УДК 512.741 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2
MSC 11S31

Высшие критерии регулярности для одномерных локальных полей*

С. В. Востоков[1], *П. Н. Питаль*[1,2], *В. М. Поляков*[3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В. И. Ульянова (Ленина),
Российская Федерация, 197022, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5
[3] Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27

Для цитирования: *Востоков С. В., Питаль П. Н., Поляков В. М.* Высшие критерии регулярности для одномерных локальных полей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 229–244.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.205

Рассматривается понятие иррегулярности формальных модулей в одномерных локальных полях. Получена связь иррегулярности всех неразветвленных расширений M/L с индексом ветвления $e_{L/K}$ для достаточно широкого класса формальных групп. Вводится понятие s-иррегулярности для натуральных s (обобщение понятия иррегулярности на случай корней $[\pi^s]$), и для него доказываются аналогичные критерии иррегулярности для случая обобщенных и относительных формальных модулей Любина — Тейта.

Ключевые слова: регулярные формальные модули, формальные модули, формальные группы, локальные поля.

1. Введение. В 1962 году З. И. Боревичем в работе [1] был найден критерий регулярности для локальных полей. Под регулярным локальным полем K он понимал конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, которое не содержит корней из единицы степени p. Боревич доказал, что расширение L/K является вполне регулярным, то есть любое его неразветвленное расширение M/L не будет содержать корня степени p из единицы тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e_{L/K}$ не делится на $p-1$.

Бывает очень полезно знать, содержатся ли в конкретном расширении корни из единицы степени p или нет, поскольку это сильно влияет на структуру поля и порой сильно усложняет исследование некоторых вопросов. Например, знание о том, является ли расширение вполне регулярным или нет, оказалось особенно важным при решении задачи об описании всех нормальных расширений без простого ветвления некоторого фиксированного локального поля. Также наличие или отсутствие корня степени p из единицы в локальном поле влияет на строение мультипликативной группы поля (см. [2, 3]).

*Работа выполнена за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН № 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.

В дальнейшем в локальной теории чисел начали активно развиваться методы, связанные с формальными групповыми законами: на максимальном идеале кольца целых заводится структура формального модуля и ставятся вопросы, аналогичные классической ситуации. Понятия регулярности и вполне регулярности естественным образом обобщаются на случай формальных модулей: вместо корней p-й степени из единицы рассматриваются корни изогении $[\pi]$. Не так давно выяснилось, что для формальных модулей можно доказать аналогичный критерий регулярности. В частности, в работе [4] Востоковым, Власьевым и Горшковым были получены критерии регулярности для многочленной формальной группы, формальных групп Любина—Тейта и для формальных групп Хонды. К примеру, наиболее общий результат их работы — критерий регулярности для формальных групп Хонды — выглядит так:

Теорема 1. *Пусть K_0 — конечное неразветвленное расширение $\mathbb{Q}_p$, π_0 — униформизующая K_0, K/K_0 — тоже конечное и неразветвленное расширение, тогда расширение L/K, а значит, и $F(\mathfrak{M}_L)$ являются вполне регулярными относительно формальной группы Хонды F тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/K)$ не делится на $q^h - 1$, где q — количество элементов в поле вычетов поля K_0, а h — высота формальной группы Хонды.*

В недавней работе [5] понятие иррегулярности было обобщено на высшие степени изогении $[\pi^s]$. Особенность ситуации состоит в том, что методы, которые очень хорошо работали в [4], в этом случае перестают работать, поскольку появляется дикое ветвление. Справиться с этой проблемой помогает теория полей классов. В частности, в работе [5] был получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть k — локальное поле, F — многочленная формальная группа $x + y + cxy$, $c \in k$. Тогда для любого неразветвленного L/k ядро эндоморфизма $[p^{s+1}]_F$ на m_L совпадает с ядром эндоморфизма $[p^s]_F$ в том и только в том случае, когда индекс ветвления максимального абелева подрасширения $k_a/\mathbb{Q}_p$ не делится на $(p-1)p^s$.*

Основными результатами данной работы являются критерии иррегулярности формальных модулей для высших степеней изогении, то есть для ядра $[\pi^s]$ для некоторого конкретного класса формальных групп, а также критерий регулярности для первой степени изогении, но уже для достаточно широкого класса формальных групп. В данной работе мы обобщаем идеи из [1, 4] и [5], чтобы получить достаточно общий результат.

2. Основные обозначения. Здесь и далее считаем p некоторым простым числом. $K/\mathbb{Q}_p$ — конечное расширение, π — его униформизующая. Все расширения полей будем считать конечными расширениями Галуа (не обязательно абелевыми), лежащими в одном фиксированном алгебраическом замыкании. Обозначим через $\mathcal{O}_K$ кольцо целых поля K, U_K — его группа единиц, $\mathfrak{M}_K$ — максимальный идеал, $U_{K,s} = 1 + \mathfrak{M}_K^s$ — группа s-х главных единиц. Зафиксируем формальный групповой закон $F(X,Y) \in \mathcal{O}[[X,Y]]$.

Пусть кольцо эндоморфизмов нашей формальной группы изоморфно некоторому подкольцу $\mathcal{O}_K$: $End_{\mathcal{O}_K}(F) \simeq \mathcal{O}_{K_0}$, где K_0 — некоторое подполе в K (см. [6]). Пусть π_0 — униформизующая поля K_0, тогда, как известно, $[\pi_0](X) \in \mathcal{O}[[X,Y]]$. Считаем, что поле вычетов кольца $\mathcal{O}_{K_0}$ изоморфно полю из q элементов.

Предположим, что высота нашей формальной группы конечна и равна h, то есть

$$[\pi_0](X) \equiv f(X^{q^h}) \bmod \mathfrak{M}_K,$$

где $f \in X\mathcal{O}_K[[X]]$, причем коэффициент при первой степени в ряде f лежит в U.

Заведем структуру формального $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля на максимальном идеале $\mathfrak{M}_K$ стандартным образом:

$$(a +_F b) = F(a, b),$$

$$(a -_F b) = F(a, i(b)),$$

$$\alpha \cdot a = [\alpha]_F(a),$$

$a, b \in \mathfrak{M}_K$, $i(X)$ — обратный элемент формального группового закона F, а $\alpha \in \mathcal{O}_{K_0}$.

Определение 1. Расширение L/K (и соответствующий ему формальный $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль $F(\mathfrak{M}_L)$) будем называть *s-иррегулярным* (для натурального s), если L не содержит $\ker[\pi_0^{s+1}]$.

Определение 2. Расширение L/K (и соответствующий ему формальный $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль $F(\mathfrak{M}_L)$) будем называть *вполне s-иррегулярным*, если любое неразветвленное расширение M/L является s-иррегулярным.

При $s = 0$ соответствующие конструкции будем называть просто *регулярными*.

Рассмотрим мультипликативную формальную группу $F_m(X, Y) = X + Y + XY$, тогда эндоморфизмы будут иметь вид $[a](X) = (1 + X)^a - 1$, $a \in \mathbb{Z}_p$. Ядро изогении будет следующим: $\ker[p] = \{\zeta - 1 : \zeta^p = 1\}$. Тогда первый критерий регулярности, полученный Боревичем в [1], можно сформулировать так:

Теорема 1. *Пусть K — регулярное локальное поле относительно мультипликативной формальной группы F_m над $\mathbb{Z}_p$. Тогда поле K и соответствующий формальный модуль $F(\mathfrak{M}_K)$ будут вполне регулярными относительно мультипликативной формальной группы F_m тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e_{K/\mathbb{Q}_p}$ не делится на $p - 1$.*

3. Критерий регулярности для групп произвольной высоты. В данном разделе мы получим критерий регулярности для формальных групп произвольной высоты h, но при условии, что расширение K/K_0 не разветвлено. В дальнейшем нам понадобится следующая классическая лемма. Ее доказательство можно найти, например в [6].

Лемма 1 (Weierstrass preparation Theorem)**.** *Пусть $f = a_0 + a_1X + \ldots$ — некоторый ряд с коэффициентами из $\mathcal{O}_K$, и предположим, что первые n коэффициентов лежат в максимальном идеале: $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{M}_K$, а $(n+1)$-й коэффициент — в группе единиц: $a_n \in U_K$. Тогда f представляется в виде произведения полинома и ряда: $f = gF$, где $g(X) = c_0 + c_1X + \ldots + X^n \in \mathcal{O}_K[X]$, а $F(X) = b_0 + b_1X + \ldots \in \mathcal{O}[[X]]$. Причем $b_0 \in U_K$ и коэффициенты c_i лежат в $\mathfrak{M}_K$.*

Лемма 2. *Существует представление $-\pi_0$ в виде $-\pi_0 = c_{q^h-1}(\xi u)^{q^h-1}$, где $\xi \in \ker[\pi_0]$, $c_{q^h-1} \in U$, а элемент u принадлежит группе главных единиц поля $K(\xi)$.*

Доказательство. По предыдущей лемме имеем

$$\frac{[\pi_0](X)}{X} = (c_0'+c_1'X+...+X^{q^h-1})(b_0'+b_1'X+...) = (c_0+c_1X+...+c_{q^h-1}X^{q^h-1})(1+b_1X+...).$$

Обозначим последний множитель: $h(X) = 1 + b_1X + ...$. Тогда $\exists h^{-1} \in 1 + X\mathcal{O}[[X]]$. Домножим на h^{-1} последнее равенство, получим

$$\frac{[\pi_0](X)}{X} h^{-1}(X) = c_0 + c_1X + ... + c_{q^h-1}X^{q^h-1}.$$

Теперь подставим вместо X корень ξ изогении $[\pi_0]$:

$$c_0 + c_1\xi + ... + c_{q^h-1}\xi^{q^h-1} = 0.$$

Так как $[\pi_0](X) \equiv \pi_0 X \bmod \deg 2$, то $c_0 = \pi_0$. Из предыдущей леммы имеем $c_i = \pi_0 d_i$ при $i \neq q^h - 1$, где $d_i \in \mathcal{O}_K$. Поэтому можем записать

$$-\pi_0(1 + d_1\xi + ... + d_{q^h-2}\xi^{q^h-2}) = c_{q^h-1}\xi^{q^h-1}.$$

Следовательно,

$$-\pi_0 = c_{q^h-1}\xi^{q^h-1}u_1,$$

где $u_1 = (1 + d_1\xi + ... + d_{q^h-2}\xi^{q^h-2})^{-1} \in K(\xi)$. В этом поле можем извлечь корень степени $q^h - 1$ из u_1, обозначим его u. Заметим, что u тоже будет элементом группы главных единиц поля $K(\xi)$.

Таким образом,

$$-\pi_0 = c_{q^h-1}(\xi u)^{q^h-1}.$$

Лемма доказана. □

Замечание 1. Заметим, что если не требовать неразветвленности K/K_0, то может оказаться, что какой-то из d_i не поделится на нужную степень π, и вынести за скобки π_0 не получится.

Пусть далее L/K — конечное расширение полей, причем L не содержит $\ker[\pi_0]$.

Замечание 2. Как известно (см. [6]), для формального $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля корней изогении $[\pi_0]$ верно, что $\Lambda_{f,n} \simeq (\frac{\mathcal{O}_{K_0}}{\pi_0^n \mathcal{O}_{K_0}})^h$, поэтому поле $L([\ker[\pi_0]])$ совпадает с $L(\zeta_1, ..., \zeta_h)$, где ζ_i — образующие этого модуля.

Теорема 2. *$F(\mathfrak{M}_L)$ является вполне регулярным формальным $\mathcal{O}_{K_0}$-модулем относительно формальной группы F для изогении $[\pi_0]$ тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/K)$ не делится на $q^h - 1$.*

Доказательство. Мы можем записать, что униформизующая нижнего поля K_0 — это униформизующая поля L в степени индекса ветвления с точностью до единиц:

$$-\pi_0 = \Pi^e \alpha u_0'.$$

Извлечем корни степени $q^h - 1$ и запишем следующее равенство в некотором верхнем поле:

$$\sqrt[q^h-1]{-\pi_0} = \Pi^{e/(q^h-1)} \sqrt[q^h-1]{\alpha} u_0.$$

По предыдущей лемме имеем

$$\sqrt[q^h-1]{-\pi_0} = \sqrt[q^h-1]{c_i}\zeta_i u_i,$$

где Π — униформизующая поля L, α — представитель Тейхмюллера в L, u_0, u_0' — некоторые главные единицы в U_L, а ζ_i — образующие формального модуля корней изогении $[\pi_0]$, $i = 1, ..., h$.

Случай 1: e делится на $q^h - 1$.

Тогда расширение

$$L(\ker[\pi_0]) = L(\zeta_1, ..., \zeta_h) = L\left(\frac{\sqrt[q^h-1]{-\pi_0}}{\sqrt[q^h-1]{c_1}}, ..., \frac{\sqrt[q^h-1]{-\pi_0}}{\sqrt[q^h-1]{c_h}}\right) = L\left(\frac{\sqrt[q^h-1]{\alpha\Pi^e}}{\sqrt[q^h-1]{c_1}}, ..., \frac{\sqrt[q^h-1]{\alpha\Pi^e}}{\sqrt[q^h-1]{c_h}}\right)$$

будет неразветвленным. Это следует, например, из того, что если мы рассмотрим уравнение $x^{q^h-1} = \overline{a}$ в поле частных $\overline{L}$, где $a \in U$, и если оно там решается, то мы по лемме Гензеля поднимем это решение до решения из верхнего поля. В противном случае мы вложим поле $L(\zeta_i)$ в какое-то неразветвленное расширение этого поля, в поле частных которого это уравнение будет решаться. Таким образом, расширение будет неразветвленным, иначе по транзитивности индекса ветвления получаем противоречие.

Случай 2: e не делится на $q^h - 1$.

В этом случае в поле $L(\ker[\pi_0])$ будет содержаться корень нетривиальной степени из униформизующей поля K_0 с точностью до единицы из какого-то верхнего расширения, поэтому это расширение будет ветвиться.

Таким образом, если $e \,\vdots\, q^h - 1$, то мы нашли неразветвленное расширение, которое не регулярно: им будет само $L(\ker[\pi_0])$. Иначе, любое расширение, содержащее корень изогении $[\pi_0]$, будет ветвиться. $\square$

Замечание 3. Аналогичный результат можно получить в случае, когда мы берем в качестве кольца, над которым определен наш формальный модуль, не все $End_{\mathcal{O}_K}(F)$, а какое-либо его подкольцо A, соответствующее некоторому неразветвленному подрасширению, в том смысле, что униформизующая кольца A останется униформизующей в $End_{\mathcal{O}_K}(F)$. Например, если K не разветвлено над $\mathbb{Q}_p$, мы всегда можем рассматривать $F(\mathfrak{M}_L)$ как формальный $\mathbb{Z}_p$-модуль и применять полученный выше критерий. В таком случае вместо q^h нужно брать ту степень числа p, по которой раскладывается соответствующая изогения $[\pi']$.

Замечание 4. Если отказаться от неразветвленности расширения K/K_0, то аналогичным способом получится доказать следующий факт: пусть $\pi = \pi_0^{e_0}u$ — униформизующая поля K, и пусть некоторое конечное расширение L/K не содержит корней $[\pi]$, тогда любое конечное неразветвленное расширение M/L не содержит корней $[\pi]$, если и только если $e(L/K)$ не делится на $p^h - 1$, где h — такое число, что $[\pi](X) \equiv g(X^{p^h}) \mod \mathfrak{M}_K$.

4. Критерий s-иррегулярности для групп высоты 1. В этом разделе мы докажем две теоремы, которые связывают делимость индекса ветвления e_{L/K_0} на некоторое число и степень иррегулярности s. В некоторых частных случаях они будут давать в точности критерии иррегулярности. Для начала докажем некоторый вспомогательный результат.

Лемма 3. *Предположим, что L/K — абелево расширение с индексом ветвления $e = q^s(q-1)e_0$ и степенью инерции f, где мы для удобства на время переобозначим q как количество элементов поля вычетов K, а не K_0. Тогда $N_{L/K}(L^\times) \subset <\pi^f\epsilon> \times U_{K,s+1}$.*

Доказательство. Для начала нам нужно найти подрасширение в L индекса ветвления $q^s(q-1)$ и степени инерции f. Для этого сначала выделим K' — максимальное неразветвленное подрасширение в L со следующими параметрами:

$$\begin{array}{cl} L & \\ | & e_{L/K} = e, \quad f_{L/K} = 1, \\ K' & \\ | & e_{K'/K} = 1, \quad f_{K'/K} = f. \\ K & \end{array}$$

Далее, поскольку группа $Gal(L/K')$ абелева и делится на e_0, выделим в ней подгруппу H порядка e_0. Тогда этой группе будет соответствовать подрасширение M со следующими параметрами:

$$\begin{array}{cl} L & \\ | & e_{L/M} = e_0, \qquad f_{L/M} = 1, \quad Gal(L/M) \simeq H, \\ M & \\ | & e_{M/K'} = q^s(q-1), \quad f_{M/K'} = 1. \\ K' & \end{array}$$

Таким образом, M/K и будет искомым подрасширением с индексом ветвления $e_{M/K} = q^s(q-1)$ и степенью инерции $f_{M/K} = f$.

Теперь распишем группы норм:

$$N_{M/K}(M^\times) = <\pi^f\epsilon> \times N_{M/K}(U_M).$$

С помощью теории полей классов мы можем посчитать индекс норменной подгруппы единиц:

$$[U_K : N_{M/K}(U_M)] = e_{M/K} = q^s(q-1).$$

Имеем $N_{M/K}(U_M) = U_{K,s+1}$, поскольку это единственная подгруппа в U_K с данным индексом. Таким образом,

$$N_{M/K}(M^\times) \simeq <\pi^f\epsilon> \times U_{K,s+1}.$$

Поскольку $M \subset L$, то снова из теории полей классов мы получаем обратное включение групп норм: $N_{M/K}(M^\times) \supset N_{L/K}(L^\times)$. ☐

Теперь сформулируем и докажем две основные теоремы, которые, например, в случае многочленных формальных групп или формальных групп Любина—Тейта дадут нам в точности критерий иррегулярности. Здесь и далее мы будем обозначать за π униформизующую поля K_0 и q — количество элементов поля вычетов k_0, поскольку поле K практически не будет участвовать в рассуждениях.

Теорема 3. *Предположим, что наша формальная группа F такова, что выполняются следующие условия:*

1) высота формальной группы $h = 1$;

2) существует такое натуральное t, что $U_{K_0,t} \supset N_{K(\zeta)/K_0}(U_{K(\zeta)})$, где ζ — образующая $\Lambda_{\pi,s+1}$;

3) расширение K/K_0 абелево.

Положим, L/K — s-иррегулярное расширение. Тогда если существует неразветвленное расширение M/L такое, что $M \ni \zeta$, то индекс ветвления $e_0 = e_{L_a/K_0}$ максимального абелева подрасширения $L_a \subset L$ будет делиться на $q^{t-1}(q-1)$.

Доказательство. Поскольку по условию 1 теоремы высота формальной группы равна 1, то у циклического $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля $\Lambda_{\pi,s+1}$ имеется одна образующая, так что условие 2 корректно.

Также стоит отметить, что расширение $K(\zeta)/K_0$ является абелевым, так как высота нашей формальной группы $h = 1$ (см. [6]). Пусть Π — униформизующая поля L. Мы имеем следующую башню полей:

$$\begin{array}{cl} M & \\ | & e_{M/L} = 1, \quad f_{M/L} := f, \\ L & \\ | & e_{L/K_0} = e, \quad f_{L/K_0} = f_0. \\ K_0 & \end{array}$$

Тогда норма элемента Π будет иметь следующий вид: $N_{L/K_0}\Pi = \pi^{f_0}\epsilon$ для некоторой единицы $\epsilon \in U_{K_0}$, а тогда группа норм поля L будет выглядеть так:

$$N_{L/K_0}(L^\times) \simeq < \pi^{f_0}\epsilon > \times N_{L/K_0}(U_L).$$

Поскольку расширение M/L не разветвлено, то норма действует на единицах сюръективно. По транзитивности нормы группа норм поля M будет следующей:

$$N_{M/K_0}(M^\times) \simeq < \pi^{ff_0}\epsilon^f > \times N_{M/K_0}(U_M) \simeq < \pi^{ff_0}\epsilon^f > \times N_{L/K_0}(U_L).$$

Так как $M \supset K(\zeta)$ и расширение $K(\zeta)/K_0$ является абелевым, то максимальное абелево подрасширение $M_a \supset K(\zeta)$. Тогда по теории полей классов получаем

$$N_{M/K_0}(M^\times) = N_{M_a/K_0}(M_a^\times) \subset N_{K(\zeta)/K_0}(K(\zeta)^\times).$$

Поэтому по предположению 2 имеем следующее:

$$< \pi^{ff_0}\epsilon^f > \times N_{L/K_0}(U_L) \simeq N_{M/K_0}(M^\times) \subset N_{K(\zeta)/K_0}(K(\zeta)^\times) \subset < \pi^\alpha u > \times U_{K_0,t}$$

для некоторого натурального α и $u \in U_{K_0}$. Если в этом включении ограничиться только единицами, то получим $N_{L/K_0}(U_L) \subset U_{K_0,t}$, откуда имеем

$$N_{L/K_0}(L^\times) \simeq < \pi^{f_0}\epsilon > \times N_{L/K_0}(U_L) \subset < \pi^{f_0}\epsilon > \times U_{K_0,t}.$$

По теореме существования из теории полей классов найдется подполе $H \subset L_a \subset L$, у которого группа норм будет следующая: $< \pi^{f_0}\epsilon > \times U_{K_0,t}$ (так как это открытая группа конечного индекса в $K_0^\times$), и тогда

$$e_0 = e_{L_a/K_0} \vdots e_{H/K_0} = [U_{K_0} : U_{K_0,t}] = q^{t-1}(q-1).$$

Теорема доказана. $\square$

Теперь сформулируем и докажем обращение предыдущей теоремы.

Теорема 4. *Предположим, что наша формальная группа F такая, что выполняются следующие условия:*

1) высота формальной группы $h = 1$;

2) существует такое натуральное T, что $U_{K_0,T} \subset N_{K(\zeta)/K_0}(U_{K(\zeta)})$, где ζ — образующая $\Lambda_{\pi,s+1}$;

3) $q^{T-1}(q-1) \vdots f_{K(\zeta)/K_0}$, $N_{K(\zeta)/K_0}(\varpi) = \pi^{f_{K(\zeta)/K_0}}$ для некоторой униформизующей ϖ поля $K(\zeta)$;

4) расширение K/K_0 абелево.

Положим, L/K — s-иррегулярное расширение. Тогда если индекс ветвления $e_0 = e_{L_a/K_0}$ максимального абелева подрасширения $L_a \subset L$ делится на $q^{T-1}(q-1)$, то существует неразветвленное расширение M/L такое, что $M \ni \zeta$.

Доказательство. Как и раньше, обозначим $e = e_{L/K_0}$, $f_0 = f_{L/K_0}$. По лемме 3 существует подполе $H \subset L_a$ (в лемме оно обозначалось M) такое, что

$$N_{H/K_0}(H^\times) \simeq < \pi^{f_0}\epsilon > \times U_{K_0,T}.$$

Здесь π, действительно, будет иметь степень f_0, поскольку переход к максимальному абелевому подрасширению не меняет степени инерции, тем не менее в дальнейшем это ни на что не повлияет.

Так как $H \subset L_a$, то по теории полей классов имеем

$$N_{H/K_0}(H^\times) \supset N_{L_a/K_0}(L_a^\times) = N_{L/K_0}(L^\times).$$

Отсюда следует, что $N_{L/K_0}(U_L) \subset U_{K_0,T}$.

Покажем теперь, что $\epsilon^{q^{T-1}(q-1)} \in U_{K_0,T}$, в дальнейшем это будет для нас важно.

Пусть $\epsilon = a_0 + a_1\pi + ...$, тогда

$$\epsilon^{q-1} = \frac{\epsilon^q}{\epsilon} = \frac{a_0 + \pi(...)}{a_0 + a_1\pi + ...} \equiv 1 \bmod \pi.$$

Теперь обозначим $u = \epsilon^{q-1} = 1+b_1\pi+b_2\pi^2+... \in U_{K_0,1}$, тогда $u^q = 1+\pi^q(...)+p\pi(...) \in U_{K_0,2}$. Далее, возводя в степени q, получим требуемое: $\epsilon^{q^{T-1}(q-1)} \in U_{K_0,T}$.

Рассмотрим теперь неразветвленное расширение M/L степени $f = q^{T-1}(q-1)$. Тогда, пользуясь теми же методами, что и раньше, вышедоказанным фактом и предположением 3, получаем

$$N_{M/K_0}(M^\times) \simeq < \pi^{f_0 q^{T-1}(q-1)}\epsilon^{q^{T-1}(q-1)} > \times N_{L/K_0}(U_L) \subset < \pi^{f_0 q^{T-1}(q-1)} > \times$$
$$\times\, U_{K_0,T} \subset N_{K(\zeta)/K_0}(K(\zeta)^\times).$$

Из теории полей классов группы норм следует, что поля M и M_a (его максимальное абелевого подрасширение над K_0) совпадают, а следовательно, $M \supset M_a \supset K(\zeta)$. □

5. Критерий регулярности для формальных групп Любина — Тейта. Воспользуемся результатами предыдущего раздела для получения критерия регулярности для формальных групп Любина — Тейта. Для начала напомним, как они строятся, и отметим несколько нужных нам фактов о них.

Зафиксируем униформизующую π локального поля K и рассмотрим $\mathcal{F}_\pi$ — множество степенных рядов $f \in \mathcal{O}_K[[X]]$ таких, что

- $f(X) \equiv \pi X \mod deg.2$,
- $f(X) \equiv X^q \mod \pi$,

где q — количество элементов поля вычетов k локального поля K.

В теории Любина — Тейта доказывается, что по каждому $f \in \mathcal{F}_\pi$ мы можем построить единственный формальный групповой закон F_f над $\mathcal{O}_K$, для которого данное f является эндоморфизмом в категории формальных групповых законов. Далее доказывается, что построенный формальный групповой закон F_f на самом деле не зависит от выбора $f \in \mathcal{F}_\pi$, все такие групповые законы оказываются изоморфными, и поэтому мы можем зафиксировать произвольный эндоморфизм $f \in \mathcal{F}_\pi$ и построенный на нем формальный групповой закон обозначать F_π.

Пример 1. В качестве $f \in \mathcal{F}_\pi$ мы всегда можем взять полином $f(X) = \pi X + X^q$.

Известно также, что кольцо эндоморфизмов формального группового закона Любина — Тейта составляют все $\mathcal{O}_K$, так что $\forall a \in \mathcal{O}_K\ \exists [a] \in End(F_\pi):\ [a](T) \equiv aT \mod deg.2$.

Пример 2. *Формальная группа Любина — Тейта над $\mathbb{Q}_p$ — это просто мультипликативная формальная группа:* $\pi = p$, $f(T) = [p](T) = 1 - (1-T)^p$, $F(X,Y) = X + Y - XY$, $[a](T) = 1 - (1-T)^a$.

Таким образом, на максимальном идеале $\mathfrak{M}$ кольца $\mathcal{O}_K$ вводится структура формального $\mathcal{O}_K$-модуля Любина — Тейта: $a +_F b := F_\pi(a,b),\ \forall a, b \in \mathfrak{M}$; $\alpha a := [\alpha]a,\ \forall \alpha \in \mathcal{O}_K, a \in \mathfrak{M}$.

Теорема 5. *Пусть ζ — образующая $\mathcal{O}_K$-модуля $\Lambda_{\pi,n}$, тогда*

1) для каждого натурального n расширение $K(\zeta)/K$ является абелевым, вполне разветвленным степени $(q-1)q^{n-1}$;

2) поле $K(\zeta)$ не зависит от выбора униформизующей π поля K с точностью до n-й главной единицы: $K(\Lambda_{\pi,n}) = K(\Lambda_{\pi',n})$ для $\pi' = \pi u,\ u \in U_{K,n}$;

3) $N_{K(\zeta)/K}(K(\zeta)^\times) = <\pi> \times U_{K,n}$.

Доказательство всех этих фактов можно найти, например, в [7, гл. 7, § 7.3], [8, раздел 5] или в [9, гл. 1].

Теперь мы можем получить критерий вполне s-иррегулярности для формальных групп Любина — Тейта.

Теорема 6. *Пусть F — формальный групповой закон Любина — Тейта над K. Предположим, что L/K s-иррегулярно. Тогда L/K вполне s-иррегулярно тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e_{L_a/K}$ не делится на $q^s(q-1)$.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что все условия теорем 5 и 6 выполнены. Также мы имеем $t = T = s + 1$, что доказывает наше утверждение. □

6. Многочленные формальные группы. Аналогичные результаты можно получить и для многочленных формальных групп. Пусть теперь K — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$, $c \in U_K$. Тогда $F(X,Y) = X + Y + cXY$ будет многочленным формальным групповым законом. Достаточно легко проверить, что любой формальный групповой закон, у которого его формальный степенной ряд конечен, то есть является многочленом, изоморфен формальному групповому закону, введенному выше. Более детальное описание и исследование многочленных формальных групповых законов можно найти в [10, 11]. Известно строение кольца эндоморфизмов этого группового закона: $End(F) = \mathbb{Z}_p$. Сами эндоморфизмы имеют вид $[a](T) = c^{-1}((1+cT)^a - 1)$. Тогда корни изогении $[p^{s+1}]$ будут $\zeta = c^{-1}(\zeta_{s+1} - 1)$, где $\zeta_{s+1}^{p^{s+1}} = 1$. Следовательно, $K(\Lambda_{p,s+1}) = K(\zeta_{s+1})$, то есть присоединение корней изогении — это то же самое, что и присоединение корней из единицы, а значит, наша задача равносильна аналогичной задаче, но уже для мультипликативного формального группового закона $F_m(X,Y) = X + Y + XY$ над $\mathbb{Q}_p$.

В случае $K = \mathbb{Q}_p$ мультипликативная формальная группа является формальной группой Любина—Тейта, поэтому мы можем использовать результат из предыдущего раздела и получить следующий критерий регулярности:

Теорема 7. *Пусть F — многочленный формальный групповой закон с параметром из U_K. Предположим, что $L/\mathbb{Q}_p$ s-иррегулярно. Тогда L/K вполне s-иррегулярно тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e_{L_a/\mathbb{Q}_p}$ не делится на $p^s(p-1)$.*

7. Относительные формальные группы Любина — Тейта. Обобщением формальных групп Любина—Тейта являются относительные формальные группы Любина—Тейта. Обобщение происходит заменой π — первого коэффициента в степенном ряде выделенной изогении на определенный элемент исходного поля K. Впервые относительные группы Любина—Тейта были введены в работе [12].

Зафиксируем локальное поле K_0 и его неразветвленное расширение K степени d. Пусть количество элементов поля вычетов k_0 равно q, тогда количество элементов поля вычетов k будет составлять q^d. Зафиксируем элемент $\xi \in K_0 :\ \nu(\xi) = d$ и рассмотрим множество

$$\mathcal{F}_\xi := \{f(T) \in \mathcal{O}_K[[T]] :\ 1)\ f(T) \equiv \pi T + T^q \mod \mathfrak{M}_K, \mathrm{deg}.2;\ 2)\ N_{K/K_0}\pi = \xi\},$$

где π пробегает множество элементов K, удовлетворяющих условию 2.

Для $\pi_1,\ \pi_2 \in K :\ N_{K/K_0}\pi_1 = N_{K/K_0}\pi_2 = \xi$ положим

$$\mathcal{O}_{\pi_1,\pi_2} := \{\alpha \in \mathcal{O}_K :\ \alpha^{\Delta-1} = \pi_1/\pi_2\},$$

где Δ — автоморфизм Фробениуса K над K_0. Тогда, как в теории Любина—Тейта, доказывается следующая лемма.

Лемма 4. *Для любых $f_{\pi_1}(T),\ g_{\pi_2}(T) \in \mathcal{F}_\xi$ и для любых $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{O}_{\pi_1,\pi_2}$ существует единственный ряд $F(X_1,...,X_n) \in \mathcal{O}_K[[X_1,...,X_n]]$ такой, что*

$$F(X_1,...,X_n) \equiv \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n \mod \mathrm{deg}.2,$$

а также

$$f_{\pi_1}(F(X_1,...,X_n)) = F^\Delta(g_{\pi_2}(X_1),...,g_{\pi_2}(X_n)).$$

Из предыдущей леммы следует, что для любого $f \in \mathcal{F}_\xi$ существует единственный формальный групповой закон $F_f(X,Y)$ над $\mathcal{O}_K$, для которого $f(T) \in Hom(F, F^\Delta)$.

Определение 3. Полученную формальную группу F_f мы и будем называть *относительной формальной группой Любина — Тейта*.

Следующие факты об относительных формальных группах Любина — Тейта мы считаем известными:

- $End(F_f) \simeq \mathcal{O}_{K_0}$;
- F_f не зависит от выбора $f \in \mathcal{F}_\xi$, то есть все они изоморфны для фиксированного ξ;
- расширение $K(\Lambda_{f,s})/K$ является вполне разветвленным и имеет индекс ветвления $e_{K(\zeta)/K} = q^{s-1}(q-1)$.

Более детально с теорией относительных формальных групповых законов Любина — Тейта можно ознакомиться в [13, 14] и [12].

Теперь с помощью теории полей классов мы можем вычислить индекс норменной подгруппы единиц:

$$[U_{K_0} : N_{K(\zeta)/K_0}(U_{K(\zeta)})] = e = q^{s-1}(q-1),$$

а следовательно, как и раньше, мы можем вычислить саму группу норменных единиц: $N_{K(\zeta)/K_0}(U_{K(\zeta)}) = U_{K_0,s}$. А тогда мы можем воспользоваться теоремами 3 и 4 и получить критерий регулярности, как в случае обычных групп Любина — Тейта.

Теорема 8. *Пусть F — относительная формальная группа Любина — Тейта над K с кольцом эндоморфизмов $\mathcal{O}_{K_0}$, и пусть q — количество элементов поля вычетов K_0. Пусть также d — степень расширения K/K_0 делит $q^s(q-1)$. Предположим, что L/K s-иррегулярно. Тогда L/K вполне s-иррегулярно тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e_{L_a/K}$ не делится на $q^s(q-1)$.*

8. Обобщенные формальные группы Любина — Тейта. В этом разделе мы получим критерий регулярности для обобщенных групп Любина — Тейта (за подробностями, касающимися обобщенных формальных модулей Любина — Тейта мы отсылаем читателя к работе [15]). В случае данных формальных групп применить общие теоремы не удастся, однако мы сможем напрямую получить критерий, пользуясь аналогичными идеями. Кратко напомним построение этих групп. Предположим, что K — произвольное конечное расширение $\mathbb{Q}_p$. Зафиксируем униформизующую этого поля, по этой униформизующей мы строим выделенную изогению нашей формальной группы:

$$f(T) \equiv \pi T + T^{q^h} \mod \pi, \deg 2,$$

где q — количество элементов поля вычетов k. Далее по выделенной изогении, как и в случае классических групп Любина — Тейта, строится уже сама обобщенная формальная группа Любина — Тейта.

По построению высота нашей формальной группы равна h. Из той же статьи известен изоморфизм $End_{\mathcal{O}_K} F \simeq \mathcal{O}_K$, который позволяет нам рассматривать $F(\mathfrak{M}_K)$ как формальный $\mathcal{O}_K$-модуль. Следуя обозначениям из работы [15], положим $K_n = K(\Lambda_{\pi,n})$ и T_h — неразветвленное расширение K степени h. Тогда известно, что расширение $K_{\pi,s}$ представляется в виде цепочки расширений

$$\begin{array}{cl} K & \\ | & (q^h-1)q^{h(s-1)}, tot.ram, \\ T_h & \\ | & \qquad h, u./r. \\ K_{\pi,s} & \end{array}$$

Обозначим $Q = q^h$, тогда $e_{K_s/K} = (Q-1)Q^{s-1}$, а также $f_{K_s/K} = h$. Отметим, что количество элементов поля вычетов t_h равно Q. Тогда, поскольку $[U_{T_h} : N_{K_s/T_h} U_{K_s}] = e_{K_s/T_h} = (Q-1)Q^{s-1}$, то $N_{K_s/T_h} U_{K_s} = U_{T_h,s}$.

Теорема 9. *Пусть F — обобщенный формальный групповой закон Любина—Тейта, и пусть расширение L/K s-иррегулярно. Тогда L/K вполне s-иррегулярно тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e_{L_a/K}$ не делится на $(q^h-1)q^{hs}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Предположим, что L/K не является вполне s-иррегулярным. Тогда найдется неразветвленное расширение M/L такое, что $M \supset \Lambda_{\pi,s+1}$. Покажем, что тогда $e_{L_a/K} = e_{L_a/T_h}$ делится на $(q^h-1)q^{hs}$.

Отметим, что расширение $K_{\pi,s+1}/T_h$ абелево, поскольку если рассматривать F над T_h, то это будет расширением из классической теории Любина—Тейта. Таким образом, мы имеем следующую цепочку абелевых расширений:

$$\begin{array}{ll} M & \\ | & e_{M/L} = 1, \quad f_{M/L} := f, \\ L & \\ | & e_{L/T_h} = e, \quad f_{L/T_h} = f_0. \\ T_h & \end{array}$$

Пусть Π — униформизующая поля L и π — униформизующая поля K (и T_h). Тогда $N_{L/T_h}\Pi = \pi^{f_0}\epsilon$ для $\epsilon \in U_{T_h}$ и $N_{L/T_h} L^\times \simeq <\pi^{f_0}\epsilon> \times N_{L/T_h} U_L$. Поскольку расширение M/L не разветвлено, то $N_{M/L} U_M = U_L$. Из этого следует, что

$$N_{M/T_h}(M^\times) \simeq <\pi^{ff_0}\epsilon^f> \times N_{M/T_h} U_M \simeq <\pi^{ff_0}\epsilon^f> \times N_{L/T_h} U_L.$$

Поскольку по нашему предположению в поле M содержится $\Lambda_{\pi,s+1}$ (а следовательно, и в его максимальном абелевом подрасширении M_a), то из теории полей классов мы заключаем следующее:

$$N_{M/T_h}(M^\times) = N_{M_a/T_h}(M_a^\times) \subset N_{K_{\pi,s+1}/T_h}(K_{\pi,s+1}^\times).$$

Из этого мы можем получить $N_{L/T_h} U_L \subset U_{T_h,s+1}$, поскольку

$$\begin{aligned} <\pi^{ff_0}\epsilon^f> \times N_{L/T_h} U_L \simeq N_{M/T_h}(M^\times) \subset \\ \subset N_{K_{\pi,s+1}/T_h}(K_{\pi,s+1}^\times) \simeq <N_{K_{\pi,s+1}/T_h}(\Pi_{s+1})> \times U_{T_h,s+1}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем следующее включение:

$$N_{L_a/T_h}(L_a^\times) = N_{L/T_h}(L^\times) \simeq <\pi^{f_0}\epsilon> \times N_{L/T_h} U_L \subset <\pi^{f_0}\epsilon> \times U_{T_h,s+1}.$$

Справа во включении стоит открытая подгруппа конечного индекса в $T_h^\times$, поэтому из теоремы существования теории полей классов мы можем найти соответствующее ей подполе $H \subset L_a \subset L$. Отсюда следует, что

$$e_{L_a/T_h} \vdots e_{H/T_h} = [U_{T_h} : U_{T_h,s+1}] = (q^h-1)q^{hs}.$$

$\Leftarrow$ Пусть теперь $e_{L_a/K} \vdots (q^h-1)q^{hs}$. Докажем, что найдется неразветвленное расширение M/L, которое содержит $\Lambda_{\pi,s+1}$. По лемме 3 имеем

$$N_{L/T_h}(L^\times) = N_{L_a/T_h}(L_a^\times) \subset <\pi^{f_0}\epsilon> \times U_{T_h,s+1}, \ \epsilon \in U_{T_h},$$

поэтому $N_{L/T_h}U_L \subset U_{T_h,s+1}$. Также мы знаем, что $\epsilon^{Q^s(Q-1)} \in U_{T_h,s+1}$. Рассмотрим неразветвленное расширение M/L степени $f = Q^s(Q-1)$. Тогда для его группы норм верно следующее:

$$N_{M/T_h}(M^\times) \simeq < \pi^{Q^s(Q-1)f_0}\epsilon^{Q^s(Q-1)} > \times N_{L/T_h}U_L \subset$$
$$\subset < \pi^{Q^s(Q-1)} > \times U_{T_h,s+1} \subset < \pi > \times U_{T_h,s+1} \simeq N_{K_{\pi,s+1}/T_h}(K^\times_{\pi,s+1}).$$

Таким образом, из теории полей классов мы знаем, что включение групп норм индуцирует вложение в обратную сторону самих полей, поэтому $K_{\pi,s+1} \subset M_a \subset M$. $\square$

9. Типы конструкций для получения критериев регулярности. Первоначально критерий регулярности был получен в работе [1] с помощью идей, аналогичных использованным во второй половине данной работы. Кратко их можно описать так: исследуется группа норм $N_{K(\zeta)/K_0}(K(\zeta)^\times)$, после чего изучается вопрос о том, когда аналогичная группа норм для неразветвленного расширения M/L лежит в этой группе, и далее, с помощью взаимно однозначного соответствия между абелевыми расширениями и норменными подгруппами из теории полей классов, заключается, что M либо содержит $K(\zeta)$, либо нет.

В этой же статье Д. К. Фаддеев предложил более простой подход к решению данной проблемы, в частности он был обобщен в работе [4] со случая мультипликативной формальной группы на случай формальных групп Хонды и многочленных формальных групп, а также был применен к первой половине данной работы.

Очень кратко основную идею доказательства критерия регулярности этим методом, например для групп Любина—Тейта, можно сформулировать как применение следующей леммы Абьянкара.

Лемма 5. *Рассмотрим локальное поле C и его расширения A и B со следующими условиями на индексы ветвления: индекс ветвления $e_{A/C} = a$ делится на $e_{B/C} = b$ и b не делится на p, то есть расширение B/C слабо разветвлено, тогда композит AB не разветвлен над A:*

$$\begin{tikzcd}
 & AB & \\
A \arrow[ur, dash, "u./r."] & & B \arrow[ul, dash] \\
 & C \arrow[ul, dash, "a\vdots b"] \arrow[ur, dash, "b,\ tame"'] &
\end{tikzcd}$$

Тогда, чтобы получить критерий регулярности, нужно взять в этой лемме в качестве полей A, B, C поля, как на следующей диаграмме (для групп Хонды идея в целом аналогичная, но доказательство получается более техническое):

$$\begin{tikzcd}
& L[\ker[\pi]] \arrow[dl, dash, "u./r."'] \arrow[dr, dash] & \\
L \arrow[dr, dash, "e_{L/K}"'] & & K[\ker[\pi]] \arrow[dl, dash, "q^h-1"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Однако иногда удобнее не проверять условия леммы Абьянкара, а просто каждый раз использовать основные идеи из ее доказательства. Отметим, что данный подход не применим к высшим степеням изогении $[\pi^s]$. Препятствием к обобщению является то, что, например, в случае групп Любина — Тейта расширения $K(\ker[\pi^s])/K$ будут уже с диким ветвлением, и лемму Абьянкара и близкие к ней результаты применить не удастся, поскольку слабое ветвление расширения B/C является там ключевым моментом.

10. Заключение. Остается открытым вопрос о нахождении наиболее общего критерия регулярности. Доказательства всех последних критериев устроены приблизительно одинаково, различаются поля, в которых действует оператор нормы: K_0 в случае двух основных теорем (теорем 3 и 4) и T_h в случае обобщенных групп Любина — Тейта. Также не известно, что происходит с регулярностью в случае относительных формальных групп, когда d — степень расширения K/K_0 — не делит $q^s(q-1)$, потому что воспользоваться теоремой 4 в этом случае не удается и на текущий момент не понятно, как это обойти.

Литература

1. Боревич З. И. О регулярных локальных полях. *Вестник Ленинградского университета*, вып. 1, 142–145 (1962).

2. Боревич З. И. Мультипликативная группа регулярного поля с циклической группой операторов. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **28** (3), 707–712 (1964).

3. Боревич З. И. О мультипликативной группе циклических p-расширений локального поля. *Тр. МИАН СССР* **80**, 16–29 (1965).

4. Власьев С. М., Востоков С. В., Горшков А. А. Регулярные формальные модули в одномерных локальных полях. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия* **3 (61)**, вып. 4, 544–551 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.403

5. Влаская Н. К., Востоков С. В., Питаль П. Н., Цыбышев А. Е. Степень иррегулярности и регулярные формальные модули в локальных полях. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7 (65)**, вып. 4, 588–596 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.40

6. Колывагин В. А. Формальные группы и символ норменного вычета. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **43** (5), 1054–1120 (1979).

7. Ивасава К. *Локальная теория полей классов*, пер. с япон. Москва, Мир (1983).

8. Riehl E. *Lubin — Tate formal groups and local class field theory.* Bachelor thesis at Harvard University (2008).

9. Milne J. S. *Class Field Theory.* Lecture notes for a course given at the University of Michigan, Ann Arbor. Доступно на: https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/cft.html (дата обращения: 27.02.2022).

10. Востоков С. В., Волков В. В., Пак Г. К. Символ Гильберта для многочленных формальных групп. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **400**, 127–132 (2012).

11. Востоков С. В., Волков В. В. Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей. *Алгебра и анализ* **26** (5), 125–141 (2014).

12. Shalite E. de. Relative Lubin — Tate groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **95** (1), 1–4 (1985).

13. Мадунц А. И. Формальные модули для относительных формальных групп Любина — Тейта. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **452**, 177–194 (2016).

14. Востоков С. В., Демченко О. В. Явная форма спаривания Гильберта для относительных формальных групп Любина — Тэйта. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **227**, 41–44 (1995).

15. Мадунц А. И., Востокова Р. П. Формальные модули для обобщенных групп Любина — Тейта. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **435**, 95–112 (2015).

Статья поступила в редакцию 17 октября 2021 г.;
доработана 25 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Востоков Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; sergei.vostokov@gmail.com
Питаль Петр Николаевич — ассистент; pital.petya@yandex.ru
Поляков Владимир Михайлович — аспирант; vovtai71@yandex.ru

Higher criteria for the regularity of a one-dimensional local field*

S. V. Vostokov[1], *P. N. Pital'*[1,2], *V. M. Polyakov*[3]

[1] St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] St Petersburg Electrotechnical University "LETI",
5, ul. Professora Popova, St Petersburg, 197022, Russian Federation
[3] St Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences,
27, nab. r. Fontanki, St Petersburg, 191023, Russian Federation

For citation: Vostokov S. V., Pital' P. N., Polyakov V. M. Higher criteria for the regularity of a one-dimensional local field. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 229–244. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.205 (In Russian)

The concept of irregularity of formal modules in one-dimensional local fields is considered. A connection is obtained between the irregularity of all unramified extensions M/L and the ramification index $e_{L/K}$ for a sufficiently wide class of formal groups. The notion of s-irregularity for natural s is introduced (generalization of the notion of irregularity to the case of roots $[\pi^s]$), and similar criteria for irregularity are proved for it for the case of generalized and relative formal Lubin — Tate modules.

Keywords: regular formal modules, formal modules, formal groups, local fields.

References

1. Borevich Z. I. About regular local fields. *Vestnik of Leningrad University*, iss. 1, 142–145 (1962). (In Russian)

2. Borevich Z. I. The multiplicative group of a regular local field with a cyclic group of operators. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **28** (3), 707–712 (1964). (In Russian)

3. Borevich Z. I. The multiplicative group of cyclic p-extensions of a local field. *Trudy Mat. Inst. Steklov* **80**, 16–29 (1965). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **80**, 15–30 (1965)].

4. Vlassiev S. M., Vostokov S. V., Gorshkov A. A. Regular formal modules in onedimensional local fields. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3 (61)**, iss. 4, 544–551 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.403

*The research is supported by a grant from the Government of the Russian Federation, agreement 075-15-2019-1620.

(In Russian) [Eng. transl.: Vestnik St Petersburg University, Mathematics **49**, 313–319 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116040142].

5. Vlaskina N. K., Vostokov S. V., Pital' P. N., Tsybyshiev A. E. Regular formal modules in local fields and irregularly degree. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7 (65)**, вып. 4, 588–596 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.40 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **53**, 398–403 (2020). https://doi.org/10.1134/S106345412004010X]

6. Kolyvagin V. A. Formal groups and the norm residue symbol. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (5), 1054–1120 (1979). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR — Izv.* **15** (2), 289–348 (1980)].

7. Iwasawa K. *Local class field theory.* Iwanami-Shoten (1980). (In Japanese).

8. Riehl E. *Lubin — Tate formal groups and local class field theory.* Bachelor thesis at Harvard University (2008).

9. Milne J. S. *Class Field Theory.* Lecture notes for a course given at the University of Michigan, Ann Arbor. Available at: https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/cft.html (accessed: February 27, 2022).

10. Vostokov S. V., Volkov V. V., Pak G. K. The Hilbert symbol of a polynomial formal group. *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **400**, 127–132 (2012). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci. (N. Y.)* **192** (2), 196–199 (2013). https://doi.org/10.1007/s10958-013-1383-9].

11. Vostokov S. V., Volkov V. V. Explicit formula for Hilbert pairing on polynomial formal modules. *Algebra i Analiz* **26** (5), 125–141 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *St Petersburg Math. J.* **26** (5), 785–796 (2015). https://doi.org/10.1090/spmj/1358].

12. Shalite E. de. Relative Lubin — Tate groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **95** (1), 1–4 (1985).

13. Madunts A. I. Lubin — Tate formal groups over integer ring of multidimensional local field. *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **452**, 177–194 (2016). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci. (N. Y.)* **232** (5), 704–716 (2018). https://doi.org/10.1007/s10958-018-3899-5].

14. Vostokov S. V., Demchenko O. V. An explicit form of the Hilbert pairing for the relative formal Lubin — Tate groups. *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **227**, 41–44 (1995). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci. (N. Y.)* **89** (2), 1105–1107 (1998). https://doi.org/10.1007/BF02355855].

15. Madunts A. I., Vostokova R. P. Formal modules for generalized Lubin — Tate groups. *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **435**, 95–112 (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci. (N. Y.)* **219** (4), 553–564 (2016). https://doi.org/10.1007/s10958-016-3127-0].

Received: October 17, 2021
Revised: November 25, 2021
Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

Sergei V. Vostokov — sergei.vostokov@gmail.com
Petr N. Pital' — pital.petya@yandex.ru
Vladimir M. Polyakov — vovtai71@yandex.ru