

Аналитическое исследование бифуркации Андронова — Хопфа в задаче о движении кельтского камня*

А. С. Кулешов, Е. Н. Пикунова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: Кулешов А. С., Пикунова Е. Н. Аналитическое исследование бифуркации Андронова — Хопфа в задаче о движении кельтского камня // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 305–316. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.211>

Рассматривается классическая задача динамики неголономных систем — задача о движении тяжелого твердого тела по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Обсуждается явление потери устойчивости вращения тела при некотором критическом значении угловой скорости. Отмечается, что указанное явление сопровождается возникновением периодических движений тела с частотой, близкой к критическому значению, то есть имеет место бифуркация Андронова — Хопфа. Путем прямого вычисления первой ляпуновской величины доказано, что соответствующие периодические движения являются неустойчивыми.

Ключевые слова: кельтский камень, качение без проскальзывания, перманентные вращения, бифуркация Андронова — Хопфа.

1. Постановка задачи. Пусть тяжелое твердое тело, ограниченное произвольной выпуклой поверхностью без заострений и ребер, катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости [1–5].

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в некоторой точке O горизонтальной плоскости и осью Oz с единичным вектором γ , направленным вертикально вверх, и жестко связанную с телом систему координат $Gx_1x_2x_3$ с началом в центре масс тела и осями, направленными по его главным центральным осям инерции (см. рисунок).

Уравнения движения тела по плоскости запишем в виде уравнений, отнесенных к подвижной системе координат $Gx_1x_2x_3$:

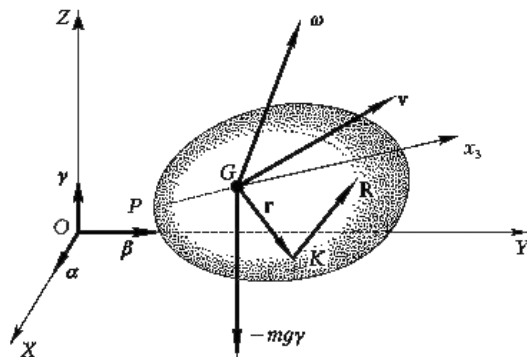
$$m\dot{\mathbf{v}} + m[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{R}], \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0, \quad (3)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00637).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022



Тяжелое твердое тело в неподвижной системе координат.

$$\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = 0. \quad (4)$$

Уравнение (1) выражает теорему об изменении количества движения, уравнение (2) — теорему об изменении момента количества движения относительно центра масс, уравнение (3) — условие постоянства единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ относительно неподвижной системы координат, а уравнение (4) — условие равенства нулю скорости точки тела, соприкасающейся в данный момент с плоскостью.

Здесь m — масса тела, \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно векторы скорости центра масс и мгновенной угловой скорости тела, g — ускорение свободного падения, \mathbf{R} — реакция опорной плоскости, \mathbb{J} — главный центральный тензор инерции тела, \mathbf{r} — радиус-вектор точки тела, соприкасающейся в данный момент времени с плоскостью.

Уравнения движения тела на шероховатой плоскости (1)–(4) допускают интеграл энергии

$$H = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J} \boldsymbol{\omega}) - mg (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \text{const}$$

и геометрический интеграл

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (5)$$

Связь между векторами \mathbf{r} , $\boldsymbol{\gamma}$ устанавливается с помощью уравнения поверхности тела: если уравнение поверхности записано в неявном виде

$$F(\mathbf{r}) = 0, \quad (6)$$

то, очевидно, выполняется условие

$$\boldsymbol{\gamma} = - \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}. \quad (7)$$

Из уравнения (1) при помощи соотношения (4) можно получить выражение для реакции опорной плоскости:

$$\mathbf{R} = m (g\boldsymbol{\gamma} - [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}] - [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}] - [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]]) .$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), получим

$$\mathbb{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega}] = mg [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}] - m [\mathbf{r} \times [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}]] - m [\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}]] - m [\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]]]. \quad (8)$$

Уравнения (3), (8) с учетом (6), (7) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения вектор-функций ω , γ (или ω , \mathbf{r}). Эта система уравнений допускает два интеграла: геометрический интеграл (5) и интеграл энергии

$$\frac{m}{2} [\omega \times \mathbf{r}]^2 + \frac{1}{2} (\omega \cdot \mathbb{J}\omega) - mg(\mathbf{r} \cdot \gamma) = \frac{1}{E} = \text{const}, \quad (9)$$

постоянную которого мы будем обозначать $1/E$.

2. Перманентные вращения. Тяжелое твердое тело на шероховатой горизонтальной плоскости может совершать перманентные вращения, которые образуют одномерное многообразие и имеют следующий вид: тело касается опорной плоскости одной и той же своей точкой и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку касания [1, 2].

В дальнейшем будем обозначать через r_i , γ_i , ω_i ($i = 1, 2, 3$) компоненты соответствующих векторов \mathbf{r} , γ , ω относительно системы координат $Gx_1x_2x_3$ и A_1 , A_2 , A_3 — главные центральные моменты инерции тела.

Если одна из главных центральных осей инерции тела в одном из двух противоположных направлений ортогональна поверхности тела, то тело, будучи поставлено на соответствующий «конец» этой оси, может вращаться вокруг нее с произвольной постоянной угловой скоростью. Полагая, что поверхности тела ортогональна отрицательная полуось Gx_3 , получим, что указанное перманентное вращение тела соответствует решению

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega \quad (\omega \in \mathbb{R}) \quad (10)$$

системы (3), (8). Координаты радиуса-вектора точки касания тела с плоскостью на перманентном вращении (10) определяются соотношениями $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = -h$ (h — высота центра масс тела в невозмущенном движении). При описании движения кельтского камня обычно предполагают, что твердое тело, движущееся по горизонтальной плоскости, ограничено поверхностью эллиптического параболоида или трехосного эллипсоида [1–5]. Поэтому будем считать, что поверхность тела в окрестности его точки касания с опорной плоскостью представляет собой эллиптический параболоид вида

$$F(\mathbf{r}) = F(r_1, r_2, r_3) = \frac{(r_1 \cos \delta + r_2 \sin \delta)^2}{2\rho_1} + \frac{(r_1 \sin \delta - r_2 \cos \delta)^2}{2\rho_2} - h - r_3 = 0. \quad (11)$$

Здесь ρ_1 , ρ_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, а δ — угол между направлением главной кривизны, отвечающей радиусу ρ_1 , и главной осью инерции Gx_1 , отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть на плоскость Gx_1x_2 навстречу оси Gx_3 .

Из (7) и (11) получаем

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{(\rho_1 \cos^2 \delta + \rho_2 \sin^2 \delta) \gamma_1}{\gamma_3} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) \sin \delta \cos \delta \gamma_2}{\gamma_3}, \\ r_2 &= \frac{(\rho_2 - \rho_1) \sin \delta \cos \delta \gamma_1}{\gamma_3} - \frac{(\rho_1 \sin^2 \delta + \rho_2 \cos^2 \delta) \gamma_2}{\gamma_3}, \\ r_3 &= -h + \frac{(\rho_1 \cos^2 \delta + \rho_2 \sin^2 \delta) \gamma_1^2}{2\gamma_3^2} - \frac{(\rho_2 - \rho_1) \sin \delta \cos \delta \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3^2} + \frac{(\rho_1 \sin^2 \delta + \rho_2 \cos^2 \delta) \gamma_2^2}{2\gamma_3^2}. \end{aligned}$$

Если моменты инерции тела удовлетворяют условию $A_1 \neq A_2$ и, кроме того, выполняются соотношения

$$\rho_1 \neq \rho_2, \quad \delta \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}},$$

то твердое тело с указанным распределением масс и описанной геометрией поверхности называется кельтским камнем [1, 2].

В дальнейшем для сокращения вычислений будем использовать обозначения:

$$\rho_1 \sin^2 \delta + \rho_2 \cos^2 \delta = l_1, \quad \rho_1 \cos^2 \delta + \rho_2 \sin^2 \delta = l_2, \quad (\rho_2 - \rho_1) \sin \delta \cos \delta = l.$$

Тогда компоненты r_1, r_2, r_3 радиуса-вектора \mathbf{r} кратко переписутся в виде

$$r_1 = -\frac{l_2 \gamma_1}{\gamma_3} + \frac{l \gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_2 = \frac{l \gamma_1}{\gamma_3} - \frac{l_1 \gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 = -h + \frac{l_2 \gamma_1^2}{2\gamma_3^2} - \frac{l \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3^2} + \frac{l_1 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2}. \quad (12)$$

Перейдем теперь от переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ к углам Эйлера θ, ψ, φ по формулам

$$\gamma_1 = \cos \theta, \quad \gamma_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_3 = \sin \theta \cos \varphi. \quad (13)$$

Тогда в соответствии с кинематическими формулами Эйлера имеем:

$$\omega_1 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi. \quad (14)$$

Частное решение (10) уравнений (3), (8) в новых переменных выражается условиями

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega = \text{const}. \quad (15)$$

Исследуем устойчивость решения (15) уравнений движения кельтского камня.

3. Устойчивость перманентных вращений кельтского камня. В скалярной форме уравнения (8) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} (A_1 + mr_2^2 + mr_3^2) \dot{\omega}_1 - mr_1 r_2 \dot{\omega}_2 - mr_1 r_3 \dot{\omega}_3 &= (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + mg (r_2 \gamma_3 - r_3 \gamma_2) - \\ &- m (r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 + r_3 \dot{r}_3) \omega_1 + m (\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3) (\dot{r}_1 + \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2), \\ (A_2 + mr_1^2 + mr_3^2) \dot{\omega}_2 - mr_2 r_3 \dot{\omega}_3 - mr_1 r_2 \dot{\omega}_1 &= (A_3 - A_1) \omega_1 \omega_3 + mg (r_3 \gamma_1 - r_1 \gamma_3) - \\ &- m (r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 + r_3 \dot{r}_3) \omega_2 + m (\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3) (\dot{r}_2 + \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3), \\ (A_3 + mr_1^2 + mr_2^2) \dot{\omega}_3 - mr_1 r_3 \dot{\omega}_1 - mr_2 r_3 \dot{\omega}_2 &= (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + mg (r_1 \gamma_2 - r_2 \gamma_1) - \\ &- m (r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 + r_3 \dot{r}_3) \omega_3 + m (\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3) (\dot{r}_3 + \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1). \end{aligned} \quad (16)$$

В уравнения (16) подставим выражения (12) компонент r_1, r_2, r_3 через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, затем вместо $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ подставим их выражения через углы Эйлера (13) и (14). Затем разрешим полученные уравнения относительно старших производных $\ddot{\theta}, \ddot{\varphi}, \ddot{\psi}$. Введем возмущения x_1, x_2, y_1, y_2, x_3 исходных переменных, положив

$$\theta = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \varphi = x_2, \quad \dot{\theta} = y_1, \quad \dot{\varphi} = y_2, \quad \dot{\psi} = \omega + x_3,$$

и разложим правые части уравнений для $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$ в ряд по переменным x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 , сохраняя в правых частях лишь члены первого порядка малости по этим переменным. В результате система линеаризованных уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_1 &= \frac{mhl\omega}{A_2 + mh^2}y_1 - \frac{(A_1 + A_2 - A_3 + 2mh^2 - mhl_1)\omega}{A_2 + mh^2}y_2 + \\ &+ \frac{(A_1 - A_3)\omega^2 + m(h - l_2)(g + \omega^2h)}{A_2 + mh^2}x_1 - \frac{ml(g + \omega^2h)}{A_2 + mh^2}x_2 + X_1, \\ \dot{y}_2 &= \frac{(A_1 + A_2 - A_3 + 2mh^2 - mhl_2)\omega}{A_1 + mh^2}y_1 - \frac{mhl\omega}{A_1 + mh^2}y_2 - \\ &- \frac{ml(g + \omega^2h)}{A_1 + mh^2}x_1 + \frac{(A_2 - A_3)\omega^2 + m(h - l_1)(g + \omega^2h)}{A_1 + mh^2}x_2 + X_2, \\ \dot{x}_3 &= X_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь X_1, X_2, X_3 — функции переменных x_1, x_2, y_1, y_2, x_3 , разложения которых в ряды по степеням этих переменных начинаются с членов не ниже второго порядка, причем

$$X_i(0, 0, 0, 0, x_3) \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения (17) имеет вид

$$\lambda(P\lambda^4 + Q\lambda^3 + R\lambda^2 + Q\omega^2\lambda + S) = 0, \tag{18}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} P &= (A_1 + mh^2)(A_2 + mh^2), & Q &= (A_2 - A_1)mhl\omega = (A_2 - A_1)(\rho_2 - \rho_1)\omega mh \sin \delta \cos \delta, \\ R &= \left[(A_1 + A_2 - A_3 + 2mh^2)^2 - (A_1 + A_2 - A_3 + 2mh^2)mh(l_1 + l_2) \right] \omega^2 + \\ &+ m^2h^2(l_1l_2 - l^2)\omega^2 - (A_2 + mh^2)((A_2 - A_3)\omega^2 + m(h - l_1)(g + \omega^2h)) - \\ &- (A_1 + mh^2)((A_1 - A_3)\omega^2 + m(h - l_2)(g + \omega^2h)), \\ S &= (A_1 - A_3)(A_2 - A_3)\omega^4 + m(g + \omega^2h)\omega^2((A_2 - A_3)(h - l_2) + (A_1 - A_3)(h - l_1)) + \\ &+ m^2(g + \omega^2h)^2(h^2 - l_1h - l_2h + l_1l_2 - l^2). \end{aligned}$$

К системе (17) применима теорема Ляпунова — Малкина [6] об устойчивости движений в особенном случае критического варианта одного нулевого корня. Из этой теоремы и критерия Рауса — Гурвица получаем, что при выполнении условий

$$\omega(A_2 - A_1)(\rho_2 - \rho_1) \sin \delta \cos \delta > 0, \quad (R - P\omega^2)\omega^2 - S > 0, \quad S > 0 \tag{19}$$

стационарное вращение (15) устойчиво, причем асимптотически по отношению к x_1, x_2, y_1, y_2 . При строгом нарушении хотя бы одного из неравенств (19) движение (15) неустойчиво [1, 2].

4. Анализ условий устойчивости. В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что

$$\rho_1 > \rho_2 > h, \quad A_3 > A_2 > A_1, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Первое из этих условий означает, что положение равновесия тела (решение (15) при $\omega = 0$) устойчиво (центр масс в положении равновесия находится ниже обоих центров кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью). Второе условие означает, что перманентное вращение тела происходит вокруг главной оси с наибольшим моментом инерции. Тогда последнее из условий (19) всегда выполняется, а первое из условий (19) равносильно условию $\omega < 0$. Второе из условий (19) приводится к виду

$$(A_1 + A_2 - A_3)(\rho_1 + \rho_2 - 2h)\omega^2 - mh(4h^2 - 3h(\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_1\rho_2)\omega^2 - mg(\rho_1 - h)(\rho_2 + h) > 0. \quad (21)$$

Очевидно, что для выполнения неравенства (21) необходимо соблюдение условия

$$(A_1 + A_2 - A_3)(\rho_1 + \rho_2 - 2h) - mh(4h^2 - 3h(\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_1\rho_2) > 0, \quad (22)$$

которое накладывает ограничение на распределение масс тела. При строгом нарушении неравенства (22) вращение тела всегда неустойчиво, а при его выполнении — устойчиво, если $\omega < 0$ и

$$\omega^2 > \omega_*^2 = \frac{mg(\rho_1 - h)(\rho_2 - h)}{(A_1 + A_2 - A_3)(\rho_1 + \rho_2 - 2h) - mh(4h^2 - 3h(\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_1\rho_2)}. \quad (23)$$

Итак, при выполнении условий (20) и (22), накладывающих ограничения только на распределение масс в теле, вращение (15) устойчиво, если

$$\omega < \omega_* < 0, \quad (24)$$

и неустойчиво, если $\omega > \omega_*$ [1–3]. Другими словами, устойчивость имеет место только при вращении данного тела по часовой стрелке с угловой скоростью, большей критического значения, определяемого соотношением (23). В противном случае имеет место неустойчивость, как при движении по часовой стрелке, так и при движении против часовой стрелки (в последнем случае — при любой величине угловой скорости).

Заметим, что при нарушении неравенства (23) и соблюдении условия $\omega < 0$ два ненулевых корня уравнения (18) пересекают мнимую ось слева направо, а два других ненулевых корня остаются в левой полуплоскости. При $\omega = \omega_* < 0$ уравнение (18) имеет один нулевой корень, два чисто мнимых корня, равных $\pm i\omega_*$, и два корня с отрицательной вещественной частью — ситуация, близкая к такой, при которой имеет место бифуркация Андронова — Хопфа [7], усложненная лишь наличием одного нулевого корня.

Однако, если исключить переменную $\dot{\psi}$ из уравнений (16) с помощью интеграла энергии (9), получим замкнутую систему уравнений относительно x_1, y_1, x_2, y_2 . Эта система получается из (17) отбрасыванием последнего уравнения и заменой нелинейностей X_1, X_2 на X_1^*, X_2^* ; последние представляют собой функции переменных x_1, y_1, x_2, y_2 , а также зависят от параметра — постоянной интеграла энергии, которую мы обозначили $1/E$. Разложения этих функций по степеням указанных переменных начинаются с членов не ниже третьего порядка. Существенно, что линейная часть первых четырех уравнений системы (17) при этом не изменяется.

В явном виде соответствующая система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{x}_2 &= y_2, \\
 \dot{y}_1 &= -\frac{2(1-mghE)(A_3-A_1+mh(l_2-h))+mgA_3(l_2-h)E}{(A_2+mh^2)A_3E}x_1 + \\
 &+ \frac{ml(2mgh^2E-2h-gA_3E)}{A_3E(A_2+mh^2)}x_2 - \frac{mlh\sqrt{2EA_3(1-mghE)}}{A_3E(A_2+mh^2)}y_1 + \\
 &+ \frac{(A_1+A_2-A_3+2mh^2-mhl_1)\sqrt{2EA_3(1-mghE)}}{A_3E(A_2+mh^2)}y_2 + X_1^*, \\
 \dot{y}_2 &= \frac{ml(2mgh^2E-2h-gA_3E)}{A_3E(A_1+mh^2)}x_1 + \frac{mlh\sqrt{2EA_3(1-mghE)}}{A_3E(A_1+mh^2)}y_2 - \\
 &- \frac{2(1-mghE)(A_3-A_2+mh(l_1-h))+mgA_3(l_1-h)E}{(A_1+mh^2)A_3E}x_2 - \\
 &- \frac{(A_1+A_2-A_3+2mh^2-mhl_2)\sqrt{2EA_3(1-mghE)}}{A_3E(A_1+mh^2)}y_1 + X_2^*.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Характеристическое уравнение полученной системы

$$P\lambda^4 + Q\lambda^3 + R\lambda^2 + \frac{2Q(1-mghE)}{A_3E}\lambda + S = 0$$

при сделанных выше предположениях о распределении масс тела и условии (24) имеет все корни с отрицательными вещественными частями, а при условии $E = E_*$ — два чисто мнимых корня и два корня с отрицательной вещественной частью.

В работе А. В. Карапетяна [1] было показано, что при переходе параметра E через его критическое значение слева направо происходит строгая потеря устойчивости вращения кельтского камня на шероховатой плоскости. Согласно теореме Хопфа [7], это означает, что при значениях полной механической энергии, близких к критическому:

$$\frac{1}{E_*} = \frac{1}{2}A_3\omega_*^2 + mgh,$$

от устойчивых перманентных вращений тела ответвляются периодические движения с частотой, близкой к критическому значению угловой скорости ω_* . Исследуем устойчивость перманентных вращений кельтского камня при $\omega = \omega_* < 0$, а также устойчивость указанных периодических движений, используя подход, разработанный в монографии Н. Н. Баутина [8] (см. также [9]).

5. Исследование бифуркации Андронова — Хопфа. В начале этого раздела сформулируем общие идеи и теоремы, лежащие в основе метода исследования бифуркации Андронова — Хопфа [8, 9]. Рассмотрим динамическую систему, определяемую n уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, \dots, x_n), \tag{26}$$

где $X_n(x_1, \dots, x_n)$ — аналитические функции всех рассматриваемых значений x_s , зависящие также от нескольких параметров.

Состояния равновесия системы определяются из уравнений

$$X_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

В дальнейшем будем предполагать, что начало координат перенесено в рассматриваемое состояние равновесия системы (26) и, следовательно,

$$X_j(0, \dots, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть характеристическое уравнение системы первого приближения, выписанной для соответствующего состояния равновесия, имеет вид

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0. \quad (27)$$

Условия Рауса — Гурвица выражаются в виде неравенств

$$D_1 = p_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & \dots & p_n \end{vmatrix} > 0 \quad (p_j = 0, \text{ если } j > n).$$

Наряду с пространством параметров системы, о которых мы кратко упомянули выше, мы будем также рассматривать специальное пространство параметров, по декартовым осям которого откладываются значения коэффициентов (пространство коэффициентов p_j). Можно показать, что границами области устойчивости в этом пространстве служат только две поверхности: плоскость $p_n = 0$, для точек которой характеристическое уравнение имеет равный нулю корень, и часть «поверхности»

$$F \equiv D_{n-1} = 0,$$

проходящая внутри области, выделяемой условиями $D_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n-2, n$), для точек которой характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, одну пару чисто мнимых корней.

Исключим из рассмотрения те части границ $p_n = 0$ и $F = 0$, где характеристическое уравнение имеет более одного нулевого корня или более одной пары чисто мнимых корней, а также ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда первая ляпуновская величина отлична от нуля. Тем самым мы ограничиваемся рассмотрением простейших из возможных негрубых состояний равновесия.

Для дальнейшего рассмотрения удобно считать один из параметров переменным, могущим принимать те или иные фиксированные значения. Мы будем обозначать этот параметр через μ . Пусть при изменении μ коэффициенты p_j меняются таким образом, что точка (p_j) описывает в пространстве коэффициентов кривую, пересекающую при бифуркационном значении $\mu = \mu_0$ границу области устойчивости.

В наших предположениях о границах области устойчивости возможны два случая нарушения устойчивости состояния равновесия при изменении параметра μ :

1) $F \equiv D_{n-1}$ меняет знак, когда параметр μ проходит через бифуркационное значение $\mu = \mu_0$ (характеристическое уравнение (27) имеет одну пару чисто мнимых корней, когда $\mu = \mu_0$);

2) p_n меняет знак, когда параметр μ проходит через бифуркационное значение $\mu = \mu_0$ (характеристическое уравнение (27) при $\mu = \mu_0$ имеет один равный нулю корень).

Поведение системы вблизи границы $F = 0$ или границы $p_n = 0$ при изменении параметра μ определяется нижеследующими теоремами [8, 9]. Будем рассматривать изменение параметра μ на некотором достаточно малом интервале $\mu_0 - \eta \leq \mu \leq \mu_0 + \eta$, где μ_0 определяется из условия $F(\mu_0) = 0$, и пусть $L_1(\mu_0)$ — первая ляпуновская величина, характеризующая устойчивость при $\mu = \mu_0$.

Теорема 1. Пусть

$$L_1(\mu_0) < 0, \quad \left(\frac{dF}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_0} < 0,$$

и пусть μ^* — фиксированное значение параметра $\mu_0 - \eta \leq \mu^* \leq \mu_0 + \eta$, тогда можно указать такое ε_0 (не зависящее от μ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, что для любой траектории $x_s(t)$, начальные условия которой удовлетворяют неравенству $|x_s(t)| < \varepsilon_0$ для всех t , начиная с некоторого $t > t_0$, будет выполняться неравенство $|x_s(t)| < \varepsilon_1$, если только $|\mu^* - \mu| < \eta_0$.

Таким образом, при возрастании параметра состояние равновесия из устойчивого становится неустойчивым, однако изображающая точка остается в малой ε_1 -окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра, когда состояние равновесия опять становится устойчивым, изображающая точка снова возвращается к состоянию равновесия. Система ведет себя обратимо.

Теорема 2. Пусть

$$L_1(\mu_0) > 0, \quad \left(\frac{dF}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_0} < 0,$$

и пусть μ^* — фиксированное значение параметра $\mu_0 - \eta \leq \mu^* \leq \mu_0 + \eta$, тогда можно указать такое ε_0 (не зависящее от μ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, такие t_0 и t_1 ($t_1 > t_0$) и такие траектории $x_s(t, \mu)$, что из неравенства $|\mu^* - \mu| < \eta_0$ для каждой из этих траекторий будут следовать неравенства $|x_s(t_0, \mu^*)| < \varepsilon_1$, $|x_s(t_1, \mu^*)| > \varepsilon_0$ (t_0 и t_1 могут быть различны для различных траекторий).

Таким образом, при возрастании параметра состояние равновесия при $\mu = \mu_0$ из устойчивого становится неустойчивым. Изображающая точка срывается с состояния равновесия и отбрасывается на достаточно далекое расстояние. При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия, когда оно опять становится устойчивым. Система ведет себя необратимо.

В работах [8, 9] были указаны явные формулы для вычисления первой ляпуновской величины $L_1(\mu_0)$ для системы двух, трех и четырех уравнений первого порядка. Мы воспользовались этими формулами и вычислили ляпуновскую величину

$L_1(E)$ для системы уравнений (25). К сожалению, полученное выражение оказалось очень громоздким и невозможно с его помощью сделать выводы об устойчивости вращения кельтского камня при $E = E_*$. Поэтому было принято решение исследовать устойчивость вращений для модели кельтского камня, рассматривавшейся в работе А. В. Борисова и И. С. Мамаева [3]. Параметры этой модели таковы:

$$A_1 = 5, A_2 = 6, A_3 = 7, m = 1, \rho_1 = 9, \rho_2 = 4, h = 1, g = 100, \delta = 0.2.$$

Единицы измерения в модели А. В. Борисова и И. С. Мамаева были приняты следующие: единица длины — 1 см, единица массы — 1 кг, единица времени — $\sqrt{10}$ сек. [3].

Соответствующее критическое значение энергии E_* оказывается равным $1/1300$, а частота вертикального вращения ω_* равна $-18.516\dots$ Перманентные вращения кельтского камня устойчивы при $E < E_*$ и неустойчивы при

$$E \in (E_*, E_{\min}),$$

где

$$E_{\min} = \frac{1}{mgh} = \frac{1}{100} = 0.01.$$

Критическое значение $E = E_*$ определяется из условия

$$F(E) = \frac{2(1 - mghE)}{A_3E} \left(R - \frac{2P(1 - mghE)}{A_3E} \right) - S = 0.$$

Проведенные вычисления показывают, что

$$\left(\frac{dF}{dE} \right)_{E=E_*} = -0.14825 \cdot 10^7 < 0, \quad L_1(E_*) = 2023.3288 > 0.$$

Таким образом, для модели кельтского камня, рассматривавшейся в работе [3], выполняются условия теоремы 2. Согласно этой теореме, периодические движения с частотой, близкой к ω_* , существуют при $E < E_*$ и являются неустойчивыми. Перманентное вращение кельтского камня при $E = E_*$ является неустойчивым.

В дальнейшем мы планируем максимально упростить полученное выражение для ляпуновской величины $L_1(E)$ и с его помощью получить более общие выводы об устойчивости вращения кельтского камня при $\omega = \omega_* < 0$.

Литература

1. Карапетян А. В. Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости. *Изв. АН СССР. Механ. тв. тела*, № 2, 19–24 (1985).
2. Маркеев А. П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости. *Прикл. мат. и механ.* **47** (4), 575–582 (1983).
3. Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней. *Успехи физ. наук* **173** (4), 407–418 (2003). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0173.200304d.0407>
4. Товстик Т. П. Динамика кельтского камня при наличии сопротивлений. *Избранные труды международной научной конференции «Четвертые Поляховские чтения»*, Санкт-Петербург, 7–10 февраля 2006 г., 187–196 (2006).
5. Tovstik T. P. On the influence of sliding on the Celt rattleback motion. *Proceedings of XXXV International Summer School Conference APM*, St Petersburg, 2007, 432–437 (2007).
6. Малкин И. Г. *Теория устойчивости движения*. Москва, Наука (1966).

7. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, пер. с англ. Москва, Мир (1980).

8. Баутин Н. Н. *Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости*. Москва, Наука (1984).

9. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Кудряшова Е. В. Циклы двумерных систем. Компьютерные вычисления, доказательства, эксперименты. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 3, 26–61 (2008).

Статья поступила в редакцию 18 марта 2021 г.;

доработана 29 ноября 2021 г.;

рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kuleshov@mech.math.msu.su

Пикунова Елизавета Николаевна — студент; lpikunova@icloud.com

Analytical research of the Hopf bifurcation in the problem of motion of the rattleback*

A. S. Kuleshov, E. N. Pikunova

Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

For citation: Kuleshov A. S., Pikunova E. N. Analytical research of the Hopf bifurcation in the problem of motion of the rattleback. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 305–316. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.211> (In Russian)

We consider the classical problem of the nonholonomic system dynamics — the problem of motion of a heavy rigid body on an perfectly rough horizontal plane. The effect of loss of stability of permanent rotation of a body at a certain critical value of its angular velocity is discussed. It is proved that this effect is accompanied by the occurrence of periodic motions of the body with a frequency close to the critical value, that is, the Hopf bifurcation takes place. It is proved by direct calculation of the first Lyapunov coefficient that the corresponding periodic motions are unstable.

Keywords: rattleback, rolling without sliding, permanent rotations, Hopf bifurcation.

References

1. Karapetyan A. V. Hopf bifurcation in the problem of motion of a heavy rigid body on a rough plane. *Mechanics of Solids*, no. 2, 19–24 (1985). (In Russian)

2. Markeev A. P. The Dynamics of a Rigid Body on an Absolutely Rough Plane. *Prikladnaya matematika i mekhanika* **47** (4), 575–582 (1983). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Appl. Math. Mech.* **47** (4), 473–478 (1983)].

3. Borisov A. V., Mamaev I. S. Strange attractors in rattleback dynamics. *Uspekhi fizicheskikh nauk* **173** (4), 407–418 (2003). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0173.200304d.0407> (In Russian) [Eng. transl.: *Phys. Usp.* **46** (4), 393–403 (2003)]. <https://doi.org/10.1070/PU2003v046n04ABEH001306>.

4. Tovstik T. P. On the dynamics of the Celt rattleback with frictions. *Proceedings of the IV Polyakhov readings*, St Petersburg, 7–10 February 2006, 187–196 (2006). (In Russian)

5. Tovstik T. P. On the influence of sliding on the Celt rattleback motion. *Proceedings of XXXV International Summer School Conference APM*, St Petersburg, 2007, 432–437 (2007).

6. Malkin I. G. *Theory of Stability of Motion*. Moscow, Nauka Publ. (1966). (In Russian)

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00637).

7. Marsden J. E., McCracken M. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. New York, Heidelberg, Berlin, Springer (1976). [Rus. ed.: Marsden J. E., McCracken M. *Bifurkacija rozhdenija cikla i ee prilozhenija*. Moscow, Mir Publ. (1980)].
8. Bautin N. N. *The behavior of dynamical systems near the limits of the stability region*. Moscow, Nauka Publ. (1984). (In Russian)
9. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Kudryashova E. V. Cycles of two-dimensional systems: Computer calculations, proofs, and experiments. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 3, 26–61 (2008). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **41**, 216 (2008). <https://doi.org/10.3103/S1063454108030047>].

Received: March 18, 2021
Revised: November 29, 2021
Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

Alexander S. Kuleshov — kuleshov@mech.math.msu.su
Elizaveta N. Pikunova — lpikunova@icloud.com

ХРОНИКА

17 ноября 2021 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых им. М. Горького РАН выступил кандидат физ.-мат. наук, доцент А. А. Суханов (СПбПУ Петра Великого) с докладом на тему «Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассматривается режим торможения автомобиля с заблокированными или почти заблокированными колесами на наклонной плоскости, имитирующей естественный и необходимый поперечный уклон дорожного полотна для стока дождевых вод. Дается не только качественное объяснение возникающего эффекта бокового заноса автомобиля, известного всем водителям, но и приводится количественное описание траектории движения, полученное аналитическим решением нелинейных дифференциальных уравнений движения. Причиной подобного бокового заноса при экстренном торможении является не столь очевидное резкое уменьшение поперечной силы трения вплоть до нуля в первый момент. Выполнены конкретные расчеты аварийной езды при неблагоприятных дорожных условиях. В частности, показано, что при гололедице незначительный уклон дороги всего в 1° (1.7%) может привести к сносу автомобиля с дорожного полотна в кювет при резком торможении на относительно небольшой скорости 60 км/ч.