

## МЕХАНИКА

УДК 514.85, 531.32  
MSC 53Z05, 58A40

### Силы реакции сингулярного маятника

*С. Н. Бурьян*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Бурьян С. Н.* Силы реакции сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 278–293. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209>

В статье изучаются различные типы поведения сил реакции и множителей Лагранжа при движении механических систем с особенностью конфигурационного пространства. Рассматривается движение одномерного двойного маятника (или сингулярного маятника) с трансверсальной особой точкой или особой точкой типа касания первого порядка. В зависимости от свойств кривой, по которой движется свободная вершина двойного маятника, конфигурационное пространство механической системы представляет собой две гладкие кривые на торе без общих точек, две трансверсально пересекающиеся гладкие кривые или две кривые с касанием первого порядка. Для изучения движения маятника находятся силы реакции на двумерном торе. Получены аналитические выражения для сил реакции в угловых координатах. Доказано, что в случае трансверсального пересечения силы реакции в особой точке должны быть нулевыми. В случае особенности типа касания силы реакции в особой точке отличны от нуля. Множитель Лагранжа, который зависит от движения по эллипсу, становится неограниченным вблизи особой точки. Описаны два механизма с иным типом особых точек в конфигурационном пространстве: негладкий сингулярный маятник и ломаный сингулярный маятник. В конфигурационных пространствах этих механических систем нет гладких регулярных кривых, проходящих через особую точку. Для негладкого сингулярного маятника множитель Лагранжа, который зависит от движения по эллипсу, становится неопределенным при прохождении особой точки. Для ломаного сингулярного маятника множитель Лагранжа делает скачок от конечного значения к бесконечному.

*Ключевые слова:* особая точка, голономная связь, множители Лагранжа.

**1. Введение.** В классической механике предполагается, что голономные связи, наложенные на систему, являются независимыми. Силы реакции системы в каждой точке находятся как решение некоторой линейной системы. Матрица этой системы состоит из скалярных произведений градиентов голономных связей. В классической механике матрица системы имеет полный ранг, поэтому силы реакции находятся однозначно. Если в некоторой точке голономные связи становятся зависимыми, то линейная система для нахождения реакций может быть неразрешимой. Если система разрешима, то решение не единственно. В конфигурационном пространстве системы при зависимых голономных связях возникают геометрические особые точки. В общем случае множители Лагранжа для соответствующих реакций связи могут быть разрывными при движении системы через особую точку.

Особенности сил реакций возникают в системах с избыточными связями. Например, количество связей в системе больше числа степеней свободы, и связи являются зависимыми в каждой точке. Примеры таких механизмов можно найти в работе [1]. Одним из вариантов работы с избыточными связями является метод «забывания»: уравнения зависимых связей исключаются из рассмотрения. «Забывтым» связям сопоставляется нулевой множитель Лагранжа, что может не согласовываться с физическими свойствами системы. Другой подход при нахождении реакций связей заключается в том, что линейная система решается с помощью псевдообращения матрицы системы. Схема вычислений в этом случае приведена в работах [2] и [3]. Для механических систем с кинематическими особенностями также предлагается метод Баумгарта для стабилизации движения. Применение метода для случая двузвеного манипулятора описано в работе [4]. Метод основан на возмущении уравнений связей и сильно зависит от параметров стабилизации.

В данной работе рассматривается аналитическое вычисление реакций сингулярного маятника на двумерном торе в окрестности геометрической особой точки. Ранг голономных связей сингулярного маятника в особой точке уменьшается на единицу. Показываются различные варианты изменения множителя Лагранжа вблизи особой точки конфигурационного пространства системы. Множители Лагранжа, соответствующие силам реакции, находятся численным моделированием. Уравнения движения составляются по методам из [5, 6]. Свойства конфигурационного пространства сингулярного маятника описаны в работах автора [7, 8]. В статье [9] аналогично рассматривается шарнирный механизм Дарбу.

**2. Сингулярный маятник.** Сингулярный маятник представляет собой плоский двойной математический маятник  $ABC$  с дополнительной голономной связью. Маятник расположен в фиксированной вертикальной плоскости относительно поверхности Земли. Вершина  $A$  неподвижна, к ней шарнирно крепится стержень  $AB$ . К вершине  $B$  шарнирно крепится стержень  $BC$ . Длина стержня  $AB$  равна  $l_1$ , и длина стержня  $BC$  равна  $l_2$ . Стержни предполагаются невесомыми и нерастяжимыми, в вершинах  $B$  и  $C$  сосредоточены точечные массы  $m_1$  и  $m_2$ . Точка  $C$  движется по заданной кривой  $\gamma$ . В статье рассматривается случай, когда кривая  $\gamma$  является эллипсом или получается как объединение дуг двух различных эллипсов.

Выберем систему координат: начало координат находится в неподвижном шарнире  $A$ , ось  $Ox$  направлена вертикально вниз, ось  $Oy$  направлена горизонтально (рис. 1). Положение маятника определяется координатами точек  $B(x_1, y_1)$  и  $C(x_2, y_2)$ . Угол  $HAC$  обозначим как  $u$ , угол  $CAB$  — как  $\theta_1$  и угол  $ABC$  — как  $\theta_2$ . Углы  $u$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  дают возможность явно параметризовать сингулярный маятник.

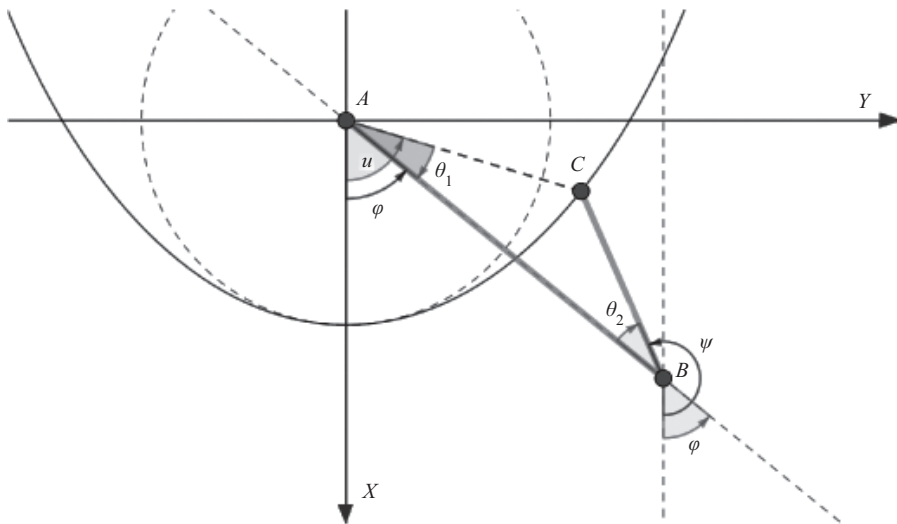


Рис. 1. Сингулярный маятник.

Запишем уравнения голономных связей в декартовых координатах. Уравнение голономной связи  $f_1$  соответствует условию  $|AB| = l_1$ , уравнение голономной связи  $f_2$  — условию  $|BC| = l_2$ :

$$f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0,$$

$$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_2^2 = 0.$$

Уравнение голономной связи  $f_3$  для движения вершины  $C$  по эллипсу  $\gamma$  таково:

$$f_3(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{(x_2 - a)^2}{r_1^2} + \frac{y_2^2}{r_2^2} - 1 = 0. \quad (1)$$

В формуле (1) параметры  $r_1$  и  $r_2$  обозначают большую и малую полуоси эллипса, параметр  $a$  определяет положение центра эллипса на оси  $Ox$ .

Параметризуем точки на эллипсе  $\gamma$  углом  $u$ . Будем рассматривать движение при  $-\pi/2 < u < \pi/2$ . Каждому значению угла  $u$  из этого интервала нужно сопоставить точку на эллипсе  $\gamma$ , которая является пересечением  $\gamma$  и прямой  $y = x \tan u$ . Прямым вычислением можно показать, что прямая  $y = x \tan u$  при  $-\pi/2 < u < \pi/2$  пересекает эллипс (1) в точке  $C = (x, x \tan u)$ , где

$$x = x(u) = \frac{\frac{a}{r_1^2} + \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{\tan^2 u}{r_2^2} \left(1 - \frac{a^2}{r_1^2}\right)}}{\frac{1}{r_1^2} + \frac{\tan^2 u}{r_2^2}}. \quad (2)$$

Выражение под корнем в (2) всегда положительно, если выбрать параметр  $|a| < r_1$ . Функции в выражении (2) гладкие, поэтому расстояние

$$d(u) = |AC|(u) = \sqrt{x(u)^2 + y(u)^2}$$

является гладкой функцией угла  $u$ .

Будем считать, что эллипс (1) подобран так, что при угле  $u = 0$  стержни  $AB$  и  $BC$  становятся параллельными оси  $Ox$ , а при  $-\pi/2 < u < 0$  и  $0 < u < \pi/2$  расстояние  $|AC|$  строго больше  $l_1 - l_2$ . В этом случае функция  $d(u)$  имеет единственный минимум  $d(0) = l_1 - l_2$  при  $-\pi/2 < u < \pi/2$ . При  $u = 0$  стержни  $AB$  и  $BC$  «складываются», образуя «сложенное» положение маятника. Центр эллипса (1) имеет координаты  $(a, 0)$ . Тогда из геометрических свойств маятника при  $u = 0$  должны выполняться следующие соотношения для «сложенного» положения маятника  $ABC$ :

$$d(0) = l_1 - l_2, \quad d(0) = a + r_1.$$

Следовательно, параметр  $a$  равен  $l_1 - l_2 - r_1$ .

Зафиксируем угол  $-\pi/2 < u < \pi/2$  и найдем соответствующее положение точки  $C$ . Для заданного угла  $u$  в треугольнике  $ABC$  заданы длины всех трех сторон:  $|AB| = l_1$ ,  $|BC| = l_2$  и  $|AC| = d(u)$ . При  $d(u) \neq l_1 - l_2$  есть два возможных варианта расположения треугольника  $ABC$ . В первом случае вершина  $B$  находится справа от прямой  $AC$ , во втором случае — слева от прямой  $AC$ . При  $d(u) = l_1 - l_2$  треугольник  $ABC$  становится вырожденным.

Рассмотрим конфигурационное пространство сингулярного маятника как подмножество на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ . Двумерный тор является конфигурационным пространством плоского двойного маятника. Положение двойного маятника описывается двумя углами: угол  $\varphi$  измеряет отклонение стержня  $AB$  от вертикальной оси, угол  $\psi$  — отклонение стержня  $BC$  от вертикальной оси (рис. 1). Множество положений сингулярного маятника, для которых вершина  $B$  всегда расположена по одну сторону от прямой  $AC$  (в том числе положения, когда точка  $B$  находится на прямой  $AC$ ), является непрерывной кривой на  $\mathbb{T}^2$ . Поскольку возможно два положения маятника при заданном угле  $u$ , то в конфигурационном пространстве есть две кривые:  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Из построений следует, что единственная общая точка кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  при  $-\pi/2 < u < \pi/2$  есть  $(0, \pi) \in \mathbb{T}^2$ . Этой точке соответствует минимум  $d(0)$  функции  $d(u)$ . Непрерывные кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  также можно называть *ветвями движения*.

Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (рис. 1) определяют зависимость координат  $\varphi$  и  $\psi$  на двумерном торе от угла  $u$ . По теореме косинусов для треугольника  $ABC$  получаем следующие соотношения для углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} \theta_1(u) &= \pm \arccos \left( \frac{l_1^2 + d(u)^2 - l_2^2}{2l_1 d(u)} \right), \\ \theta_2(u) &= \pm \arccos \left( \frac{l_1^2 + l_2^2 - d(u)^2}{2l_1 l_2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Найдем первые производные функций в формулах (3):

$$\begin{aligned} \theta_1'(u) &= \pm \frac{(-d(u)^2 + l_1^2 - l_2^2) \cdot d'(u)}{d(u) \sqrt{d(u)^2 - (l_1 - l_2)^2} \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - d(u)^2}}, \\ \theta_2'(u) &= \pm \frac{2d(u) \cdot d'(u)}{\sqrt{d(u)^2 - (l_1 - l_2)^2} \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - d(u)^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражение  $d(u)^2 - l_1^2 + l_2^2$  в формулах (4) обращается в ноль тогда и только тогда, когда  $d(u)^2 + l_2^2 = l_1^2$ . Для углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  интерес представляют только их свойства

при  $u = 0$ , так как вне особой точки конфигурационное пространство сингулярного маятника является одномерным многообразием. Для одномерных многообразий динамика описывается классическими уравнениями Лагранжа или Гамильтона. При  $u = 0$  стержни  $AB$  и  $BC$  сингулярного маятника должны быть параллельны оси  $Ox$ . Значит,  $d(0) = l_1 - l_2$ . Предположим, что при  $u = 0$  выполняется условие  $d(u)^2 + l_2^2 = l_1^2$ . В этом случае из системы уравнений

$$d(0) = l_1 - l_2, \quad d(u)^2 + l_2^2 = l_1^2$$

следует, что  $l_1 = l_2$ . Для сингулярного маятника рассматривается случай неравных длин стержней, поэтому при  $u = 0$  не может выполняться равенство  $d(u)^2 - l_1^2 + l_2^2 = 0$ . Также считаем, что  $d(0) \neq 0$ . В этом случае при  $u \approx 0$  и при значениях  $d(u) \approx l_1 - l_2$  единственная особенность у производных (4) может быть только в частном

$$\frac{d'(u)}{\sqrt{d(u) - (l_1 - l_2)}}. \quad (5)$$

При  $u = 0$  одновременно выполняется  $d'(0) = 0$  и  $d(0) = l_1 - l_2$ , поэтому выражение (5) не определено. Для устранения особенности разложим числитель и знаменатель в формуле (5) в ряд Тейлора с остатком в форме Адамара. В результате можно описать конфигурационное пространство  $X$  сингулярного маятника:

$$X = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \subset \mathbb{T}^2.$$

Полученные вычисления есть в статьях автора [7, 8]. Здесь они приводятся без доказательства. Под «гладкими кривыми» подразумеваются две гладкие кривые, которые составляют конфигурационное пространство  $X$ . В общем случае ветви  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не являются гладкими регулярными кривыми на плоскости. В утверждении 1 рассматривается двойной маятник с голономной связью  $f_3$ , для которой  $d(u) > l_1 - l_2$ , в утверждениях 2–4 — особая точка сингулярного маятника. При этом  $d(0) = l_1 - l_2$  является минимумом функции  $d(u)$  при  $-\pi/2 < u < \pi/2$ .

**Утверждение 1.** Если  $d(u) > l_1 - l_2$  при  $-\pi/2 < u < \pi/2$ , то ветви движения сингулярного маятника не пересекаются. Каждая ветвь является гладкой кривой на торе  $\mathbb{T}^2$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $d(0) = l_1 - l_2$ ,  $d'(0) = 0$  и  $d''(0) \neq 0$ . Тогда конфигурационное пространство сингулярного маятника представляет собой две гладкие кривые на торе  $\mathbb{T}^2$ , которые трансверсально пересекаются в общей точке. Гладким кривым соответствуют нечетные функции  $\theta_1(u)$  и  $\theta_2(u)$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $d(0) = l_1 - l_2$ ,  $d'(0) = d''(0) = d'''(0) = 0$  и  $d^{(4)}(0) \neq 0$ . Тогда конфигурационное пространство сингулярного маятника представляет собой две гладкие кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые имеют касание первого порядка в общей точке. Кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют различные знаки кривизны в особой точке. Гладким кривым соответствуют четные функции  $\theta_1(u)$  и  $\theta_2(u)$ .

**Утверждение 4.** Пусть  $d(0) = l_1 - l_2$ . Если радиус кривизны линии связи  $f_3(x_2, y_2)$  при  $u = 0$  равен разности длин стержней  $AB$  и  $BC$ , то в точке пересечения гладких кривых, которые составляют конфигурационное пространство сингулярного маятника, будет особенность типа касания первого порядка. Если

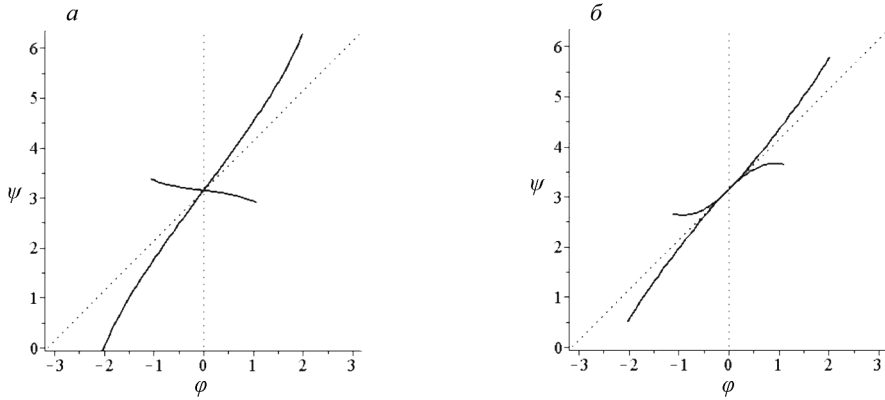


Рис. 2. Конфигурационные пространства сингулярного маятника на двумерном торе при разных полуосях эллипса: *a* — трансверсально особая точка при  $r_1 = 4m$  и  $r_2 = 3m$ ; *б* — особая точка типа касания при  $r_1 = 4m$  и  $r_2 = 2m$ . Графики построены как кривые  $(\varphi_1(u), \psi_1(u))$  и  $(\varphi_2(u), \psi_2(u))$  при значениях  $-\pi/2 < u < \pi/2$ .

радиус кривизны отличен от разности длин стержней, то на двумерном торе будет трансверсальное пересечение двух гладких кривых.

Пусть  $l_1 = 2m$  и  $l_2 = 1m$ . Согласно утверждению 4, для модели трансверсальной особой точки в конфигурационном пространстве сингулярного маятника можно взять эллипс с полуосями  $r_1 = 4m$  и  $r_2 = 3m$ . Для модели особой точки типа касания можно взять эллипс с полуосями  $r_1 = 4m$  и  $r_2 = 2m$ . Заметим, что для модельных примеров наблюдаемое движение сингулярного маятника было симметричным относительно вертикальной оси для трансверсальной особой точки и асимметричным для особой точки типа касания первого порядка. Конфигурационные пространства для этих параметров эллипса показаны на рис. 2.

**3. Уравнения движения.** Составим систему уравнений для нахождения реакций голономных связей  $f_1, f_2, f_3$ . Символ  $T$  соответствует транспонированию вектора или матрицы. Введем следующие обозначения:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} m_1 g \\ 0 \\ m_2 g \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $M$  — матрица масс,  $\mathbf{r}$  — вектор изображающей точки,  $\mathbf{F}$  — вектор действующих сил. Особой точке конфигурационного пространства сингулярного маятника соответствует изображающая точка  $\mathbf{r}_* = (l_1, 0, l_1 - l_2, 0)^T$ . Матрица  $C$  градиентов связей  $f_1, f_2, f_3$  в точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_*$  такова:

$$C(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 & 2y_1 - 2y_2 & 2x_2 - 2x_1 & 2y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & \frac{2(x_2 - a)}{r_1^2} & \frac{2y_2}{r_2^2} \end{pmatrix},$$

$$C(\mathbf{r}_*) = \begin{pmatrix} 2l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2l_2 & 0 & -2l_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(l_1 - l_2 - a)}{r_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

В точке  $\mathbf{r}_*$  матрица голономных связей  $C$  имеет ранг 2, который меньше максимального. Уравнения Лагранжа первого рода для идеальных голономных связей  $f_1, f_2, f_3$  запишутся в виде

$$M\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 + \lambda_3 \nabla f_3 = \mathbf{F} + C^T \Lambda. \quad (6)$$

Реакции  $\mathbf{R}_1 = \lambda_1 \nabla f_1$  и  $\mathbf{R}_2 = \lambda_2 \nabla f_2$  представляют собой реакции стержней  $AB$  и  $BC$  соответственно, реакция  $\mathbf{R}_3 = \lambda_3 \nabla f_3$  — реакцию от движения точки  $C$  по заданной кривой (эллипсу). Чтобы найти вектор реакций  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ , продифференцируем по времени уравнения связей, записанные в дифференциальной форме:  $C(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = 0$ . Составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} + C^T \Lambda, \\ C\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{h} &= 0. \end{aligned}$$

Вектор  $\mathbf{h}$  состоит из следующих квадратичных форм:  $h_i = \dot{\mathbf{r}}^T f_i'' \dot{\mathbf{r}}$ , где  $f_i''$  обозначает матрицу Гессе для голономной связи  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Для симметричной положительно определенной матрицы масс  $M$  существует обратная матрица  $N = M^{-1}$ . Если градиенты голономных связей системы независимы, то матрица  $CNC^T$  обратима. Реакции выражаются через матричные функции из (6) так:

$$\Lambda = -(CNC^T)^{-1}(CN\mathbf{F} + \mathbf{h}). \quad (7)$$

Чтобы понизить размерность задачи, перейдем к реакции в координатах двумерного тора. Применим уравнения Лагранжа второго рода со связями для нахождения реакции при движении вершины  $C$  по заданной кривой  $\gamma$ . Уравнение голономной связи  $f_3(x_1, y_1, x_2, y_2)$  записывается в координатах на торе  $\mathbb{T}^2$  как  $f_3(\varphi, \psi)$  с выражениями для координат

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \varphi, & y_1 &= l_1 \sin \varphi, \\ x_2 &= l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi, & y_2 &= l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \psi. \end{aligned}$$

Тогда уравнение связи  $f_3$  в координатах  $(\varphi, \psi)$  запишется в виде

$$f_3(\varphi, \psi) = \frac{(l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi - a)^2}{r_1^2} + \frac{(l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \psi)^2}{r_2^2} - 1 = 0.$$

Получим следующие уравнения для углов  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi) \ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi - \psi) \dot{\psi}^2 + (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\varphi) &= \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \varphi}, \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi) \ddot{\varphi} + m_2 l_2^2 \ddot{\psi} - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi - \psi) \dot{\varphi}^2 + m_2 gl_2 \sin(\psi) &= \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Частные производные  $f_3(\varphi, \psi)$  по переменным  $\varphi$  и  $\psi$  являются безразмерными величинами, поэтому множитель  $\lambda_3$  имеет размерность  $[\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад}/\text{с}^2]$ . При условии

$f_3 = 0$  система (8) описывает динамику двойного математического маятника. Дополнительная голономная связь  $f_3$  добавляет дополнительную силу реакции в правую часть системы. Заметим, что полученная система дифференциальных уравнений может быть записана в матричной форме:

$$A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{R}. \quad (9)$$

Здесь применяются следующие векторно-матричные обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \psi} \end{pmatrix}^T, \\ A(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi) & l_2^2 m_2 \end{pmatrix}, \\ B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi - \psi) \dot{\psi}^2 + l_1(m_1 + m_2)g \sin \varphi \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi - \psi) \dot{\varphi}^2 + l_2 m_2 g \sin \psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Система дифференциальных уравнений движения с реакциями связи  $f_3$  в координатах двумерного тора имеет вид

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \lambda_3 \nabla f_3, \\ \nabla f_3^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T f_3'' \dot{\mathbf{q}} &= 0. \end{aligned}$$

При  $\nabla f_3 \neq 0$  получаем следующее выражение для множителя Лагранжа:

$$\lambda_3 = \frac{\nabla f_3^T A^{-1} B - \dot{\mathbf{q}}^T f_3'' \dot{\mathbf{q}}}{\nabla f_3^T A^{-1} \nabla f_3}. \quad (11)$$

Таким образом, множитель Лагранжа, который соответствует реакции от движения точки  $C$  по заданной кривой, можно найти по уравнениям движения на двумерном торе. Координаты вершин  $B$  и  $C$  выражаются через углы  $u$  и  $\theta_1(u)$ :

$$\begin{aligned} x_2(u) &= d(u) \cos(u), & y_2(u) &= d(u) \sin(u), \\ x_1(u) &= l_1 \cos(u + \theta_1(u)), & y_1(u) &= l_1 \sin(u + \theta_1(u)). \end{aligned} \quad (12)$$

Угловые координаты выражаются через угол  $u$  (угол  $\psi$  находится по рис. 1):

$$\varphi(u) = u + \theta_1(u), \quad \psi(u) = \varphi + \pi + \theta_2(u).$$

Скорости и ускорения угловых координат записываются как функции угла  $u$ :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{u} + \theta_1'(u)\dot{u}, & \dot{\psi} &= \dot{\varphi} + \theta_2'(u)\dot{u}, \\ \ddot{\varphi} &= \ddot{u} + \theta_1''(u)(\dot{u})^2 + \theta_1'(u)\ddot{u}, & \ddot{\psi} &= \ddot{\varphi} + \theta_2''(u)(\dot{u})^2 + \theta_2'(u)\ddot{u}. \end{aligned} \quad (13)$$

Кинетическая и потенциальная энергия получаются прямым вычислением:

$$\begin{aligned} T(u, \dot{u}) &= \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 (1 + \theta_1'(u))^2 (\dot{u})^2 + m_2 ((d(u))^2 + (d'(u))^2) (\dot{u})^2) = A(u) (\dot{u})^2, \\ V(u) &= -m_1 g l_1 \cos(u + \theta_1(u)) - m_2 g d(u) \cos(u). \end{aligned} \quad (14)$$



Также введем вспомогательные функции:

$$A'(u) = m_1 l_1^2 (1 + \theta_1'(u)) \theta_1''(u) + m_2 (d(u) d'(u) + d'(u) d''(u)),$$

$$Q_u(u) = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -m_1 g l_1 \sin(u + \theta_1(u)) (1 + \theta_1'(u)) + m_2 g (d'(u) \cos(u) - d(u) \sin(u)). \quad (15)$$

Уравнения Лагранжа для движения сингулярного маятника вне особой точки выводятся как обычные уравнения Лагранжа второго рода для обобщенной координаты  $u$ :

$$\ddot{u} = \frac{Q_u(u) - A'(u)(\dot{u})^2}{2A(u)}. \quad (16)$$

В выражениях (14)–(16) предполагается, что у функции  $\theta_1$  (формула (3)) выбран один из двух возможных знаков, который соответствует гладкой кривой в конфигурационном пространстве  $X$  сингулярного маятника. Для особенности типа трансверсального пересечения у угла  $\theta_1$  выбираются разные знаки при  $-\pi/2 < u < 0$  и при  $0 < u < \pi/2$ . Для особенности типа касания первого порядка у угла  $\theta_1$  выбирается один знак при  $-\pi/2 < u < \pi/2$ . В этом случае угол  $\theta_1$  является гладкой функцией угла  $u$ . Также заметим, что  $A(0) \neq 0$ , поэтому в уравнении (16) нет особенностей в знаменателе при  $u = 0$ . Из уравнения (16) при заданных начальных условиях  $u_0$  и  $\dot{u}_0$  можно найти ускорение в начальный момент времени. Уравнения движения можно также записать в форме Гамильтона: обобщенный импульс  $p$  равен  $\partial L / \partial \dot{u}$ , тогда  $H = p\dot{u} - L = T + V$ . Энергия системы  $H = p^2/4A(u) + V(u)$ . Уравнения движения таковы:

$$\dot{p} = \frac{A'(u)}{4A^2(u)} p^2 - V'(u), \quad \dot{u} = \frac{p}{2A(u)}. \quad (17)$$

**4. Реакции на двумерном торе.** Докажем несколько теорем о свойствах реакций сингулярного маятника на двумерном торе. Полученные результаты зависят от типа конфигурационного пространства вблизи особой точки  $(0, \pi) \in \mathbb{T}^2$ .

**Теорема 1.** *Для особенности конфигурационного пространства  $X$  типа трансверсального пересечения кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  реакции на торе  $\mathbb{T}^2$  в особой точке равны нулю.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для трансверсального пересечения имеем  $d'(0) = 0$ ,  $d''(0) \neq 0$ . В силу симметрии для гладкой кривой движения сингулярного маятника получаем  $\theta_1(-u) = -\theta_1(u)$  и  $\theta_2(-u) = -\theta_2(u)$ . Следовательно,  $\theta_1''(0) = 0$  и  $\theta_2''(0) = 0$ . Найдем значение ускорений угловых координат в особой точке  $\varphi = 0, \psi = \pi$ . Для этого найдем обобщенные силы  $Q_u(0)$ , значение  $A'(0)$  и ускорение  $\ddot{u}$  при  $u = 0$ . Получим такие значения по формулам (15):  $Q_u(0) = 0$ ,  $d'(0) = 0$ ,  $A'(0) = 0$ , откуда  $\ddot{u} = 0$ . Значит, ускорения угловых координат  $\ddot{\varphi}$  и  $\ddot{\psi}$  в особой точке равны нулю по формулам (13). Тогда равна нулю и реакция  $\lambda_3 \nabla f_3$ , так как в системе (9) функция  $V(0, \pi, \cdot)$  обращается в ноль в особой точке  $\varphi = 0, \psi = \pi$  независимо от значений скоростей.  $\square$

**Теорема 2.** *Для особенности конфигурационного пространства  $X$  типа касания первого порядка кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  реакции на торе  $\mathbb{T}^2$  в особой точке отличны от нуля.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что значение функции  $B$  в формуле (10) равно нулю в особой точке  $(\varphi, \psi) = (0, \pi)$  при любых (конечных) скоростях. Тогда из уравнения (9) следует, что реакция  $\lambda_3 \nabla f_3$  для двойного маятника в особой точке равна нулю тогда и только тогда, когда в особой точке равны нулю обобщенные ускорения  $\ddot{\varphi}$  и  $\ddot{\psi}$ . Предположим, что сила реакции равна нулю. Тогда должна быть равна нулю и кривизна кривой в особой точке. Но кривизна ветвей сингулярного маятника в особой точке отлична от нуля по утверждению 3. Противоречие. Значит, сила реакции в особой точке отлична от нуля.  $\square$

**Замечание 1.** Значения множителя Лагранжа  $\lambda_3$  при подходе к особой точке (для особенности типа касания первого порядка) должны неограниченно возрастать по модулю.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В координатах двумерного тора имеем  $\nabla f_3 \rightarrow 0$  при  $(\varphi, \psi) \rightarrow (0, \pi)$ . Из теоремы 2 получаем, что сила реакции  $\mathbf{R} = \lambda_3 \nabla f_3$  отлична от нуля в особой точке. Предположим, что значение множителя Лагранжа  $\lambda_3$  ограничено по модулю:  $|\lambda_3| < \text{const}$ . Тогда должно выполняться условие  $\mathbf{R} \rightarrow 0$  при  $(\varphi, \psi) \rightarrow (0, \pi)$ . Получили противоречие. Следовательно, значение  $\lambda_3$  не ограничено по модулю вблизи особой точки.  $\square$

Для интегрирования уравнений движения сингулярного маятника применялись уравнения Гамильтона. При этом значения производных  $d'(u)$ ,  $\theta'_1(u)$  и  $\theta'_2(u)$  вычислялись аналитически. Вычисления велись в системе компьютерной алгебры Maple. Общая система уравнений:

$$\begin{aligned} A(u) &= \left( \frac{m_1}{2}(1 + \theta'_1(u))^2 + \frac{m_2}{2}(d(u)^2 + (d'(u))^2) \right), \\ V(u) &= -m_1 g l_1 \cos(u + \theta_1(u)) - m_2 g d(u) \cos(u), \\ p &= 2A(u)\dot{u}, \quad H(u, p) = \frac{p^2}{4A(u)} + V(u), \\ \dot{p} &= \frac{A'(u)}{4A^2(u)}p^2 - V'(u), \quad \dot{u} = \frac{p}{2A(u)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для нахождения величины реакций выполнялось численное интегрирование уравнений. Длины стержней были следующими:  $|AB| = 2$  м и  $|BC| = 1$  м, массы

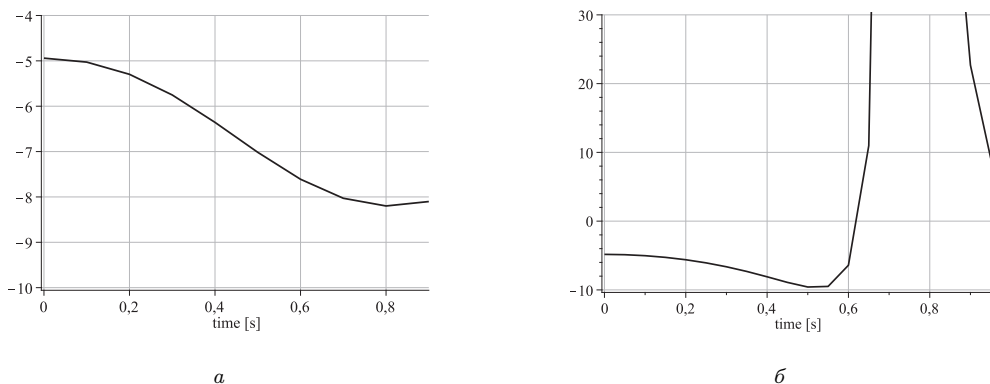


Рис. 3. Значение множителя  $\lambda_3$  для случая трансверсали (а) и касания (б) (в единицах  $[\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад}/\text{с}^2]$ ).

точек —  $m_B = m_C = 0.3$  кг. Для моделирования трансверсальной особой точки брался эллипс с полуосями 4 и 3 м, для касания первого порядка рассматривался эллипс с полуосями 4 и 2 м. Трение не учитывается, массы сосредоточены в вершинах. Ускорение свободного падения  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ . Начальные условия:  $u_0 = 1$  рад,  $p_0 = 0$ . При построении графиков множителя Лагранжа  $\lambda_3$  выполнялся расчет в декартовых координатах по формуле (7) и в координатах на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$  по формуле (11). Полученные в двух методах расчета значения множителя Лагранжа отличаются меньше чем на 0.1%. Графики приведены на рис. 3. Вычисления численно подтверждают, что значение силы реакции в координатах двумерного тора в особой точке будет нулевой для трансверсали, так как  $\nabla f_3 \rightarrow 0$  при  $(\varphi, \psi) \rightarrow (0, \pi)$ .

В разделах 5 и 6 рассматривается два варианта модификации сингулярного маятника. В конфигурационных пространствах этих механических систем нет гладких (регулярных) кривых, проходящих через особые точки. Линия связи  $\gamma$  состоит из двух эллипсов с разными параметрами при  $u > 0$  и  $u < 0$ . В этом случае нет априорных предположений о типе движения полученных механических систем через особые точки.

**5. Негладкий сингулярный маятник.** Рассмотрим сингулярный маятник  $ABC$  со специальной кривой  $\gamma$ . При углах  $-\pi/2 < u \leq 0$  кривая  $\gamma$  является окружностью радиуса  $l_1 - l_2$  с центром в вершине (шарнире)  $A$ . В этом случае  $d(u) \equiv l_1 - l_2$  и  $\psi \equiv \varphi + \pi$ . При углах  $0 \leq u < \pi/2$  функция  $d(u)$  удовлетворяет условиям  $d'(0+) = d''(0+) = d'''(0+) = 0$  и  $d^{(4)}(0+) \neq 0$ . Получим *негладкий сингулярный маятник*.

**Теорема 3.** *Конфигурационное пространство негладкого сингулярного маятника в окрестности особой точки  $(0, \pi)$  на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$  с координатами  $(\varphi, \psi)$  представляет собой три кривые, которые имеют одинаковые направления векторов скоростей в особой точке, но разные кривизны. Не существует гладкой кривой на двумерном торе, которая проходит через особую точку  $(0, \pi)$  без остановки (с ненулевым вектором скорости).*

**Доказательство.** При  $-\pi/2 < u \leq 0$  двойной маятник  $ABC$  может двигаться только в одном положении  $\psi = \varphi + \pi$ , так как стержни  $AB$  и  $BC$  в этом случае лежат на одной прямой. При  $0 < u < \pi/2$  есть два возможных положения маятника на торе:  $(\varphi_1(u), \psi_1(u))$  и  $(\varphi_2(u), \psi_2(u))$ . По теореме 2, кривые  $(\varphi_1(u), \psi_1(u))$  и  $(\varphi_2(u), \psi_2(u))$  имеют ненулевую кривизну разных знаков (как для кривых на плоскости).

Упростим вид конфигурационного пространства негладкого сингулярного маятника. Для этого вычтем из каждой кривой график  $\psi = \varphi + \pi$ . Обозначим полученные координаты как  $(x, y)$ . Тогда на плоскости  $(x, y)$  при  $x \leq 0$  есть прямая  $y = 0$ , при  $x \geq 0$  есть две гладкие кривые  $(x, \eta_1(x))$  и  $(x, \eta_2(x))$ . Особая точка теперь имеет координаты  $(0, 0)$ . Условие касания первого порядка означает, что  $\eta_1'(0) = \eta_2'(0) = 0$ ,  $\eta_1''(0) \neq 0$  и  $\eta_2''(0) \neq 0$ . Пусть кривая  $c: \mathbb{R} \rightarrow X$ ,  $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ , является гладкой кривой на плоскости  $\mathbb{R}^2$  и  $c(0) = (0, 0)$ . При движении по прямой  $y = 0$  условие безостановочности движения в особой точке запишется как  $c_1'(0) \neq 0$ . Без ограничения общности — пусть кривая  $c(t)$  переходит на кривую  $(x, \eta_1(x))$  при прохождении особой точки. Тогда

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0-} c_2''(t) = \lim_{x \rightarrow 0+} c_2''(t) = \lim_{x \rightarrow 0+} (\eta_1''(c_1')^2 + \eta_1' c_1'') = \eta_1''(0)(c_1'(0))^2.$$

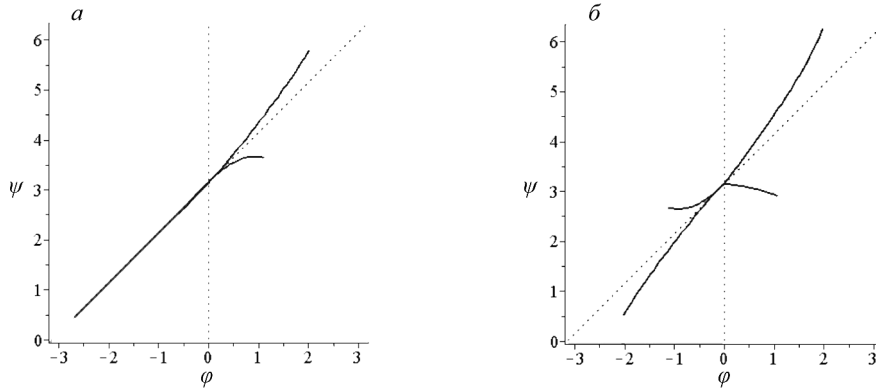


Рис. 4. Конфигурационные пространства с негладким движением через особую точку: а — негладкий сингулярный маятник, б — ломаный сингулярный маятник.

Так как  $\eta_1''(0) \neq 0$ , то получаем  $c_1'(0) = 0$ . Следовательно, безостановочное движение через особую точку невозможно.  $\square$

График конфигурационного пространства негладкого сингулярного маятника показан на рис. 4, а. Множитель Лагранжа  $\lambda_3$  становится неограниченным при  $u \rightarrow 0+$  по замечанию 1. При  $u < 0$  множитель Лагранжа  $\lambda_3$  становится неопределенным, так как стержни  $AB$  и  $BC$  маятника всегда сложены. Получается механическая система с избыточными связями.

**6. Ломаный сингулярный маятник.** Рассмотрим сингулярный маятник со специальной связью  $\gamma$ . Пусть при  $0 \leq u < \pi/2$  кривая  $\gamma$  является эллипсом  $\omega_1$  с полуосями  $r_1 = 4$  м и  $r_2 = 3$  м, а при  $-\pi/2 < u \leq 0$  — эллипсом  $\omega_2$  с полуосями  $r_1 = 4$  м и  $r_2 = 2$  м. Оба эллипса  $\omega_1$  и  $\omega_2$  проходят через точку  $(l_1 - l_2, 0)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Получим *ломаный сингулярный маятник*.

Найдем фокусы  $F_1', F_2'$  эллипса  $\omega_1$  и фокусы  $F_1'', F_2''$  эллипса  $\omega_2$  в координатах  $Oxy$ . Сначала запишем общие соотношения для фокального параметра  $c$  и фокусов  $F_1$  и  $F_2$  произвольного эллипса:

$$c = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}, \quad a = l_1 - l_2 - r_1, \quad F_1 = (a - c, 0), \quad F_2 = (a + c, 0).$$

Подставив параметры эллипсов  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , находим (с точностью до третьего знака)

$$F_1' = (-5.645, 0), \quad F_2' = (-0.354, 0), \quad F_1'' = (-6.464, 0), \quad F_2'' = (0.464, 0).$$

Пусть сингулярный маятник реализован как двойной математический маятник, а движение по эллипсу реализовано в виде нити. Нить крепится в фокусах  $F_1$  и  $F_2$  на двух разных подставках. Это позволяет нити не зацеплять маятник. Когда маятник находится в вертикальном положении ( $u = 0$ ), возможна смена фокусов. Для этого на двух подставках делается не одно крепление нити, а два: для фокусов эллипса  $\omega_1$  и фокусов эллипса  $\omega_2$ .

На рис. 5 показаны два типа движения, которые соответствуют эллипсам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Нить сначала крепится к точкам  $F_1''$  и  $F_2'$ . При движении по  $\omega_1$  участок нити на отрезке  $[F_1'', F_1']$  закреплен. Крепление в точке  $F_1'$  не позволяет нити полностью отклоняться при  $u > 0$ . При движении по  $\omega_2$  закреплен участок нити на отрезке

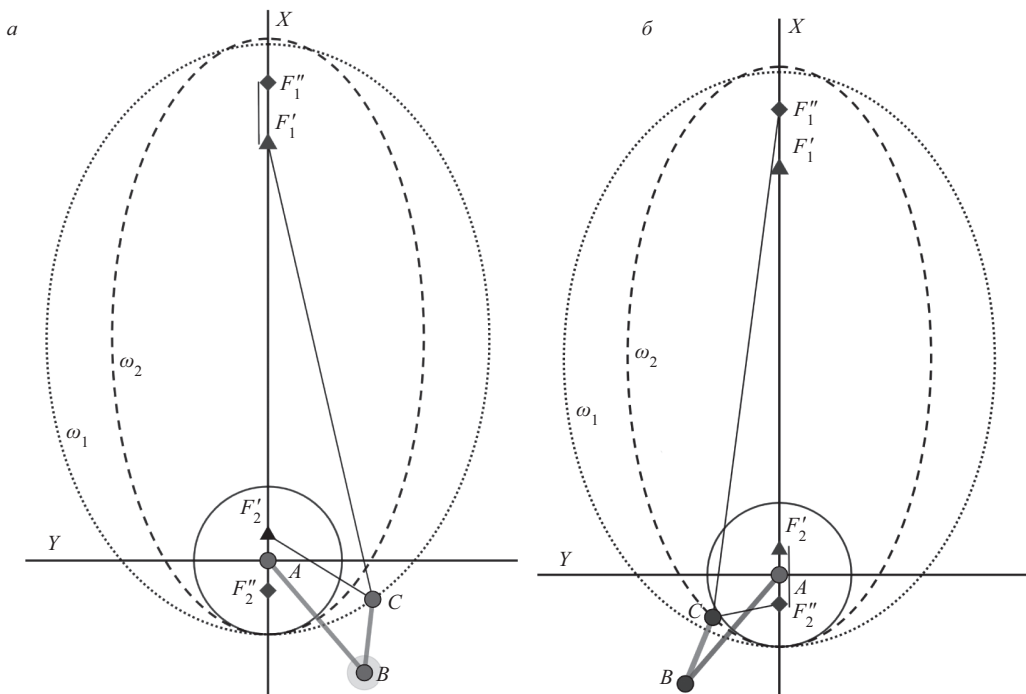


Рис. 5. Переход с эллипса  $\omega_1$  на эллипс  $\omega_2$  при изменении фокусов  $F_1$  и  $F_2$  для ломаного сингулярного маятника. Кинематическая схема: *а* — движение по эллипсу  $\omega_1$ , *б* — движение по эллипсу  $\omega_2$ .

$[F_2', F_2'']$ . Крепление в точке  $F_2''$  не позволяет нити отклоняться полностью при  $u < 0$ . У закрепленных участков нити на рис. 5 добавлены отрезки между фокусами.

**Теорема 4.** Конфигурационное пространство ломаного сингулярного маятника в координатах  $(\varphi, \psi)$  представляет собой две трансверсально пересекающиеся кривые при  $\varphi > 0$  и две касающиеся кривые при  $\varphi < 0$ . Особой точке соответствует положение  $(\varphi, \psi) = (0, \pi)$ . При движении через особую точку происходит разрыв скорости и кривизны.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Следует из утверждений 2 и 3, так как при  $\varphi \leq 0$  и  $\varphi \geq 0$  получаются разные конфигурационные пространства на двумерном торе. При  $\varphi \leq 0$  кривые на  $\mathbb{T}^2$  пересекаются трансверсально и не касаются прямой  $\psi = \varphi + \pi$ . При  $\varphi \geq 0$  кривые в конфигурационном пространстве имеют касание первого порядка. Касательные к гладким кривым совпадают с прямой  $\psi = \varphi + \pi$ . Получаем следующее: при прохождении особой точки меняется вектор скорости изображающей точки системы. Кривизна также меняется.  $\square$

График конфигурационного пространства ломаного сингулярного маятника показан на рис. 4, б. Для ломаного сингулярного маятника при прохождении особой точки для  $u \rightarrow 0^-$  множитель Лагранжа  $\lambda_3$  должен изменяться следующим образом: сначала  $\lambda_3$  меняется непрерывно (рис. 3, а), а при  $u = 0$  происходит скачок до  $\infty$  (рис. 3, б).

**Замечание 2.** Для ломаного сингулярного маятника невозможно применить «принцип гладкости» для выбора траектории движения после прохождения особой точки. В конфигурационном пространстве нет гладких траекторий, которые проходят через особую точку без остановки. При начальном движении с углом  $u < 0$  наиболее вероятной траекторией движения является траектория, которая образует меньший угол в особой точке (рис. 4, б).

**7. Заключение.** В статье рассмотрены аналитические значения реакций в особой точке для сингулярного маятника. Численные расчеты реакций для трансверсальной особой точки и для касания первого порядка согласуются с теоретическими значениями. Для случая трансверсальной особой точки силы реакции (на двумерном торе) в особой точке равны нулю. Для случая касания первого порядка в особой точке силы реакции отличны от нуля. При этом значение множителя  $\lambda_3$  является неограниченным при  $u \rightarrow 0$ . В этом случае для ломаного сингулярного маятника при прохождении особой точки для  $u \rightarrow 0^-$  множитель Лагранжа должен изменяться следующим образом: сначала  $\lambda_3$  меняется непрерывно, а при  $u = 0$  происходит скачок до  $\infty$ . Для случая негладкого сингулярного маятника при  $u < 0$  значение множителя Лагранжа  $\lambda_3$  становится неопределенным.

## Литература

1. Mukharlyamov R. G., Tuge D. C. Stabilization of redundantly constrained dynamic system. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science* **1** (2015).
2. Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints. *Вестник Казанского технологического университета* **17** (11) (2014).
3. Wojtyra M., Frączek J. Solvability of reactions in rigid multibody systems with redundant nonholonomic constraints. *Multibody Syst. Dyn.* **30**, 153–171 (2013). <https://doi.org/10.1007/s11044-013-9352-0>
4. Flores P., Pereira R., Machado M., Seabra E. Investigation on the Baumgarte stabilization method for dynamic analysis of constrained multibody systems. *Proceedings of EUCOMES 08*. Dordrecht, Springer, 305–312 (2009).
5. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. С., Юшков М. П. *Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления*. Москва, Физматлит (2005).
6. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. *Теоретическая механика*. Москва, Юрайт (2015).
7. Бурьян С. Н. Особенности движения маятника с сингулярным конфигурационным пространством. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 4, 541–551 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.402>
8. Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the motion of one-dimensional double pendulum. *AIP Conference Proceedings* **1959**, 030004 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034584>
9. Бурьян С. Н. Особенности динамики прямолинейного движения механизма Дарбу. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 4, 658–669 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.412>

Статья поступила в редакцию 20 марта 2021 г.;  
доработана 2 ноября 2021 г.;  
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Бурьян Сергей Николаевич — аспирант; [burianserg@yandex.ru](mailto:burianserg@yandex.ru)

# Reaction forces of singular pendulum

S. N. Burian

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Burian S. N. Reaction forces of singular pendulum. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 278–293. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209> (In Russian)

Various behavior types of reaction forces and Lagrange multipliers for the case of mechanical systems with configuration space singularities are studied in this paper. The motion of a one-dimensional double pendulum (or a singular pendulum) with a transversal singular point or a first order tangency singular point is considered. Properties of the configuration space of singular pendulum depends on the constraint line which the free vertex of the double pendulum moves along. Configuration space of singular pendulum could be represented by two smooth curves on a torus without common points, two transversely intersecting smooth curves or two curves with first-order tangency. In order to study the pendulum motion, the reaction forces on a two-dimensional torus are found. The expressions for the reaction forces are obtained analytically in angular coordinates. In the case of a transverse intersection it is proved that the reaction forces must be zero at the singular point. In the case of a first-order tangency singularity, the reaction forces are nonzero at the singular point. The Lagrange multiplier which depends on the motion along the ellipse becomes unlimited near to the singular point. Two mechanisms with a different type of singular points in the configuration space are described: a nonsmooth singular pendulum and a broken singular pendulum. There are no smooth regular curves passing through a singular point in the configuration spaces of these mechanical systems. In the case of nonsmooth singular pendulum, the Lagrange multiplier which depends on the motion along the ellipse becomes undefined when the singular point is passed. In the case of broken singular pendulum, the Lagrange multiplier makes a jump from a finite value to an infinite one.

*Keywords:* singular point, holonomic constraint, Lagrange multipliers.

## References

1. Mukharlyamov R. G., Tuge D. C. Stabilization of redundantly constrained dynamic system. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science* **1** (2015).
2. Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints. *Bulletin of the Kazan Technological University* **17** (11) (2014).
3. Wojtyra M., Frączek J. Solvability of reactions in rigid multibody systems with redundant nonholonomic constraints. *Multibody Syst. Dyn.* **30**, 153–171 (2013). <https://doi.org/10.1007/s11044-013-9352-0>
4. Flores P., Pereira R., Machado M., Seabra E. Investigation on the Baumgarte stabilization method for dynamic analysis of constrained multibody systems. In: *Proceedings of EUCOMES 08*. Dordrecht, Springer, 305–312 (2009).
5. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. S., Yushkov M. P. *Equations of motion of nonholonomic systems and variational principles of mechanics. New class of control problems*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2005). (In Russian)
6. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. *Theoretical mechanics*. Moscow, Iurait Publ. (2015). (In Russian)
7. Burian S. N. Behaviour of the pendulum with a singular configuration space. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 4, 541–551 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.402> (In Russian)

8. Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the motion of one-dimensional double pendulum. *AIP Conference Proceedings* **1959**, 030004 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034584>

9. Burian S. N. Specificity of the Darboux mechanism rectilinear motion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5 (63)**, iss. 4, 658–669 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.412> (In Russian)

Received: March 20, 2021

Revised: November 2, 2021

Accepted: December 2, 2021

#### Author's information:

*Sergei N. Burian* — [burianserg@yandex.ru](mailto:burianserg@yandex.ru)

## ХРОНИКА

6 октября 2021 года на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в санкт-петербургском Доме ученых им. М. Горького РАН выступили кандидат физ.-мат. наук, доцент А. С. Кулешов и студент Е. Н. Пикунова (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва) с докладом на тему «Аналитическое исследование бифуркации Андронова — Хопфа в задаче о движении кельтского камня».

#### Краткое содержание доклада:

Рассматривается классическая задача динамики неголономных систем — задача о движении тяжелого твердого тела по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Обсуждается явление потери устойчивости вращения тела при некотором критическом значении угловой скорости. Отмечается, что указанное явление сопровождается возникновением периодических движений тела с частотой, близкой к критическому значению, то есть имеет место бифуркация Андронова — Хопфа. Путем прямого вычисления первой ляпуновской величины доказано, что соответствующие периодические движения являются неустойчивыми.