

Пограничные слои на верхней/нижней поверхности армированных пластин*

Б. Д. Аннин¹, А. Г. Колмаков², С. И. Ракин³

¹ Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН,
Российская Федерация, 630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15

² SysAn — Системный анализ в инженерном деле,
Российская Федерация, 630075, Новосибирск, ул. А. Невского, 12

³ Сибирский государственный университет путей сообщений,
Российская Федерация, 630090, Новосибирск, ул. Дуси Ковальчук, 191

Для цитирования: Аннин Б. Д., Колмаков А. Г., Ракин С. И. Пограничные слои на верхней/нижней поверхности армированных пластин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 391–404. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.301>

Обсуждается задача о ячейках периодичности теории усреднения для армированных волокнами пластин — упругой и термоупругой. Особенностью ячеек периодичности пластин является наличие у них свободных поверхностей. На основании расчетов показано, что на свободных поверхностях возникают пограничные слои. Исследуются характеристики этих пограничных слоев для однонаправленно и поперечно армированных пластин.

Ключевые слова: пластина, армирующие волокна, матрица, метод осреднения.

1. Применение метода осреднения к композитной пластине, армированной системой волокон. Теория осреднения дает строгий математический метод исследования локального напряженного состояния в композите посредством решения так называемых задач с ячейками периодичности и макроскопических решений задачи. В настоящее время методы осреднения разработаны для всех основных инженерных конструкций: твердых тел, пластин и мембран, балок и струн [1].

В этой статье мы рассмотрим армированные волокнами пластины. Особенностью пластин является то, что их ячейки периодичности [2, 3] простираются от верха до низа пластины. Отметим, что для твердого композитного тела ячейка периодичности совпадает с ячейкой периодичности структуры композита (см. рис. 1).

Верхняя и нижняя поверхности ячейки периодичности пластины в ячейечной задаче теории усреднения являются свободными поверхностями [2, 3]. Наличие свободных поверхностей может привести к возникновению пограничных слоев — тонких зон, где локальное напряженно-деформированное состояние отличается от напряженно-деформированного состояния в основной части пластины [4–12]. Повышение местных напряжений, которое обычно происходит в этих зонах, может привести (и часто приводит) к разрушениям в них. Ранее рассматривались пограничные слои на торцевых свободных краях пластины (см. рис. 1). Они интенсивно обсуждались

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-15-2020-781).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

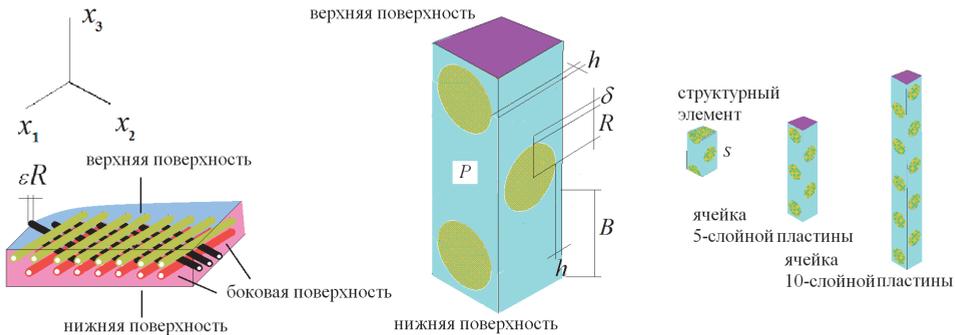


Рис. 1. Слои волокон в медленных переменных \mathbf{x} и ячейка периодичности P пластины в быстрых переменных \mathbf{y} .

в 1970–1980-х гг. для слоистых композитов (см., например, [13, 14] и краткий, но очень информативный обзор в [15, гл. 7]). Во многочисленных публикациях указанного периода были представлены экспериментальные, теоретические и численные результаты. Мы не рассматриваем пограничные слои на торцах пластины. Мы рассмотрим пограничные слои на верхней и нижней поверхностях пластины (см. рис. 1). Площади верхней и нижней поверхностей пластины большие. Прямой расчет в этой зоне предполагает решение задач упругости/термоупругости во всей области, занимаемой пластиной. Мощность компьютеров в 1970-х и 1980-х гг. была достаточна для численного анализа эффектов на торцевых свободных краях слоистых композитов, но недостаточна для прямого анализа трехмерных композитов сложной структуры. Возможно, по этой причине пограничные слои на верхней и нижней поверхностях пластин не были исследованы ранее.

Рассмотрим пластины, армированные периодически чередующимися ортогональными слоями волокон и периодической системой однонаправленных волокон. Волокна располагаются перпендикулярно оси Ox_3 -оси (рис. 1). Волокна идеально связаны с матрицей. Мы используем эту несколько идеализированную модель, чтобы сосредоточиться на механических аспектах проблемы. Следует отметить, что композиты с ортогонально ориентированными волокнами по-прежнему актуальны для практики (см., например, [15–21]).

Обозначим: εR — радиус волокон, εh — расстояние между волокнами в слоях, $\varepsilon \delta$ — расстояние между слоями волокна (рис. 1). Обозначим через ε характерный размер волокон и связующего вещества между волокнами; считаем его малым: $\varepsilon \ll 1$. Для описания этого двухмасштабного материала используются быстрые (микроскопические) переменные $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$, которые вводятся дополнительно к медленным (макроскопическим) переменным \mathbf{x} [22].

Предположим, что пластина имеет периодическую структуру, а верхняя и нижняя поверхности пластины плоские. В этом случае ячейка периодичности пластины в быстрых переменных такова: $P = [0, h_1] \times [0, h_2] \times [-h, h]$. Ячейки периодичности повторяются по переменным y_1, y_2 и простираются от верха до низа пластины по переменной y_3 (рис. 1). Обозначим через $P_2 = [0, h_1] \times [0, h_2]$ двумерную ячейку периодичности, соответствующую ячейке периодичности P . Грани ячейки периодичности P — прямоугольники $\Gamma_i = \{\mathbf{y} : y_i = 0\}$ и $\Gamma_i + h_i \mathbf{e}_i$.

Применительно к пластинам мы используем теорию усреднения, развитую в [2] и позднее обсуждавшуюся во многочисленных публикациях. Мы сосредоточимся на механике и вычислительных аспектах проблемы. Мы не приводим подробного изложения техники теории гомогенизации. Подробное изложение применения теории гомогенизации к пластинам можно найти в [2] (см. также монографию [3]).

Решение задачи теории упругости и термоупругости композитной тонкой пластины в рамках теории усреднения для пластин ищется в виде [23]

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}_0(x_1, x_2) + \varepsilon \mathbf{u}_1(x_1, x_2, \mathbf{x}/\varepsilon) + \dots, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}_0(x_1, x_2) = (u_{01}, u_{02}, u_{03})(x_1, x_2)$ является макроскопическим решением (u_{01} и u_{02} — перемещения в плоскости пластины, а u_{03} — нормальный прогиб), $\varepsilon \mathbf{u}_1(x_1, x_2, \mathbf{x}/\varepsilon)$ является корректором. Корректор $\varepsilon \mathbf{u}_1(x_1, x_2, \mathbf{x}/\varepsilon)$ вносит небольшой вклад в перемещения, но значительный вклад в локальное напряженно-деформированное состояние. Корректор имеет вид

$$\varepsilon \left[\frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial x_\beta}(x_1, x_2) \mathbf{N}^{\alpha\beta 0}(\mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial u_{03}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x_1, x_2) \mathbf{N}^{\alpha\beta 1}(\mathbf{x}/\varepsilon) \right] + \varepsilon \mathbf{N}^0(\mathbf{x}/\varepsilon) T(x_1, x_2),$$

где $\mathbf{N}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y})$ и $\mathbf{N}^\nu(\mathbf{y})$ — решения следующих задач на ячейках периодичности (ячеечных задач теории усреднения применительно к пластине [2, 23]): ячейечные задачи теории упругости

$$\begin{cases} (a_{ijkl}(\mathbf{y}) N_{k,ly}^{\alpha\beta\nu} + (-1) a_{ij\alpha\beta} y_3^\nu)_{,jy} = 0 \text{ в } P, \\ (a_{ijkl}(\mathbf{y}) N_{k,ly}^{\alpha\beta\nu} + (-1) a_{ij\alpha\beta} y_3^\nu) n_j = 0 \text{ на верхней/нижней поверхности,} \\ [\mathbf{N}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y})]_\alpha = 0 \end{cases} \quad (2)$$

и термоупругие ячейечные задачи [5, 6]

$$\begin{cases} (a_{ijkl}(\mathbf{y}) N_{k,ly}^\nu + b_{ij}(\mathbf{y}))_{,jy} = 0 \text{ в } P, \\ (a_{ijkl}(\mathbf{y}) N_{k,ly}^\nu + b_{ij}(\mathbf{y})) n_j = 0 \text{ на верхней/нижней поверхности,} \\ [\mathbf{N}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y})]_\alpha = 0, \end{cases} \quad (3)$$

здесь

$$a_{ijkl}(\mathbf{y}) = \begin{cases} a_{ijkl}^F & \text{в волокнах,} \\ a_{ijkl}^M & \text{в матрице,} \end{cases} \quad \alpha_{ij}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \alpha_{ij}^F & \text{в волокнах,} \\ \alpha_{ij}^M & \text{в матрице,} \end{cases} \quad (4)$$

a_{ijkl}^F и a_{ijkl}^M — упругие постоянные волокон и связующего соответственно; α_{ij}^F и α_{ij}^M — коэффициенты линейного теплового расширения. Обозначим $b_{ij}(\mathbf{y}) = -a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y}) \alpha_{\alpha\beta}(\mathbf{y})$. Индексы ν и μ принимают значения 0, 1; остальные индексы, обозначенные греческими буквами, принимают значения 1, 2; индексы, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3; $[f(\mathbf{y})]_\alpha$ обозначает скачок функции $f(\mathbf{y})$ на противоположных гранях $\mathbf{y} \in \Gamma_\alpha$ и $\mathbf{y} \in \Gamma_\alpha + h_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ ячейки периодичности P $[f(\mathbf{y})]_\alpha = 0$ (означает периодичность по переменной y_α).

Ячеечные задачи (2) и (3) имеют много решений, отличающихся друг от друга перемещениями твердого тела. Мы устраним перемещения твердого тела, зафиксировав некоторые точки ячейки периодичности (в теории усреднения часто ставится условие нулевого среднего значения решения, что не влияет на обсуждаемые нами явления).

Ячеечные задачи (2) и (3) являются задачами в быстрых переменных \mathbf{y} . Макроскопические деформации в плоскости $\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial x_\beta}$, изгиб/кручение $\rho_{\alpha\beta}^0 = \frac{\partial^2 u_{0\alpha}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ и температура T являются функциями медленных переменных (x_1, x_2) . Ячеечная задача (2) с $\alpha\beta = 11, 22$ соответствует макроскопическому растяжению, если $\nu = 0$, или изгибу, если $\nu = 1$; с $\alpha\beta = 23$ — макроскопическому сдвигу, если $\nu = 0$, или кручению, если $\nu = 1$.

2. Анализ упругой ячейечной задачи. Введем $\mathbf{Z}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y}) = \varepsilon_{\alpha\beta}^\nu(\mathbf{x})[\mathbf{N}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y}) + \xi^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y})]$, где $\xi^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y})$ — решение уравнения $a_{ijkl}(\mathbf{y})\xi_{k,l}^{\alpha\beta\nu} = y_3^\nu a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y})$. Функции $\xi^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y})$ существуют, явные формулы для $\xi^{\alpha\beta\nu}$ приведены в [1]. Используя эти обозначения, мы можем записать задачи о ячейках периодичности теории гомогенизации в виде

$$\begin{cases} (a_{ijkl}(\mathbf{y})Z_{k,ly}^{\alpha\beta\nu})_{,jy} = 0 \text{ в } P, \\ (a_{ijkl}(\mathbf{y})Z_{k,ly}^{\alpha\beta\nu}n_j = 0 \text{ на верхней/нижней поверхности,} \\ [\mathbf{Z}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y})]_i = \varepsilon_{\alpha\beta}^\nu(\mathbf{x})[\xi^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y})]_i. \end{cases} \quad (5)$$

Вычисления имеют некоторые отличия для плоских деформаций растяжения/сдвига и изгиба/кручения пластины. Различие возникает из-за разных функций $\xi^{\alpha\beta\nu}$ в задаче о ячейках периодичности (5) для плоской деформации и изгиба/кручения. Это различие видно и в задаче (2): данная задача для плоских деформаций растяжения/сдвига не содержит y_3 , а для изгиба/кручения явно зависит от y_3 .

Ячеечные задачи (5) решались для плоских деформаций ($\nu = 0$) и для изгиба/кручения ($\nu = 1$) для 3-, 4-, ..., 10-слойных ячеек.

В приведенных ниже расчетах модуль Юнга и коэффициент Пуассона для волокон имеют следующие значения: $E_f = 170$ ГПа, $\nu_f = 0.3$, для матрицы — $E_b = 2$ ГПа, $\nu_b = 0.36$. Эти значения соответствуют композиту углеродные волокна — эпоксидная смола. Радиус волокна R составляет 0.45; расстояние между волокнами в слоях h равно 0.1, между слоями волокон $\delta = 0.1$, размеры ячейки периодичности таковы: $h_1 = 1.1$, $h_2 = 3$, $h_3 = 1.1$ (см. рис. 1). Эти геометрические характеристики задаются в безразмерных быстрых переменных \mathbf{y} . Соответствующие размерные значения вычисляются путем умножения на характерный размер ε . Для углеродного волокна ε меняется от 5 до 20 мк [4].

2.1. Деформации в плоскости пластины. Плоские локальные деформации для ячейки периодичности есть решение задачи (5) с индексом $\nu = 0$. В этом случае $y_3^\nu = 1$. Деформированная форма ячейки периодичности и напряжения по Мизесу показаны на рис. 2. Рис. 2, а, иллюстрирует напряжения по Мизесу в ячейке периодичности. Из-за большой разницы напряжений в волокнах и матрице рис. 2, а, двухцветный. На рис. 2, с, показано напряженно-деформированное состояние в матрице.

Распределения локальных напряжений на рис. 2 характерны для 4-, 5-, ..., 10-слойных ячеек периодичности. Все наши результаты численных расчетов показывают, что решение задачи является периодическим в сердцевинной части ячейки периодичности и существует пограничный слой на верхней/нижней поверхности ячейки периодичности. Толщина пограничных слоев меньше толщины одного структурного слоя S .

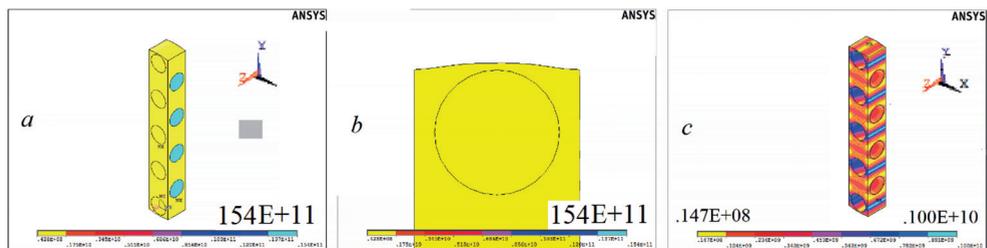


Рис. 2. Локальные напряжения по Мизесу: a — в ячейке периодичности, c — в матрице; b — верхний пограничный слой (увеличено).

На рис. 2, a, c , мы наблюдаем существенные различия между локальными напряженно-деформированными состояниями в волокне и матрице. Разница настолько велика, что волокна и матрицу можно квалифицировать как две разные среды. На основании проведенных численных расчетов мы приходим к выводу, что композиты типа «жесткие волокна в мягкой матрице» демонстрируют мультиконтинуальное поведение, предсказанное для высококонтрастных композитов теоретически Г. П. Панасенко [24, 25].

2.2. Изгиб/кручение пластины. Локальные деформации ячейки периодичности, соответствующие изгибу/кручению пластины, являются решениями задачи (5) с индексом $\nu = 1$. В этом случае явное присутствие переменной y_3 приводит к типичным решениям задачи (5), аналогичным на макроуровне изгибу/кручению однородной пластины. Деформированная форма ячейки периодичности и напряжения по Мизесу продемонстрированы на рис. 3, показана деформация ячейки периодичности, соответствующая изгибу в плоскости Oyz . Видно, что напряжения в высокомодульных волокнах, параллельных оси Oy , преобладают над всеми остальными напряжениями. Этот факт соответствует общей теории армированных волокон пластин [26, 27]. Картины на рис. 3 характерны для 4-, 5-, ..., 10-слойных ячеек периодичности. Из-за большой разницы напряжений в волокнах и матрице матрица на рис. 3 окрашена в один цвет.

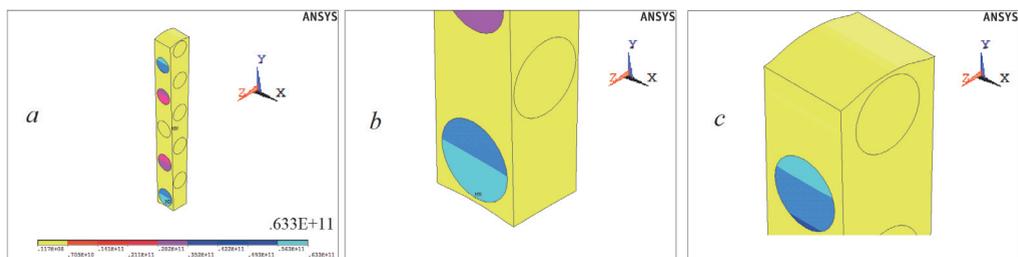


Рис. 3. Локальные напряжения по Мизесу в ячейке периодичности (a); верхний (b) и нижний (c) пограничные слои (увеличено).

На рис. 4 показаны локальные напряжения по Мизесу в матрице для ячейки периодичности, изображенной на рис. 3. Сравнивая рис. 3 и 4, вновь видим мультиконтинуальное поведение композитной пластины [24, 25].

Выше была рассмотрена задача об упругом деформировании армированной пластины. Рассмотрим задачу о термоупругом деформировании армированной пла-

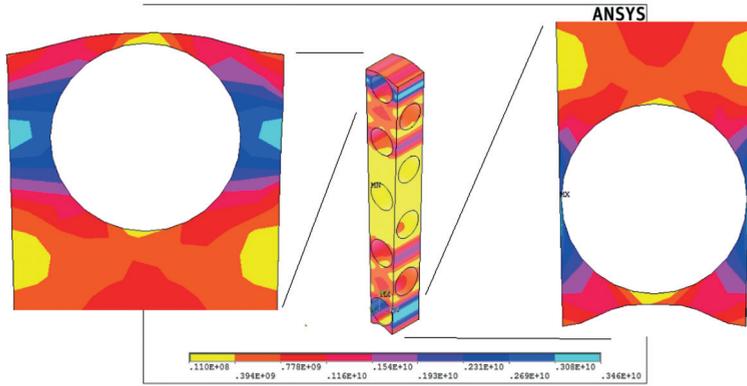


Рис. 4. Локальные напряжения по Мизесу в матрице и в верхнем и нижнем пограничных слоях (увеличено).

стины. Насколько известно авторам, ячеечная задача термоупругости (3) не может быть записана в компактной форме, аналогичной задаче (5).

Мы провели решения задачи (3) для композита «углерод — эпоксидная смола» с указанными выше материальными и геометрическими параметрами. Коэффициенты линейного теплового расширения волокон и матрицы таковы: $\alpha_f = 5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ и $\alpha_b = 60 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ матрицы соответственно. Приведенное ниже решение было получено для температуры $T = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$, и перемещения на рисунке увеличены в 10 раз.

Деформированная ячейка периодичности и локальные напряжения по Мизесу показаны на рис. 5, *a*. Видно, что решение задачи является периодическим в сердцевинной части ячейки периодичности и существует пограничный слой на верхней/нижней поверхности ячейки периодичности. Толщина пограничных слоев меньше толщины одного структурного слоя S , как и в задачах с ячейками упругой периодичности.

Морщинистость поверхностей пластины особенно хорошо видна при решении задачи для двух соседних ячеек периодичности (см. рис. 5, *b*).

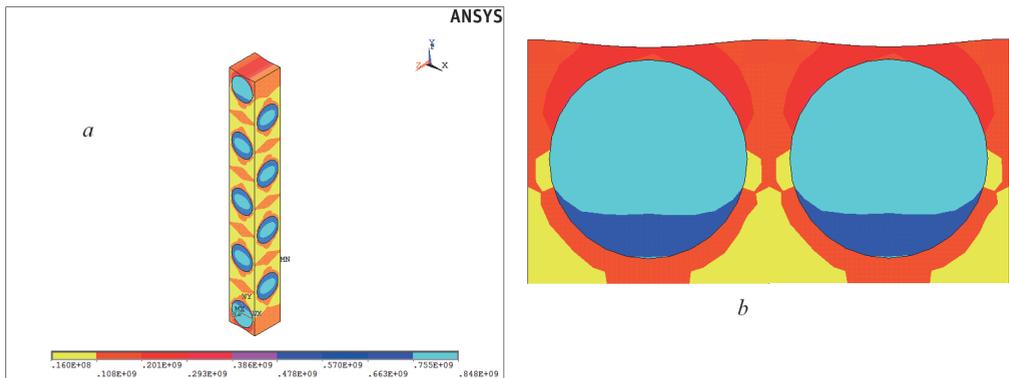


Рис. 5. Локальные напряжения по Мизесу: *a* — в ячейке периодичности и *b* — в верхней части двух соседних ячеек периодичности (увеличено) при нагреве.

3. Пластины с однонаправленными системами волокон или каналов.

Тела с системой однонаправленных волокон или с системой параллельных каналов изучались многими исследователями (см. [28–33]). Отметим, что задачи рассматривались для бесконечных тел периодических структур. Это было результатом применения специальной техники дwoякопериодических функций, которая была практически единственным эффективным вычислительным методом до появления достаточно мощных компьютеров.

Приведены численные решения задач о ячейках периодичности для пластины с системой цилиндрических включений или каналов, параллельных оси координат. Результаты численных расчетов на растяжение и изгиб армированной волокнами пластины представлены на рис. 6. Верхний и нижний фрагменты ячеек периодичности показаны увеличенными. На рис. 6 глубина пограничного слоя меньше толщины одного структурного слоя, как и для перекрестно армированной пластины. Пограничный слой уменьшает напряжение по Мизесу в матрице. Локальное напряженно-деформированное состояние в сердцевинной части ячейки периодичности похоже на локальное напряженно-деформированное состояние, возникающее в контрастных композитных пластинах «жесткие волокна в мягкой матрице» [34–38]. Аналогичный эффект имел место и для пластин с перекрестным армированием (см. рис. 2 и 4). Можно сделать вывод, что роль пограничного слоя положительна для прочности поверхности контрастных композитных пластин «жесткие волокна в мягкой матрице». Примером таких композитов являются композитные крылья [39, 40] и спортивное снаряжение [41]. Конечно, композитные крылья или спортивный снаряд имеют более сложные схемы армирования и непосредственное применение результатов, приведенных в данной статье, недопустимо.

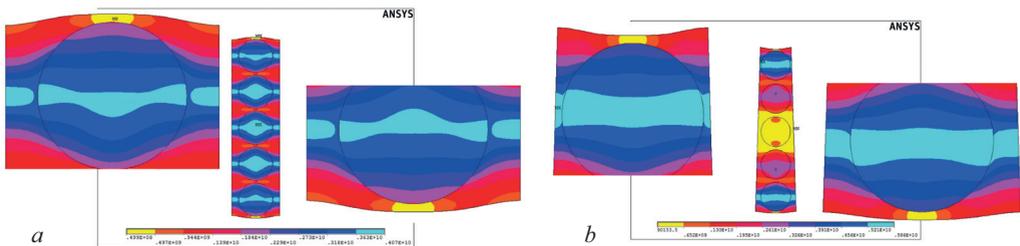


Рис. 6. Локальные напряжения по Мизесу: *a* — растяжение, *b* — изгиб.

Анализ пластин с системой однонаправленных каналов дает нам примеры отрицательной роли пограничного слоя. На рис. 7 видно, что пограничный слой увеличивает локальное напряжение по Мизесу. Рис. 7 также демонстрирует возможный результат пограничного слоя. Вычисления нетривиальны, поэтому прямое применение результатов, представленных в статье, не допускается.

Численный анализ демонстрирует аналогичное поведение 4-, 5-, ..., 10-слойных пластин.

Представим результаты расчета для термоупругой ячейечной задачи. На рис. 8 показано решение ячейечной задачи для задачи термоупругости. Расчеты проводились для композита «углерод — эпоксидная смола» с указанными выше материалом и геометрическими параметрами. Решение было получено для температуры $T = 100^\circ\text{C}$, и перемещения на рисунке увеличены в 10 раз. Решение является периодическим в сердцевинной части ячейки периодичности, и ясно видны пограничные

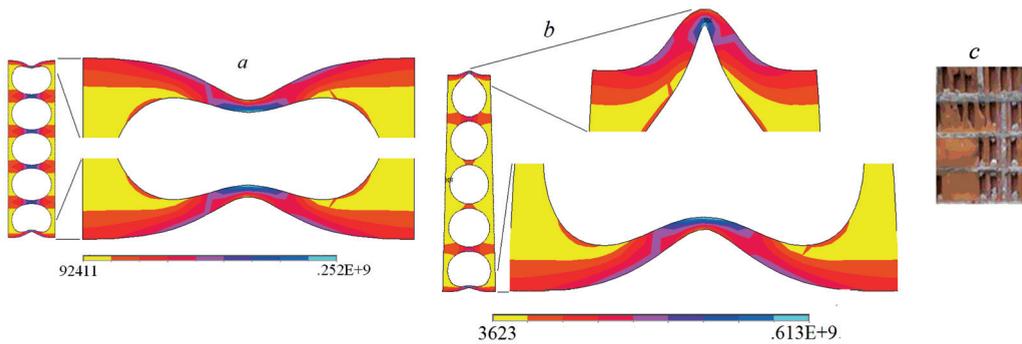


Рис. 7. Полюый композит: *a* — растяжение и *b* — изгиб; *c* — разрушение поверхности кирпичной кладки.

слои на верхней/нижней поверхности ячейки периодичности. Толщина пограничных слоев меньше толщины одного структурного слоя, как и в задачах с упругой ячейкой периодичности.

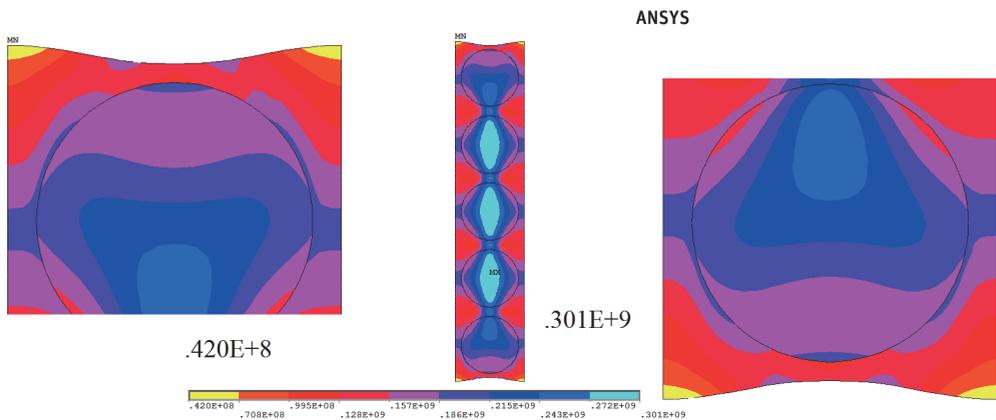


Рис. 8. Локальные напряжения по Мизесу в ячейке периодичности и в верхней и нижней частях ячейки периодичности (увеличено) при нагреве.

4. Сморщивание верхней/нижней поверхности пластины. Приведенные выше расчеты проводились для пластины с плоскими верхней и нижней поверхностями. При рассмотрении рисунков можно сделать вывод, что, как правило, исходно плоские верхняя и нижняя поверхности деформируемой пластины не превращаются в цилиндрические поверхности, а сморщиваются. Морщинистость особенно хорошо видна для двух соседних ячеек периодичности (см. рис. 5 и 9). Амплитуда и период морщинистости имеют порядок ε . Хотя ε мало, такое сморщивание приводит к изменению площади (длины) верхней и нижней поверхностей пластины на порядок не ε , а единицы. Такое сморщивание влияет, например, на тепловые свойства поверхностей [22]. Сморщивание также может влиять на взаимодействие пластины с потоком жидкости или газа.

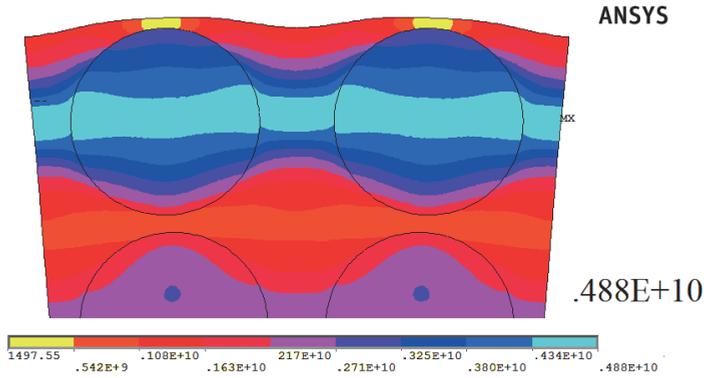


Рис. 9. Деформация верхней поверхности пластины при изгибе.

Сморщивание возникает не во всех ячеечных задачах. Известные точные решения ячейечной задачи [1, 23, 42, 43], указывают на отсутствие пограничных слоев в однородных пластинах и пластинах из слоев однородных материалов. Следовательно, в однородных пластинах и пластинах из слоев однородных материалов не возникает и сморщивание. В пластинах сложного строения морщинистость тоже может не появиться. На рис. 10 показано решение для ячейечной задачи, соответствующей сдвигу в плоскости пластины. Хотя пограничные слои хорошо видны, на свободной поверхности морщин не видно (показана верхняя поверхность пластины, нижняя выглядит аналогично). Таким образом, пограничный слой и сморщивание не являются тождественными явлениями.

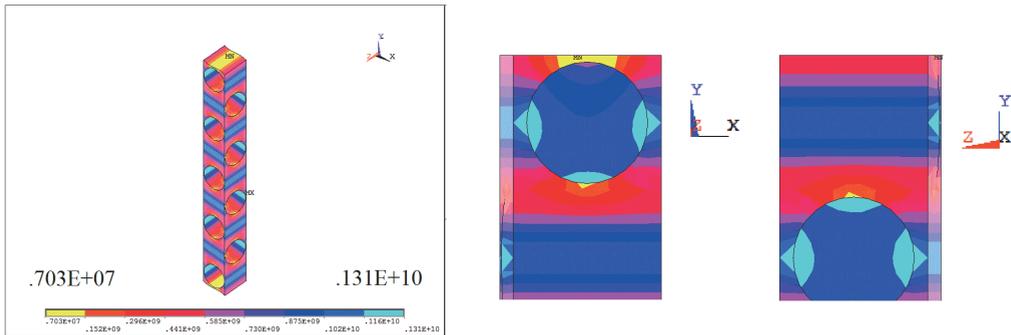


Рис. 10. Локальные напряжения по Мизесу в матрице и верх ячейки периодичности в разных проекциях (увеличено).

Явления морщинистости на поверхности пластин описаны в литературе. Например, апельсиновая корка в тонких панелях или сморщивание наружных слоев в трехслойных пластинах с мягкой сердцевиной. Упомянутые явления отличаются от сморщивания, описанного в данной статье. Апельсиновая корка является результатом технологического процесса [44], а не изгиба пластины. Сморщивание наружных слоев в трехслойных пластинах с мягкой сердцевиной является результатом потери устойчивости сжатого наружного слоя [45, 46]. Это сморщивание происходит, когда макроскопический изгиб достигает критического значения. Сморщивание, описанное в этой статье, происходит как на верхней, так и на нижней поверхности. Это

явление не зависит от величины макроскопического изгиба. Это сморщивание, в частности, происходит в пластине, подвергнутой растяжению, когда потери устойчивости не происходит.

5. Выводы. Верхняя и нижняя стороны пластины соответствуют свободным поверхностям в задачах периодичности ячеек для пластины. Как следует из наших расчетов, пограничные слои могут возникать на свободных поверхностях. Пограничные слои появляются не во всех случаях. Известные точные решения задачи о ячейке периодичности [1, 23, 42, 43] демонстрируют отсутствие пограничных слоев в задаче о ячейке периодичности, соответствующей однородным и слоистым пластинам. Верхний и нижний пограничные слои возникают в пластинах сложной структуры. Пластины, армированные волокном, являются примером пластин сложной структуры. Толщина пограничного слоя меньше толщины структурного слоя (одно волокно и окружающий его фрагмент связующего, см. рис. 1).

Наши численные расчеты показывают, что максимальные напряжения в армированной волокном пластине и пластине с каналами возникают в верхнем/нижнем слое, но не точно в верхней/нижней части пластины. Максимальные напряжения возникают точно в верхней/нижней части пластины для однородных и слоистых пластин.

Одним из результатов воздействия верхних/нижних пограничных слоев в пластине является сморщивание изначально плоской верхней/нижней поверхности армированной волокнами пластины. Хотя амплитуда складчатости невелика, это приводит к немалому изменению площади (длины) верхней и нижней поверхностей пластины.

Пограничные слои на свободных (верхней и нижней) поверхностях неоднородной пластины могут возникать как в упругой, так и в термоупругой задачах. Свойства упругого и термоупругого пограничных слоев аналогичны.

Литература

1. Kolpakov A. G. *Stressed Composite Structures: Homogenized Models for Thin-walled Nonhomogeneous Structures with Initial Stresses*. Heidelberg, Springer (2004).
2. Caillerie D. Thin elastic and periodic plate. *Math. Meth. Appl. Sci.* **6** (1), 159–191 (1984).
3. Аннин Б. Д., Каламкарв А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З. *Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций*. Новосибирск, Наука (1993).
4. Agarwal B. D., Broutman L. J. Chandrashekhara K. *Analysis and Performance of Fiber Composites*. Hoboken, NJ, Wiley (2017).
5. Колпаков А. Г. К задаче термоупругости неоднородных пластинок. *Прикл. матем. мех.* **56** (3), 487–494 (1992).
6. Колпаков А. Г. Дополнение к статье «К задаче термоупругости неоднородных пластинок». *Прикл. матем. мех.* **59** (5), 860–861 (1995).
7. Dorworth L. C., Gardiner G. L., Mellema G. M. *Essentials of Advanced Composite Fabrication & Repair*. Newcastle, WA, Aviation Supplies & Academics (2019).
8. Бахвалов Н. С. Панасенко Г. П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука (1984).
9. Dumontet H. Study of a boundary layer problem in elastic composite materials. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* **20**, 265–286 (1986).
10. Sanchez-Palencia E. *Boundary layers and edge effects in composites*. In Ser.: Homogenization Techniques for Composite Materials. Berlin, Springer (1987).
11. Andrianov I. V., Danishevskyy V. V., Weichert D. Boundary layers in fibre composite materials. *Acta Mech.* **216** (1), 3–15 (2011). <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0333-6>
12. Altenbach H., Morozov N. F. (eds). *Surface Effects in Solid Mechanics: Models, Simulations and Applications*. Berlin, Springer (2013).

13. Pipes R. B., Pagano N. J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *J. Comp. Mater.* **4** (4), 538–548 (1970). <https://doi.org/10.1177/002199837000400409>
14. Herakovich C. T., Post D., Buczek M. B., Czarnek R. Free edge strain concentrations in real composite laminates: Experimental-theoretical correlation. *J. Appl. Mech.* **52** (4), 787–793 (1985). <https://doi.org/10.1115/1.3169147>
15. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. Москва, Мир (1987).
16. Lomov S. V., Bogdanovich A. E., Ivanov D. S., Mungalov D. A comparative study of tensile properties of non-crimp 3D orthogonal weave and multi-layer plain weave E-glass composites. Part 1: Materials, methods and principal results. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **40**, 1134–1143 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2009.03.012>
17. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*. Cambridge, Cambridge University Press (2018).
18. Lopes R. S., Moreira C. S., Nunes L. C. S. Modeling of an elastic matrix reinforced with two families of fibers under simple shear: A mimic of annulus fibrosus. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* **41**, 385–391 (2019). <https://doi.org/10.1007/s40430-019-1886-5>
19. El Hage Ch., Younes R., Aboura Z., Benzeggagh M. L., Zoaeter M. Analytical and numerical modeling of mechanical properties of orthogonal 3D CFRP. *Comp. Sci. Techn.* **69**, 111–116 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.10.048>
20. Molker H., Wilhelmsson D., Gutkin R., Asp L. E. Orthotropic criteria for transverse failure of non-crimp fabric-reinforced composites. *J. Composite Materials* **50** (18), 2445–2458 (2015). <https://doi.org/10.1177/0021998315605877>
21. Kolpakov A. G., Rakin S. I. Homogenized strength criterion for composite reinforced with orthogonal systems of fibers. *Mech. Mater.* **148**, 103489 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103489>
22. Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*, пер. с франц. Москва, Мир (1984).
23. Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G. *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*. Chichester, Wiley (1997).
24. Панасенко Г. П. Осреднение процессов в сильно неоднородных структурах. *Докл. АН СССР* **298** (1), 76–79 (1988).
25. Панасенко Г. П. Многокомпонентное осреднение процессов в сильно неоднородных структурах. *Матем. сб.* **181** (1), 134–142 (1990).
26. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. Москва, Наука (1960).
27. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. Москва, Мир (1982).
28. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. *Перфорированные пластины и оболочки*. Москва, Наука (1970).
29. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. *Периодические кусочно-однородные упругие структуры*. Москва, Наука (1992).
30. Ван Фо Фы Г. А. Упругие постоянные и тепловое расширение некоторых тел с неоднородной регулярной структурой. *Докл. АН СССР* **166** (4), 817–820 (1966).
31. Ван Фо Фы Г. А. *Конструкции из армированных пластмасс*. Киев, Техника (1971).
32. Ван Фо Фы Г. А. *Теория армированных материалов с покрытиями*. Киев, Наукова думка (1971).
33. Григолюк Э. И., Ковалев Ю. Д., Фильштинский Л. А. Изгиб слоя, ослабленного сквозными туннельными разрезами. *Докл. АН СССР* **317** (1), 51–53 (1991).
34. Kolpakov A. A., Kolpakov A. G. *Capacity and Transport in Contrast Composite Structures: Asymptotic Analysis and Applications*. Boca Raton, FL, CRC Press (2009).
35. Keller J. B., Flaherty J. E. Elastic behavior of composite media. *Comm. Pure. Appl. Math.* **26**, 565–580 (1973).
36. Kang H., Yu S. A proof of the Flaherty-Keller formula on the effective property of densely packed elastic composites. *Calc. Var.* **59**, 22 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00526-019-1692-z>
37. Колпаков А. А. Численная проверка существования эффекта концентрации энергии в высококонтрастном высоконаполненном композиционном материале. *Инж.-физич. журнал* **80** (4), 166–172 (2007).
38. Ракин С. И. Численная проверка существования эффекта локализации упругой энергии для близко расположенных жестких дисков. *Инж.-физич. журнал* **87** (1), 238–244 (2014).
39. Boeing.com. Доступно на: <https://www.boeing.com/777x/reveal> (дата обращения: 28.03.2022).
40. CompositesWorld.com. Доступно на: <https://www.compositesworld.com/hashtag/a350> (дата обращения: 28.03.2022).

41. Kaufmann J. New Materials for sports equipment made of anisotropic fiber-reinforced plastics with stiffness related coupling effect. *Procedia Engineering* **112**, 140–145 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.189>
42. Kolpakov A.A., Kolpakov A.G. Solution of the laminated plate design problem: new problems and algorithms. *Computers & Structures* **83** (12–13), 964–975 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.08.012>
43. Kolpakov A. A. Design of a Laminated Plate Possessing the Required Stiffnesses Using the Minimum Number of Materials and Layers. *J. Elasticity* **86**, 245–261 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10659-006-9092-y>
44. Cao S., Zhang J., Wu J., Chen J. Analysis of orange peel defect in St14 steel sheet by electron backscattered diffraction (EBSD). *J. Mater. Sci. Technology* **21**, 17–20 (2005).
45. Vonach W., Rammerstorfer F. A general approach to the wrinkling instability of sandwich plates. *Struct. Eng. Mech.* **12** (4), 363–376 (2001). <https://doi.org/10.12989/sem.2001.12.4.363>
46. Vescovini R., D'Ottavio M., Dozio L., Polit O. Buckling and wrinkling of anisotropic sandwich plates. *Int. J. Eng. Sci.* **130**, 136–156 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.05.010>

Статья поступила в редакцию 8 февраля 2022 г.;
доработана 24 февраля 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Аннин Борис Дмитриевич — д-р физ.-мат. наук, акад. РАН; annin@hydro.nsc.ru
Колпаков Александр Георгиевич — д-р физ.-мат. наук; algk@ngs.ru
Ракин Сергей Иванович — канд. физ.-мат. наук, доц.; rakinsi@ngs.ru

Boundary layers on the upper/lower surfaces of reinforced plates*

*B. D. Annin*¹, *A. G. Kolpakov*², *S. I. Rakin*³

- ¹ Lavrentiev Institute of Hydrodynamics,
15, pr. Akademika Lavrentieva, Novosibirsk, 630090, Russian Federation
- ² SysAn — System Analysis in Engineering,
12, ul. A. Nevskogo, Novosibirsk, 630075, Russian Federation
- ³ Siberian Transport University,
191, ul. Dusi Kovalchuk, Novosibirsk, 630090, Russian Federation

For citation: Annin B. D., Kolpakov A. G., Rakin S. I. Boundary layers on the upper/lower surfaces of reinforced plates. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 391–404. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.301> (In Russian)

The periodicity cell problems of the homogenization theory, both elastic and thermoelastic, are discussed for a fiber-reinforced plate. A feature of the periodicity cells of the plates is the presence of free surfaces in them. As follows from our calculations, boundary layers appear on free surfaces. The characteristics of these boundary layers for unidirectional and transverse reinforced plates are investigated.

Keywords: plate, reinforcing fibers, matrix, homogenization method.

References

1. Kolpakov A. G. *Stressed Composite Structures: Homogenized Models for Thin-walled Nonhomogeneous Structures with Initial Stresses*. Heidelberg, Springer (2004).
2. Caillerie D. Thin elastic and periodic plate. *Math. Meth. Appl. Sci.* **6** (1), 159–191 (1984).

*This work is supported in part by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 075-15-2020-781).

3. Annin B. D., Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G., Parton V. Z. *Calculation and design of composite materials and structural elements*. Novosibirsk, Nauka Publ. (1993). (In Russian)
4. Agarwal B. D., Broutman L. J. Chandrashekhara K. *Analysis and Performance of Fiber Composites*. Hoboken, NJ, Wiley (2017).
5. Kolpakov A. G. On the problem of thermoelasticity of inhomogeneous plates. *Prikladnaya matematika i mehanika* **56** (3), 487–494 (1992). (In Russian)
6. Kolpakov A. G. Supplement to the article “On the problem of thermoelasticity of inhomogeneous plates”. *Prikladnaya matematika i mehanika* **59** (5), 860–861 (1995). (In Russian)
7. Dorworth L. C., Gardiner G. L., Mellema G. M. *Essentials of Advanced Composite Fabrication & Repair*. Newcastle, WA, Aviation Supplies & Academics (2019).
8. Bakhvalov N. S. Panasenko G. P. *Averaging of processes in periodic media*. Moscow, Nauka Publ. (1984).
9. Dumontet H. Study of a boundary layer problem in elastic composite materials. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* **20**, 265–286 (1986).
10. Sanchez-Palencia E. *Boundary layers and edge effects in composites*. In Ser.: Homogenization Techniques for Composite Materials. Berlin, Springer (1987).
11. Andrianov I. V., Danishevskyy V. V., Weichert D. Boundary layers in fibre composite materials. *Acta Mech.* **216** (1), 3–15 (2011). <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0333-6>
12. Altenbach H., Morozov N. F. (eds). *Surface Effects in Solid Mechanics: Models, Simulations and Applications*. Berlin, Springer (2013).
13. Pipes R. B., Pagano N. J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *J. Comp. Mater.* **4** (4), 538–548 (1970). <https://doi.org/10.1177/002199837000400409>
14. Herakovich C. T., Post D., Buczek M. B., Czarnek R. Free edge strain concentrations in real composite laminates: Experimental-theoretical correlation. *J. Appl. Mech.* **52** (4), 787–793 (1985). <https://doi.org/10.1115/1.3169147>
15. Wasizu K. *Variational methods in the theory of elasticity and plasticity*. Moscow, Mir Publ. (1987). (In Russian)
16. Lomov S. V., Bogdanovich A. E., Ivanov D. S., Mungalov D. A comparative study of tensile properties of non-crimp 3D orthogonal weave and multi-layer plain weave E-glass composites. Part 1: Materials, methods and principal results. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **40**, 1134–1143 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2009.03.012>
17. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*. Cambridge, Cambridge University Press (2018).
18. Lopes R. S., Moreira C. S., Nunes L. C. S. Modeling of an elastic matrix reinforced with two families of fibers under simple shear: A mimic of annulus fibrosus. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* **41**, 385–391 (2019). <https://doi.org/10.1007/s40430-019-1886-5>
19. El Hage Ch., Younes R., Aboura Z., Benzeggagh M. L., Zoeter M. Analytical and numerical modeling of mechanical properties of orthogonal 3D CFRP. *Comp. Sci. Techn.* **69**, 111–116 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.10.048>
20. Molker H., Wilhelmsson D., Gutkin R., Asp L. E. Orthotropic criteria for transverse failure of non-crimp fabric-reinforced composites. *J. Composite Materials* **50** (18), 2445–2458 (2015). <https://doi.org/10.1177/0021998315605877>
21. Kolpakov A. G., Rakin S. I. Homogenized strength criterion for composite reinforced with orthogonal systems of fibers. *Mech. Mater.* **148**, 103489 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103489>
22. Sanchez-Palencia E. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Berlin, New York, Springer-Verlag (1980). [Rus. ed.: Sanchez-Palencia E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebanij*. Moscow, Mir Publ. (1984)].
23. Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G. *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*. Chichester, Wiley (1997).
24. Panasenko G. P. Averaging of processes in highly heterogeneous structures. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **298** (1), 76–79 (1988). (In Russian)
25. Panasenko G. P. Multicomponent homogenization of processes in strongly nonhomogeneous structures. *Sb. Math.* **69** (1), 143–153 (1991). (In Russian) [Eng. transl.: *Mathematics of the USSR – Sbornik* **69** (1), 143–153 (1991). <http://dx.doi.org/10.1070/SM1991v069n01ABEH001233>].
26. Rabotnov Yu. N. *Mechanics of a deformable solid*. Moscow, Nauka Publ. (1960). (In Russian)
27. Christensen R. *Introduction to the mechanics of composites*. Moscow, Mir Publ. (1982). (In Russian)
28. Grigolyuk E. I., Filstinsky L. A. *Perforated plates and shells*. Moscow, Nauka Publ. (1970). (In Russian)

29. Grigolyuk E. I., Fil'shtinsky L. A. *Periodic piecewise homogeneous elastic structures*. Moscow, Nauka Publ. (1992). (In Russian)
30. Vang Fo Fy G. A. Elastic constants and thermal expansion of some bodies having unhomogeneous regular structure. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **166** (4), 817–820 (1966). (In Russian)
31. Vang Fo Fy G. A. *Structures made of reinforced plastics*. Kiev, Tehnika Publ. (1971). (In Russian)
32. Vang Fo Fy G. A. *Theory of reinforced materials with coatings*. Kiev, Naukova Dumka Publ. (1971). (In Russian)
33. Grigolyuk E. I., Kovalev Yu. D., Fil'shtinskii L. A. Bending of a layer weakened by through tunnel cuts. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **317** (1), 51–53 (1991). (In Russian)
34. Kolpakov A. A., Kolpakov A. G. *Capacity and Transport in Contrast Composite Structures: Asymptotic Analysis and Applications*. Boca Raton, FL, CRC Press (2009).
35. Keller J. B., Flaherty J. E. Elastic behavior of composite media. *Comm. Pure. Appl. Math.* **26**, 565–580 (1973).
36. Kang H., Yu S. A proof of the Flaherty—Keller formula on the effective property of densely packed elastic composites. *Calc. Var.* **59**, 22 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00526-019-1692-z>
37. Kolpakov A. A. Numerical verification of the existence of the energy-concentration effect in a high-contrast heavy-charged composite material. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal* **80** (4), 166–172 (2007). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Eng. Phys. Thermophy.* **80** (4), 812–819 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10891-007-0109-6>].
38. Rakin S. I. Numerical Verification of the Existence of the Elastic Energy Localization Effect for Closely Spaced Rigid Disks. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal* **87** (1), 238–244 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Eng. Phys. Thermophy.* **87** (1), 246–252 (2014). <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1007-3>].
39. Boeing.com. Available at: <https://www.boeing.com/777x/reveal> (accessed: March 28, 2022).
40. CompositesWorld.com. Available at: <https://www.compositesworld.com/hashtag/a350> (accessed: March 28, 2022).
41. Kaufmann J. New Materials for sports equipment made of anisotropic fiber-reinforced plastics with stiffness related coupling effect. *Procedia Engineering* **112**, 140–145 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.189>
42. Kolpakov A. A., Kolpakov A. G. Solution of the laminated plate design problem: new problems and algorithms. *Computers & Structures* **83** (12–13), 964–975 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.08.012>
43. Kolpakov A. A. Design of a Laminated Plate Possessing the Required Stiffnesses Using the Minimum Number of Materials and Layers. *J. Elasticity* **86**, 245–261 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10659-006-9092-y>
44. Cao S., Zhang J., Wu J., Chen J. Analysis of orange peel defect in St14 steel sheet by electron backscattered diffraction (EBSD). *J. Mater. Sci. Technology* **21**, 17–20 (2005).
45. Vonach W., Rammerstorfer F. A general approach to the wrinkling instability of sandwich plates. *Struct. Eng. Mech.* **12** (4), 363–376 (2001). <https://doi.org/10.12989/sem.2001.12.4.363>
46. Vescovini R., D'Ottavio M., Dozio L., Polit O. Buckling and wrinkling of anisotropic sandwich plates. *Int. J. Eng. Sci.* **130**, 136–156 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.05.010>

Received: February 8, 2022

Revised: February 24, 2022

Accepted: March 3, 2022

Authors' information:

Boris D. Annin — annin@hydro.nsc.ru

Aleksandr G. Kolpakov — algk@ngs.ru

Sergey I. Rakin — rakinsi@ngs.ru