УДК 517.977 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2022. Т. 18. Вып. 1
MSC 49M25

Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели*

А. В. Аргучинцев, В. А. Срочко

Иркутский государственный университет, Российская Федерация,
664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1

Для цитирования: *Аргучинцев А. В., Срочко В. А.* Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 179–187. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115

Рассматривается задача оптимизации линейной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений на множестве кусочно-непрерывных скалярных управляющих воздействий с двусторонним ограничением. Целевой функционал содержит два слагаемых: билинейная часть (управление, состояние) и квадрат управления с параметром, играющий роль регуляризующего члена. Приближенное решение задачи оптимального управления проводится на подмножестве кусочно-постоянных управлений с неравномерной сеткой возможных точек переключения. В результате предлагаемой параметризации проведена редукция к конечномерной задаче квадратичного программирования с параметром в целевой функции и простейшими ограничениями на независимые переменные. В случае строго выпуклой целевой функции конечномерная задача может быть решена за конечное число итераций методом особых точек. Для строго вогнутых целевых функций соответствующая задача решается простым или специализированным перебором. В общем случае получены условия на параметр и точки переключения, при которых целевая функция становится выпуклой или вогнутой. При этом соответствующие задачи математического программирования допускают глобальное решение за конечное число операций. Таким образом, предлагаемый подход позволяет аппроксимировать исходную невыпуклую вариационную задачу конечномерной моделью, допускающей глобальное решение за конечное число итераций.

Ключевые слова: линейная фазовая система, билинейно-квадратичный функционал, конечномерная модель, конечные итерационные методы, глобальное решение.

1. Введение. Применение подходов математического программирования к решению задач оптимального управления имеет давнюю историю. Здесь можно выделить два основных направления.

Во-первых, динамические системы нередко изначально рассматриваются в дискретном варианте. Это связано с тем, что на практике информация о параметрах управляемого процесса часто поступает в дискретные моменты времени и управление процессом также реализуется дискретно. В свою очередь, для решения соответствующих задач оптимального управления используются подходы конечномерной оптимизации, принцип оптимальности Беллмана и вариационные условия оптимальности, изначально полученные для непрерывных систем [1–4].

Во-вторых, применение методов параметризации исходных непрерывных динамических систем сводит эти задачи к соответствующим задачам математического

* Проект реализуется при финансовой поддержке Благотворительного фонда Владимира Потанина (грант ГСАД-0022/21).

программирования. Дискретизация при этом может проводиться как по состоянию, так и по управлению процесса. Традиционно считается, что преобразования, приводящие к дискретизации, снижают качество итоговых результатов. Экстремальные решения конечномерных задач, удовлетворяющие тем или иным условиям экстремума, не приводят, вообще говоря, к экстремальным управлениям исходных вариационных задач. Классические рекомендации заключаются в уменьшении соответствующих параметров дискретизации (шага разностной сетки) и т. п. (см. обзоры [5, 6]).

В последние годы намечается новый тренд в этой области в связи с появлением нестандартных методов дискретизации. В частности, достаточно эффективные методы программного и позиционного решений линейных задач оптимального управления связаны с дискретизацией (параметризацией) управления и переходом к специальным задачам линейного программирования [7]. Обычно в рамках дискретного подхода предпочтение отдается схемам параметризации по управляющим функциям [8]. В настоящее время такие параметризации оформляются с помощью линейных комбинаций некоторых опорных функций: полиномиальные сплайны, квадратичные экспоненты и т. д. [9–13].

В данной статье рассматривается задача оптимизации линейной системы на множестве кусочно-непрерывных управлений с двусторонним ограничением. Целевой функционал содержит билинейный фрагмент (управление, состояние) и квадрат управления с параметром (регуляризующий член). Билинейные задачи оптимального управления образуют актуальный класс невыпуклых структур, глобальное решение которых до сих пор носит проблематичный характер (см., например, [14]). Это стимулирует альтернативные подходы и дальнейшие исследования для конструктивного преодоления возникающих проблем.

Приближенное решение задачи проводится на подмножестве кусочно-постоянных управлений с неравномерной сеткой возможных точек переключения. В результате такой параметризации получена в явной формулировке конечномерная задача квадратичного программирования с параметром в целевой функции и простейшими ограничениями на переменные (гиперкуб). Найдены условия на параметр (оценки сверху и снизу) и точки переключения, при которых целевая функция становится выпуклой или вогнутой. При этом соответствующие задачи допускают глобальное решение за конечное число операций — метод особых точек в случае выпуклой функции, перебор угловых точек гиперкуба — вогнутой.

Таким образом, исходная невыпуклая вариационная задача при определенных условиях на параметр в функционале и точки переключения управления аппроксимируется конечномерной моделью, допускающей глобальное решение за конечное число итераций.

2. Постановка задачи. Конечномерная аппроксимация. Рассматриваемая задача описывается следующими соотношениями ($u(t) \in \Re, x(t) \in \Re^n$):

$$\Phi(u) = \int_{t_0}^{T} (\langle a(t), x(t)\rangle u(t) + \gamma u^2(t))dt \to \min,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

$$|u(t)| \leqslant 1,\ t \in [t_0, T].$$

Отметим необходимые предположения:

• функции $a(t),\ A(t),\ b(t)$ непрерывны на $[t_0, T]$;

• множество допустимых управлений составляют скалярные кусочно-непрерывные функции $u(t)$ с интервальным ограничением;

• параметр $\gamma > 0$.

По поводу билинейной части функционала $\Phi(u)$ отметим следующее. Как известно [15], стандартный квадратичный функционал относительно фазовой траектории

$$F(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), Cx(T)\rangle + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \langle x(t), Q(t)x(t)\rangle dt$$

на основе матричной функции Габасова $\Psi(t)$ с уравнением

$$\dot{\Psi} = -A(t)^T\Psi - \Psi A(t) - Q(t), \ \ \Psi(T) = C$$

сводится к билинейному варианту

$$F(u) = F(0) + \int_{t_0}^{T} \langle \Psi(t)b(t), x(t)\rangle u(t)dt,$$

который и представлен в задаче (1).

В общем случае задача (1), в силу билинейной части функционала $\Phi(u)$, невыпукла: принцип максимума не является для нее достаточным условием оптимальности. В результате возникает проблема гарантированного решения этой задачи в смысле нахождения глобального минимума.

Для частичного решения данной проблемы проведем конечномерную аппроксимацию задачи (1) на основе кусочно-постоянных управлений с заданным набором возможных точек переключения $t_i \in (t_0, T),\ i = 1, 2, \ldots, m-1$, упорядоченных по возрастанию: $t_i > t_{i-1}$. Положим $T = t_m$ и определим характеристические функции для $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1,\ t \in (t_{j-1}, t_j], \\ 0,\ t \notin (t_{j-1}, t_j]. \end{cases}$$

Введем набор параметров $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ с условием $|y_j| \leqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots, m$. Сформируем допустимые управления

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_j(t)$$

вместе с соответствующими фазовыми траекториями

$$x(t, y) = x(t, 0) + \sum_{j=1}^{m} y_j x^j(t).$$

Здесь для каждого j вектор-функция $x^j(t)$ (опорная траектория) является решением задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\chi_j(t),\ x(t_0) = 0.$$

Отметим, что $x^j(t) \equiv 0,\ t \in [t_0, t_{j-1}],\ j = 2, 3, \ldots, m$.

Получим явное выражение для целевого функционала $\Phi(u)$ на допустимом процессе $\{u(t,y),x(t,y)\}$. Выделим билинейную часть функционала:

$$\varphi_1(y)=\int\limits_{t_0}^{T}\langle a(t),x(t,y)\rangle u(t,y)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}y_j\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\langle a(t),x(t,0)\rangle dt+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}y_jy_k\int\limits_{t_0}^{T}\langle a(t),x^j(t)\rangle\chi_k(t)dt.$$

Уточним интеграл под знаком двойной суммы, учитывая, что

$$x^j(t)\equiv 0,\ \chi_k(t)\equiv 0,\ t\in[t_0,t_{j-1}],\ k<j.$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{T}\langle a(t),x^j(t)\rangle\chi_k(t)dt=\begin{cases}0,\ k<j,\\ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\langle a(t),x^j(t)\rangle dt,\ k\geqslant j.\end{cases}$$

В результате имеем формулу

$$\varphi_1(y)=\sum_{j=1}^{m}y_j\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\langle a(t),x(t,0)\rangle dt+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=j}^{m}y_jy_k\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\langle a(t),x^j(t)\rangle dt. \qquad (2)$$

Введем вектор $d\in\Re^m$ и матрицу $C\in\Re^{m\times m}$:

$$d_j=\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\langle a(t),x(t,0)\rangle dt,\ j=1,2,\ldots,m;$$

$$c_{jk}=\begin{cases}0,\ k<j,\\ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\langle a(t),x^j(t)\rangle dt,\ k\geqslant j.\end{cases}$$

Тогда формула (2) может быть записана в векторно-матричном виде

$$\varphi_1(y)=\langle d,y\rangle+\langle y,Cy\rangle,$$

где C — верхняя треугольная матрица.

Квадратичная часть функционала $\Phi(u)$ преобразуется достаточно просто:

$$\varphi_2(y)=\gamma\int\limits_{t_0}^{T}u^2(t,y)dt=\gamma\sum_{j=1}^{m}(t_j-t_{j-1})y_j^2=\gamma\langle y,Dy\rangle.$$

Здесь D — $(m\times m)$-диагональная матрица с элементами $(t_j-t_{j-1}),\ j=1,2,\ldots,m$.

В результате получаем итоговое выражение

$$\varphi_\gamma(y)=\langle d,y\rangle+\langle y,(C+\gamma D)y\rangle.$$

Это квадратичная функция с верхней треугольной матрицей $(C+\gamma D)$.

Таким образом, конечномерный вариант вариационной задачи (1) формулируется следующим образом:

$$\varphi_\gamma(y) \to \min,\ |y_j| \leqslant 1,\ j = 1, 2, \dots, m. \tag{3}$$

3. Анализ конечномерной модели. Выделим случай одномерной задачи ($m = 1$), когда аппроксимация проводится в классе управлений, являющихся константами: $u(t) = y_1,\ t \in [t_0, T]$. Задача (3) приобретает вид

$$\varphi_\gamma(y_1) = d_1 y_1 + [c_{11} + \gamma(T - t_0)] y_1^2 \to \min,\ |y_1| \leqslant 1,$$

с коэффициентами

$$d_1 = \int\limits_{t_0}^{T} \langle a(t), x(t, 0)\rangle dt,\ c_{11} = \int\limits_{t_0}^{T} \langle a(t), x^1(t)\rangle dt$$

и траекториями

$$x(t, 0):\ \dot{x} = A(t)x,\ x(t_0) = x^0,$$
$$x^1(t):\ \dot{x} = A(t)x + b(t),\ x(t_0) = 0.$$

Эта задача решается элементарно в зависимости от знака коэффициента при y_1^2 и положения стационарной точки параболы относительно отрезка $[-1, 1]$.

Рассмотрим благоприятные ситуации с точки зрения глобального решения общей задачи (3).

Пусть $\varphi_\gamma(y)$ — строго выпуклая функция. Тогда квадратичная задача (3) решается за конечное число итераций методом особых точек [16].

Если $\varphi_\gamma(y)$ — строго вогнутая функция, то задача (3) эквивалентна задаче минимизации той же целевой функции на множестве угловых точек гиперкуба:

$$\varphi_\gamma(y) \to \min,\ y_j^2 = 1,\ j = 1, 2, \dots, m,$$

которая решается простым или специализированным перебором 2^m точек [17].

Поставим цель реализовать указанные варианты в общем случае за счет условий на параметр γ и выбора точек переключений $\{t_i,\ i = 1, 2, \dots, m - 1\}$. Предварительно уточним выражение для целевой функции. Введем симметричную матрицу $S = 1/2(C + C^T)$. Тогда $\langle y, Cy\rangle = \langle y, Sy\rangle$, что приводит к «правильному» выражению

$$\varphi_\gamma(y) = \langle d, y\rangle + \langle y, (S + \gamma D)y\rangle$$

с симметричной матрицей $S + \gamma D$.

Рассмотрим общий случай, когда матрица S является знаконеопределенной, т. е. ее спектр содержит как положительные, так и отрицательные собственные значения. Найдем условие на параметр γ и элементы матрицы D, которое обеспечивает положительную определенность матрицы $S + \gamma D$.

Будем использовать экстремальное свойство отношения Рэлея:

$$\min_{y \neq 0} \frac{\langle y, Ay\rangle}{\langle y, y\rangle} = \lambda_{\min}(A),$$

где $\lambda_{\min}(A)$ — минимальное собственное число матрицы A.

Для $y \neq 0$ имеем цепочку соотношений

$$\frac{\langle y, (S+\gamma D)y\rangle}{\langle y, y\rangle} = \frac{\langle y, Sy\rangle}{\langle y, y\rangle} + \gamma \frac{\langle y, Dy\rangle}{\langle y, y\rangle} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{y\neq 0} \frac{\langle y, Sy\rangle}{\langle y, y\rangle} + \gamma \min_{y\neq 0} \frac{\langle y, Dy\rangle}{\langle y, y\rangle} = \lambda_{\min}(S) + \lambda_{\min}(D) > 0.$$

Поскольку $\lambda_{\min}(S) < 0$ и $\lambda_{\min}(D) = \min\limits_{j=1,2,\ldots,m}(t_j - t_{j-1})$, получаем спектральное условие

$$\gamma \min_{j=1,2,\ldots,m}(t_j - t_{j-1}) > |\lambda_{\min}(S)|, \tag{4}$$

которое гарантирует положительную определенность матрицы $S + \gamma D$. При этом функция $\varphi_\gamma(y)$ приобретает свойство строгой выпуклости.

Таким образом, приходим к заключению: невыпуклая задача (1) при условии (4) на параметр γ и точки переключения аппроксимируется в конечномерном варианте выпуклой квадратичной задачей (3), допускающей решение за конечное число итераций.

Рассмотрим второй возможный случай, когда матрица S отрицательно определена. Для отношения Рэлея найдем оценку сверху

$$\frac{\langle y, (S+\gamma D)y\rangle}{\langle y, y\rangle} \leqslant \max_{y\neq 0} \frac{\langle y, Sy\rangle}{\langle y, y\rangle} + \gamma \max_{y\neq 0} \frac{\langle y, Dy\rangle}{\langle y, y\rangle} = \lambda_{\max}(S) + \lambda_{\max}(D) < 0.$$

Поскольку $\lambda_{\max}(S) < 0$ и $\lambda_{\max}(D) = \max\limits_{j=1,2,\ldots,m}(t_j - t_{j-1})$, имеем оценку

$$\gamma \max_{j=1,2,\ldots,m}(t_j - t_{j-1}) < |\lambda_{\max}(S)|, \tag{5}$$

которая обеспечивает условие отрицательной определенности матрицы $S + \gamma D$.

Таким образом, при условии (5) функция $\varphi_\gamma(y)$ строго вогнутая, т. е. конечномерная задача (3) решается перебором угловых точек.

Наконец, в случае положительной определенности матрицы S функция $\varphi_\gamma(y)$ строго выпуклая для всех $\gamma > 0$.

Замечание. Выделим типичный случай равномерной сетки точек переключения с шагом $h = t_j - t_{j-1},\ j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда условия (4), (5) регуляризации задачи (3) представляются соответственно в виде

$$\gamma h > |\lambda_{\min}(S)|, \quad \gamma h < |\lambda_{\max}(S)|.$$

При этом правые части неравенств зависят от шага h, т. е. для заданного h данные неравенства определяют условия на выбор параметра γ.

4. Заключение. Рассмотрена задача оптимизации линейной управляемой системы относительно билинейно квадратичного функционала с параметром. Осуществлена параметризация допустимых управлений в классе кусочно постоянных функций с редукцией к конечномерной задаче квадратичной оптимизации. Получены условия на параметр и узлы аппроксимирующей сетки, при которых конечномерная задача допускает глобальное решение за конечное число итераций. В качестве направлений для обобщения предлагаемого подхода можно указать следующие:

— случай векторной управляющей функции;

— задачи оптимального управления линейными гиперболическими уравнениями и системами уравнений с управлениями, сосредоточенными на границе.

Литература

1. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными процессами. М.: Наука, 1973. 448 с.

2. *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 255 с.

3. *Poswiata A.* Optimal discrete processes, nonlinear in time intervals: theory and selected applications // Cybernetics and Physics. 2012. Vol. 1. N 2. P. 120–127.

4. *Котина Е. Д., Овсянников Д. А.* Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 213–224. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.210

5. *Rao A. V.* A survey of numerical methods for optimal control // Adv. Astron. Sci. 2009. Vol. 135. P. 1–32.

6. *Golfetto W. A., Silva Fernandes S.* A review of gradient algorithms for numerical computation of optimal trajectories // J. Aerosp. Technol. Manag. 2012. Vol. 4. P. 131–143. https://doi.org/10.5028/JATM.2012.04020512

7. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Численные методы оптимизации нестационарных многомерных систем с полиэдральными ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45. № 4. С. 617–636.

8. *Gorbunov V. K., Lutoshkin I. V.* Development and experience of using the parameterization method in singular problems of dynamic optimization // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2004. Vol. 43. N 5. P. 725–742.

9. *Korsun O. N., Stulovskii A. V.* Direct method for forming the optimal open loop control of aerial vehicles // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2019. Vol. 58. N 2. P. 229–243. https://doi.org/10.1134/S1064230719020114

10. *Чернов А. В.* О применении функций Гаусса для численного решения задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2019. № 6. С. 51–69. https://doi.org/10.1134/S0005231019060035

11. *Popkov A. S.* Optimal program control in the class of quadratic splines for linear systems // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 4. С. 462–470. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.411

12. *Фоминых А. В., Карелин В. В., Полякова Л. Н., Мышков С. К., Трегубов В. П.* Метод кодифференциального спуска в задаче нахождения глобального минимума кусочно-аффинного целевого функционала в линейных системах управления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 47–58. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.105

13. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2019. Т. 30. С. 83–98. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83

14. *Arguchintsev A. V., Dykhta V. A., Srochko V. A.* Optimal control: nonlocal conditions, computational methods, and the variational principle of maximum // Russian Math. 2009. Vol. 53. N 1. P. 1–35.

15. *Антоник В. Г., Срочко В. А.* Условия оптимальности типа принципа максимума в билинейных задачах управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56. № 12. С. 2054–2064. https://doi.org/10.7868/S0044466916120024

16. *Измаилов А. Ф., Солодов М. В.* Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2005. 304 с.

17. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г.* Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Т. 37. С. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2021 г.
Статья принята к печати 1 февраля 2022 г.

Контактная информация:

Аргучинцев Александр Валерьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; arguch@math.isu.ru

Срочко Владимир Андреевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; srochko@math.isu.ru

Procedure for regularization of bilinear optimal control problems based on a finite-dimensional model*

A. V. Arguchintsev, V. A. Srochko

Irkutsk State University, 1, ul. K. Marksa, Irkutsk,
664003, Russian Federation

For citation: Arguchintsev A. V., Srochko V. A. Procedure for regularization of bilinear optimal control problems based on a finite-dimensional model. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 179–187.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115 (In Russian)

An optimization problem of a linear system of ordinary differential equations on a set of piecewise continuous scalar controls with two-sided restrictions is considered. The cost functional contains the bilinear part (control, state) and a control square with a parameter, which plays the role of a regularization term. An approximate solution of the optimal control problem is carried out on a subset of piecewise constant controls with a non-uniform grid of possible switching points. As a result of the proposed parametrization, reduction to the finite-dimensional problem of quadratic programming was carried out with the parameter in the objective function and the simplest restrictions. In the case of a strictly convex objective function, the finite-dimensional problem can be solved in a finite number of iterations by the method of special points. For strictly concave objective functions, the corresponding problem is solved by simple or specialized brute force methods. In an arbitrary case, parameter conditions and switching points are found at which the objective function becomes convex or concave. At the same time, the corresponding problems of mathematical programming allow a global solution in a finite number of iterations. Thus, the proposed approach allows to approximate the original non-convex variation problem with a finite-dimensional model that allows to find a global solution in a finite number of iterations.

Keywords: linear phase system, bilinear-quadratic functional, finite-dimensional model, finite iterative methods, global solution.

References

1. Boltyansky V. G. *Optimalnoe upravlenie diskretnymi sistemami* [*Optimal control of discrete systems*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 448 p. (In Russian)

2. Propoi A. I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* [*Elements of the theory of optimal discrete processes*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 255 p. (In Russian)

3. Poswiata A. Optimal discrete processes, nonlinear in time intervals: theory and selected applications. *Cybernetics and Physics*, 2012, vol. 1, no. 2, pp. 120–127.

4. Kotina E. D., Ovsyannikov D. A. Matematicheskaya model sovmestnoy optimizatsii programmnogo i vozmushennogo dvizheniy v diskretnykh sistemakh [Mathematical model of joint optimization of programmed and perturbed motions in discrete systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 213–224.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.210 (In Russian)

5. Rao A. V. A survey of numerical methods for optimal control. *Adv. Astron. Sci.*, 2009, vol. 135, pp. 1–32.

6. Golfetto W. A., Silva Fernandes S. A review of gradient algorithms for numerical computation of optimal trajectories. *J. Aerosp. Technol. Manag.*, 2012, vol. 4, pp. 131–143.
https://doi.org/10.5028/JATM.2012.04020512

7. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Chislennye metody optimizatsii nestatsionarnykh mnogomernykh sistem s poliedral'nymi ogranicheniiami [Numerical optimization of time-dependent

* This project was supported by the Vladimir Potanin Foundation (grant GSAD-0022/21).

multidimensional systems under polyhedral constraints]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [*Comput. Math. Math. Phys.*], 2005, vol. 45, no. 4, pp. 617–636. (In Russian)

8. Gorbunov V. K., Lutoshkin I. V. Development and experience of using the parameterization method in singular problems of dynamic optimization. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2004, vol. 43, no. 5, pp. 725–742.

9. Korsun O. N., Stulovskii A. V. Direct method for forming the optimal open loop control of aerial vehicles. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2019, vol. 58, no. 2, pp. 229–243. https://doi.org/10.1134/S1064230719020114

10. Chernov A. V. O primenenii funktsii Gaussa dlia chislennogo resheniia zadach optimal'nogo upravleniia [On application of Gaussian functions to numerical solution of optimal control problems]. *Avtomatika i telemekhanika* [*Autom. Remote Control*], 2019, no. 6, pp. 1026–1040. https://doi.org/10.1134/S0005231019060035 (In Russian)

11. Popkov A. S. Optimal program control in the class of quadratic splines for linear systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 4, pp. 462–470. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.411

12. Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N., Myshkov S. K., Tregubov V. P. Metod kodifferentsial'nogo spuska v zadache nakhozhdeniya globalnogo minimuma kusochno-afinnogo tselevogo funktsionala [The codifferential descent method in the problem of finding the global minimum of a piecewise affine objective functional in linear control systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 47–58. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.105 (In Russian)

13. Srochko V. A., Aksenyushkina E. V. Parametrizatsiya nekotorykh zadach upravleniya lineynymi sistemami [Parameterization of some linear systems control problems]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 30, pp. 83–98. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83 (In Russian)

14. Arguchintsev A. V., Dykhta V. A., Srochko V. A. Optimal control: nonlocal conditions, computational methods, and the variational principle of maximum. *Russian Math.*, 2009, vol. 53, no. 1, pp. 1–35.

15. Antonik V. G., Srochko V. A. Usloviia optimal'nosti tipa printsipa maksimuma v bilineinykh zadachakh upravleniia [Optimality conditions of the maximum principle type in bilinear control problems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [*Comput. Math. Math. Phys.*], 2016, vol. 56, no. 12, pp. 2054–2064. https://doi.org/10.7868/S0044466916120024 (In Russian)

16. Izmailov A. F., Solodov M. V. *Chislennye metody optimizatsii* [*Numerical methods of optimization*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 304 p. (In Russian)

17. Srochko V. A., Aksenyushkina E. V., Antonik V. G. Reshenie lineyno-kvadratichnoy zadachi optimal'nogo upravleniya na osnove konechnomernoy modeli [Resolution of a linear-quadratic optimal control problem based on finite-dimensional models]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3 (In Russian)

Received: December 29, 2021.
Accepted: February 01, 2022.

Authors' information:

Alexander V. Arguchintsev — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; arguch@math.isu.ru

Vladimir A. Srochko — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; srochko@math.isu.ru