УДК 517 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2
MSC 26D15

Дополнение к неравенству Гёльдера для кратных интегралов. I

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,
Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18

Для цитирования: *Иванов Б. Ф.* Дополнение к неравенству Гёльдера для кратных интегралов. I // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 255–268. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.207

Данная статья является первой частью работы, основной результат которой составляет утверждение о том, что если для функций $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$, где $m \geqslant 2$ и числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ таковы, что $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1$, выполнено нерезонансное условие (понятие, введенное в работе автором для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, +\infty]$), то $\sup_{a,b \in \mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{[a,b]} \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod_{k=1}^m \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)}$, где $[a, b]$ — n-мерный параллелепипед, константа $C > 0$ не зависит от функций $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, а $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, — это специально построенные нормированные пространства. В статье для любых пространств $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p_0, p \in (1, +\infty]$ и любой функции $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ вводится понятие множества резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Это множество является подмножеством $\{\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}\}^n$ и для всякого тригонометрического полинома n переменных относительно любого пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ представляет собой спектр рассматриваемого полинома. Рассмотрены теоремы о представлении каждой функции $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ с непустым резонансным множеством в виде суммы двух функций таких, что первая из них принадлежит пространству $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а носитель преобразования Фурье второй сосредоточен в окрестности резонансного множества.

Ключевые слова: неравенство Гёльдера.

1. Введение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество положительной меры Лебега, $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$, функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(D), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(D)$ и выполнено условие

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1.$$

Тогда для этих функций справедливо неравенство Гёльдера (см., например, [1, с. 232]):

$$\left| \int\limits_D \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau) d\tau \right| \leqslant \prod_{k=1}^m \|\gamma_k\|_{L^{p_k}(D)}. \tag{1}$$

Если же

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1, \tag{2}$$

и $\operatorname{mes} D < +\infty$, то для функций $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$, очевидно, выполняется неравенство, аналогичное неравенству (1).

В настоящей статье вопрос об оценке интеграла от произведения функций рассматривается в предположении, что выполнено неравенство (2) и $\operatorname{mes} D = \infty$.

Настоящая работа представляет собой обобщение результатов автора [2, 3] на многомерный случай. Данная статья является первой частью работы и состоит из трех разделов, включая введение. Второй раздел носит вспомогательный характер. В третьем разделе для любых пространств $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p_0, p \in (1, +\infty]$ и любой функции $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ вводится понятие множества «резонансных» точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ — в дальнейшем «резонансное» множество. Оно является подмножеством $\{\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}\}^n$ и для всякого тригонометрического полинома n переменных (в примере разобран случай $n = 2$) относительно любого пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ представляет собой спектр рассматриваемого полинома. Далее рассмотрены теоремы 2 и 3 о представлении каждой функции $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ с непустым резонансным множеством в виде суммы двух функций таких, что первая из них принадлежит пространству $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а носитель преобразования Фурье второй сосредоточен в окрестности резонансного множества. При этом согласно теореме 4 резонансное множество пусто в том и только том случае, когда $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Во второй части работы, которая будет опубликована в следующем выпуске журнала, вводится понятие «нерезонансного» условия, состоящего в выполнении ряда требований ко множествам резонансных частот этих функций, и формулируется замечание, согласно которому в случае тригонометрических многочленов нерезонансное условие при $n = 1$ соответствует понятию нерезонансного условия из классической теории резонанса. Основное утверждение второй части работы составляет теорема, заключающаяся в следующем. Если числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству (2), функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$, и для этих функций выполнено нерезонансное условие, то

$$\sup_{a,b\,\in\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{[a,b]} \prod_{k=1}^{m} [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod_{k=1}^{m} \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3}$$

где $[a, b]$ — n-мерный параллелепипед, константа $C > 0$ не зависит от функций $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, а $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$ — это пространства со специально определенной нормой, состоящие из тех элементов $L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, множество резонансных точек которых лежит в заранее выбранной окрестности множества резонансных точек функции γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$. Также в терминах отсутствия резонанса дано условие ограниченности интеграла от произведения функций при интегрировании по произвольному множеству $D \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{mes} D = +\infty$.

2. Определения, обозначения и некоторые вспомогательные утверждения. В статье использованы следующие обозначения и формулы:

$\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$;

$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\}$ — множество резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$;

$\mathcal{R}_k$ — множество резонансных точек функции γ_k;

$\mathcal{F}$ — объединение координатных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$;

$d = \operatorname{dist}\big[\mathcal{F}, \sum\limits_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k\big] > 0$ — нерезонансное соотношение (определение операции сложения множеств из $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ дано во второй части работы);

Π — открытый n-мерный куб с ребром 2 и центром в начале координат;

$V(W,\delta) = \bigcup_{w\in W}(w+\delta\Pi)$, где $W \subset \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$;

$V(W,\delta,\Delta) = \bigcup_{u\in W} B_u$, где $W \subset \widetilde{\mathbb{R}}^n$, $\delta, \Delta > 0$ и $B_u = u + \delta\Pi$, если u конечно, а в случае, когда u бесконечно, то B_u — это бесконечный параллелепипед с центром в точке $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^n \backslash \mathbb{R}^n$) (определение $V(W,\delta,\Delta)$ см. в данном разделе ниже).

Для любой функции $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим ее преобразование Фурье через $\widehat{u}$ и выберем его в виде

$$\widehat{u}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\tau)} u(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Обратное преобразование Фурье функции $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\widetilde{v}$. Оно будет иметь вид

$$\widetilde{v}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,\tau)} v(y)\, dy.$$

Через $S(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, а через $S'(\mathbb{R}^n)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Пусть $p \in [1, +\infty]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, тогда, как известно (см., например, [4, с. 77]), функционал

$$(\gamma, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\gamma(t)} \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^n)$.

Известно также, что преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^n)$, обозначаемый в соответствии с (4) через $\widehat{f}$ и задаваемый (в силу выбора определения для (f,φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой $(\widehat{f}, \widehat{\varphi}) = (2\pi)^n (f,\varphi)$.

С учетом введенных выше обозначений, известные формулы (см., например, [5, гл. II, § 2], [6, гл. II, § 9]) принимают вид

$$\{1(\tau)\}\widehat{\ }(y) = (2\pi)^n \delta(y), \quad \{e^{i(\lambda,\tau)}\}\widehat{\ }(y) = (2\pi)^n \delta(y-\lambda),$$
$$\{\gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau)\}\widehat{\ }(y) = \widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y), \quad \{\widehat{\gamma}_1(y) * \widehat{\gamma}_2(y)\}\widetilde{\ }(\tau) = (2\pi)^n \gamma_1(\tau)\gamma_2(\tau), \tag{5}$$

где $\lambda, y, \tau \in \mathbb{R}^n$, (λ,τ) — скалярное произведение, $\gamma_1, \gamma_2 \in S'(\mathbb{R}^n)$ и δ — дельта-функция.

Пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу, $\rho > 0$ и Π — открытый n-мерный куб с центром в начале координат и ребром 2. Обозначим через $\Omega(\tau, W, \rho)$ такую функцию, преобразование Фурье которой имеет вид $\widehat{\Omega}(y,W,\rho) = \xi_W(y) * \omega(y,\rho)$, где $\xi_M(y)$ — характеристическая функция множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\omega(y,\rho) = 1/\rho^{2n} \xi_{1/2\rho\overline{\Pi}}(y) * \xi_{1/2\rho\overline{\Pi}}(y)$. Нетрудно проверить, что $\operatorname{supp}\omega(y,\rho) = \rho\overline{\Pi}$ и $0 \le \widehat{\Omega}(y,W,\rho) \le 1$.

Из определения функции $\widehat{\Omega}(y,W,\rho)$ в соответствии с [7, с. 69] получаем, что

$$\operatorname{supp}\widehat{\Omega}(y,W,\rho) \subset \overline{\overline{W} + \rho\overline{\Pi}}, \tag{6}$$

$$\widehat{\Omega}(y, W, \rho) = 1, \quad \text{если} \quad (y + \rho\Pi) \subset W. \tag{7}$$

Кроме того, в случае, когда $\operatorname{mes} W < +\infty$ и $p \in [1, +\infty]$, выполняется вхождение

$$\Omega(\tau, W, \rho) \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Пусть $p \in [1, +\infty]$, $n \geq 1$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — произвольный вектор с положительными координатами и $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим:

$Q(\varepsilon) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{y \,|\, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ |y_k| < \varepsilon_k\}$, таким образом, $Q(\varepsilon)$ — «крестообразная» окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$;

$\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus Q(\varepsilon), p)$ — множество всех функций $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, носители преобразования Фурье которых лежат в $\mathbb{R}^n \setminus Q(\varepsilon)$;

$E_t = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in R^n,\ \tau_j \in [0, t_j]$, если $t_j \geq 0$, и $\tau_j \in [t_j, 0]$, если $t_j < 0,\ 1 \leq j \leq n\}$ — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 1$, $p \in (1, +\infty]$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Тогда для любой функции $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n \setminus Q(\varepsilon), p)$ справедливо неравенство*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\frac{4\sqrt{\pi}}{(p-1)^{1/p}} \right]^n \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_k^{1/q}} \right] \|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доказательство. Ранее автором в работах [2, 3] было доказано, что при сделанных выше предположениях выполняется неравенство

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C^n(q) \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_k^{1/q}} \right] \|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, а константа $C(q) > 0$ не зависит от функции γ и вектора ε. Найдем оценку $C(q)$. Для этого сначала рассмотрим случай, когда $p \in (1, 2]$. В работе автора [8, с. 43–45] было установлено, что $C(q) \leqslant 2H_p(\frac{2}{p-1})^{1/p}$, где H_p — константа из неравенства Хаусдорфа—Юнга [9, с. 128]:

$$\|\widehat{\gamma}\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} \leqslant H_p \|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1)},$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Согласно выбранной нами в (4) формы записи преобразования Фурье имеем $H_p < (2\pi)^{1/q}$. Поэтому выполняется неравенство

$$C(q) \leqslant 2(2\pi)^{1/q} \cdot \frac{2^{1/p}}{(p-1)^{1/p}} \leqslant 4\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{(p-1)^{1/p}}. \tag{9}$$

Пусть теперь $2 < p \leqslant +\infty$. Автором в работе [2, с. 439] было доказано, что в этом случае имеем

$$C(q) \leqslant 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{(q-1)/q} 2^{1/q} \leq 4. \tag{10}$$

Из неравенств (9) и (10) следует, что при $p \in (1, +\infty]$ справедлива оценка для $C(q)$, обеспечивающая выполнение теоремы. $\square$

3. Резонансные точки и теорема о представлении функций из $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $p_0, p \in (1, +\infty]$. Раздел начинается с понятия (определение 1) множества резонансных точек для функций $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, совпадающего в случае тригонометрического многочлена (см. пример) со спектром этого многочлена. Далее рассмотрены теоремы 2 и 3 о представлении каждой функции $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ с непустым резонансным множеством в виде суммы двух функций таких, что первая из них принадлежит пространству $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а носитель преобразования Фурье второй сосредоточен в окрестности резонансного множества. При этом согласно теореме 4 резонансное множество пусто в том и только том случае, когда $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Этим теоремам предшествует ряд вспомогательных утверждений.

Положим $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и будем считать окрестностью точки ∞ всякое множество вида $(-\infty, a) \cup \{\infty\} \cup (b, +\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b$. По определению $\widetilde{\mathbb{R}}^n = \{v | v = (v_1, ..., v_n), v_j \in \mathbb{R}^1 \bigcup \{\infty\}, 1 \le j \le n\}$ — пространство с топологией прямого произведения, где в качестве координат точек v из $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ могут выступать как обычные числа, так и символ ∞.

Пусть числа $p_0, p \in (1, +\infty]$.

Определение 1. Точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$ называется *нерезонансной* точкой функции $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, если существуют такие функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и окрестность $V_u \subset \widetilde{\mathbb{R}}^n$ точки u, для которых $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$, $y \in V_u \cap \mathbb{R}^n$. Остальные точки множества $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ называются *резонансными* точками функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, и их множество обозначается $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\}$.

Отметим, что равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в определении 1 понимается в обобщенном смысле, а все точки окрестности V_u являются нерезонансными.

Из определения 1, очевидно, следует, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\}$ — замкнутое множество и, если $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\} = \varnothing$.

Пример. Пусть $n = 2$, $\gamma(\tau_1, \tau_2) = \sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{l=1}^{s} c_{kl} e^{i\lambda_k \tau_1} e^{i\mu_l \tau_2}$, где $r, s \in \mathbb{N}$, $c_{kl} \in \mathbb{C}$, $c_{kl} \neq 0$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $\mu_l \in \mathbb{R}^1$, $1 \leqslant k \leqslant r$, $1 \leqslant l \leqslant s$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^1$. Тогда для любого $p \in (1, +\infty]$ множество резонансных точек многочлена γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^2)$ совпадает со спектром этого многочлена:

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^2)\} = \bigcup_{k=1}^{r} \bigcup_{l=1}^{s} (\lambda_k, \mu_l). \tag{11}$$

Действительно, согласно определению спектра почти периодической функции многих переменных (см. [10]), спектр многочлена γ равен множеству, определяемому правой частью формулы (11). Найдем $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^2)\}$. Так как в силу (5) имеем $\widehat{\gamma}(y_1, y_2) = (2\pi)^2 \sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{l=1}^{s} c_{kl} \delta(y_1 - \lambda_k) \delta(y_2 - \mu_l)$, то для любой точки $y_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}^2$, $y_0 \notin \bigcup\limits_{k=1}^{r} \bigcup\limits_{l=1}^{s} (\lambda_k, \mu_l)$ можно указать ее окрестность V_0, в которой $\widehat{\gamma}(y) \equiv 0$. Следовательно, такая точка y_0 является нерезонансной, и $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{r} \bigcup\limits_{l=1}^{s} (\lambda_k, \mu_l)$

для любого $p \in (1, +\infty]$. Проверим, что выполняется и обратное включение. Пусть какая-либо из точек (λ_k, μ_l), $1 \leqslant k \leqslant r$, $1 \leqslant l \leqslant s$, не является резонансной. Без ограничения общности можно считать, что это (λ_1, μ_1). Тогда существует V_1 — окрестность точки (λ_1, μ_1) — и функция $\alpha_{\lambda_1\mu_1}(\tau_1, \tau_2) \in L^q(\mathbb{R}^2)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q \in [1, +\infty)$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_{\lambda_1\mu_1}(y)$, $y \in V_1$. Выберем столь малое число $\rho > 0$, что прямоугольник $[\lambda_1 - 3\rho, \lambda_1 + 3\rho] \times [\mu_1 - 3\rho, \mu_1 + 3\rho] \subset V_1$, $([\lambda_1 - 3\rho, \lambda_1 + 3\rho] \times [\mu_1 - 3\rho, \mu_1 + 3\rho]) \bigcap \{[\bigcup\limits_{k=1}^{r} \bigcup\limits_{l=1}^{s} (\lambda_k, \mu_l)] \backslash (\lambda_1, \mu_1)\} = \varnothing$ и обозначим $a = (\lambda_1 - 2\rho, \mu_1 - 2\rho)$, $b = (\lambda_1 + 2\rho, \mu_1 + 2\rho)$, $\gamma_1(\tau) = \alpha_{\lambda_1\mu_1}(\tau) * \Omega(\tau, [a, b], \rho)$. Тогда $\gamma_1 \in L^q(\mathbb{R}^1)$, но в силу (7) имеем $\widehat{\gamma}_1(y) = \widehat{\gamma}(y) \cdot \widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = (2\pi)^2 \delta(y_1 - \lambda_1)\delta(y_2 - \mu_l)$, то есть $\gamma_1(\tau) = e^{i\lambda_1\tau} e^{i\mu_1\tau} \notin L^q(\mathbb{R}^2)$. Полученное противоречие доказывает равенство (11). □

Перейдем к теоремам о разложении произвольной функции $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ с непустым резонансным множеством на сумму двух слагаемых.

Введем некоторые обозначения. Пусть $0 < \delta < \Delta < \infty$ и множество $W \subsetneqq \widetilde{\mathbb{R}}^n$. Для каждой точки $u = (u_1, ..., u_n) \in W$ обозначим через B_u ее окрестность, которую определим следующим образом. Если u — конечная точка, то положим $B_u = u + \delta\Pi$. Если u — бесконечная точка, у которой не все координаты бесконечны, то через B_u будем обозначать множество $B_u = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, где $I_j = (u_j - \delta, u_j + \delta)$, когда u_j конечно, и $I_j = (-\infty, -\Delta + \delta) \cup \{\infty\} \cup (\Delta - \delta, +\infty)$, если $u_j = \infty$, $1 \leq j \leq n$. Если же $u = (\infty, \infty, ..., \infty)$, то положим $B_u = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, где $I_j = (-\infty, -\Delta + \delta) \cup \{\infty\} \cup (\Delta - \delta, +\infty)$, $1 \leq j \leq n$.

Обозначим

$$V(W, \delta, \Delta) = \bigcup_{u \in W} B_u.$$

Теорема 2. *Пусть $p_0, p \in (1, +\infty]$, $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, резонансное множество $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\} \neq \widetilde{\mathbb{R}}^n$, $\mathcal{R}_\gamma \backslash \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, и $x \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция. Тогда существуют числа $0 < \delta_0 < \frac{1}{2}\Delta_0 < \infty$ такие, что для любых $0 < \delta < \delta_0$, $\Delta_0 < \Delta < \infty$ можно указать функцию $G(\tau) = G(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$, удовлетворяющую условиям:*

1) $\widehat{G}(y) = 0$, если $y \in \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \frac{1}{4}\delta, \Delta)} \cap \mathbb{R}^n$ и $\widehat{G}(y) = 1$, если $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \frac{13}{16}\delta, \Delta)$;

2) определена свертка $h(\tau, x) = x(\tau) * G(\tau) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ и выполняется разложение

$$x(\tau) = h(\tau, x) + H(\tau, x),$$

где $\operatorname{supp} \widehat{h}(y, x) \bigcap \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, 1/4\delta, \Delta)} = \emptyset$, $H(\tau, x) = x(\tau) - x(\tau) * G(\tau) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \widehat{H}(y, x) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \frac{13}{16}\delta, \Delta)}$;

3) $h(\tau, \gamma) = \gamma(\tau) * G(\tau) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Так как $\mathcal{R}_\gamma \neq \widetilde{\mathbb{R}}^n$, то существует нерезонансная точка $u_0 \notin \mathcal{R}_\gamma$, $u_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$. Но тогда, как следует из определения нерезонансной точки, существует и некоторая окрестность этой точки, целиком состоящая из нерезонансных точек. В этой окрестности, очевидно, обязательно будут содержаться и конечные нерезонансные точки. Следовательно, можно указать такие $0 < \delta_0, \Delta_0 < \infty$, что будет выполняться условие $V(\mathcal{R}_\gamma, \delta_0, \Delta_0) \subsetneqq \widetilde{\mathbb{R}}^n$. Выберем произвольные $0 < \delta < \delta_0$, $\Delta_0 < \Delta < \infty$ и сформируем открытое покрытие множества $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ следующим образом.

Выберем произвольную точку $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$ и предположим сначала, что она нерезонансная. Тогда для нее можно указать функцию $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и окрестность $V_u \subset \widetilde{\mathbb{R}}^n$ точки u такие, что $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$, $y \in V_u \cap \mathbb{R}^n$. Если все координаты выбранной точки $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$ конечны, то выберем произвольные числа $\rho_u \in (0, \frac{1}{16}\delta)$, $a_u > 2\rho_u$ такие, что выполняется включение $\mathcal{B}_{0u} = u + (a_u + 2\rho_u)\Pi \subset V_u$, и в качестве нужной нам окрестности возьмем множество $\mathcal{B}_u = u + a_u\Pi$.

Если все координаты выбранной точки $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$ равны бесконечности, то, обозначив $u = \widetilde{\infty} = (\infty, \infty, ..., \infty)$, выберем произвольные числа $0 < \rho_\infty < \frac{1}{16}\delta$ и $b_\infty > 2\rho_\infty$ так, чтобы выполнялось включение

$$\mathcal{B}_{0\widetilde{\infty}} = \{v | v = (v_1, ..., v_n),\ v_j \in (-\infty, -b_\infty + 2\rho_\infty) \cup \{\infty\} \cup (b_\infty - 2\rho_\infty, \infty),\ 1 \leq j \leq n\} \subset V_{\widetilde{\infty}},$$

и возьмем в качестве окрестности точки $\widetilde{\infty}$ множество

$$\mathcal{B}_{\widetilde{\infty}} = \{v | v = (v_1, ..., v_n),\ v_j \in (-\infty, -b_\infty) \cup \{\infty\} \cup (b_\infty, \infty),\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Если в координатной форме записи точки u не все координаты конечны, то выберем для такой точки $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$ произвольные числа $\rho_u \in (0, \frac{1}{16}\delta)$, $a_u > 2\rho_u$ и $b_u > 2\rho_u$ так, чтобы выполнялось включение $\mathcal{B}_{0u} = I_{01} \times I_{02} \times ... \times I_{0n}$, где $I_{0j} = (u_j - a_u - 2\rho_u, u_j + a_u + 2\rho_u)$, если u_j конечно, и $I_j = (-\infty, -b_u + 2\rho_u) \cup \{\infty\} \cup (b_u - 2\rho_u, +\infty)$, если $u_j = \infty$, $1 \leq j \leq n$, и возьмем в качестве окрестности точки u множество $\mathcal{B}_u = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, где $I_j = (u_j - a_u, u_j + a_u)$, если u_j конечно, и $I_j = (-\infty, -b_u) \cup \{\infty\} \cup (b_u, +\infty)$, если $u_j = \infty$, $1 \leq j \leq n$.

Если же выбранная точка $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$ резонансная и все ее координаты конечны, то положим $\mathcal{B}_u = u + \frac{3}{16}\delta\Pi$. Если среди координат точки $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ не все конечны, то в качестве ее окрестности $\mathcal{B}_u$ возьмем множество $\mathcal{B}_u = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, где $I_j = (u_j - \frac{3}{16}\delta, u_j + \frac{3}{16}\delta)$, если u_j конечно, и $I_j = (-\infty, -\Delta + \frac{3}{16}\delta) \cup \{\infty\} \cup (\Delta - \frac{3}{16}\delta, +\infty)$, если $u_j = \infty$, $1 \leq j \leq n$. Если же $u = (\infty, \infty, ..., \infty)$, то положим $\mathcal{B}_u = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, где $I_j = (-\infty, -\Delta + \frac{3}{16}\delta) \cup \{\infty\} \cup (\Delta - \frac{3}{16}\delta, +\infty)$, $1 \leq j \leq n$.

Перечисленные выше множества $\mathcal{B}_u$, $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$, которые мы далее будем называть параллелепипедами, образуют открытое покрытие множества $\widetilde{\mathbb{R}}^n$, являющегося компактным в силу гомеоморфности тору T^n. Выделим из него какое-нибудь конечное и перенумеруем входящие в него параллелепипеды. Пусть N — количество параллелепипедов-окрестностей, образующих это конечное покрытие. Тогда $\widetilde{\mathbb{R}}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \mathcal{B}_{u_k} = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \overline{\mathcal{B}}_{u_k}$, где $u_1, u_2, ..., u_N$ — это точки, по которым строились (определялись) параллелепипеды $\mathcal{B}_u$.

По построению, ребра и грани параллелепипедов $\overline{\mathcal{B}}_{u_1}, \overline{\mathcal{B}}_{u_2}, ..., \overline{\mathcal{B}}_{u_N}$ параллельны соответствующим координатным осям и координатным гиперплоскостям. Поэтому они могут пересекаться только по границе или по параллелепипедам. Если из какого-либо параллелепипеда $\mathcal{B}_{u_k}$, $1 \leq k \leq N$, вырезать параллелепипеды пересечения с соседними параллелепипедами, то замыкание оставшейся фигуры можно представить в виде объединения параллелепипедов, пересекающихся только по границе. Подвергнем параллелепипеды $\overline{\mathcal{B}}_{u_k}$, $1 \leq k \leq N$, взаимному пересечению и обозначим новые, полученные в результате дробления, замкнутые параллелепипеды через $P_1, P_2, ..., P_k, ...$ и предположим, что их число равно K. Ясно, что при этом $N \leq K$.

Параллелепипеды $P_1, P_2, ..., P_K$ образуют замощение пространства $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ (т. е. покрытие, при котором пересечение параллелепипедов возможно лишь по границе):

$$\widetilde{\mathbb{R}}^n = \bigcup_{k=1}^{K} P_k, \quad \mathrm{mes}(P_m \cap P_l) = 0, \quad m \neq l, \quad P_k = \overline{P}_k, \quad 1 \leq k, l, m \leq K,$$

где K — общее количество параллелепипедов замощения.

Обозначим через $\mathcal{R}_\gamma^* \subset \mathbb{R}^n$ вспомогательное множество, которое по определению равно R_γ, если R_γ ограничено в $\mathbb{R}^n$, и, если R_γ не ограничено (т. е. $R_\gamma \setminus \mathbb{R}^n \neq \infty$), то

$$\mathcal{R}_\gamma^* = (R_\gamma \cap \mathbb{R}^n) \cup \left(\bigcup_{u \in R_\gamma \setminus \mathbb{R}^n} B_u^* \right),$$

где $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $B_u^* = I_1^* \times I_2^* \times ... \times I_n^*$, $I_j^* = [u_j - \frac{1}{16}\delta; u_j + \frac{1}{16}\delta]$, в случае, когда $u_j \neq \infty$, и $I_j^* = (-\infty; -\Delta + \frac{1}{16}\delta] \cup \{\infty\} \cup [\Delta - \frac{1}{16}\delta; \infty)$ в случае, когда $u_j = \infty$, $1 \leq j \leq n$. Таким образом, $\mathcal{R}_\gamma^*$ замкнуто в $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ и $\mathcal{R}_\gamma^* \cap \mathbb{R}^n$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что условие $u \in R_\gamma \setminus \mathbb{R}^n$ означает, что хотя бы одна координата вектора u равна ∞.

Также отметим, что в силу определения $\mathcal{R}_\gamma^*$ для любого $0 < \rho < \delta$ выполняется включение

$$V(\mathcal{R}_\gamma, \rho, \Delta) \subseteq V(\mathcal{R}_\gamma^*, \rho, \Delta) \subset V\left(\mathcal{R}_\gamma, \rho + \frac{1}{16}\delta, \Delta\right). \tag{12}$$

Пусть $\rho > 0$, $W \subset \mathbb{R}^n$ и

$$V(W, \rho) = W + \rho\Pi = \bigcup_{w \in W} (w + \rho\Pi).$$

Обозначим: $D_0 = \widetilde{\mathbb{R}}^n \setminus V(\mathcal{R}_\gamma^*, \delta, \Delta)$; $D_{\lambda+\mu}$ — такие открытые в $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ множества, что $D_{\lambda+\mu} \cap \mathbb{R}^n = V(D_\lambda \cap \mathbb{R}^n, \mu\delta)$, где (λ, μ) — это следующие пары чисел: $(0, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}), (\frac{5}{8}, \frac{1}{16})$. Нетрудно заметить, что в этом случае $D_{1/4} \cap V(\mathcal{R}_\gamma^*, \frac{3}{4}\delta, \Delta) = \emptyset$, $D_{1/2} \cap V(\mathcal{R}_\gamma^*, \frac{1}{2}\delta, \Delta) = \emptyset$, $D_{5/8} \cap V(\mathcal{R}_\gamma^*, \frac{3}{8}\delta, \Delta) = \emptyset$ и $D_{11/16} \cap V(\mathcal{R}_\gamma^*, \frac{1}{4}\delta, \Delta) = \emptyset$.

Выделим из построенного замощения те и только те параллелепипеды, которые пересекаются с $D_{1/2}$. Без ограничения общности можно считать, что это первые M $(M < K)$ параллелепипедов, которые мы для удобства записи переобозначим: $Q_m = P_m$, $1 \leq m \leq M < K$. При этом, как видно из построения, для каждого из параллелепипедов Q_m существуют функция $\alpha_m \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и число $0 < \rho_m < \frac{1}{16}\delta$ такие, что $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_m(y)$, $y \in (Q_m \cap \mathbb{R}^n) + 2\rho_m\Pi$. Кроме того, имеем

$$D_{1/2} \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} Q_m, \quad Q_m \bigcap D_{1/2} \neq \emptyset, \quad 1 \leq m \leq M,$$

и можно доказать, что

$$\bigcup_{m=1}^{M} Q_m \subset D_{5/8}, \quad Q_m \bigcap D_{1/2} \neq \emptyset, \quad 1 \leq m \leq M.$$

Выберем $0 < \rho < \min\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_M, \frac{1}{16}\delta\}$ и обозначим $G(t) = \sum_{m=1}^{M} \Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho)$.

Предложение 1. *При сделанных выше предположениях и обозначениях выполняются равенства:*

1) $\widehat{G}(y) = 0$, *если* $y \in \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \frac{1}{4}\delta, \Delta)} \cap \mathbb{R}^n$;

2) $\widehat{G}(y) = 1$, *если* $y \in D_{\frac{1}{4}} \cap \mathbb{R}^n$.

Доказательство предложения 1. 1) Согласно определению, преобразование Фурье функции $\Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho)$ имеет вид $\widehat{\Omega}(y, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) = \xi_{Q_m \cap \mathbb{R}^n}(y) * \omega(y, \rho)$. Поэтому

$$\widehat{G}(y) = \sum_{m=1}^{M} \widehat{\Omega}(y, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) = \sum_{m=1}^{M} \xi_{Q_m \cap \mathbb{R}^n}(y) * \omega(y, \rho) = \xi_{\bigcup_{m=1}^{M} Q_m \cap \mathbb{R}^n}(y) * \omega(y, \rho),$$

откуда в силу (6), замкнутости Q_m, $1 \le m \le M$, и определения множеств $D_{5/8}$, $D_{11/16}$ получаем, что

$$\operatorname{supp} \sum_{m=1}^{M} \widehat{\Omega}(y, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) \subset \overline{\bigcup_{m=1}^{M} [\overline{Q_m \cap \mathbb{R}^n} + \rho\overline{\Pi}]} \subset \bigcup_{m=1}^{M} [Q_m \cap \mathbb{R}^n + \rho\overline{\Pi}] \subset$$

$$\subset D_{5/8} \cap \mathbb{R}^n + \frac{1}{16}\delta\Pi = D_{11/16} \cap \mathbb{R}^n.$$

Следовательно,

$$\operatorname{supp} \sum_{m=1}^{M} \widehat{\Omega}(y, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) \bigcap \overline{V\left(\mathcal{R}^*_\gamma, \frac{1}{4}\delta, \Delta\right)} = \emptyset.$$

Но тогда, так как согласно (12) $V(\mathcal{R}_\gamma, \rho, \Delta) \subseteq V(\mathcal{R}^*_\gamma, \rho, \Delta)$ для любого $0 < \rho < \delta$, то

$$\operatorname{supp} \widehat{G}(y) \bigcap \overline{V\left(\mathcal{R}_\gamma, \frac{1}{4}\delta, \Delta\right)} = \operatorname{supp} \sum_{m=1}^{M} \widehat{\Omega}(y, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) \bigcap \overline{V\left(\mathcal{R}_\gamma, \frac{1}{4}\delta, \Delta\right)} = \emptyset,$$

откуда и следует справедливость первого утверждения.

2) Как следует из определения, $\widehat{G}(y) = \widehat{\Omega}(y, \sum_{m=1}^{M} Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho)$, где $0 < \rho < \frac{1}{16}\delta$. Согласно (7), для выполнения условия $\widehat{G}(y) = 1$ достаточно, чтобы $y \in \mathbb{R}^n$ и $y + \rho\Pi \subset \sum_{m=1}^{M} Q_m \cap \mathbb{R}^n$. А для этого достаточно выполнения условия $y \in D_{1/4} \cap \mathbb{R}^n$, поскольку в таком случае $(y + \rho\Pi) \subset (D_{1/4} \cap \mathbb{R}^n + \rho\Pi) \subset (D_{1/4} \cap \mathbb{R}^n + \frac{1}{4}\delta\Pi) = D_{1/2} \cap \mathbb{R}^n \subset \sum_{m=1}^{M} Q_m \cap \mathbb{R}^n$. □

Обозначим $x_m(t) = x(t) * \Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho)$ и $\gamma_m(t) = \gamma(t) * \Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho)$.

Предложение 2. *Пусть при сделанных выше предположениях параллелепипед* Q_m *ограничен. Тогда:*

1) $\|x_m(t)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \le \|x(t)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \|\Omega(t, Q_m, \rho)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$,

2) $\|\gamma_m(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \|\alpha_m(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|\Omega(t, Q_m, \rho)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Доказательство предложения 2. 1) Действительно, если параллелепипед Q_m ограничен, то в силу (8) и неравенства Юнга (см., например, [11, с. 42]) выполняется первое утверждение предложения.

2) Далее, так как $\operatorname{supp}\widehat{\Omega}(y, Q_m, \rho) = \overline{Q_m + \rho\Pi}$, то для любой основной функции $\varphi(t) \in S$ такой, что $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}(y) \bigcap \overline{Q_m + \rho\Pi} = \emptyset$, получаем

$$(\gamma(t) * \Omega(t, Q_m, \rho), \varphi(t)) = \left(\gamma(t), \frac{1}{(2\pi)^n}(e^{-i(y,t)}\widehat{\Omega}(y, Q_m, \rho), \widehat{\varphi}(y))\right) = 0.$$

Если же $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}(y) \subset (Q_m + 2\rho\Pi)$, то

$$(\gamma(t) * \Omega(t, Q_m, \rho), \varphi(t)) = \left(\Omega(t, Q_m, \rho), \frac{1}{(2\pi)^n}(e^{-i(y,t)}\widehat{\gamma}(y), \widehat{\varphi}(y))\right) =$$
$$= \left(\Omega(t, Q_m, \rho), \frac{1}{(2\pi)^n}(e^{-i(y,t)}\widehat{\alpha}_m(y), \widehat{\varphi}(y))\right) = (\alpha_m(t) * \Omega(t, Q_m, \rho), \varphi(t)).$$

Но тогда $\gamma(t) * \Omega(t, Q_m, \rho) = \alpha_m(t) * \Omega(t, Q_m, \rho)$ для $t \in \mathbb{R}^n$, откуда по теореме Юнга получаем справедливость второго утверждения предложения 2. □

Продолжим доказательство теоремы 2. Пусть теперь параллелепипед Q_m неограничен. Предположим сначала, что в координатной форме записи точек из Q_m имеется ровно $1 \leq k < n$ координат, которые принимают только конечные значения, и для упрощения обозначений будем считать, что это первые k координат. Тогда параллелепипед Q_m можно представить в виде

$$Q_m = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_k, b_k] \times \{(-\infty, a_{k+1}] \cup \{\infty\} \cup [b_{k+1}, +\infty)\} \times ... \times$$
$$\times \{(-\infty, a_n] \cup \{\infty\} \cup [b_n, +\infty)\},$$

где $a_j < b_j$, $1 \leq j \leq n$, — некоторые числа из $\mathbb{R}^1$. Из записи Q_m в виде прямого произведения для $Q_m \cap \mathbb{R}^n$ получаем

$$\xi_{Q_m \cap \mathbb{R}^n}(y) = \xi_{Q_m \cap \mathbb{R}^n}(y_1, ..., y_k, y_{k+1}, ..., y_n) = \prod_{j=1}^{k} \xi_{[a_j, b_j]}(y_j) \times \prod_{l=k+1}^{n} \{1(y_l) - \xi_{(a_l, b_l)}(y_l)\}.$$

Обозначим $\widehat{\Omega}_r(y_r) = \widehat{\Omega}(y_r, [a_r, b_r], \rho)$, $\Omega(t_r) = \Omega(t_r, [a_r, b_r], \rho)$, $1 \leq r \leq n$.

Предложение 3. *Пусть при сделанных выше предположениях параллелепипед Q_m неограничен и в координатной форме записи точек из Q_m первые $1 \leq k < n$ координат принимают только конечные значения. Тогда*

$$\textit{1)}\ \|x_m(t)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \leq \|x(t)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \prod_{j=1}^{k} \|\Omega_j(t_j)\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} \prod_{r=k+1}^{n} \left\{1 + \|\Omega_r(t_r)\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}\right\};$$

$$\textit{2)}\ \|\gamma_m(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|\alpha_m(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \prod_{j=1}^{k} \|\Omega_j(t_j)\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} \prod_{r=k+1}^{n} \left\{1 + \|\Omega_r(t_r)\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}\right\}.$$

Доказательство предложения 3. 1) Как следует из определения,

$$\widehat{\Omega}(y, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) =$$

$$= \xi_{Q_m \cap \mathbb{R}^n}(y) * \omega(y, \rho) = \left[\prod_{j=1}^{k} \xi_{[a_j, b_j]}(y_j)\right] \prod_{l=k+1}^{n} \{1(y_l) - \xi_{(a_l, b_l)}(y_l)\} * \prod_{r=1}^{n} \omega(y_r, \rho) =$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{k} \widehat{\Omega}(y_j, [a_j, b_j], \rho)\right] \times \prod_{l=k+1}^{n} \{1(y_l) - \widehat{\Omega}(y_l, [a_l, b_l], \rho)\}.$$

Тогда с учетом (5) и введенных выше обозначений получаем

$$\Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) = \left[\prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j)\right] \prod_{l=k+1}^{n} \{\delta(t_l) - \Omega_l(t_l)\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j) \times \left\{\prod_{l=k+1}^{n} \delta(t_l)\right\} - \prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j) \times \left\{\sum_{r=k+1}^{n} \left[\Omega_r(t_r) \prod_{l=k+1, l \neq r}^{n} \delta(t_l)\right]\right\} +$$

$$+ \prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j) \times \left\{\sum_{r,s=k+1, r<s}^{n} \left[\Omega_r(t_r)\Omega_s(t_s) \prod_{l=k+1, l \neq r,s}^{n} \delta(t_l)\right]\right\} +$$

$$... + (-1)^n \prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j) \times \left\{\prod_{r=k+1,}^{n} \Omega_r(t_r)\right\},$$

откуда имеем

$$x_m(t) = x(t) * \Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) =$$

$$= x(t_1, ..., t_k, t_{k+1}, ..., t_n) * \prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j) - \sum_{r=k+1}^{n} x(t) * \left[\Omega_r(t_r) * \prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j)\right] +$$

$$+ \sum_{r,s=k+1, r<s}^{n} x(t) * \left[\Omega_r(t_r)\Omega_s(t_s) \prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j)\right] + ... + (-1)^n x(t) * \left[\prod_{r=k+1,}^{n} \Omega_r(t_r) \times \prod_{j=1}^{k} \Omega_j(t_j)\right].$$

В силу (8) каждое слагаемое из правой части этого равенства определено и является функцией из $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, откуда по теореме Юнга получаем справедливость первого утверждения.

2) Далее, рассуждая как и в случае ограниченного параллелепипеда, можно с использованием полученного выражения для $\Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho)$ проверить, что $\gamma(t) * \Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho) = \alpha_m(t) * \Omega(t, Q_m \cap \mathbb{R}^n, \rho)$ для $t \in \mathbb{R}^n$, откуда по теореме Юнга получаем справедливость второго утверждения предложения 3. □

Предложение 4. *Пусть при сделанных выше предположениях* $Q_m \cap \mathbb{R}^n = \{(-\infty, a_1] \cup [b_1, +\infty)\} \times ... \times \{(-\infty, a_n] \cup [b_n, +\infty)\}$, *где* $a_j < b_j$, $1 \leq j \leq n$, *— некоторые числа из* $\mathbb{R}^1$. *Тогда*

1) $\|x_m(t)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \le \|x(t)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \prod_{r=1}^n \left\{\|1+\Omega_r(t_r)\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}\right\}$;

2) $\|\gamma_m(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \|\alpha_m(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \prod_{r=1}^n \left\{\|1+\Omega_r(t_r)\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}\right\}$.

Доказательство предложения 4. 1) Из записи Q_m в виде прямого произведения получаем

$$\xi_{Q_m\cap\mathbb{R}^n}(y) = \xi_{Q_m\cap\mathbb{R}^n}(y_1, ..., y_n) = \prod_{j=1}^k \{1(y_j) - \xi_{(a_j,b_j)}(y_j)\}.$$

Далее, рассуждая аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае, имеем

$$\Omega(t, Q_m\cap\mathbb{R}^n, \rho) = \prod_{l=1}^n \{\delta(t_l) - \Omega(t_l)\} = \prod_{l=1}^n \delta(t_l) - \left\{\sum_{r=1}^n \left[\Omega_r(t_r) \prod_{l=1, l\ne r}^n \delta(t_l)\right]\right\} + \\ + \left\{\sum_{r,s=1, r<s}^n \left[\Omega_r(t_r)\Omega_s(t_s) \prod_{l=1, l\ne r,s}^n \delta(t_l)\right]\right\} + ... + (-1)^n \prod_{r=1}^k \Omega_r(t_r),$$

откуда по теореме Юнга следует справедливость первого утверждения.

2) Как и в предыдущем случае, получаем, что $\gamma(t) * \Omega(t, Q_m\cap\mathbb{R}^n, \rho) = \alpha_m(t) * \Omega(t, Q_m\cap\mathbb{R}^n, \rho)$ для $t \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, выполняется и второе утверждение предложения 4. □

Продолжим далее доказательство теоремы 2 и положим $h(t,x) = x(t) * G(t)$. Тогда согласно результатам предложений 2–4 имеем

$$h(t,x) = x(t) * \Sigma_{m=1}^M \Omega(t, Q_m\cap\mathbb{R}^n, \rho) = \Sigma_{m=1}^M x_m(t) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n);$$

$h(t,\gamma) = \gamma(t) * \Sigma_{m=1}^M \Omega(t, Q_m\cap\mathbb{R}^n, \rho) = \Sigma_{m=1}^M \gamma_m(t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$; $\operatorname{supp}\widehat{h}(y,x) \subseteq \operatorname{supp}\widehat{G}(y)$ и в силу предложения 1 получаем, что $\operatorname{supp}\widehat{h}(y,x) \bigcap \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, 1/4\delta, \Delta)} = \emptyset$.

Обозначим $H(\tau,x) = H(\tau,x,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta) = x(\tau) - x(\tau) * G(\tau)$. Тогда $H \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{H}(y,x) = \widehat{x}(y) - \widehat{x}(y)\cdot\widehat{G}(y) = \widehat{x}(y)\cdot(1-\widehat{G}(y))$. Согласно предложению 1 функция $\widehat{G}(y) = 1$, если $y \in D_{1/4}$. Следовательно, в силу (12) имеем $\operatorname{supp}\widehat{H}(y,x) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma^*, \frac{3}{4}\delta, \Delta)} \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, (\frac{3}{4}+\frac{1}{16})\delta, \Delta)}$. □

Доказательства следующих далее теорем 3 и 4 аналогичны доказательству теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $p_0, p \in (1, +\infty]$ и $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, резонансное множество $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\} \ne \varnothing$ не содержит точек, имеющих хоть одну бесконечную координату и $x \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция. Тогда для любого $\delta > 0$ можно указать функцию $F(\tau) = F(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$, удовлетворяющую условиям:*

1) $\widehat{F}(y) = 0$, *если* $y \in \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \frac{1}{4}\delta)}$, *и* $\widehat{F}(y) = 1$, *если* $y \in \mathbb{R}^n$ *и* $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \frac{3}{4}\delta)$;

2) определена свертка $h(\tau,x) = x(\tau) * F(\tau) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, *и выполняется разложение*

$$x(\tau) = h(\tau,x) + H(\tau,x),$$

где $\operatorname{supp}\widehat{h}(y,x)\bigcap\overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{1}{4}\delta)} = \emptyset$, $H(\tau,x) = x(\tau) - x(\tau) * F(\tau) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\operatorname{supp}\widehat{H}(y,\gamma) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{3}{4}\delta)}$;

3) $h(\tau,\gamma) = \gamma(\tau) * F(\tau) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Замечание. Из доказательства теорем 2 и 3 видно, что функции $G(\tau)$ и $F(\tau)$, удовлетворяющие условиям этих теорем, могут быть построены не единственным способом и не обязательно с использованием функции Ω.

Теорема 4. *Пусть* $p_0, p \in (1,+\infty]$ *и* $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *в том и только том случае, когда резонансное множество* $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\} = \varnothing$.

Литература

1. Бурбаки Н. *Интегрирование. Меры, интегрирование мер*, пер. с франц. Москва, Наука (1967).

2. Иванов Б. Ф. Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. I. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4 (62)**, вып. 3, 436–447 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017306

3. Иванов Б. Ф. Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. II. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4 (62)**, вып. 4, 586–596 (2017). https://doi.org/10. 21638/11701/spbu01.2017.407

4. Крейн С. Г. (ред.) *Функциональный анализ.* В сер.: Справочная математическая библиотека. Москва, Наука (1972).

5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. *Обобщенные функции и действия над ними.* В сер.: Обобщенные функции, вып. 1. Москва, Физматлит (1959).

6. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* Москва, Наука (1971).

7. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* Москва, Наука (1979).

8. Иванов Б. Ф. Об одном обобщении неравенства Бора. *Проблемы анализа* **2 (20)**, № 2, 21–57 (2013). https://doi.org/10.15393/j3.art.2013.2382

9. Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье*, пер. с англ. Москва, Ленинград, ГИТТЛ (1949).

10. Ронкин Л. И. Почти периодические обобщенные функции в трубчатых областях. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **247**, 210–236 (1997).

11. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, пер. с англ. Москва, Мир (1974).

Статья поступила в редакцию 20 октября 2021 г.;
доработана 30 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Иванов Борис Филиппович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ivanov-bf@yandex.ru

Complement to the Hölder inequality for multiple integrals. I

B. F. Ivanov

St Petersburg State University of Industrial Technologies and Design,
18, ul. Bolshaya Morskaya, St Petersburg, 191186, Russian Federation

For citation: Ivanov B. F. Complement to the Hölder inequality for multiple integrals. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 255–268. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.207 (In Russian)

This article is the first part of the work, the main result of which is the statement that if for functions $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$, where $m \geqslant 2$ and the numbers $p_1, \ldots, p_m \in (1,+\infty]$ are such that $\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m} < 1$, a non-resonant condition is met (the concept introduced by the author for functions from $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,+\infty]$), then $\sup_{a,b\in\mathbb{R}^n}\left|\int\limits_{[a,b]}\prod_{k=1}^m[\gamma_k(\tau)+\Delta\gamma_k(\tau)]\,d\tau\right| \leqslant C\prod_{k=1}^m\|\gamma_k+\Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)}$, where $[a,b]$ is an n-dimensional parallelepiped, the constant $C>0$ does not depend on functions $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, and $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)\subset L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant k\leqslant m$, are specially constructed normalized spaces. In the article, for any spaces $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p_0,p\in(1,+\infty]$ and any function $\gamma\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ the concept of a set of resonant points of a function γ with respect to the $L^p(\mathbb{R}^n)$ is introduced. This set is a subset of $\{\mathbb{R}^1\cup\{\infty\}\}^n$ for any trigonometric polynomial of n variables with respect to any $L^p(\mathbb{R}^n)$ represents the spectrum of the polynomial in question. Theorems are written on the representation of each function $\gamma\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ with a nonempty resonant set as the sum of two functions such that the first of them belongs to the $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, and the carrier of the Fourier transform of the second is centered in the neighborhood of the resonant set.

Keywords: the Hölder inequality.

References

1. Bourbaki N. *Intégration.* Livre VI. In: Éléments de mathématique. Paris, Hermann & Cie (1956). [Rus. ed.: Bourbaki N. *Integrirovanie. Mery, integrirovanie mer.* Moscow, Nauka Publ. (1967)].

2. Ivanov B. F. On some addition to the Hölder inequality. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4 (62)**, iss. 3, 436–447 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017306 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University Mathematics* **50**, 265–273 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117030086].

3. Ivanov B. F. On some addition to the Hölder inequality. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4 (62)**, iss. 4, 586–596 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.407 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University Mathematics* **50**, 354–363 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117040100].

4. Krein S. G. *Functional analysis.* In Ser.: The reference mathematical library. Moscow, Nauka Publ. (1972). (In Russian)

5. Gel'fand I. M., Shilov G. E. *The generalized functions and actions over them.* In Ser.: The generalized functions, iss. 1. Moscow, Fizmatlit Publ. (1959). (In Russian)

6. Vladimirov V. S. *Equations of mathematical physics.* Moscow, Nauka Publ. (1971). (In Russian)

7. Vladimirov V. S. *Generalized functions in mathematical physics.* Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)

8. Ivanov B. F. About a generalization of the Bohr inequality. *Issues of Analysis* **2 (20)**, no. 2, 21–57 (2013). https://doi.org/10.15393/j3.art.2013.2382 (In Russian)

9. Titchmarsh E. *Introduction in theory of Fourier integrals.* Oxford, Clarendon Press (1948). [Rus. ed.: Titchmarsh E. *Vvedenie v teoriju integralov Fur'e.* Moscow, Leningrad, GITTL Publ. (1949)].

10. Ronkin L. I. Almost periodic generalized functions in tubular domains. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **247**, 210–236 (1997). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **101**, 3172–3189 (2000). https://doi.org/10.1007/BF02673742].

11. Stein I., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* In Ser.: Princeton Mathematical Series, vol. 32. Princeton University Press (1972). [Rus. ed.: Stein I., Weiss G. *Vvedenie v garmonicheskij analiz na evklidovyh proctranstvah.* Moscow, Mir Publ. (1974)].

Received: October 20, 2021
Revised: November 30, 2021
Accepted: December 2, 2021

Author's information:

Boris F. Ivanov — ivanov-bf@yandex.ru