begin{aligned}T_{n+1} = a_nT_n + 1 = a_n(a_{n-1}T_{n-1} + 1) + 1 = a_n(a_{n-1}(a_{n-2}T_{n-2} + 1) + 1) + 1 = \ldots = \\ = a_n(a_{n-1}(a_{n-2}(\ldots a_{2k+1}(a_{2k}T_{2k} + 1) + 1)\ldots) + 1 = \\ = a_na_{n-1}\ldots a_{2k}c + a_na_{n-1}\ldots a_{2k+1} + \ldots + a_n + 1.\end{aligned}$$

Если введем обозначение $p_n = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i$, то получим

$$T_{n+1} = c\frac{p_n}{p_{2k-1}} + \frac{p_n}{p_{2k}} + \ldots + \frac{p_n}{p_n} = c\frac{p_n}{p_{2k-1}} + \sum_{i=2k}^{n}\frac{p_n}{p_i}.$$

Используя последнее равенство, имеем

$$E_n = T_n - T_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{p_{n-1}} + \sum_{i=2k}^{n-2}\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_i} + c\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_{2k-1}}.$$

Заметим, что

$$p_n = \prod_{i=1}^{n}\frac{i+3}{i+1} = \frac{(n+3)(n+2)}{6}.$$

Поэтому

$$p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{(n+2)(n+1)}{6} - \frac{(n+1)n}{6} = \frac{n+1}{3}.$$

Таким образом, из последних равенств следует

$$E_n = 1 + \sum_{i=2k}^{n-2} \frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_i} + c\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_{2k-1}} = 1 + \frac{n+1}{3} \sum_{i=2k}^{n-2} \frac{1}{p_i} + c\frac{n+1}{3}\frac{1}{p_{2k-1}} =$$

$$= 1 + \frac{(n+1)}{3} \sum_{i=2k}^{n-2} \frac{6}{(i+3)(i+2)} + c\frac{n+1}{3}\frac{6}{(2k+2)(2k+1)} =$$

$$= 1 + 2(n+1) \sum_{i=2k}^{n-1} \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+3}\right) + c\frac{n+1}{(k+1)(2k+1)} =$$

$$= 1+2(n+1)\left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{n+1}\right)+c\frac{n+1}{(k+1)(2k+1)} = 1+\frac{n+1}{k+1}-2+c\frac{n+1}{(k+1)(2k+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)(2k+1) + c(n+1)}{(k+1)(2k+1)} - 1 = \frac{2k+1+c}{(k+1)(2k+1)}(n+1) - 1.$$

Найдем константу c, вспомнив результат пункта 2:

$$c = \sum_{i=0}^{2k} E_i = S_{2k} = (k+1)H_k - k,$$

где $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Итак, для всех $n > 2k$ получено выражение для E_n:

$$E_n = \frac{k+1+(k+1)H_k}{(k+1)(2k+1)}(n+1) - 1 = \frac{H_k+1}{2k+1}(n+1) - 1.$$

На этом теорема полностью доказана. □

Замечание. При $k = 1$ наша задача является задачей об эгоистичной парковке, рассмотренной в работе [2], и в этом случае мы получаем $E_n = \frac{2n-1}{3}$. При $k = 2$ имеем $E_n = \frac{n-1}{2}$; при $k = 3$ — $E_n = \frac{17n-25}{42}$; при $k = 4$ — $E_n = \frac{37n-70}{108}$.

3. Модель II. Пусть n — целое неотрицательное число. Процесс заполнения отрезка $[0, n]$ интервалами длины 2 происходит по следующему правилу. Если $n < 4$, то говорим, что интервал не размещается. В противном случае помещаем на отрезок $[0, n]$ интервал $(i, i + 2)$, где i — случайная величина, принимающая значения $1, 2, \ldots, n - 3$ с равной вероятностью (левый и правый концы размещаемого интервала должны быть на расстоянии не меньше 1 от границ заполняемого отрезка). После размещения первого интервала получаем два отрезка: $[0, i]$ и $[i+2, n]$, которые в дальнейшем заполняются интервалами длины 2 по такому же правилу независимо друг от друга. Когда длины всех незаполненных отрезков станут меньше 4, процесс заполнения заканчивается и подсчитывается общее количество разместившихся интервалов, которое обозначим через Y_n.

Теорема 2. *Для случайной величины* Y_n *справедливо соотношение*

$$\frac{EY_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda, \tag{12}$$

где $\lambda = e^{-3} \int\limits_0^1 e^{t^2+2t} dt \approx 0.274551.$

Доказательство. Предположим, что первый интервал занял место $(i, i+2)$, где $i = 1, 2, \ldots, n-3$, и обозначим через $Y_{n,i}$ число разместившихся интервалов на отрезке $[0, n]$ при условии, что левый конец первого интервала занял место i. При этом количества разместившихся интервалов на отрезках $[0, i]$ и $[i+2, n]$ равны соответственно Y_i и Y_{n-i-2}. Тогда выполняется равенство

$$Y_{n,i} = Y_i + Y_{n-i-2} + 1.$$

Введем обозначение $E_n = EY_n$. Учитывая, что i — случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $1, 2, \ldots, n-3$, получаем рекуррентное соотношение

$$E_n = \frac{1}{n-3}\sum_{k=1}^{n-3} E_k + \frac{1}{n-3}\sum_{k=1}^{n-3} E_{n-k-2} + 1 = \frac{2}{n-3}\sum_{k=1}^{n-3} E_k + 1 \qquad (13)$$

с начальными данными

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0, \qquad E_4 = E_5 = E_6 = 1, \qquad E_7 = \frac{3}{2}.$$

Введем обозначение $Z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} E_k$. Тогда верно

$$E_n = Z_n - Z_{n-1}. \qquad (14)$$

Перепишем в новых обозначениях уравнение (13) и начальные данные:

$$Z_n - Z_{n-1} = \frac{2}{n-3} Z_{n-3} + 1,$$

$$Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0, \qquad Z_4 = 1.$$

Умножаем полученное уравнение на $(n-3)$ и получаем

$$(n-3)Z_n - (n-3)Z_{n-1} - 2Z_{n-3} - (n-3) = 0.$$

Далее умножим на t^n и просуммируем от 3 до ∞:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)Z_n t^n - \sum_{n=3}^{\infty}(n-3)Z_{n-1}t^n - 2\sum_{n=3}^{\infty} Z_{n-3}t^n - \sum_{n=3}^{\infty}(n-3)t^n = 0. \qquad (15)$$

Пусть $P(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n t^n$ — производящая функция последовательности Z_n. Тогда

$$P'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n Z_n t^{n-1}.$$

Преобразуем первое слагаемое уравнения (15), учитывая, что $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)Z_n t^n = \sum_{n=3}^{\infty} n Z_n t^n - 3\sum_{n=3}^{\infty} Z_n t^n = t\sum_{n=0}^{\infty} n Z_n t^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} Z_n t^n = tP'(t) - 3P(t).$$

Аналогично преобразуем остальные слагаемые:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)Z_{n-1}t^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)Z_{n-1}t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty}Z_{n-1}t^n = t^2P'(t) - 2tP(t),$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}Z_{n-3}t^n = t^3P(t),$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)t^n = \sum_{n=3}^{\infty}nt^n - 3\sum_{n=3}^{\infty}t^n = t\left(\sum_{n=3}^{\infty}t^n\right)' - \frac{3t^3}{1-t} =$$

$$= t\left(\frac{t^3}{1-t}\right)' - \frac{3t^3}{1-t} = t\left(\frac{3t^2}{1-t} + \frac{t^3}{(1-t)^2}\right) - \frac{3t^3}{1-t} = \frac{3t^3}{1-t} + \frac{t^4}{(1-t)^2} - \frac{3t^3}{1-t} = \frac{t^4}{(1-t)^2}.$$

Таким образом, уравнение (15) преобразуется в следующее:

$$P'(t)(t-t^2) + P(t)(-2t^3+2t-3) - \frac{t^4}{(1-t)^2} = 0. \tag{16}$$

Полученное уравнение (16) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка для производящей функции $P(t)$. Для нахождения его решения рассмотрим сначала следующее однородное уравнение:

$$R'(t)(t-t^2) + R(t)(-2t^3+2t-3) = 0.$$

Имеем

$$(\ln R(t))' = \frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{2t^3-2t+3}{t-t^2} = -2t-2+\frac{3}{t}+\frac{3}{1-t},$$

$$\ln R(t) = -t^2 - 2t + 3\ln t - 3\ln(1-t) + c_1, \quad c_1 \in \mathbf{R},$$

откуда следует

$$R(t) = \frac{c_2 t^3}{(1-t)^3}e^{-t^2-2t}, \quad c_2 \in \mathbf{R}, \quad c_2 > 0.$$

Вернемся к уравнению (15). Пусть $P(t) = R(t)T(t)$. Тогда, подставив наше выражение в (16) и учитывая, что $R(t)$ — решение однородного уравнения, получим

$$(t-t^2)R(t)T'(t) - \frac{t^4}{(1-t)^2} = 0,$$

$$T'(t) = \frac{t^3}{(1-t)^3}\cdot\frac{1}{R(t)} = c_2 e^{t^2+2t},$$

$$T(t) = c_2\int_0^t e^{\tau^2+2\tau}d\tau + c_3, \quad c_3 \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, можем записать общее решение уравнения (16):

$$P(t) = R(t)T(t) = \frac{t^3}{(1-t)^3}e^{-t^2-2t}\left(c_3 + \int_0^t e^{\tau^2+2\tau}d\tau\right).$$

Вспоминая, что $P(t)$ — производящая функция Z_n и $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$, имеем

$$\frac{P(t)}{t^3}\Big|_{t=0} = Z_3 = 0.$$

Отсюда получаем, что $c_3 = 0$ и

$$P(t) = \frac{t^3}{(1-t)^3} e^{-t^2-2t} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau.$$

Вернемся к равенству (14). Умножим обе части этого равенства на t^n и просуммируем от 1 до ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n-1} t^n.$$

Если $Q(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n t^n$ — производящая функция последовательности E_n, то

$$Q(t) = P(t) - tP(t) = (1-t)P(t) = \frac{t^3}{(1-t)^2} e^{-t^2-2t} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau.$$

Положим $f(t) = t^2 e^{-t^2-2t} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau$, и пусть $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$.

Через λ обозначим значение $f(1) = e^{-3} \int\limits_0^1 e^{\tau^2+2\tau} d\tau$. Тогда

$$Q(t) = \frac{t}{(1-t)^2} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Из последнего равенства имеем

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} b_k (n-k) = \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) n - \sum_{k=0}^{n} b_k k.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} b_k = f(1) = \lambda.$$

Далее получаем

$$\sum_{k=0}^{n} b_k k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} b_k k = f'(1) = \frac{d}{dt} \left(t^2 e^{-(t^2+2t)} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau \right) \Big|_{t=1} =$$

$$= \left((2t - 2t^3 - 2t^2) e^{-(t^2-2t)} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau + t^2 \right) \Big|_{t=1} = 1 - 2\lambda.$$

Таким образом,

$$\frac{E_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \approx 0.274551,$$

что заканчивает доказательство теоремы 2. $\square$

Литература

1. Rényi A. On a one-dimensional problem concerning space-filling. *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

2. Ананьевский С. М., Крюков Н. А. Задача об эгоистичной парковке. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5 (63)**, вып. 4, 549–555 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402

3. Ананьевский С. М., Крюков Н. А. Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6 (64)**, вып. 3, 353–362 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301

4. Clay M. P., Simanyi N. J. Rényi's parking problem revisited. Mathematical theory. 29 Dec. 2014. ArXiv:1406.1781v1 [math.PR].

5. Gerin L. The Page-Rényi parking process. 28 Nov. 2014. ArXiv:1411.8002v1[math.PR].

6. Ананьевский С. М. Некоторые обобщения задачи о «парковке». *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3 (61)**, вып. 4, 525–532 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401

7. Ананьевский С. М. Задача парковки для отрезков различной длины. *Записки научн. семинаров ПОМИ РАН* **228**, 16–23 (1996).

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2022 г.;
доработана 2 марта 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Ананьевский Сергей Михайлович — доц.; ananjevskii@mail.ru
Чен Александр Петрович — студент; sasha.24chen@mail.ru

Generalization of the selfish parking problem

S. M. Ananjevskii, A. P. Chen

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ananjevskii S. M., Chen A. P. Generalization of the selfish parking problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 464–473. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.307 (In Russian)

The work is devoted to the study of a new model of random filling of a segment of large length with intervals of smaller length. Two new formulations of the problem are considered. In the first case, a model is considered in which unit intervals are placed on the segment in such a way that with each next placement of the interval next to the left or right, there should be a free space of length not less than a pre-fixed value. The second model is such that intervals of length 2 are randomly placed and no two intervals should be adjacent. In both cases, the behavior of the average number of located intervals depending on the length of the filled segment is investigated.

Keywords: random filling, parking problem, asymptotic behavior.

References

1. Rényi A. On a one-dimensional problem concerning space-filling. *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

2. Ananjevskii S. M., Kryukov N. A. The problem of selfish parking. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5 (63)**, iss. 4, 549–555 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersb. Univ. Math.* **51**, 322–326 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118040039].

3. Ananjevskii S. M., Kryukov N. A. On asymptotic normality in one generalization of the Renyi problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6 (64)**, iss. 3, 353–362 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersb. Univ. Math.* **52**, 227–233 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063454119030026].

4. Clay M. P., Simanyi N. J. Rényi's parking problem revisited. Mathematical theory. 29 Dec. 2014. ArXiv:1406.1781v1 [math.PR].

5. Gerin L. The Page-Rényi parking process. 28 Nov. 2014. ArXiv:1411.8002v1[math.PR].

6. Ananjevskii S. M. Generalizations of the parking problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3 (61)**, iss. 4, 525–532 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersb. Univ. Math.* **49**, 299–304 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116040026].

7. Ananjevskii S. M. The "parking" problem for segments of different length. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **228**, 16–23 (1996). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Mathematical Sciences* **93**, 259–264 (1999). https://doi.org/10.1007/BF02364808].

Received: February 13, 2022
Revised: March 2, 2022
Accepted: March 3, 2022

Authors' information:

Sergey M. Ananjevskii — ananjevskii@mail.ru
Alexander P. Chen — sasha.24chen@mail.ru