

Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра*

Н. В. Зенкова¹, В. В. Некруткина²

¹ JetBrains Research,

Российская Федерация, 197342, Санкт-Петербург, Кантемировская ул., 2

² Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Зенкова Н. В., Некруткина В. В. Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 245–254. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.206>

Общий теоретический подход к асимптотическому выделению сигнала из аддитивно возмущенного ряда с помощью метода анализа сингулярного спектра (кратко, АСС) был разобран в статье В. В. Некруткина, опубликованной в журнале *Statistics and Its Interface* (SII, 2010, vol. 3, 297–319). В настоящей работе мы рассматриваем пример подобного анализа для линейного сигнала и аддитивной синусоидальной помехи. Получен результат, что в этом случае так называемые ошибки восстановления $r_i(N)$ метода АСС равномерно стремятся к нулю при стремлении длины ряда N к бесконечности. Точнее, доказано, что $\max_i |r_i(N)| = O(N^{-1})$ при $N \rightarrow \infty$ и «длине окна» L , равной $(N + 1)/2$. Важно отметить, что в случае, когда сигнал является растущей экспонентой, а помеха по-прежнему остается синусоидальной, результат оказывается совершенно другим. А именно, как доказано в статье Е. Ивановой и В. Некруткина (SII, 2019, vol. 12, 1, 49–59), в этом случае любое конечное число последних членов ряда ошибок не имеет предела при $N \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: обработка сигналов, анализ сингулярного спектра, линейный сигнал, разделимость, асимптотический анализ.

1. Введение. Остановимся сначала на том варианте метода анализа сингулярного спектра (сокращенно, АСС), который обсуждается в настоящей работе. Подробное описание этого метода можно найти в [1] или [2].

Рассматривается вещественный «сигнал» $F = (f_0, \dots, f_n, \dots)$. Предполагается, что ряд F управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d

$$f_n = \sum_{k=1}^d a_k f_{n-k}, \quad n \geq d \quad (1)$$

с $a_d > 0$, которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом F .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00067).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

Кроме того, вводится «помеха» $E = (e_0, \dots, e_n, \dots)$ и предполагается, что наблюдается ряд $X_N = F_N + \delta E_N$, где F_N и E_N — согласованные отрезки длины N сигнала и помехи, а δ является формальным параметром возмущения. Иначе говоря,

$$F_N = (f_0, \dots, f_{N-1}), \quad E_N = (e_0, \dots, e_{N-1}) \quad \text{и} \quad X_N = (f_0 + \delta e_0, \dots, f_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала F_N из суммы X_N . При этом предполагается, что известно только значение порядка d ЛРФ (1). Термины «сигнал» и «помеха» подчеркивают нашу заинтересованность именно в ряде F_N .

1.1. Краткое описание метода. Метод АСС в этом случае описывается следующим образом.

1. Прежде всего, выбирается *длина окна* $L < N$ и из ряда X_N строится ганкелева *траекторная* матрица $\mathbf{H}(\delta)$ размерности $L \times K$, $K = N - L + 1$, с элементами $\mathbf{H}(\delta)[ij] = x_{i+j-2}$, $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq K$. При этом предполагается, что $\min(L, K) \geq d$. В [1] эта операция называется *вложением*.

Если обозначить \mathbf{H} и \mathbf{E} ганкелевы матрицы, полученные из рядов F_N и E_N операцией вложения с той же длиной окна L , то, конечно, $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$.

2. Затем матрица $\mathbf{H}(\delta)$ подвергается сингулярному разложению и суммируются d главных (то есть соответствующих наибольшему сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. Результат $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ этой операции является наилучшим приближением матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ с помощью матриц ранга d в норме Фробениуса.

3. После этого ищется ганкелева матрица $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$, которая является ближайшей к $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ в той же норме Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали $i + j = \text{const}$ все элементы матрицы $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$ заменяются их средними значениями. Поэтому в [1] эта операция названа *диагональным усреднением*. Обозначая ее \mathcal{S} , получим, что $\hat{\mathbf{H}}(\delta) = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$.

4. Наконец, применяя к $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$ операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду

$$F_N(\delta) = (f_0(\delta), \dots, f_{N-1}(\delta)),$$

который объявляется приближением к сигналу F_N .

Более формализованную запись этого варианта метода АСС см. в [2, с. 128] с $M = 1$.

Естественно назвать ряд

$$R_N(\delta) = (r_0(\delta), \dots, r_{N-1}(\delta))$$

с $r_i(\delta) = f_i(\delta) - f_i$ рядом *ошибок восстановления*, а матрицу $\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \hat{\mathbf{H}}(\delta) - \mathbf{H}$ — *матрицей ошибок восстановления*.

В настоящей работе рассматривается линейный сигнал

$$f_n = \theta_1 n + \theta_0, \tag{2}$$

где $\theta_1 \neq 0$, а помехой является линейная комбинация гармоник

$$e_n = \sum_{\ell=1}^r \tau_\ell \cos(2\pi n \omega_\ell + \varphi_\ell), \tag{3}$$

где $\tau_\ell \neq 0$, $\omega_\ell \neq \omega_p$ при $\ell \neq p$ и $0 < \omega_\ell < 1/2$. Так как сигнал (2) управляется ЛРФ $f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}$, то в этом случае $d = 2$.

В [3, § 5.3] предложена общая схема асимптотического анализа ошибок восстановления при $N \rightarrow \infty$. Поскольку она используется ниже, приведем ее краткое описание.

1.2. Подход к анализу ошибок восстановления. Прежде всего нас будет интересовать равномерная сходимость остатков $r_i(\delta)$ к нулю, то есть поведение нормы $\|F_N(\delta) - F_N\|_{\max} = \max_{0 \leq i < N} |r_i(\delta)|$ при $N \rightarrow \infty$.

Кроме того, предполагается, что $\min L, K \geq d$. В настоящей статье используется соотношение $L = (N + 1)/2$, то есть длина ряда N предполагается нечетной.

Далее, если U_0^\perp — линейное пространство, порожденное столбцами матрицы \mathbf{H} , то из (1) следует, что в этих условиях размерность U_0^\perp равна d вне зависимости от N и L .

Обозначим через \mathbf{P}_0^\perp ортогональный проектор на линейное пространство U_0^\perp , а через $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ — ортогональный проектор на линейное пространство, порожденное столбцами матрицы $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$. Тогда, как показано в [3, § 5.3], выполняется равенство

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) - \mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}. \quad (4)$$

В настоящей работе, следуя [3, § 5.3], используем две матричные нормы. Для матрицы \mathbf{A} размера $L \times K$ спектральная норма $\|\mathbf{A}\|$ определяется как максимальное сингулярное число этой матрицы, а равномерная норма $\|\mathbf{A}\|_{\max}$ — как максимум из модулей элементов этой матрицы. Соотношение между этими нормами хорошо известно [4, § 2.3.2]:

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\| \leq \sqrt{LK}\|\mathbf{A}\|_{\max}. \quad (5)$$

Поскольку $\|\mathbf{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\|_{\max}$, то левое из неравенств (5) дает возможность использовать спектральную норму с целью исследования поведения ошибок восстановления. В то же время вид первого слагаемого правой части (4) показывает, что нужно обратить внимание на разность проекторов $\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp$.

Используя классические результаты Т. Като [5, гл. 2, § 3], в [3, теорема 2.1] получили оценку сверху спектральной нормы $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$, которая используется в некоторых так называемых подпространственных методах обработки сигналов. Однако, поскольку в (4) разность проекторов умножается на $\mathbf{H}(\delta)$, эта оценка оказывается недостаточной и приходится выделять «главную часть» разности $\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp$.

Делается это следующим образом. Обозначим соответственно $\mu_{\max} = \|\mathbf{H}\|^2$ и μ_{\min} максимальное и минимальное положительные собственные числа матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Кроме того, пусть \mathbf{S}_0 — псевдообратная матрица Мура — Пенроуза к матрице $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ с $\|\mathbf{S}_0\| = 1/\mu_{\min}$. Далее положим

$$\mathbf{B}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)(\mathbf{H}(\delta))^T - \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^T$$

и

$$\mathbf{W}_1(\delta) = \mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0, \quad (6)$$

где $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0^\perp$, а \mathbf{I} — единичная $(L \times L)$ -матрица. Тогда имеет место следующее утверждение (см. [3, теорема 2.4]).

Теорема 1. Пусть $\delta_0 > 0$ и $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} < 1/4$ для всех $\delta \in (-\delta_0; \delta_0)$. Тогда существует такая абсолютная постоянная C , что

$$\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta)\| \leq C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}}. \quad (7)$$

Неравенство (7) используется следующим образом. Равенство (4) переписывается в виде

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) - \mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta). \quad (8)$$

Если при этом оказывается, что при $N \rightarrow \infty$ справедливо неравенство

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\| \|\mathbf{H}(\delta)\| \rightarrow 0, \quad (9)$$

то остается проверить асимптотическое поведение элементов конкретной (хотя, возможно, и сложно устроенной) остаточной матрицы $\delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)$.

Именно таким путем в настоящей работе предлагается решать задачу об асимптотической отделимости сигнала (2) от помехи (3). А именно, сначала доказывается, что для любого δ неравенство (7) имеет место при достаточно больших N , затем, оценивая сверху правую часть (7), мы приходим к сходимости (9) (см. раздел 2).

В разделе 3 приводятся доказательства соотношений $\|\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$ и $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$. Отсюда сразу же будет следовать сходимость $\|F_N(\delta) - F_N\|_{\max}$ к нулю, более того, это выражение имеет порядок $O(N^{-1})$ при $N \rightarrow \infty$.

Все эти факты сначала обсуждаются для одиночной синусоидальной помехи, переход к помехе общего вида (3) и окончательный результат работы — теорема 2 — также помещены в раздел 3.

2. Вспомогательные утверждения и доказательство сходимости (9).

Как уже было сказано, мы здесь рассматриваем сигнал (2) (достаточно взять $\theta_1 = 1$) и помеху

$$e_n = \cos(2\pi n\omega + \varphi), \quad \omega \in (0, 1/2). \quad (10)$$

Кроме того, пусть $L = K := N - L + 1 = (N + 1)/2$ (то есть матрицы \mathbf{H} и \mathbf{E} являются квадратными и симметричными), а $N \rightarrow \infty$.

Как отмечено в [3, лемма 3.1], в этих условиях существуют такие положительные постоянные C_{\cos} , C_{\max} и $C_{\min} < C_{\max}$, что при $N \rightarrow \infty$ выполняются соотношения

$$\|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\| = \|\mathbf{E}\|^2 \sim C_{\cos} N^2, \quad \mu_{\max} \sim C_{\max} N^4 \quad \text{и} \quad \mu_{\min} \sim C_{\min} N^4. \quad (11)$$

Лемма 1. При $N \rightarrow \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $1 \leq p \leq L$ и $1 \leq s \leq K$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{E}^T[p, s] &= \sum_{j=0}^{K-1} (p+j) \cos(2\pi(s+j)\omega + \varphi) = \\ &= p \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \varphi_s) + \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \varphi_s), \end{aligned}$$

где $\varphi_s = 2\pi s\omega + \varphi$.

Так как для любой ψ справедливы неравенства

$$p \left| \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \psi) \right| = p \left| \frac{\sin(\pi K\omega)}{\sin(\pi\omega)} \cos(\pi(K-1)\omega + \psi) \right| \leq \frac{p}{\sin(\pi\omega)} = O(N)$$

и в обозначениях

$$B_K = \frac{1}{2 \sin(\pi\omega)} \sin(\pi(2K-1)\omega + \psi), \quad E_K = \frac{\sin(\pi K\omega)}{2 \sin^2(\pi\omega)} \sin(\pi K\omega + \psi)$$

имеет место соотношение

$$\left| \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \psi) \right| = |KB_K - E_K| \leq \frac{K}{2 \sin(\pi\omega)} + \frac{1}{2 \sin^2(\pi\omega)} = O(N),$$

то $\|\mathbf{HE}^T\|_{\max} = O(N)$.

Замечание 1. Поскольку $LK \sim N^2/4$, а $\mu_{\min} \sim C_{\min} N^4$ при $N \rightarrow \infty$, то, применяя правое из неравенств (5), получим, что $\|\mathbf{HE}^T\|/\mu_{\min} = O(N^{-2})$.

Лемма 2. *Имеет место соотношение $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$P_L(0) = (1, \dots, 1)^T, \quad P_L(1) = (0, 1, \dots, (L-1))^T.$$

Конечно, пара $P_L(0), P_L(1)$ является базисом линейного пространства U_0^\perp . Поэтому матрица \mathbf{P}_0^\perp может быть представлена как

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^\perp &= \gamma_{00}^2 P_L(0) P_L^T(0) + (\gamma_{11} P_L(1) - \gamma_{10} P_L(0)) (\gamma_{11} P_L^T(1) - \gamma_{10} P_L^T(0)) = \\ &= (\gamma_{00}^2 + \gamma_{10}^2) P_L(0) P_L^T(0) + \gamma_{11}^2 P_L(1) P_L^T(1) - \gamma_{11} \gamma_{10} (P_L(1) P_L^T(0) + P_L(0) P_L^T(1)), \end{aligned} \quad (12)$$

где $(L \times L)$ -матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} P_L(0) P_L^T(0) &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L(0) P_L^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & L-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & L-1 \end{pmatrix}, \\ P_L(1) P_L^T(0) &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L-1 & \dots & L-1 \end{pmatrix}, \quad P_L(1) P_L^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & L-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & L-1 & \dots & (L-1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\gamma_{11} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{L(L^2-1)}}, \quad \gamma_{10} = \frac{\sqrt{3(L-1)}}{\sqrt{L(L+1)}}, \quad \gamma_{00} = 1/\sqrt{L}.$$

Умножая каждое слагаемое в правой части (12) на матрицу

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \dots & \cos(2\pi(j-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(K-1)\omega + \varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(i-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(i+j-2)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(K+i-1)\omega + \varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(L-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(L+j-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(N-1)\omega + \varphi) \end{pmatrix}$$

и действуя таким же образом, как в лемме 1, приходим к нужному результату, опуская совершенно элементарные, но громоздкие и многочисленные вычисления. \square

Лемма 3. *Имеет место соотношение $\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-4})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сингулярное разложение матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$, \mathbf{S}_0 и \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{H}^T &= \mu_{\max} U_1 U_1^T + \mu_{\min} U_2 U_2^T, \quad \mathbf{S}_0 = \mu_{\max}^{-1} U_1 U_1^T + \mu_{\min}^{-1} U_2 U_2^T, \\ \mathbf{H} &= \mu_{\max}^{1/2} U_1 U_1^T + \mu_{\min}^{1/2} U_2 U_2^T. \end{aligned}$$

Кроме того, $\mathbf{P}_0^\perp = U_1 U_1^T + U_2 U_2^T$, где U_1, U_2 — ортонормированные собственные векторы матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Далее имеем

$$\mathbf{H}\mathbf{E}^T = \mu_{\min}^{1/2} \left(\frac{\mu_{\max}^{1/2}}{\mu_{\min}^{1/2}} U_1 U_1^T \mathbf{E}^T + U_2 U_2^T \mathbf{E}^T \right),$$

и, поскольку $\mu_{\min}^{1/2} \sim C_{\max}(N^2)$, $\mu_{\max}^{1/2}/\mu_{\min}^{1/2} \rightarrow c > 1$ и $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$, то отсюда следует, что

$$\|cU_1 U_1^T \mathbf{E}^T + U_2 U_2^T \mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N^{-1}).$$

Так как $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = \|U_1 U_1^T \mathbf{E} + U_2 U_2^T \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$, то $\|U_i U_i^T \mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N^{-1})$ при $i = 1, 2$, и поэтому, учитывая, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$, получим (см. (5))

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-5}) \quad \text{и} \quad \|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| = O(N^{-4}),$$

что и требовалось доказать. \square

Предложение 1. *Пусть N нечетное, $N \rightarrow \infty$ и $L = (N+1)/2$. Тогда для любого δ*

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, согласно лемме 1 и асимптотикам (11), существует такая постоянная C_1 , что

$$\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} \leq \delta^2 \|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} + 2|\delta| \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} \leq C_1 (\delta^2 N^{-2} + |\delta| N^{-2}) = O(N^{-2}).$$

Поэтому для любого δ неравенство (7) выполняется при достаточно большом N и, следовательно, при $N \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| &\leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\| \|\mathbf{H}(\delta)\| \leq \\ &\leq C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}} \sim C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \|\mathbf{H}\|, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует требуемое. \square

3. Исследование элементов остаточной матрицы и окончательный результат. Нам осталось исследовать асимптотическое поведение элементов матриц $\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)$ и $\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}$ в условиях предложения 1. При этом, как и в предыдущем разделе, предполагается, что помеха имеет вид (10).

Согласно лемме 2, $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$, поэтому нужно разобраться с $\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)$.

Предложение 2. В условиях предложения 1 $\|\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$.

Доказательство. Начнем с некоторых упрощений. По формуле (6) имеем

$$\mathbf{W}_1(\delta) = \delta \mathbf{V}_0^{(1)} + \delta^2(\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0),$$

где $\mathbf{V}_0^{(1)} = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0$. Так как (см. лемму 3)

$$\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0\| \leq 2\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| \|\mathbf{E}\| = O(N^{-3})$$

и $\|\mathbf{E}\| = o(\|\mathbf{H}\|)$, то $\|(\mathbf{W}_1(\delta) - \delta\mathbf{V}_0^{(1)})\mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-1}) \rightarrow 0$, и поэтому достаточно рассматривать элементы матрицы

$$\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H} + \delta(\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{E} + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0\mathbf{E})$$

вместо $\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)$. Далее, поскольку

$$\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{E} + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0\mathbf{E}\| \leq 2\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\| \|\mathbf{E}\| \|\mathbf{S}_0\| = O(N^{-1}),$$

то остается разобраться с матрицей $\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H}$.

Так как $\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H} = \mathbf{Q}_0^\perp$, где \mathbf{Q}_0^\perp — матрица ортогонального проектирования на пространство строк матрицы \mathbf{H} , то окончательно мы будем заниматься элементами матрицы

$$\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp = \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp.$$

Поскольку $\mathbf{Q}_0^\perp = \mathbf{P}_0^\perp$, то из леммы 2 сразу же следует, что $\|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = O(N^{-1})$. Для того чтобы получить аналогичное неравенство для $\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp$, достаточно, используя формулу (12), вычислить эту (2×2) -матрицу явно и убедиться, что каждый ее элемент имеет порядок $O(N^{-1})$. Как и в лемме 2, мы здесь опустим эту громоздкую и элементарную процедуру. \square

Теперь можно сформулировать и доказать основной результат настоящей работы.

Теорема 2. Рассмотрим при $n = 0, 1, \dots, N-1$ линейный сигнал $f_n = \theta_1 n + \theta_0$, где $\theta_1 \neq 0$, и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник:

$$e_n = \sum_{\ell=1}^r \tau_\ell \cos(2\pi n \omega_\ell + \varphi_\ell), \quad (13)$$

где $\tau_\ell \neq 0$, $\omega_\ell \neq \omega_p$ при $\ell \neq p$ и $0 < \omega_\ell < 1/2$.

Положим $x_n = f_n + \delta e_n$, где δ — формальный параметр возмущения, и, взяв нечетное N и L , равное $(N+1)/2$, применим к ряду $x_n, n = 0, \dots, N-1$, вариант метода АСС для выделения сигнала с $d = 2$, описанный во Введении.

Если обозначить через $f_0(\delta), \dots, f_{N-1}(\delta)$ результат восстановления ряда $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ с помощью этого варианта метода АСС, то для любого $\delta \in \mathbb{R}$ при $N \rightarrow \infty$

$$\max_{0 \leq n < N} |f_n(\delta) - f_n| = O(N^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку, как уже отмечалось, $\|\mathbf{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\|_{\max}$, то при $r = 1$ результат сразу же следует из предложений 1 и 2.

Перейдем теперь от $r = 1$ к произвольному r . Прежде всего, согласно [3, лемма 3.1], $\|\mathbf{E}\| \sim CN$ не только при $r = 1$, но и в случае, когда помеха имеет вид (13). Далее, так как

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^T\|_{\max} \leq \|\mathbf{H}\mathbf{E}_1^T\|_{\max} + \|\mathbf{H}\mathbf{E}_2^T\|_{\max}$$

и $\|\mathbf{S}_0(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)\| \leq \|\mathbf{S}_0\mathbf{E}_1\| + \|\mathbf{S}_0\mathbf{E}_2\|$, то утверждения лемм 1 и 3 (и, следовательно, предложения 1) остаются верными и для помехи (13). Точно так же, из того, что

$$\|\mathbf{P}_0^\perp(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)\|_{\max} \leq \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}_1\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}_2\|_{\max},$$

выводится, что для этой помехи верны утверждения леммы 2 и предложения 2. Теорема доказана. \square

Замечание 2. Условие $L = K$ является техническим и используется только при доказательстве предложения 1. Общие соображения и вычислительные эксперименты позволяют предположить, что результат теоремы 2 сохранится для любого полиномиального сигнала и ширины окна $L \sim \alpha N$ при $N \rightarrow \infty$, если $\alpha \in (0, 1)$. Однако в такой общности это доказать не удалось.

Отметим, что аналогичный ход рассуждений был осуществлен в [6], где изучались растущий экспоненциальный сигнал и синусоидальная помеха. При этом оказалось, что $\|F_N(\delta) - F_N\|_{\max} \not\rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, что резко контрастирует с рассматриваемым случаем линейного сигнала.

4. Приложение. Результаты вычислительных экспериментов. Проиллюстрируем полученные результаты. В качестве примера рассмотрим ряд

$$x_n = 2n + 1 + \cos(2\pi\omega + \varphi), \text{ где } \omega = 1/3, \varphi = 0,$$

при $n = 0, \dots, N - 1$ с $N = 5(1)101$. Используем длину окна $L = \lfloor N/2 \rfloor$.

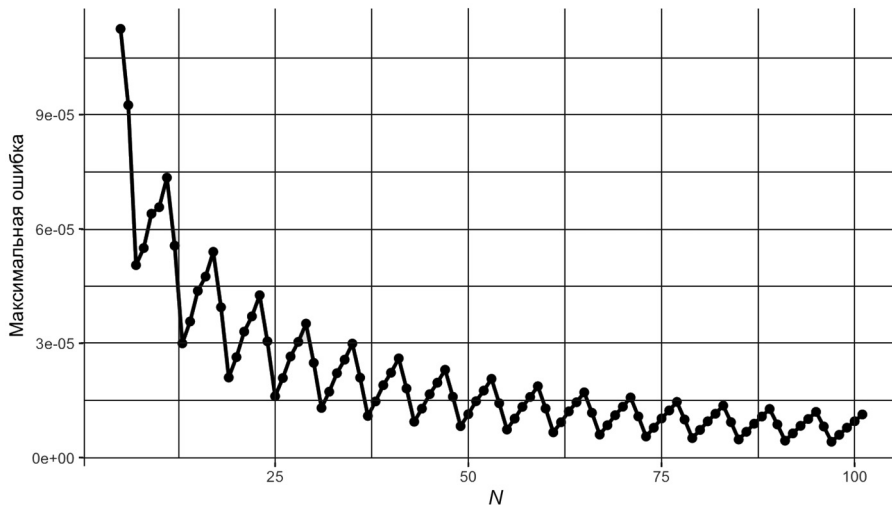


Рис. 1. Максимальные ошибки восстановления ряда в зависимости от длины ряда N для $x_n = 2n + 1 + \cos(2\pi\omega + \varphi)$, где $\omega = 1/3, \varphi = 0$.

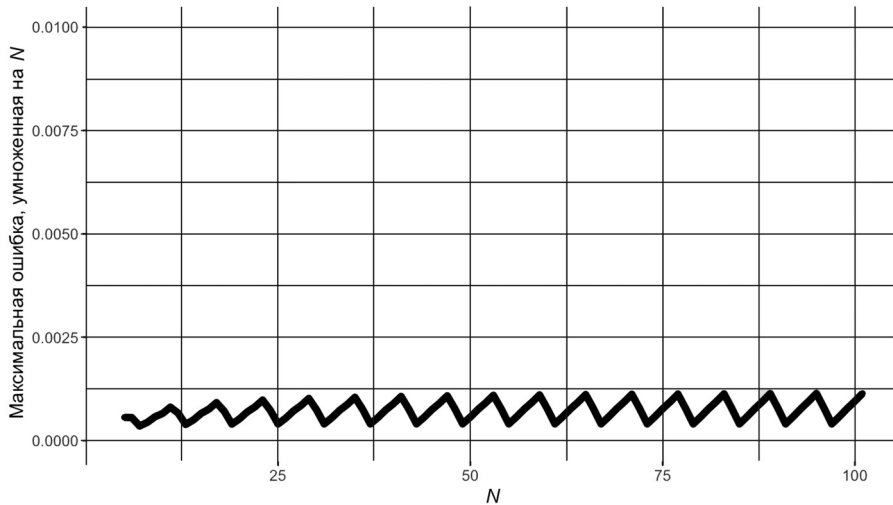


Рис. 2. Максимальные ошибки восстановления ряда, умноженные на N , в зависимости от длины ряда N для $x_n = 2n + 1 + \cos(2\pi\omega + \varphi)$, где $\omega = 1/3$, $\varphi = 0$.

Результаты вычислений изображены на рис. 1 и 2. Как видно из рис. 1, максимальные по модулю ошибки восстановления ряда действительно стремятся к нулю с ростом N . В то же время рис. 2 показывает, что после умножения членов ряда рис. 1 на N максимальные ошибки становятся ограниченными. Это подтверждает результат теоремы 2.

Авторы благодарят обоих анонимных рецензентов, чьи замечания, несомненно, способствовали улучшению нашей работы.

Литература

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. In Ser.: Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 90. Boca Raton, London, New York, Washington D. C., Chapman & Hall/CRC (2001).
2. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*, 2nd ed. In Ser.: Springer Briefs in Statistics. Springer (2020).
3. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. *Statistics and Its Interface* **3**, 297–319 (2010).
4. Golub G. H., Van Loan Ch. F. *Matrix computations*. 4th ed. Johns Hopkins University Press (2013).
5. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов*, пер. с англ. Москва, Мир (1972).
6. Ivanova E., Nekrutkin V. Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis. *Statistics and Its Interface* **12** (1), 49–59 (2019).

Статья поступила в редакцию 8 сентября 2021 г.;
доработана 24 октября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Зенкова Наталья Валентиновна — исследователь; natalia.zenkova@jetbrains.com
Некруткин Владимир Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vnekr@statmod.ru

On the asymptotical separation of linear signals from harmonics by singular spectrum analysis*

N. V. Zenkova¹, V. V. Nekrutkin²

¹ JetBrains Research, 2, ul. Kantemirovskaya, St Petersburg, 197342, Russian Federation

² St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zenkova N. V., Nekrutkin V. V. On the asymptotical separation of linear signals from harmonics by singular spectrum analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 245–254.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.206> (In Russian)

The general theoretical approach to the asymptotic extraction of the signal series from the additively perturbed signal with the help of singular spectrum analysis (briefly, SSA) was already outlined in Nekrutkin (2010), SII, vol. 3, 297–319. In this paper we consider the example of such an analysis applied to the linear signal and the additive sinusoidal noise. It is proved that in this case the so-called reconstruction errors $r_i(N)$ of SSA uniformly tend to zero as the series length N tends to infinity. More precisely, we demonstrate that $\max_i |r_i(N)| = O(N^{-1})$ if $N \rightarrow \infty$ and the “window length” L equals $(N + 1)/2$. It is important to mention, that the completely different result is valid for the increasing exponential signal and the same noise. As it is proved in Ivanova, Nekrutkin (2019), SII, vol. 12, 1, 49–59, in this case any finite number of last terms of the error series does not tend to any finite or infinite values.

Keywords: signal processing, singular spectral analysis, separability, linear signal, asymptotical analysis.

References

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. In Ser.: Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 90. Boca Raton, London, New York, Washington D. C., Chapman & Hall/CRC (2001).
2. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*, 2nd ed. In Ser.: Springer Briefs in Statistics. Springer (2020).
3. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. *Statistics and Its Interface* **3**, 297–319 (2010).
4. Golub G. H., Van Loan Ch. F. *Matrix computations*. 4th ed. Johns Hopkins University Press (2013).
5. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag (1966). [Rus. ed.: Kato T. *Teorija vozmushhenij linejnyh operatorov*. Moscow, Mir Publ. (1972)].
6. Ivanova E., Nekrutkin V. Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis. *Statistics and Its Interface* **12** (1), 49–59 (2019).

Received: September 8, 2021

Revised: October 24, 2021

Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

Natalia V. Zenkova — natalia.zenkova@jetbrains.com

Vladimir V. Nekrutkin — vnekr@statmod.ru

*The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00067).