УДК 911.8

Вестник СПбГУ. Науки о Земле. 2022. Т. 67. Вып. 2

Формирование иерархии поселений: правило Зипфа vs теория центральных мест*

Р. В. Дмитриев

Институт географии РАН,
Российская Федерация, 119017, Москва, Старомонетный пер., 29
Институт Африки РАН,
Российская Федерация, 123001, Москва, ул. Спиридоновка, 30/1

Для цитирования: Дмитриев, Р. В. (2022). Формирование иерархии поселений: правило Зипфа vs теория центральных мест. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Науки о Земле,* 67 (2), 318–332. https://doi.org/10.21638/spbu07.2022.206

Цель исследования состоит в сравнении возможностей и преимуществ формирования иерархии поселений по Зипфу и по Кристаллеру, начиная с первых этапов развития систем расселения. Автор установил, что минимальное число уровней иерархии, необходимое для начала формирования кристаллеровского распределения, минуя стадию распределения по Зипфу, при малых значениях уровня урбанизированности равно двум: первому уровню соответствует одно центральное место, второму — уровень сельских населенных пунктов. При фактически одинаковых возможностях формирования иерархии по Зипфу и по Кристаллеру на ее начальных этапах в отношении доли городского населения преимущества последней дают большие значения максимума доли каждого центрального места в населении обслуживаемой им зоны и меньшие затраты системы на перераспределение населения между уже существующими и возникающими на определенном этапе эволюции населенными пунктами. Таким образом, формирование иерархии по Кристаллеру на ранних этапах развития систем расселения более предпочтительно по сравнению с иерархией по Зипфу. При этом с ростом доли городского населения соответствие реального рангового распределения городов идеальному (по Зипфу) уменьшается. Автор установил, что распределение по Зипфу и по Кристаллеру есть своего рода две «несмешиваемые жидкости»: если первое основано на вероятностных процессах, то второе — на неслучайных, даже детерминированных. Переход системы расселения от распределения по Зипфу к иерархии по Кристаллеру представляет собой на данном этапе развития науки достаточно слабый в методологическом и логическом отношении конструкт.

Ключевые слова: теория центральных мест, правило Зипфа, иерархия поселений, случайный процесс, детерминированный процесс.

1. Введение и постановка проблемы

Вопрос о построении/выявлении иерархии — вероятно, один из самых сложных в географии поселений. Великое множество используемых для этого призна-

* Статья подготовлена по материалам исследований по темам ГЗ Института географии РАН АААА-А19-119022190170-1 (FMGE-2019-0008) и Института Африки РАН И222021500170-8. Методика исследования разработана в рамках темы ГЗ Института географии РАН; расчеты выполнены в рамках темы ГЗ Института Африки РАН.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

ков позволяет исследователю устанавливать наличие практически любого (ограниченного сверху, пожалуй, лишь числом самих поселений) количества групп, уровней иерархии и т. п. В рамках теории иерархия центральных мест обычно устанавливается на основе численности их населения или же объема выполняемых центральных функций. В русле настоящего исследования нас будет интересовать первая из них. При этом распределение центральных мест по уровням иерархии чаще всего проводится либо на основе собственно теории (ТЦМ), либо же — во взаимосвязи с ней — с помощью правила «ранг — размер». Главный недостаток обоих подходов, не преодоленный исследователями до сих пор, — в значительной степени искусственное распределение ЦМ по уровням иерархии, количественные границы между которыми проводятся достаточно произвольно.

В предшествующих исследованиях, посвященных этой теме, на ограниченном эмпирическом материале установлено начальное соответствие «целостных систем расселения… правилу Зипфа… и в дальнейшем постепенное формирование в этих системах иерархической структуры, приводящее к ухудшению соответствия правилу “ранг — размер” и улучшению соответствия предсказаниям теории центральных мест» (Шупер, 2014) и повышение соответствия этому правилу для городов по мере роста доли городского населения до 50 % и для агломераций — при больших значениях этого параметра (Važенин, 1999).

Мы же попытаемся ответить на следующие вопросы:

1. Действительно ли формирование иерархии по Кристаллеру фактически невозможно (вернее, затруднено в сравнении с формированием иерархии по Зипфу[1]) в теории при малых значениях уровня урбанизированности?

2. Есть ли разница в «энергетических затратах» при переходе от совокупности фактически независимых (то есть обслуживающих только самих себя и окружающую сельскую местность) поселений к упорядоченной по Зипфу или по Кристаллеру структуре?

3. В чем состоят методологические отличия распределений по Зипфу и по Кристаллеру?

2. Материалы и методы исследования

О правиле Зипфа и его вариациях, предшествующих самому правилу по времени возникновения или же последующих, написано достаточно много, в том числе и в географической литературе. Напомним лишь, что возникло оно в лоне стенографии (Estoup, 1908); несколько позже и фактически независимо от Ж.-Б. Эсту — выведено физиком Ф. Ауэрбахом (в 1913 г.) и с тех пор фактически присвоено географией[2]; далее — уточнено лингвистами (Zipf, 1935; 1941), под влиянием или во взаимодействии которых с математиками и получены наиболее важные теоретико-методологические результаты (Mandelbrot, 1954; Maslov, 2005); а в последние годы нашло применение даже в истории и теории политики (Гузев и др., 2017).

[1] В случае правила «ранг — размер» представляется более правильным говорить о распределении поселений, а не об иерархии, однако далее для удобства мы сохраним второе именование.

[2] Примечательно, что сам В. Кристаллер характеризовал «закон Ауэрбаха» как «не более, чем игру с цифрами» (Christaller, 1966).

Для лингвистов закон Зипфа состоит в следующем (Shreider, 1967): «пусть T — некоторый достаточно длинный текст, а S_T — его словник, т. е. перечень всех слов, участвующих в данном тексте. Обозначим через N_k количество вхождений k-го слова из словника S_T в текст T и занумеруем элементы словника в порядке убывания (невозрастания) величин N_k. Тогда выполняется следующая эмпирическая зависимость:

$$N_k \approx Ck^{-\gamma}». \tag{1}$$

Закон Зипфа представляет собой ранговое распределение, а «в ранговых распределениях участвуют только целые числа — ранг (номер)… объекта и число встречаемости… объекта: задается ранг и ему сопоставляется число встречаемости» (Maslov, 2006a). Далее, переходя в уравнении (1) от абсолютных значений к относительным, получаем, что «произведение номера слова на его частоту встречаемости есть (приблизительно) постоянная величина» (Maslov and Maslova, 2006).

Частота встречаемости будет нам весьма необходима в заключительной части статьи, пока же вернемся к правилу Зипфа в географии и отметим, что здесь переход от абсолютных значений к относительным не осуществляется, а сама традиционная формулировка (кстати, не представленная в численном виде в работе Ф. Ауэрбаха) выглядит следующим образом:

$$\frac{p_1}{p_n} = n, \tag{2}$$

где p_1 — численность населения первого поселения в списке ранжированных по убыванию значения этого показателя населенных пунктов; p_n — численность населения n-го поселения; n — ранг поселения в указанном списке.

Поскольку эта закономерность выполняется в указанном виде далеко не всегда (легче указать случаи, когда она выполняется!), исследователи — для улучшения соответствия — прибегают к калибровке уравнения (2) по конкретным совокупностям поселений: в уравнение дополнительно вводятся один[3] (чаще) или два[4] (реже) параметра. В таком виде уравнения, вероятно, были предложены впервые соответственно А. Лоткой (Lotka, 1925) и Ю. В. Медведковым (1964)[5]. Не избежал в свое время калибровочного соблазна и автор настоящей работы: в кандидатской диссертации (Дмитриев, 2011) мы использовали этот заманчивый прием — применительно, правда, не к правилу Зипфа, а к гравитационным моделям (Дмитриев, 2012).

Справедливо на методологическую уязвимость такого подхода в отзыве на кандидатский автореферат указал нам научный консультант по докторской диссертации В. А. Шупер, поскольку использование в знаменателе правой части уравнения (2) показателей степени, «имеющих значение, отличное от единицы, позволяет в огромной степени улучшить соответствие между эмпирическими данными и предсказаниями теории… Однако в таком… виде правило “ранг — размер” не позволяет формулировать фальсифицируемые, т. е. опровергаемые утверждения и, как следствие, не может рассматриваться в качестве научной теории» (Шупер,

[3] Показатель степени в правой части.

[4] Множитель в правой части.

[5] Отметим, что схожие изменения — хоть и в меньшем объеме в пересчете на количество публикаций — вносятся и в уравнения классической ТЦМ (Mulligan, 1984).

2021). Пересмотрев наш подход к этому вопросу, мы полностью солидаризируемся с В. А. Шупером и в дальнейшем, если не указано иное, будем иметь в виду под численным выражением правила Зипфа, отражающим соотношение между численностью населения уровней иерархии, уравнение вида (2)[6].

При этом в ТЦМ уравнение Бекманна — Парра, иллюстрирующее отношение численности населения центральных мест 1-го и n-го уровней иерархии, при условии постоянства значений параметров K и k для всех уровней (Дмитриев, 2019) имеет следующий вид:

$$\frac{p_1}{p_n} = \left(\frac{K-k}{1-k}\right)^{n-1}, \qquad (3)$$

где K — число ЦМ данного уровня иерархии, обслуживаемое одним ЦМ непосредственно предшествующего (более высокого) уровня, плюс оно само; k — доля центрального места в населении обслуживаемой им зоны; n — число уровней иерархии.

При условии стандартного зипфовского распределения n населенных пунктов образуют n уровней иерархии — по одному на каждом уровне: график зависимости численности i-го (от 1-го до n-го) населенного пункта от его ранга i представляет собой аналог гиперболы с фиксированными «концами» (без асимптот). В случае классического кристаллеровского распределения график представляет собой ломаную линию с горизонтальными площадками — уровнями иерархии, длина которых зависит от количества имеющих одинаковую численность населения центральных мест и выбранного исследователем горизонтального масштаба графика. Число центральных мест на каждой такой площадке (кроме первой) определяется выражением $K^{i-2}(K-1)$.

При этом в период количественной и теоретической революции в экономической географии предпринимались попытки совместить построения Зипфа и Кристаллера (прискорбно, что они практически не предпринимаются сейчас): сначала путем «зипфизации» Кристаллера (Beckmann, 1958) через сведение ступенчатой функции к гиперболической посредством введения случайной переменной и прихода к континуальности распределения населенных пунктов при постоянстве K; затем за счет «кристаллеризации» Зипфа через «замену заданной… гиперболы на приближенную ее ступенчатую функцию», чтобы «каждому элементу сопоставлялся ранговый определенный интервал» (Арапов и др., 1975). Тем не менее эти попытки не увенчались значительным успехом: наше критическое отношение к первой из них будет разъяснено в конце статьи, вторая же уводит нас от столь необходимого принципа фальсифицируемости (см. выше).

3. Результаты и их обсуждение

Как подчеркивал В. Бунге, анализируя иерархию по Зипфу и по Кристаллеру, «попытки рассмотреть распределение городов по размеру с какой-то другой

[6] А. А. Важенин на основе анализа анаморфированной гексагональной решетки делает вывод о «“мирном сосуществовании” двух распределений иерархии городов, одновременно отвечающих правилу Зипфа и теории центральных мест» (Важенин, 1997, с. 20). Однако поскольку анаморфирование решетки в этой работе проводилось в соответствии с правилом Зипфа с поправочными коэффициентами в уравнении (2), не удивительно, что два этих распределения стали «мирно сосуществовать» после фактически подгонки уравнения Зипфа под ТЦМ (и наоборот).

точки зрения представляются… произвольными» (Бунге, 157, 1967). В определенной степени мы согласны с его позицией — по крайней мере, в том отношении, что не будем рассматривать в этом исследовании иные распределения, помимо зипфовского и кристаллеровского. Вернемся непосредственно к рассмотрению поставленных в начале статьи вопросов. Первый из них сводится к тому, возможно ли формирование иерархии по Кристаллеру на самых ранних этапах — при появлении второго, третьего и так далее уровней иерархии в дополнение к уже существующему первому и сельским поселениям или же кристаллеровское распределение фактически следует (сменяет) в развивающихся системах расселения зипфовское, то есть «“кристаллеризация” территории должна сопровождаться ее “дезипфизацией”, ухудшением соответствия правилу Зипфа в его классическом… виде» (Шупер, 1980).

Автором было получено уравнение (Дмитриев, 2021), позволяющее определить долю городского населения (φ) для участка бесконечной кристаллеровской решетки. Будучи преобразованным, для изолированной решетки оно выглядит следующим образом:

$$\frac{1-\varphi}{1-k}=\left[\frac{K(1-k)}{K-k}\right]^{n-2} \Leftrightarrow \frac{1-\varphi}{1-k}=\left[1+\frac{k(1-K)}{K-k}\right]^{n-2}. \tag{4}$$

Далее проверим справедливость следующих утверждений — одного неравенства и двух систем уравнений:

$$\frac{k(1-K)}{K-k}>-1, \tag{5}$$

$$\begin{cases} n-2=0 \\ \left[1+\frac{k(1-K)}{K-k}\right]^{n-2}=1+(n-2)\left(\frac{k(1-K)}{K-k}\right), \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} n-2=1 \\ \left[1+\frac{k(1-K)}{K-k}\right]^{n-2}=1+(n-2)\left(\frac{k(1-K)}{K-k}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, что неравенство (5) выполняется при $K>1$ и $k<1$, то есть при стандартных накладываемых ТЦМ на данные показатели ограничениях. Системы уравнений (6) и (7) выполняются всегда. Тогда для любого $(n-2)$, принадлежащего множеству натуральных чисел с включенным нулем, имеем справедливость следующего неравенства Бернулли:

$$\left[1+\frac{k(1-K)}{K-k}\right]^{n-2}\geq 1+(n-2)\frac{k(1-K)}{K-k}.$$

Из уравнения (4) в этом случае получаем:

$$\frac{1-\varphi}{1-k} \geq 1+(n-2)\frac{k(1-K)}{K-k} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n \geq 2+\frac{(\varphi-k)(K-k)}{k(K-1)(1-k)}\,. \tag{8}$$

Именно при определяемом неравенством (8) числе уровней может начинаться формирование кристаллеровской иерархии. Первое слагаемое в правой его части представляет собой сумму числа уровней — первого (с одним центральным местом) и последнего (представленного в частном случае сельскими поселениями, обслуживающими только себя). Значение второго слагаемого нам необходимо оценить снизу — тогда мы сможем точно сказать, при образовании какого именно уровня иерархии формируется распределение ЦМ по Кристаллеру. Возьмем на себя смелость оценить его минимально, то есть

$$\frac{(\varphi-k)(K-k)}{k(K-1)(1-k)}=0. \tag{9}$$

Суть неравенства (8) при выполнении (9) заключается в том, что в системе присутствуют лишь два уровня иерархии ЦМ, представленные сельскими поселениями и единственным выделившимся из их числа городом. Очевидно, справедливо (9) лишь при $\varphi=k$, то есть при наличии в системе единственного города — ЦМ.

Второй вопрос, который был обозначен в начале статьи, можно свести к следующему: какая из иерархий — по Зипфу или по Кристаллеру — вызывает на ранних этапах своего формирования наименьшие возмущения в населении совокупности/системы поселений? То есть в конечном счете «по какой» из них лучше развиваться системе? Для ответа на этот вопрос сначала — как это было сделано выше — установим, при появлении какого уровня иерархии может начаться формирование распределения по Зипфу. Будем использовать те же обозначения, что и в случае распределения по Кристаллеру. Тогда доля городского населения системы в общем случае выражается следующим уравнением:

$$\varphi=\frac{p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n}{P_1},$$

где P_1 — численность населения всей системы ЦМ.

Несколько преобразуем его, принимая во внимание предполагаемое зипфовское распределение:

$$\varphi=\frac{p_1+\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{3}+\cdots+\frac{p_1}{n}}{P_1}=\frac{p_1}{P_1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right). \tag{10}$$

Очевидно, первый множитель в правой части (10) есть k. Представим, что после поселения первого уровня появляется поселение второго уровня, как это имеет место со сравниваемой иерархией по Кристаллеру. Тогда (10) сводится к следующему выражению:

$$\varphi = k\frac{3}{2}.$$

При возможном максимуме φ максимум k составляет 0.667 (округленно). При таком же числе уровней иерархии максимум k в рамках кристаллеровской иерархии несколько меньше (округленно): от 0.586 при $K=2$ до 0.519 при $K=7$ (Дмитриев, 2019). Однако же, начиная со следующего уровня иерархии, в более свободном положении оказывается именно распределение по Кристаллеру (поскольку, как уже было показано в (Дмитриев, 2021), в рамках дальнейшей эволюции происходит появление ЦМ новых уровней иерархии при постоянстве $K=2$): при сохранении для него на этом этапе максимума k в 0.586 долей единицы, максимум k для распределения по Зипфу снижается до 0.545/0.480/0.438/… при 3/4/5/… уровнях иерархии.

Тенденция уже видна, однако возьмем для проверки гипотетически большее число уровней иерархии. Второй множитель в правой части (10) представляет собой n-е гармоническое число, т. е. частичную сумму n первых членов гармонического ряда. Применяя формулу Эйлера как асимптотическое выражение, получаем:

$$\varphi \approx k\left(ln\left(n\right)+\gamma\right),$$

где γ — постоянная Эйлера — Маскерони, $\gamma = 0.5772$.

К примеру, при 100 уровнях иерархии максимальное значение k в рамках распределения по Зипфу составляет менее 0.2 долей единицы, в то время как в рамках распределения по Кристаллеру — все те же 0.586.

Далее попробуем оценить, каковы же «энергетические затраты» системы при формировании одного из двух типов иерархии. Зададим достаточно строгие условия: 1) имеем две системы расселения с одинаковой и постоянной численностью населения; 2) каждая из них представлена одним городским поселением с постоянной численностью населения ($k=0.1$) и некоторым числом сельских поселений; 3) обе системы изолированы.

Таким образом, любые изменения численности населения возможны только лишь в результате его перемещений между населенными пунктами разных типов (разные уровни иерархии или сельская местность). Далее сравнивалась накопленная за каждый шаг эволюции иерархической структуры по Зипфу и по Кристаллеру численность населения системы (шаги с первого по восьмой представлены в табл. 1). Затем данная процедура была пошагово проделана до числа поселений в обоих типах иерархии, соответствующего таковому при $K=7$ и $n=4$ (не считая уровня сельских поселений) в изолированной кристаллеровской решетке. При этом на каждом шаге эволюции накопленная численность населения в рамках сложившейся иерархии по Зипфу превышала таковую по Кристаллеру. Объяснение этой закономерности следует искать в том населении, которое «расходуется» на каждом шаге эволюции: в случае иерархии Зипфа население нового города берется (вычитается) из сельского населения, в то время как при построении иерархии по Кристаллеру село не так сильно теряет население — часть «потерь» компенсируется за счет снижения численности населения поселений, уже образовавшихся на данном уровне, в пользу новых.

Таблица 1. **Сравнение численности населения, накопленной системой расселения в результате пошагового построения иерархии по Зипфу и по Кристаллеру**

Шаг эволюции	Изменения в числе центральных мест и уровнях по отношению к предыдущему шагу		Накопленная численность населения без учета 1-го уровня	
	Иерархия по Зипфу	Иерархия по Кристаллеру	Иерархия по Зипфу	Иерархия Кристаллеру
1	+1 город на 2-м уровне	+1 город на 2-м уровне	$\frac{p_1}{2}$	$p_1\left(\frac{1-k}{2-k}\right)$
2	+1 город на 3-м уровне	+1 город на 2-м уровне	$\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{3}$	$2p_1\left(\frac{1-k}{3-k}\right)$
3	+1 город на 4-м уровне	+1 город на 2-м уровне	$\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{3}+\frac{p_1}{4}$	$3p_1\left(\frac{1-k}{4-k}\right)$
4	+1 город на 5-м уровне	+1 город на 2-м уровне	$\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{3}+\frac{p_1}{4}+\frac{p_1}{5}$	$4p_1\left(\frac{1-k}{5-k}\right)$
5	+1 город на 6-м уровне	+1 город на 2-м уровне	$\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{3}+\frac{p_1}{4}+\frac{p_1}{5}+\frac{p_1}{6}$	$5p_1\left(\frac{1-k}{6-k}\right)$
6	+1 город на 7-м уровне	+1 город на 2-м уровне	$\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{3}+\frac{p_1}{4}+\frac{p_1}{5}+\frac{p_1}{6}+\frac{p_1}{7}$	$6p_1\left(\frac{1-k}{7-k}\right)$
7	+1 город на 8-м уровне	+1 город на 3-м уровне	$\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{3}+\frac{p_1}{4}+\frac{p_1}{5}+\frac{p_1}{6}+\frac{p_1}{7}+\frac{p_1}{8}$	$6p_1\left(\frac{1-k}{7-k}\right)+p_1\left(\frac{1-k}{2-k}\right)^2$
8	+1 город на 9-м уровне	+1 город на 3-м уровне	$\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{3}+\frac{p_1}{4}+\frac{p_1}{5}+\frac{p_1}{6}+\frac{p_1}{7}+\frac{p_1}{8}+\frac{p_1}{9}$	$6p_1\left(\frac{1-k}{7-k}\right)+2p_1\left(\frac{1-k}{2-k}\right)^2$

Примечание. Рассчитано и составлено автором.

Нуждается в уточнении следующая фраза А. Д. Арманда: «На расшифровку гиперболического распределения (или близкого к нему распределения Зипфа) потрачено много интеллектуальной энергии, и до сих пор не все тут понятно. Но похоже, что вогнутая кривая начинает просвечивать в условиях слабых взаимодействий множества однотипных элементов, когда система еще как будто не заслуживает названия системы, но и просто множеством ее называть уже неловко. Причем эта совокупность питается… из одного и того же источника ресурсов» (Арманд, 2001). Однако на самом деле «просвечивать в условиях слабых взаимодействий» начинает скорее ступенчатый график функции Кристаллера, а не вогнутая кривая Зипфа. При этом «питаются» в рамках построения иерархии новые населенные пункты не обязательно из одного источника, если подразумевать под ним уже существующие городские поселения или сельскую местность: жизнь городам в случае формирования распределения по Зипфу дает только село, а по Кристаллеру — и уже сформировавшиеся города.

Вернемся к утверждению А. А. Важенина, в соответствии с которым система городов все более соответствует правилу Зипфа по мере роста доли городского населения до 50 % (Важенин, 1999). Рассмотрим первые n городов некой системы; степень отклонения реального распределения городов от идеального (по Зипфу — уравнение (2)) определяется следующим образом[7]:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\left|p_i^{\text{реал}} - p_i^{\text{идеал}}\right|, \tag{11}$$

где $p_i^{\text{реал}}$ — реальная численность населения города i-го ранга в ряду поселений, составленном по убыванию их людности; $p_i^{\text{идеал}}$ — соответствующая идеальная численность в рамках зипфовского распределения; n — число взятых для рассмотрения городов системы[8].

Далее рассмотрим наиболее простой случай — систему с постоянной людностью 1-го города, при этом значение реальной численности населения города каждого следующего ранга будем считать превышающим соответствующее идеальное значение. Тогда (11) имеет следующий вид:

$$nA = \left(p_2^{\text{реал}} - p_2^{\text{идеал}}\right) + \left(p_3^{\text{реал}} - p_3^{\text{идеал}}\right) + \ldots + \left(p_n^{\text{реал}} - p_n^{\text{идеал}}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow nA = \left(p_2^{\text{реал}} + p_3^{\text{реал}} + \ldots + p_n^{\text{реал}}\right) - \left(p_2^{\text{идеал}} + p_3^{\text{идеал}} + \ldots + p_n^{\text{идеал}}\right).$$

[7] Поскольку значения численности населения первого города для реального и идеального распределения одинаковы, суммирование производится, начиная со второго по людности города. Знак модуля необходим, поскольку в общем случае для каждого ранга отклонения могут быть как положительными, так и отрицательными.

[8] Специалистами в области статистики показано, что наибольшее отклонение от графика идеального распределения имеет «голова» и «хвост» реального распределения. В этой связи для рассмотрения целесообразно брать либо оба этих участка, либо же один из них (предпочтительно — «голову»). Поскольку при прочих равных условиях значение A зависит от количества рассматриваемых городов, при сравнении систем по состоянию на разные временные отсечки необходимо проводить анализ как можно более близких по числу городов «голов» распределения.

Перенесем сумму идеальных значений людности в левую часть уравнения и добавим к обеим частям численность населения первого города:

$$nA + \left(p_1^{\text{идеал}} + p_2^{\text{идеал}} + \ldots + p_n^{\text{идеал}}\right) = \left(p_1^{\text{реал}} + p_2^{\text{реал}} + \ldots + p_n^{\text{реал}}\right). \tag{12}$$

Поскольку идеальная численность городского населения представляет собой константу (const), уравнение (12) имеет общий вид $ax + b = y$, т.е. представляет собой уравнение прямой. Из этого следует, что увеличение (уменьшение) реальной численности городского населения приводит к соответствующему увеличению (уменьшению) значения A. Разделим левую и правую части (12) на общую численность населения всей системы (P_1). Тогда

$$\frac{nA + \text{const}}{P_1} = \varphi,$$

где φ — доля городского населения системы.

Иными словами, с ростом доли городского населения в системе усиливается отклонение реального распределения городов от идеального (по Зипфу).

Третий вопрос настоящей статьи сводится к тому, какая из иерархий — зипфовская или кристаллеровская — вызывает меньше всего логических и/или методологических противоречий в рамках своего формирования. Однако почему бы населению не сосредоточиться в небольшом числе достаточно крупных населенных пунктов? В. П. Маслов подчеркивает в этой связи, что «… для городов слишком большая перегрузка населения может привести к фазовому переходу и потере равновесия, как если бы в одной части лодки скопилось слишком большое количество людей» (Maslov, 2006b). При ответе на второй вопрос статьи мы принимали в качестве данности соответствие шагов эволюции кристаллеровской и зипфовской иерархий: и если в первой (Дмитриев, 2021) мы достаточно уверены, то к иерархии по Зипфу на самом деле вообще нельзя подходить с мерилом какой-либо четкой последовательности. Причина этого кроется в том, что «… корпус данных, удовлетворяющих закону Зипфа, возникает из последовательности наблюдений за некоторой системой, демонстрирующей стохастическое поведение» (Manin, 2014), при предположении о том, что «темп роста города — случайная величина, имеющая постоянное среднее значение и неизменную дисперсию; в пределе распределение размера городов будет иметь свойства, отвечающие закону Зипфа» (Коломак, 2016), то есть в конечном счете «… население любого города прирастает пропорционально уже имеющемуся числу его жителей» (Trubnikov and Rumynskii, 1991).

Иными словами, формирование зипфовского распределения есть совокупность случайных процессов. Недаром оно отнесено к числу «так называемых пяти великих распределений вероятностей» (Трубников и Трубникова, 2004), а отечественными исследователями предложена (Guseyn-Zade, 1977) энтропийная модель[9] «совокупностей городских поселений», для которых «имеются основания использовать эпитет “невзаимодействующие”» (Gusein-Zade, 1988). При этом вызывает много вопросов отсутствие в географической формулировке правила Зип-

[9] Вероятно, первенство в применение энтропийных моделей при изучении расселения населения принадлежит Ю. В. Медведкову (Медведков, 1968).

фа фактически необходимого перехода от абсолютных к относительным (то есть вероятностным) показателям — не ясно даже, о каких относительных показателях в случае городов может идти речь, а их отсутствие ослабляет модель столь сильно, что делает ее практически нерабочей. При этом многие исследователи (к примеру, П. Кругман) отмечали, что «вопрос, почему справедлив закон Зипфа, подменяется вопросом, почему справедлив степенной закон распределения» (Сидоров, 2018).

Выбираемая для анализа на соответствие зипфовскому распределению совокупность поселений представляет собой мгновенную «фотографию», объяснение сути которой сводится в большинстве работ не к выявлению причин, побудивших поселения выстраиваться в соответствии с этой иерархией (Абрамова, 2013), а к калибровке основного уравнения и выдвижению гипотез о необходимости государственного регулирования расселенческих процессов для большего ему удовлетворения. Пожалуй, главная методологическая слабость заключается здесь в том, что для анализа традиционно берутся взаимодействующие между собой поселения, хотя «модель Зипфа… не применима к ряду естественным образом выделяемых и представляющих содержательный интерес совокупностей городов» (Gusein-Zade, 1988). Еще больше вопросов вызывают попытки выдвижения предложений по «руководству» развитием расселенческих процессов, встречающиеся во многих работах (Рунов, 2003). Действительно, «простота и некоторая универсальность закона Зипфа являются свойствами, которые привлекают исследователей, однако выявление отклонений от этого правила не может трактоваться как свидетельство дефектов в городской системе страны и неэффективности механизмов ее формирования» (Коломак, 2016).

4. Выводы

Число уровней, с которого возможно начало формирования кристаллеровской иерархии, равно двум: первому уровню соответствует одно центральное место, второму — уровень сельских населенных пунктов. В этой связи можно с уверенностью ответить на первый вопрос статьи следующим образом. Формирование кристаллеровской иерархии возможно на самых ранних этапах развития системы ЦМ, минуя стадию иерархии по Зипфу — даже при малых значения уровня урбанизированности (Горохов и Дмитриев, 2009).

При фактически одинаковых возможностях формирования иерархии по Зипфу и по Кристаллеру на ее начальных этапах в отношении доли городского населения φ, преимущества последней дают бо́льшие значения максимума доли каждого ЦМ в населении обслуживаемой им зоны (k) и меньшие затраты системы на перераспределение населения между населенными пунктами (меньшая накопленная численность населения без учета 1-го уровня в табл. 1). Таким образом, отвечая на второй вопрос статьи, мы констатируем, что формирование иерархии по Кристаллеру на ранних этапах развития систем расселения более предпочтительно по сравнению с иерархией по Зипфу. При этом с ростом доли городского населения соответствие реального рангового распределения городов идеальному (по Зипфу) уменьшается.

Отвечая на третий вопрос статьи, мы вынуждены заключить, что распределение по Зипфу и по Кристаллеру — своего рода две «несмешиваемые жидкости»:

если первое основано на вероятностных процессах, то второе — на неслучайных, даже детерминированных. Переход системы расселения от распределения по Зипфу к распределению по Кристаллеру представляет собой на данном этапе развития науки достаточно слабый в методологическом и логическом отношении конструкт.

Литература

Абрамова, И.О. (2013). Урбанизация в Африке: двигатель или тормоз экономического роста? *Азия и Африка сегодня*, 8 (673), 2–9.

Арапов, М.В., Ефимова, Е.Н., Шрейдер, Ю.А. (1975). О смысле ранговых распределений. *Научно-техническая информация. Сер. 2*, 1, 9–20. [online] Доступно на: http://kudrinbi.ru/public/442/index.htm [Дата доступа 06.11.2020].

Арманд, А.Д. (2001). *Эксперимент «Гея». Проблема живой Земли*. М.: Сиринъ садхана, 80–81.

Бунге, В. (1967). *Теоретическая география*. М.: Прогресс.

Важенин, А.А. (1997). *Эволюционные процессы в системах расселения*. Екатеринбург: УрО РАН, 20.

Важенин, А.А. (1999). Устойчивость распределения городских поселений в системах расселения. *Известия Российской академии наук. Серия географическая*, 1, 55–59.

Горохов, С.А., Дмитриев, Р.В. (2009). Парадоксы урбанизации современной Индии. *География в школе*, 2, 17–23.

Гузев, М.А., Крадин, Н.Н., Никитина, Е.Ю. (2017). Ранговый анализ жизненного цикла политий. *Дальневосточный математический журнал*, 17 (2), 180–190.

Дмитриев, Р.В. (2011). *Роль надагломерационных структур в формировании опорного каркаса расселения Индии*. Дис… канд. географ. наук.

Дмитриев, Р.В. (2012). Использование гравитационных моделей для пространственного анализа систем расселения. *Народонаселение*, 2 (56), 41–47.

Дмитриев, Р.В. (2019). К вопросу о постоянстве значения доли центрального места в населении обслуживаемой им зоны для всех уровней кристаллеровской иерархии. *Известия Российской академии наук. Серия географическая*, 1, 128–135. https://doi.org/10.31857/S2587-556620191128-135

Дмитриев, Р.В. (2021). Эволюция систем расселения в аспекте классической теории центральных мест. *Известия Российской академии наук. Серия географическая*, 85 (2), 165–175. https://doi.org/10.31857/S2587556621020047

Коломак, Е.А. (2016). О чем говорит отклонение от закона Ципфа? *ЭКО*, 11, 121–128.

Медведков, Ю.В. (1964). О размерах городов, объединенных в систему. В: *Количественные методы исследования в экономической географии*. М.: ВИНИТИ — МФГО, 90–121.

Медведков, Ю.В. (1968). Топологический анализ сетей населенных мест. В: *Вопросы географии. Сб. 77. Математика в экономической географии*. М.: Мысль, 159–167.

Рунов, Б.Б. (2003). Некоторые новые акценты в стратегии развития. *Ученые записки Института Африки РАН*, 25, 34–53.

Сидоров, А.В. (2018). Городские издержки и их роль в теории центральных мест a lá Кристаллер — Леш. *Журнал Новой экономической ассоциации*, 4 (40), 12–31. https://doi.org/10.31737/2221-2264-2018-40-4-1

Трубников, Б.А., Трубникова, О.Б. (2004). Пять великих распределений вероятностей. *Природа*, 11, 13–20.

Шупер, В.А. (1980). *Исследование метрики социально-географического пространства (на примере Центра Европейской части РСФСР)*. Дис. … канд. географ. наук.

Шупер, В.А. (2014). Территориальная самоорганизация общества как область исследований и учебная дисциплина. *Региональные исследования*, 4 (46), 40–48.

Шупер, В.А. (2021). *Территориальная самоорганизация*. Сайт С.П.Курдюмова. [online] Доступно на: http://spkurdyumov.ru/education/territorialnaya-samoorganizaciyaprogramma-speckursa/ [Дата доступа 17.01.2021].

Beckmann, M.J. (1958). City Hierarchies and the Distribution of City Size. *Economic Development and Cultural Change*, 6 (3), 243–248. https://doi.org/10.1086/449769

Christaller, W. (1966). *Central Places in Southern Germany*. Translated by C.W.Baskin. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Estoup, J. B. (1908). *Gammes Sténographiques: Recueil de Textes Choisis Pour l'Acquisition Méthodique de la Vitesse, Précédé d'Une Introduction*. París: Institut Sténographique.
Guseyn-Zade, S. M. (1977) A Zipf-Type Formula for a Set of Noninteracting Urban Places. *Soviet Geography*, 18 (1), 56–59. https://doi.org/10.1080/00385417.1977.10640157
Gusein-Zade, S. M. (1988). On the Frequency Distribution of Russian Letters. *Problems of Information Transmission*, 24 (4), 338–342.
Lotka, A. J. (1925). *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Williams & Wilkins Co.
Mandelbrot, B. (1954). Structure Formelle des Textes et Communication. *Word*, 10 (1), 1–27. https://doi.org/10.1080/00437956.1954.11659509
Manin, Y. I. (2014). Zipf's law and L. Levin Probability Distributions. *Functional Analysis and Its Applications*, 48, 116–127. https://doi.org/10.1007/s10688-014-0052-1
Maslov, V. P. (2005). On a General Theorem of Set Theory Leading to the Gibbs, Bose-Einstein, and Pareto Distributions as well as to the Zipf-Mandelbrot Law for the Stock Market. *Mathematical Notes*, 78, 807–813. https://doi.org/10.1007/s11006-005-0186-9
Maslov, V. P. (2006a). Bose Gas of Anharmonic Oscillators and Refinement of the Zipf Law. *Theoretical and Mathematical Physics,* 148, 1295–1296. https://doi.org/10.1007/s11232-006-0117-2
Maslov, V. P. (2006b). The Lack-of-Preference Law and the Corresponding Distributions in Frequency Probability Theory. *Mathematical Notes*, 80, 214–223. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0130-7
Maslov, V. P. and Maslova, T. V. (2006). On Zipf's Law and Rank Distributions in Linguistics and Semiotics. *Mathematical Notes*, 80, 679–691. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0189-1
Mulligan, G. F. (1984) Agglomeration and Central Place Theory: A Review of the Literature. *International Regional Science Review*, 9 (1), 1–42. https://doi.org/10.1177/016001768400900101
Shreider, Yu. A. (1967). Theoretical Derivation of Text Statistical Features (A Possible Proof of Zipf's Law). *Problems of Information Transmission*, 3 (1), 45–49.
Trubnikov, B. A. and Rumynskii, I. A. (1991). A Simple Derivation of the Zipf — Krylov Law for Words and the Possibility of Its "Evolution" Interpretation. *Doklady Mathematics*, 36 (11), 739–742.
Zipf, G. K. (1935). *The Psychobiology of Language: An Introduction to Dynamic Philology*. Boston: Houghton-Mifflin.
Zipf, G. K. (1941). *National Unity and Disunity: The Nation as a Bio-Social Organism*. Bloomington: Principia Press.

Статья поступила в редакцию 28 августа 2021 г.
Статья рекомендована к печати 18 апреля 2022 г.

Контактная информация:

Дмитриев Руслан Васильевич — dmitrievrv@yandex.ru

Formation of the settlement hierarchy: Zipf's law vs Central place theory*

R. V. Dmitriev

Institute of Geography, Russian Academy of Sciences,
29, Staromonetniy per., Moscow, 119017, Russian Federation
Institute for African Studies, Russian Academy of Sciences,
30/1, Spiridonovka ul., Moscow, 123001, Russian Federation

For citation: Dmitriev, R. V. (2022). Formation of the settlement hierarchy: Zipf's law vs Central place theory. *Vestnik of Saint Petersburg University. Earth Sciences*, 67 (2), 318–332.
https://doi.org/10.21638/spbu07.2022.206 (In Russian)

* This article was supported within state assignments of the Institute of Geography, Russian Academy of Sciences (AAAA-A19-119022190170-1 (FMGE-2019-0008)) and the Institute for African Studies, Russian Academy of Sciences (I222021500170-8). The research methodology was developed within the state assignment of the Institute of Geography, Russian Academy of Sciences; the calculations were performed within the state assignment of the Institute for African Studies, Russian Academy of Sciences.

This study compares the possibilities and advantages of forming the settlement hierarchy according to Zipf and according to Christaller, starting from the first stages of the settlement systems development. The author found that the minimum number of hierarchy levels required to start the formation of the Christaller distribution, bypassing the Zipf distribution stage, for small values of the urbanization level was two: the first one, represented by one central place, and the level of rural settlements. With virtually the same possibilities of forming a hierarchy according to Zipf and according to Christaller at its initial stages in relation to the share of urban population, the advantages of the latter give large values of the maximum share of each central place in the population of the area it serves and lower costs of the system for the redistribution of the population between the existing settlements and the settlements emerging at a certain stage of evolution. At the same time, with an increase in the share of the urban population, the correspondence of the real rank-size distribution of cities to the ideal one (according to Zipf) decreases. The author established that the distribution according to Zipf and according to Christaller is a kind of two "immiscible liquids": if the first is based on stochastic processes, then the second is based on non-random, even deterministic ones. The transition of the settlement system from the distribution according to Zipf to the hierarchy according to Christaller is a rather weak construct in the methodological and logical respect.

Keywords: Central place theory, Zipf's law, settlement hierarchy, stochastic process, deterministic process.

References

Abramova, I.O. (2013). Urbanization in Africa: a Driver or an Obstacle in Economic Growth? *Asia and Africa today*, 8 (673), 2–9. (In Russian)

Arapov, M.V., Efimova, E.N. and Shreider, Yu. A. (1975). On the meaning of rank distributions. *Nauchno-tekhnicheskaia informatsiia, Ser. 2*, 1, 9–20. [online] Available at: http://kudrinbi.ru/public/442/index.htm [Accessed 06 Nov. 2020]. (In Russian)

Armand, A.D. (2001). *Eksperiment «Geya». Problema zhivoy Zemli* [*Gaia Experiment. The Problem of the Living Earth*]. Moscow: Sirin" Sadkhana Publ., 80–81. (In Russian)

Beckmann, M.J. (1958). City Hierarchies and the Distribution of City Size. *Economic Development and Cultural Change*, 6 (3), 243–248. https://doi.org/10.1086/449769

Bunge, W. (1967). *Theoretical Geography*. Moscow: Progress Publ. (In Russian)

Christaller, W. (1966). *Central Places in Southern Germany*. Translated by C.W.Baskin. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Dmitriev, R.V. (2011). *The role of supra-agglomeration structures in the formation of the India urban skeleton*. PhD thesis. Moscow Pedagogical State University.

Dmitriev, R.V. (2012). Application of gravity models to spatial analysis of settlement systems. *Population*, 2 (56), 41–47. (In Russian)

Dmitriev, R.V. (2019). Is the share of a central place in the population of the area, served by this central place, a constant for all levels of the Christaller's hierarchy? *Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriia Geograficheskaia*, 1, 128–135. https://doi.org/10.31857/S2587-556620191128-135 (In Russian)

Dmitriev, R.V. (2021). The Evolution of Settlement Systems in Classic Central Place Theory. *Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriia Geographicheskaia*, 85 (2), 165–175. https://doi.org/10.31857/S2587556621020047 (In Russian)

Estoup, J.B. (1908). *Gammes Sténographiques: Recueil de Textes Choisis Pour l'Acquisition Méthodique de la Vitesse, Précédé d'Une Introduction*. París: Institut Sténographique.

Gorokhov, S.A. and Dmitriev, R.V. (2009). The paradoxes of urbanization in modern India. *Geographiia v shkole*, 2, 17–23. (In Russian)

Guseyn-Zade, S.M. (1977) A Zipf-Type Formula for a Set of Noninteracting Urban Places. *Soviet Geography*, 18 (1), 56–59. https://doi.org/10.1080/00385417.1977.10640157

Gusein-Zade, S.M. (1988). On the Frequency Distribution of Russian Letters. *Problems of Information Transmission*, 24 (4), 338–342.

Guzev, M.A., Kradin, N.N. and Nikitina, E.Y. (2017). Ranked analysis of the life cycle of polities. *Far Eastern Mathematical Journal*, 17 (2), 180–190. (In Russian)

Kolomak, E. A. (2016). What does tell a deviation from Zipf's law? *ECO*, 11, 121–128. (In Russian)
Lotka, A. J. (1925). *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Williams & Wilkins Co.
Mandelbrot, B. (1954). Structure Formelle des Textes et Communication. *Word*, 10 (1), 1–27. https://doi.org/10.1080/00437956.1954.11659509
Manin, Y. I. (2014). Zipf's law and L. Levin Probability Distributions. *Functional Analysis and Its Applications*, 48, 116–127. https://doi.org/10.1007/s10688-014-0052-1
Maslov, V. P. (2005). On a General Theorem of Set Theory Leading to the Gibbs, Bose-Einstein, and Pareto Distributions as well as to the Zipf-Mandelbrot Law for the Stock Market. *Mathematical Notes*, 78, 807–813. https://doi.org/10.1007/s11006-005-0186-9
Maslov, V. P. (2006a). Bose Gas of Anharmonic Oscillators and Refinement of the Zipf Law. *Theoretical and Mathematical Physics,* 148, 1295–1296. https://doi.org/10.1007/s11232-006-0117-2
Maslov, V. P. (2006b). The Lack-of-Preference Law and the Corresponding Distributions in Frequency Probability Theory. *Mathematical Notes*, 80, 214–223. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0130-7
Maslov, V. P. and Maslova, T. V. (2006). On Zipf's Law and Rank Distributions in Linguistics and Semiotics. *Mathematical Notes*, 80, 679–691. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0189-1
Medvedkov, Yu. V. (1964) On the Size of Cities Belonging to a System. In: *Kolichestvennye metody issledovaniia v ekonomicheskoi geografii*. Moscow: Soviet Geographical Society and VINITI Publ., 90–121. (In Russian)
Medvedkov, Yu. V. (1968). Topological analysis of networks of settlements. In: *Voprosy geografii. Sb. 77. Matematika v ekonomicheskoi geografii*. Moscow: Mysl' Publ., 159–167. (In Russian)
Mulligan, G. F. (1984) Agglomeration and Central Place Theory: A Review of the Literature. *International Regional Science Review*, 9 (1), 1–42. https://doi.org/10.1177/016001768400900101
Runov, B. B. (2003). Some new accents in development strategy. *Journal of the Institute for African Studies*, 25, 34–53. (In Russian)
Shreider, Yu. A. (1967). Theoretical Derivation of Text Statistical Features (A Possible Proof of Zipf's Law). *Problems of Information Transmission*, 3 (1), 45–49.
Shuper V. A. (2014). Society spatial self-organization as a research field and university course. *Regional'nye issledovaniia*, 4 (46), 40–48. (In Russian)
Shuper, V. A. (1980). *Study of the metrics of socio-geographical space (on the example of the Center of the European part of the RSFSR)*. PhD thesis. Institute of Geography, Academy of Sciences of the USSR.
Shuper, V. A. (2021). Territorial self-organization. *S. P. Kurdyumov*. [online] Available at: http://spkurdyumov.ru/education/territorialnaya-samoorganizaciyaprogramma-speckursa/ [Accessed 17 Jan. 2021]. (In Russian)
Sidorov, A. V. (2018). Urban Costs and their Role in a Central Places Theory a lá Christaller–Lösch. *Zhurnal novoi ekonomicheskoi assotsiatsii,* 4 (40), 12–31, 13. (In Russian) https://doi.org/10.31737/2221-2264-2018-40-4-1
Trubnikov, B. A. and Rumynskii, I. A. (1991). A Simple Derivation of the Zipf — Krylov Law for Words and the Possibility of Its "Evolution" Interpretation. *Doklady Mathematics*, 36 (11), 739–742.
Trubnikov, B. A. and Trubnikova, O. B. (2004). Five great probability distributions. *Priroda*, 11, 13–20. (In Russian)
Vazhenin, A. A. (1997). *Evolutionary processes in settlement systems.* Yekaterinburg: UrO RAN, 20. (In Russian)
Vazhenin, A. A. (1999). The Distributive Stability of the Urban Settlements in the Population System. *Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriia Geograficheskaia*, 1, 55–59. (In Russian)
Zipf, G. K. (1935). *The Psychobiology of Language: An Introduction to Dynamic Philology*. Boston: Houghton-Mifflin.
Zipf, G. K. (1941). *National Unity and Disunity: The Nation as a Bio-Social Organism*. Bloomington: Principia Press.

Received: August 28, 2021
Accepted: April 18, 2022

Contact information:

Ruslan V. Dmitriev — dmitrievrv@yandex.ru