

К вопросу о несимметричных формах равновесия круглых пластин под действием нормального давления*

С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова, Б. Н. Семенов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Семенов Б. Н. К вопросу о несимметричных формах равновесия круглых пластин под действием нормального давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 417–425. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.303>

В работе представлены результаты исследования бифуркации осесимметричных форм равновесия круглых пластин при различных условиях закрепления внешнего края. Показано, что для случая скользящей заделки края аналитический, асимптотический и конечно-элементные подходы к решению дают близкие результаты. При шарнирном опирании края пластины переход в неосесимметричное состояние происходит при гораздо большей нагрузке и с образованием меньшего числа волн, чем для скользящей заделки. Трудности с получением численного решения на основе аналитического подхода, видимо, связаны с необходимостью более точного описания напряженно-деформированного докритического состояния пластины, чем дает в этом случае теория пологих оболочек.

Ключевые слова: круглая пластина, потеря устойчивости, конечно-элементное моделирование.

1. Введение. Вопрос о существовании несимметричных решений у симметрично нагруженной круглой пластины был впервые рассмотрен Д. Ю. Пановым и В. И. Феодосьевым в работе 1948 г. [1]. Задача решалась методом Галёркина, а принятая форма прогибов задавалась функциями с одним неизвестным параметром и недостаточно точно описывала большие осесимметричные прогибы пластины в докритическом состоянии. Поэтому результат получился существенно отличающимся от действительности. В работе 1971 г. Л. С. Чео, Е. Л. Рейса [2] для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной. Величина критической нагрузки, полученная в [2], для равномерно нагруженной нормальным давлением пластины существенно больше нагрузки, определенной Пановым и Феодосьевым [1]. Форма потери устойчивости также отличается: по краю пластины образуется 14 волн, а не 8, как в работе [1].

Надо отметить, что еще в 1961 г. Н. Ф. Морозов строго доказал существование несимметричного решения в этом случае [3], а единственность такого решения была доказана В. О. Пехоцки в [4].

*Работа выполнена с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Обсерватория экологической безопасности».

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

Задачи о потере осесимметричной формы равновесия круглых пластин под действием нормального давления и пологих сферических оболочек под действием внутреннего давления решал асимптотическими методами С. Д. Коман [5, 6]. В работах [7–9] рассматривались аналогичные задачи для неоднородных по радиальной координате пластин и оболочек. Получено, что при уменьшении жесткости пластины или сферического купола к краю потеря устойчивости происходит при меньшей нагрузке и с образованием большего числа волн. Методом конечных элементов в пакетах NASTRAN и ANSYS Г. А. Мануйловым, С. Б. Косицыным, М. М. Бегичевым [10–12] определены критические точки в задачах устойчивости круглых пластин под действием равномерной и сосредоточенной нагрузок. При этом рассматривались на границе условия скользящей жесткой заделки и шарнирного опирания.

Ниже рассматривается задача о потере устойчивости осесимметричного равновесия круглой пластины, находящейся под действием нормального давления при условиях скользящей заделки и шарнирного опирания. Задача решается аналитически, а также с использованием метода конечных элементов в пакете ANSYS.

2. Постановка и метод решения задачи. Разрешающая система уравнений деформации круглой изотропной пластины, нагруженной равномерно распределенным нормальным давлением, имеет вид

$$\Delta\Delta w = p + L(w, F), \quad \Delta\Delta F = -L(w, w)/2. \quad (1)$$

Здесь $w(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ — искомые безразмерные функции нормального прогиба и усилий, r, θ — полярные координаты, p — нормальное внешнее давление, Δ — оператор Лапласа, записанный в цилиндрических координатах, L — дифференциальный оператор $L(x, y) = x''(y'/r + \ddot{y}/r^2) + y''(x'/r + \ddot{x}/r^2) - 2(\dot{x}/r)'(\dot{y}/r)'$, $(\dot{})' = \partial(\dot{})/\partial r$, $(\dot{}) = \partial(\dot{})/\partial\theta$.

Безразмерные величины в (1) связаны с размерными следующими соотношениями:

$$r = \frac{\tilde{r}}{R}, \quad w = \beta \frac{\tilde{w}}{h}, \quad p = \beta^3 \frac{\tilde{p}R^4}{Eh^4}, \quad F = \beta^2 \frac{\tilde{F}}{Eh^3}, \quad \beta^2 = 12(1 - \nu^2),$$

где R, h — радиус и толщина пластины, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала пластины.

В данной работе рассматриваются два типа граничных условий:

1) скользящая заделка, т. е. защемление точек края без закрепления в радиальном направлении, при котором граничные условия принимают вид

$$w = w' = T_r = S = 0; \quad (2)$$

2) шарнирное опирание без закрепления точек края в радиальном направлении, которое описывается соотношениями

$$w = M_r = T_r = S = 0, \quad (3)$$

где T_r, S, M_r — тангенциальные усилия и изгибающий момент.

При малых значениях нагрузки система (1), дополненная необходимыми граничными условиями, имеет только симметричное решение. Для определения несимметричной формы потери устойчивости представим решение в виде $w(r, \theta) = w_0(r) +$

$w_n(r) \cos(n\theta)$, $F(r, \theta) = F_0(r) + F_n(r) \cos(n\theta)$, где $w_0(r)$, $F_0(r)$ определяют докритическое симметричное решение, а функции $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos(n\theta)$, $F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos(n\theta)$ описывают поведение пластины сразу после ее перехода в неосесимметричное состояние, n — число волн в окружном направлении, образовавшихся в результате бифуркации.

Докритическое состояние пластины описывается системой

$$\Theta_0'' + \frac{\Theta_0'}{r} - \frac{\Theta_0}{r^2} = \frac{pr}{2} + \frac{\Theta_0 \Phi_0}{r}, \quad \Phi_0'' + \frac{\Phi_0'}{r} - \frac{\Phi_0}{r^2} = -\frac{\Theta_0^2}{2r}, \quad (4)$$

где $\Theta_0 = \Theta_0(r) = w_0'(r)$ и $\Phi_0 = \Phi_0(r) = F_0'(r)$.

Граничные условия (2), дополненные условиями ограниченности решений в центре $w' = F' = 0$, в случае защемления точек края при свободном смещении в окружном направлении имеют вид

$$\Theta_0 = \Phi_0 = 0 \quad \text{при } r = 1 \text{ и } r = 0.$$

Для случая шарнирного опирания (3) граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} \Theta_0' + \nu \Theta_0 = \Phi_0 = 0 \quad \text{при } r = 1, \\ \Theta_0 = \Phi_0 = 0 \quad \text{при } r = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Разрешающую систему для несимметричных составляющих функций прогиба w_n и усилий F_n можно получить после подстановки выражений для $w(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ в систему (5) и ее линеаризации относительно малых функций $w_n(r)$, $F_n(r)$:

$$\begin{aligned} \Delta_n \Delta_n w_n &= \Theta_0' \left(\frac{F_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} F_n \right) - \Phi_0' \left(\frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) + \frac{w_n''}{r} \Phi_0 + \frac{F_n''}{r} \Theta_0, \\ \Delta_n \Delta_n F_n &= -\frac{w_n''}{r} \Theta_0 - \Theta_0' \left(\frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Delta_n = d^2/dr^2 + r^{-1}d/dr - n^2/r^2$.

Граничные условия (2) примут вид

$$\begin{aligned} w_n'(0) = F_n'(0) = w_n(1) = w_n'(1) = 0, \\ F_n'(1) - n^2 F_n(1) = F_n'(1) - F_n(1) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

а условия (3) перейдут в соотношения

$$\begin{aligned} w_n'(0) = F_n'(0) = w_n(1) = w_n''(1) + \nu w_n'(1) = 0, \\ F_n'(1) - n^2 F_n(1) = F_n'(1) - F_n(1) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Метод решения задачи изложен в работах [2, 9]. Сначала для заданных значений нагрузки p и волнового числа n решается симметричная задача, далее методом прогонки проверяется существование решения несимметричной задачи. Обозначим за p_n нагрузку, при которой для заданного числа волн в окружном направлении существуют отличные от нуля функции w_n , F_n . Тогда критическая нагрузка $p_{cr} = \min_n p_n$, т. е. наименьшее значение нагрузки p_n , при которой появляются волны в окружном направлении.

3. Докритическое напряженное состояние и расчет критического давления. Бифуркация симметрично нагруженной пластины в неосесимметричное состояние возможна при появлении сжимающих напряжений в окрестности края пластины [3]. Изменение интенсивности безразмерных окружных усилий $T_\theta(r)$ при различных значениях нагрузки показано на рис. 1. Видно, что при условии шарнирного опирания края зона сжимающих напряжений более узкая, чем в случае, когда имеет место скользящая заделка (2). Также важно отметить, что интенсивность сжимающих напряжений вблизи края при шарнирном опирании в 2–4 раза превышает значения напряжений при заземлении точек края. С ростом нагрузки ширина зоны сжимающих напряжений уменьшается и для случая шарнирного опирания, и при заземлении точек края пластины.

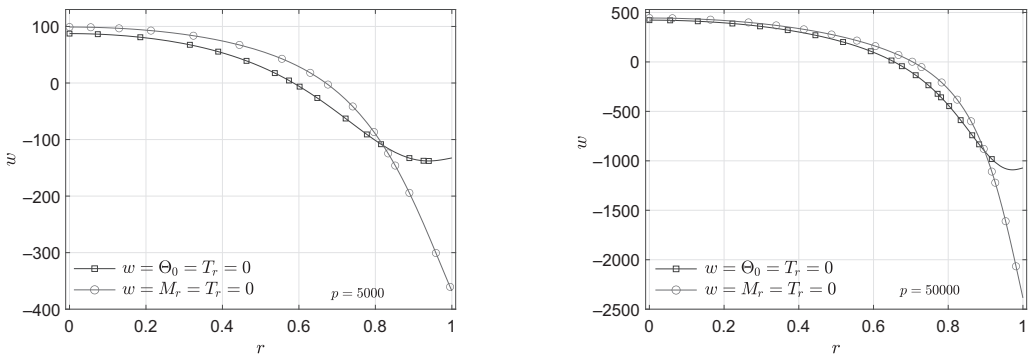


Рис. 1. Безразмерное окружное усилие $T_\theta(r)$ при различных граничных условиях: скользящая заделка (линия с квадратными маркерами); шарнирное опирание (линия с круглыми маркерами). Здесь $p = 5000$ (слева), $p = 50000$ (справа), $\nu = 0.3$.

Для однородной круглой пластины со свободно смещающимся в радиальном направлении краем критическая нагрузка и соответствующее ей волновое число были впервые получены Л. С. Чео, Е. Л. Рейсом [2]. В работах С. М. Бауэр, Е. Б. Воронковой, Н. Ф. Морозова [7–9] рассматривались неоднородные по радиусу круглые пластины под действием нормального давления и неоднородные пологие оболочки, загруженные внутренним давлением. Асимптотически задача о критическом давлении для однородной круглой пластины решалась в работах С. Д. Комана и соавторов [5, 6].

В работах авторов настоящей работы, как и в [2, 5, 6], получено, что пластина переходит в неосесимметричное состояние с образованием 14 волн по краю пластины, при этом безразмерная критическая нагрузка принимает значение $p_{cr} = 64\,956$, а безразмерный прогиб пластины — $w_{cr} = 46.53$. При значении коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ размерное значение прогиба при переходе в неосесимметричное состояние таково: $\tilde{w} \approx 14h$.

Как уже отмечалось, задача о потере устойчивости осесимметричного равновесия круглой пластиной решалась методом конечных элементов в пакетах NASTRAN и ANSYS в работе [10].

Для стальной пластины радиуса 50 см и толщины 0.5 см при закреплении края пластины по типу скользящей заделки бифуркация осесимметричного равновесия происходит с образованием 13 волн по краю пластины при значении прогиба $\tilde{w} =$

13.8*h*. Критическая нагрузка, найденная в [10], равна 3.57 МПа, что соответствует безразмерному значению 62 842.

Различие в форме потери устойчивости, полученное методом конечных элементов в работе [10] и численно и асимптотически в работах [2, 5–9], может быть объяснено тем, что значения нагрузки, отвечающие волновым числам $n = 13$ и $n = 15$, отличаются от значений для $n = 14$ на 0.7 и 1.8 % соответственно.

4. Конечно-элементное моделирование. Методом конечных элементов исследована устойчивость симметричной формы равновесия круглой пластины в пакете ANSYS. Как и в работе [10], рассматривалась круглая стальная пластина, радиус которой равен 50 см, а толщина 0.5 см. Принимается, что пластина лежит в плоскости $z = 0, 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 50$. Разбиение пластины на 5994 четырехугольных элемента типа SHELL281 представлено на рис. 2.

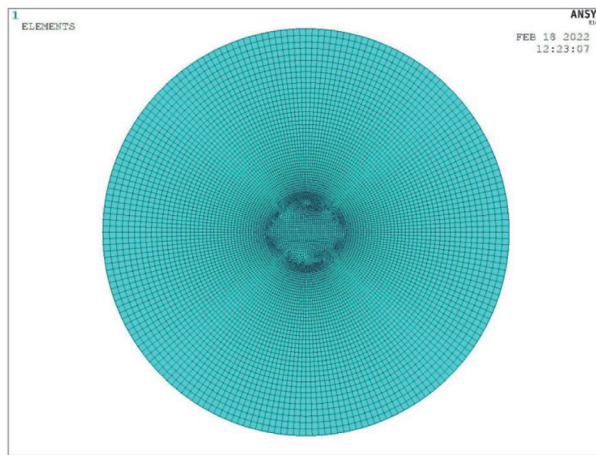


Рис. 2. Разбиение на конечные элементы.

На границе пластины $\sqrt{x^2 + y^2} = 50$ выполняются условия скользящей заделки или шарнирного опирания. При граничных условиях шарнирного опирания полагалось, что граничные точки при деформировании не могут выходить из плоскости $z = 0$, а момент в них равен нулю. Для исключения перемещений пластины как жесткого целого в плоскости $z = 0$ были наложены дополнительные ограничения на перемещения центра пластины и точки на границе пластины: полагалось, что при деформировании центр пластины (точка с координатами $x = 0, y = 0$) может перемещаться только вдоль оси z , а точка на границе пластины ($x = -50, y = 0$) — только вдоль оси x . Пластина нагружается равномерно распределенным по всей поверхности давлением.

Исследование нелинейной устойчивости проводится в соответствии с общепринятой процедурой, т. е. во всех внутренних узлах пластины случайным образом задаются незначительные несовершенства, заключающиеся в том, что узлы могут выходить из плоскости $z = 0$. Эти случайные отклонения узлов от плоскости $z = 0$ не превышают 0.2% толщины пластины. Далее при линейном росте нагрузки решается нелинейная задача, допускающая большие деформации пластины, и определяются значения давления, при которых наблюдается быстрый локализованный

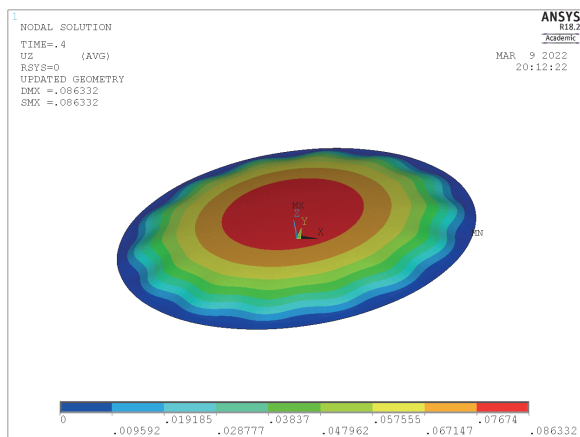


Рис. 3. Потеря осесимметричной формы равновесия круглой пластины со скользящей заделкой ($n = 14$).

рост прогибов при незначительном увеличении давления, т. е. потеря устойчивости деформирования.

Для случая скользящей заделки получено решение, соответствующее форме потери устойчивости с образованием $n = 14$ волн по краю пластины (см. рис. 3). Размерная критическая нагрузка в этом случае равна 3.6 МПа, что отвечает безразмерной нагрузке 63 370.

На рис. 4 приведены формы потери устойчивости и соответствующие им нагрузки для случая шарнирного опирания края.

Размерным значениям нагрузок, при которых появляются одна, две и три волны, соответствуют безразмерные значения 283 681, 284 144 и 285 079. Заметим, что значения этих нагрузок отличаются между собой не более чем на 0.5 %.

При условии шарнирного опирания потеря устойчивости происходит при нагрузке, превосходящей критическое давление при скользящей заделке более чем в 4 раза. Как отмечается в [11, 12], сама точка бифуркации является неустойчивой, и пластина в этом случае становится очень чувствительной к начальным несовершенствам. При этом прогиб пластины в центре становится очень большим ($\tilde{w}/R \approx 0.3$), и уравнения пологих оболочек дают большую погрешность. Следует отметить, что в этом случае численное решение, основанное на аналитическом подходе, описанном в разделе 2 (уравнения (4)–(8)), получить не удалось, но при достижении нагрузкой безразмерного значения 285 000 зона сжимающих напряжений перестает сужаться, и это можно считать признаком достижения критического значения.

5. Заключение. В работе представлены результаты исследования бифуркации осесимметричных форм равновесия круглых пластин при различных условиях закрепления внешнего края. Показано, что для случая скользящей заделки края аналитический, асимптотический и конечно-элементный подходы к решению дают близкие результаты. При шарнирном опирании края пластины переход в неосесимметричное состояние происходит при гораздо большей нагрузке и с образованием меньшего числа волн, чем для скользящей заделки. Трудности с получением численного решения на основе аналитического подхода, видимо, связаны с необходимостью

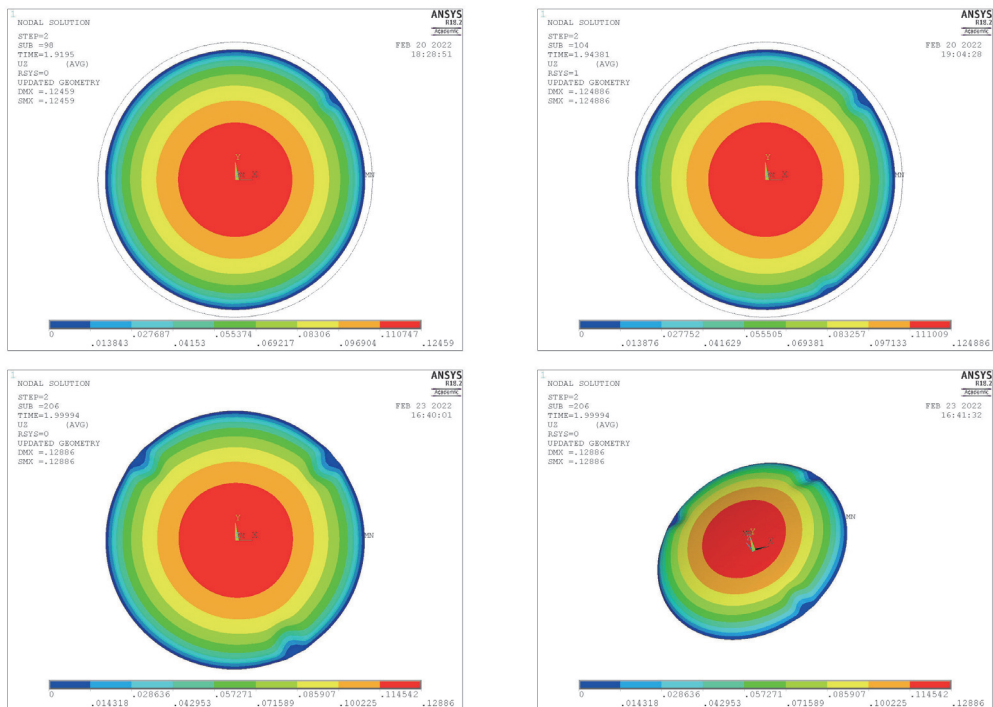


Рис. 4. Появление первой волны при нагрузке $\bar{p} = 16\,115\,750$ Па (первый ряд, слева); второй волны при нагрузке $\bar{p} = 16\,142\,060$ Па (первый ряд, справа); появление третьей волны при $\bar{p} = 16\,195\,160$ (второй ряд).

более точного описания напряженно-деформированного докритического состояния пластины, чем дает в этом случае теория пологих оболочек.

Литература

1. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах. *Прикладная математика и механика* **12**, 389–406 (1948).
2. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quart. Appl. Math.* **31** (1), 75–91 (1973). <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
3. Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой. *Известия высших учебных заведений. Математика*, № 2, 126–129 (1961).
4. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: Nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading. *Archiwum mechaniki stosowanej* **21** (1), 81–102 (1969).
5. Coman C. D., Bassom A. P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurized shallow spherical cap. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **81**, 8–18 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004>
6. Coman C. D. On the asymptotic reduction of a bifurcation equation for edge-buckling instabilities. *Acta Mech.* **229**, 1099–1109 (2018). <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2036-8>
7. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Морозов Н. Ф. О несимметричных формах равновесия круглых пластин под действием нормального давления. В: Чигарев А. В. (ред.). *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник*. Вып. 27, 31–35. Минск (2012).
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. In: Altenbach H., Chrosielewski J., Eremeyev V., Wisniewski K. (eds).

Recent Developments in the Theory of Shells. Advanced Structured Materials. Vol. 110, 79–89. Cham, Springer (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_6

9. Bauer S. M., Voronkova E. B. On Buckling Behavior of Inhomogeneous Shallow Spherical Caps with Elastically Restrained Edge. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Muller W. (eds). *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*. Vol. 134, 65–74. Cham, Springer (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4

10. Мануйлов Г. А., Косицын С. Б., Бегичев М. М. Устойчивость осесимметричного равновесия круглой пластины при больших прогибах. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* **10** (1), 111–117 (2014).

11. Мануйлов Г. А., Косицын С. Б., Бегичев М. М. О критических и послекритических равновесиях в задачах устойчивости упругих систем. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, № 5, 47–54 (2015).

12. Мануйлов Г. А., Косицын С. Б., Бегичев М. М. О вычислительных признаках различия критических точек на кривой равновесий. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* **13** (2), 125–135 (2017). <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-125-135>

Статья поступила в редакцию 9 февраля 2022 г.;
доработана 27 февраля 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Бауэр Светлана Михайловна — д-р физ.-мат. наук, проф.; s.bauer@spbu.ru

Воронкова Ева Боруховна — канд. физ.-мат. наук, доц.; e.voronkova@spbu.ru

Семенов Борис Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; b.semenov@spbu.ru

On non-axisymmetrical buckling modes of circular plates under normal pressure*

S. M. Bauer, E. B. Voronkova, B. N. Semenov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Bauer S. M., Voronkova E. B., Semenov B. N. On non-axisymmetrical buckling modes of circular plates under normal pressure. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 417–425.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.303> (In Russian)

The paper presents the results of a study of the bifurcation of axisymmetric equilibrium forms of round plates under various conditions for fixing the outer edge. It is shown that for the case of sliding edge, the analytical, asymptotic and finite element approaches give close results. When the edge of the plate is hinged, the buckling to a non-axisymmetric state occurs at a much higher load and with the formation of a smaller number of waves than for a sliding boundary conditions. Difficulties in obtaining a numerical solution based on the analytical approach are apparently associated with the need for a more accurate description of the stress-strain subcritical state of the plate.

Keywords: circular plate, buckling, finite element modelling.

References

1. Panov D. Y., Feodosiev V. I. On the equilibrium and loss of stability of shallow shells in the case of large displacement *Prikladnaya matematika i mehanika* **12**, 389–406 (1948). (In Russian)

*This work was carried out using the equipment of the Resource Center of the Saint Petersburg State University Research Park “Environmental Safety Observatory”.

2. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quart. Appl. Math.* **31** (1), 75–91 (1973). <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
3. Morozov N. F. On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, no. 2, 126–129 (1961). (In Russian)
4. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: Nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading. *Archiwum mechaniki stosowanej* **21** (1), 81–102 (1969).
5. Coman C. D., Bassom A. P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurized shallow spherical cap. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **81**, 8–18 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004>
6. Coman C. D. On the asymptotic reduction of a bifurcation equation for edge-buckling instabilities. *Acta Mech.* **229**, 1099–1109 (2018). <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2036-8>
7. Bauer S. M., Voronkova E. B., Morozov N. F. On unsymmetrical equilibrium states of circular plates under normal pressure. In: Chigarev A. B. (ed.). *Theoretical and Applied mechanics: international scientific and technical collection*. Iss. 27, 31–35. Minsk (2012). (In Russian)
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. In: Altenbach H., Chroscielewski J., Eremeyev V., Wisniewski K. (eds). *Recent Developments in the Theory of Shells. Advanced Structured Materials*. Vol. 110, 79–89. Cham, Springer (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_6
9. Bauer S. M., Voronkova E. B. On Buckling Behavior of Inhomogeneous Shallow Spherical Caps with Elastically Restrained Edge. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. (eds). *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*. Vol. 134, 65–74. Cham, Springer (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4
10. Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Begichev M. M. About Initial Imperfection Sensitivity of Some Thin-Walled Structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* **10** (1), 111–117 (2014). (In Russian)
11. Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Begichev M. M. Critical and Postcritical Equilibria in Stability Problems of Elastic Systems. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, no. 5, 47–54 (2015). (In Russian)
12. Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Begichev M. M. On Computational Differences of Critical Points on Equilibrium Curve. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* **13** (2), 125–135 (2017). <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-125-135> (In Russian)

Received: February 9, 2022
 Revised: February 27, 2022
 Accepted: March 3, 2022

Authors' information:

Svetlana M. Bauer — s.bauer@spbu.ru
Eva B. Voronkova — e.voronkova@spbu.ru
Boris N. Semenov — b.semenov@spbu.ru