

## ИНФОРМАТИКА

УДК 539.3  
MSC 74A45

**Об эффективных упругих свойствах материала  
со взаимно перпендикулярными системами параллельных трещин\***

*А. М. Абакаров, Ю. Г. Пронина*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Абакаров А. М., Пронина Ю. Г.* Об эффективных упругих свойствах материала со взаимно перпендикулярными системами параллельных трещин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 111–119. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.109>

Эффективные характеристики трещиноватых тел часто выражаются в терминах плотности трещин или ее тензорного обобщения с принятием гипотезы их невзаимодействия, что дает хорошее приближение для случайного расположения дефектов даже при их достаточно высоких плотностях. В данной работе на некоторых примерах в рамках двумерной постановки демонстрируется, что эффективные упругие модули материала с упорядоченными структурами трещин зависят от их взаимного расположения даже при постоянной относительно небольшой плотности трещин. Изменение этих параметров может вызвать заметную анизотропию эффективных свойств материала и при одинаковых собственных значениях тензора плотности трещин. Проводится сопоставление эффективных упругих характеристик материала с одной двоякопериодической системой параллельных трещин и материала с двумя взаимно перпендикулярными системами таких трещин. Для расчета напряжений на берегах трещин используется приближенный метод М. Качанова, применимый для больших систем взаимодействующих трещин. Анализ полученных данных показал, что эффективная податливость материала в определенном направлении в значительной степени обуславливается эффектами взаимодействия (экранирования и амплификации) внутри системы параллельных трещин, перпендикулярных данному направлению. Взаимодействие же указанной системы трещин с перпендикулярной ей системой параллельных трещин слабо влияет на указанные свойства в случае прямоугольной симметрии системы. При этом взаимодействие взаимно перпендикулярных систем трещин приводит к нарушению симметрии тензора эффективных упругих постоянных.

*Ключевые слова:* плотность трещин, взаимодействие трещин, эффективные упругие характеристики.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-19-00100).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

**1. Введение.** Для моделирования механического поведения упругих тел с микродефектами и включениями на макроуровне применяют так называемые эффективные модули упругости — коэффициенты пропорциональности между средними по объему напряжениями и деформациями [1–5]. Другими словами, для инженерных расчетов материал с дефектами заменяется сплошным модельным материалом с эффективными упругими свойствами, поведение которого эквивалентно поведению заменяемого неоднородного материала. Для трещиноватых материалов эффективные модули упругости часто выражают в терминах плотности трещин [6, 7]. Для материалов со случайным распределением трещин в трехмерной постановке Бристону [8] ввел скалярный параметр плотности, который в рамках плоской задачи определяется выражением  $\rho = \frac{1}{A} \sum_i l_i^2$ , где  $l_i$  — полудлина  $i$ -й трещины,  $A$  — площадь представительной области. В работах [6, 9] это понятие было обобщено на случай произвольной ориентации дефектов введением тензора плотности трещин

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{A} \sum_i l_i^2 \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i = \rho_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \rho_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2,$$

здесь  $\mathbf{n}_i$  — нормаль к  $i$ -й трещине;  $\rho_1, \rho_2$  и  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — собственные значения и векторы тензора  $\boldsymbol{\alpha}$ ; суммирование производится по всем трещинам, находящимся в области  $A$ .

Приближение невзаимодействия дефектов, часто используемое для расчета эффективных характеристик, дает адекватные результаты для достаточно высоких плотностей трещин при условии случайного распределения их центров. Если трещины образуют определенную геометрическую структуру, то их взаимодействие может оказывать сильное влияние на эффективные свойства [6, 10]. Если не накладывать никаких ограничений на расположение центров трещин и их количество, то, меняя конфигурации дефектов при их фиксированной плотности, можно получить материалы, эффективные упругие модули которых либо остаются практически такими же, как в бездефектном материале, либо изменяются неограниченно (жесткость — до бесконечно малой величины, податливость — до бесконечно большой) [6]. В настоящей работе изучается влияние взаимодействия двух взаимно перпендикулярных систем параллельных трещин на эффективные упругие характеристики материала. Полученные результаты применимы к материалам как с естественно образующимися дефектами (почти перпендикулярные системы параллельных трещин могут наблюдаться, например, в слоистых осадочных горных породах), так и со специально предусмотренной перфорацией.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается бесконечная линейно упругая изотропная плоскость с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  (в неповрежденном состоянии), ослабленная двоякопериодической системой прямолинейных трещин, упорядоченных относительно осей  $x$  и  $y$  в прямоугольную сетку с горизонтальным периодом  $A_x$  и вертикальным  $A_y$ . Конфигурации систем трещин, исследованные в данной работе, схематически изображены на рис. 1. Они различаются размерами ячеек (типы **A**, **B** и **C**) и числом  $m$  горизонтальных трещин в ячейке (от 1 до 4). Длина вертикальных трещин,  $2l_y$ , фиксирована для всех конфигураций. Длины горизонтальных трещин  $2l_x = 2l_y/\sqrt{m}$  выбраны так, чтобы их плотность  $\rho_y$  оставалась постоянной при любом числе  $m$  и равной плотности вертикальных трещин  $\rho_x$  (заметим, что индекс при  $\rho$  указывает на нормаль к трещине). Для всех конфигураций типа **A** периоды системы связаны соотношением  $A_x/4 = A_y = 2.4l_y$ , для типа **B** — соотношением  $A_x = A_y = 4.8l_y$ , при этом в обоих случаях  $\rho_x = \rho_y = \rho/2 = 0.043402(7)$  (здесь

$\rho$  — общая плотность трещин). Для конфигураций типа **С** имеем  $A_x/2 = A_y = 2.4l_y$  и, следовательно, в 2 раза бóльшую плотность  $\rho_x = \rho_y = \rho/2 = 0.08680(5)$ .

Помимо этого изучены аналогичные конфигурации только горизонтальных трещин при отсутствии вертикальных. Полная плотность трещин  $\rho$  при этом в 2 раза меньше, чем в предыдущих соответствующих случаях.

Цель работы заключается в сравнении эффективных упругих свойств материалов с описанными конфигурациями трещин и исследовании влияния эффектов взаимодействия трещин на указанные свойства.

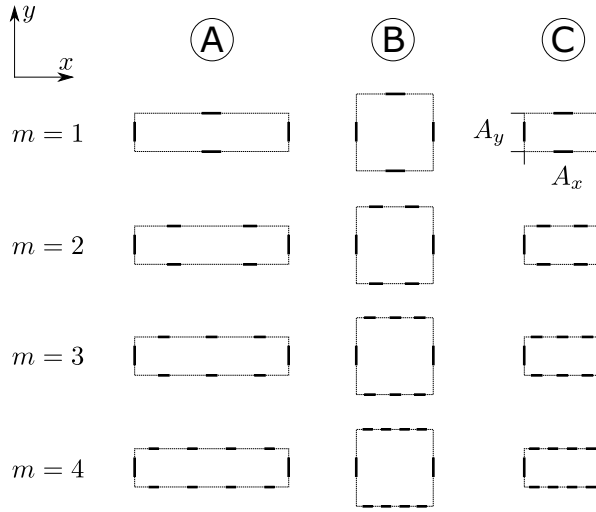


Рис. 1. Исследованные конфигурации трещин

**3. Метод исследования.** Рассматриваемые геометрии расположения трещин позволяют считать материал ортотропным [11], с главными осями  $x$  и  $y$ . Это означает, что для каждой конфигурации необходимо определить пять упругих постоянных: модули упругости  $E_x$  и  $E_y$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_{xy}$  и  $\nu_{yx}$ , модуль сдвига  $G_{xy}$ . Причем из первых четырех постоянных независимыми являются только три благодаря симметрии тензоров податливости и жесткости. Искомые постоянные находятся путем вычисления коэффициентов пропорциональности, связывающих приложенные на бесконечности напряжения:

$$\boldsymbol{\sigma}^\infty = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^\infty & \sigma_{xy}^\infty \\ \sigma_{xy}^\infty & \sigma_{yy}^\infty \end{bmatrix},$$

и средние по площади деформации материала с трещинами

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{M}^0 : \boldsymbol{\sigma}^\infty + d\boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= \mathbf{M}^0 : \boldsymbol{\sigma}^\infty + \frac{1}{2A} \sum_i 2l_i (\langle \mathbf{b}_i \rangle \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_i \langle \mathbf{b}_i \rangle). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой деформацию неповрежденного материала при заданной нагрузке,  $\mathbf{M}^0$  — тензор податливости неповрежденного (изотропного) материала,  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  — вклад раскрытия трещин в полную деформацию тела,  $\langle \mathbf{b}_i \rangle$  — среднее раскрытие  $i$ -й трещины; суммирование проводится по трещинам, принадлежащим к одной ячейке площадью  $A$ ; двоеточием обозначена операция свертки тензоров.

Для расчетов применяется конечная система трещин, а именно массив  $16 \times 16$  ячеек (см. рис. 1), средние раскрытия трещин вычисляются только для центральной ячейки площадью  $A_x \times A_y$  (для минимизации краевого эффекта); при этом к каждой ячейке относятся трещины, лежащие на ее нижней и левой границах.

Средние раскрытия трещин при заданной нагрузке определяются численно с использованием приближенного метода М. Качанова для больших массивов трещин с учетом их взаимодействия, подробно изложенном в [6]. Данный метод позволяет свести задачу о наборе  $N$  трещин к решению системы  $2N$  линейных алгебраических уравнений (относительно неизвестных средних усилий на берегах трещин) вместо системы  $2N$  интегральных уравнений. Выбор метода обусловлен его достаточной точностью на геометриях, которые рассматриваются в данной работе, и относительно низкими вычислительными затратами. Например, при  $m = 4$  для конфигураций типов **A** и **B** задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей порядка 2176. Для реализации метода была написана программа в прикладном пакете MATLAB.

Зная средние раскрытия  $\langle \mathbf{b}_i \rangle$ , по формуле (1) можно определить соответствующее приращение деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ .

В итоге эффективные упругие постоянные, отнесенные к их аналогам для неповрежденного материала, находятся следующим образом.

1. Из испытания при  $\sigma_{xx}^\infty = 1$ ,  $\sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$  вычисляются упругие постоянные

$$\hat{E}_x = \frac{E_x}{E} = \frac{\sigma_{xx}^\infty}{E \bar{\varepsilon}_{xx}} = \frac{1}{1 + E d\varepsilon_{xx} / \sigma_{xx}^\infty} \quad (2)$$

и

$$\hat{\nu}_{xy} = \frac{\nu_{xy}}{\nu} = -\frac{\bar{\varepsilon}_{yy}}{\nu \bar{\varepsilon}_{xx}} = \frac{E_x}{E} \left( 1 - E \frac{d\varepsilon_{yy}}{\nu \sigma_{xx}^\infty} \right). \quad (3)$$

2. Из испытания  $\sigma_{yy}^\infty = 1$ ,  $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$  аналогичным образом рассчитываются  $\hat{E}_y$  и  $\hat{\nu}_{yx}$ . Соответствующие формулы получаются из (2) и (3) перестановкой индексов  $x$  и  $y$ .

3. Из испытания  $\sigma_{xy}^\infty = 1$ ,  $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_{yy}^\infty = 0$  находится  $\hat{G}_{xy}$ :

$$\hat{G}_{xy} = \frac{G_{xy}}{G} = \frac{\sigma_{xy}^\infty}{G \bar{\varepsilon}_{xy}} = \frac{1}{1 + \frac{E d\varepsilon_{xy}}{2(1 + \nu)\sigma_{xy}^\infty}},$$

где  $G = E/[2(1 + \nu)]$  — изотропный модуль сдвига.

**4. Результаты расчетов.** В табл. 1 и 2 приведены значения эффективных упругих постоянных, отнесенные к соответствующим аналогам для неповрежденного материала, при  $\nu = 0.3$ . Левые части таблиц представляют эффективные характеристики материала с двумя взаимно перпендикулярными системами трещин, а правые — материала с одной системой трещин, параллельных оси  $x$ . В последней строке каждой таблицы для сравнения даны относительные упругие постоянные, рассчитанные с принятием гипотезы невзаимодействия трещин (NIA — non-interaction approximation). Дополнительные расчеты показали, что при увеличении периодов  $A_x$  и  $A_y$  упругие характеристики, вычисленные с учетом взаимодействия дефектов, стремятся к соответствующим, определенным по схеме NIA (не требующей сложных расчетов), что подтверждает правильность результатов вычислений.

Таблица 1. Относительные эффективные постоянные для конфигураций типов А и В

$m$	Тип	$\hat{E}_x$	$\hat{E}_y$	$\hat{\nu}_{xy}$	$\hat{\nu}_{yx}$	$\hat{G}_{xy}$	$m$	Тип	$\hat{E}_x$	$\hat{E}_y$	$\hat{\nu}_{xy}$	$\hat{\nu}_{yx}$	$\hat{G}_{xy}$
Горизонт. и верт. трещины						Только горизонтальные трещины							
1	А	0.752	0.839	0.763	0.853	0.876	1	А	1	0.839	1	0.839	0.941
	В	0.789	0.789	0.890	0.889	0.913		В	1	0.792	1	0.792	0.948
2	А	0.752	0.805	0.778	0.828	0.881	2	А	1	0.805	1	0.805	0.946
	В	0.791	0.774	0.843	0.831	0.904		В	1	0.775	1	0.775	0.944
3	А	0.752	0.788	0.805	0.828	0.885	3	А	1	0.788	1	0.788	0.947
	В	0.791	0.754	0.828	0.792	0.896		В	1	0.755	1	0.755	0.937
4	А	0.751	0.778	0.824	0.835	0.887	4	А	1	0.779	1	0.779	0.947
	В	0.790	0.723	0.831	0.760	0.886		В	1	0.724	1	0.724	0.926
NIA		0.786	0.786	0.786	0.786	0.827	NIA		1	0.786	1	0.786	0.827

Таблица 2. Относительные эффективные постоянные для конфигураций типа С

$m$	$\hat{E}_x$	$\hat{E}_y$	$\hat{\nu}_{xy}$	$\hat{\nu}_{yx}$	$\hat{G}_{xy}$	$m$	$\hat{E}_x$	$\hat{E}_y$	$\hat{\nu}_{xy}$	$\hat{\nu}_{yx}$	$\hat{G}_{xy}$
Горизонт. и верт. трещины						Только горизонтальные трещины					
1	0.632	0.691	0.737	0.790	0.803	1	1	0.693	1	0.693	0.895
2	0.626	0.629	0.884	0.845	0.818	2	1	0.638	1	0.638	0.896
3	0.622	0.597	0.892	0.883	0.813	3	1	0.608	1	0.608	0.885
4	0.625	0.560	0.844	0.851	0.798	4	1	0.569	1	0.569	0.867
NIA	0.647	0.647	0.647	0.647	0.704	NIA	1	0.647	1	0.647	0.704

Как видно из табл. 1, при  $m = 1$  для квадратной конфигурации **В** наблюдается симметрия эффективных упругих свойств по осям  $x$  и  $y$  (с точностью до погрешности метода). При этом эффективные упругие модули  $\hat{E}_x$  и  $\hat{E}_y$  почти совпадают с рассчитанными с принятием гипотезы невзаимодействия трещин. (Добавим, что дополнительные расчеты для более плотных квадратных сеток трещин показали, что эти модули становятся меньше, чем полученные без учета взаимодействия дефектов.) При увеличении периода  $A_x$  и уменьшении  $A_y$  (конфигурация **А**) модуль  $\hat{E}_x$  убывает, а  $\hat{E}_y$  возрастает по сравнению со случаем квадратной симметрии. Такое соотношение между указанными постоянными для конфигураций **А** и **В** сохраняется для любого числа горизонтальных трещин (с сохранением их плотности). Другими словами, только «перестановка» трещин при сохранении их длин и числа (сравним конфигурации **А** и **В**) привела к увеличению жесткости материала в одном из направлений (рост  $\hat{E}_y$ ) и ее понижению в другом (падение  $\hat{E}_x$ ); причем оба данных эффекта почти не связаны между собой, так как обусловлены манипуляциями с разными системами трещин. При «дроблении» горизонтальных трещин (т. е. с ростом  $m$ ) модули  $\hat{E}_x$  в обеих конфигурациях практически не меняются, в то время как оба модуля  $\hat{E}_y$  становятся меньше на 7–8%, опускаясь ниже, чем модуль, не учитывающий взаимодействие трещин. Уменьшение модуля  $\hat{E}_y$  с ростом  $m$  становится заметнее для больших плотностей трещин: в табл. 2 он падает почти на 20%.

Можно заметить, что отмеченные особенности вызываются тем, что при относительном сближении коллинеарных трещин податливость материала в перпендикулярном направлении возрастает, в то время как сближение параллельных трещин по нормали к их берегам ослабляет их суммарный вклад в податливость материала, т. е. увеличивает жесткость. При этом указанные эффекты вызываются не только изменением расстояния между трещинами в двух направлениях путем вариации  $A_x$  и  $A_y$ , но и «дроблением» трещин на более мелкие (при сохранении их плотности). Очевидно,

что при дальнейшем «дроблении» коллинеарных трещин можно добиться сколь угодно малой жесткости материала в направлении, перпендикулярном к берегам трещин. Если же эти трещины располагать стеклом, то при их «дроблении» указанная жесткость практически не изменится по сравнению с неповрежденным материалом [1].

Похожие тенденции наблюдаются и при отсутствии вертикальных трещин. При этом с ростом  $m$  во всех конфигурациях модули  $E_x$  остаются равными модулю Юнга  $E$  исходного материала, а  $\hat{E}_y$  для горизонтальной системы трещин практически совпадают с аналогичными модулями для двух взаимно перпендикулярных систем трещин (при более плотных сетках трещин  $\hat{E}_y$  для системы горизонтальных трещин немного выше, чем для двух взаимно перпендикулярных систем трещин).

Из сказанного можно сделать вывод, что в системах трещин с прямоугольной симметрией учет взаимодействия трещин может дать заметную поправку при расчете эффективных модулей упругости. При этом взаимодействие двух взаимно перпендикулярных систем параллельных трещин оказывает слабое влияние на модули упругости вдоль направлений симметрии. Податливость материала в определенном направлении в большей степени зависит от взаимного расположения и относительных размеров трещин, перпендикулярных рассматриваемому направлению. Взаимодействие трещин в этой «значимой» системе обуславливается эффектами экранирования (shielding) и амплификации (amplification): сближение коллинеарных трещин приводит ко взаимному усилению коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин и, следовательно, к увеличению раскрытия трещин и общей податливости в соответствующем направлении; стекловое расположение трещин вызывает обратный эффект при уменьшении расстояния между трещинами. Такие эффекты были подробно исследованы в работе [6]. Однако заметим, что при нарушении прямоугольной симметрии ожидается более заметная зависимость эффективных свойств от взаимодействия непараллельных трещин. Нарушение симметрии может быть вызвано не только геометрией системы трещин [12], но и наличием границ раздела материалов с разными свойствами [13–15].

Коэффициенты  $\hat{\nu}_{xy}$  и  $\hat{\nu}_{yx}$  в материале с двумя перпендикулярными системами трещин при  $m = 1$  для конфигурации **A** меньше, чем для конфигурации **B**, но коэффициент  $\hat{\nu}_{xy}$  для вытянутой ячейки падает заметнее — на 14%. Однако с ростом  $m$  коэффициент  $\hat{\nu}_{xy}$  для конфигурации **A** увеличивается, в то время как для конфигурации **B** падает, поэтому разница между ними становится меньше. Коэффициент  $\hat{\nu}_{yx}$  в случае **B** уменьшается на 14%, а в случае **A** ведет себя немонотонно. Для конфигурации **C** коэффициент  $\hat{\nu}_{yx}$  падает на 18% с ростом  $m$  от 1 до 4. В материале, ослабленном только горизонтальными трещинами, с ростом  $m$  для всех конфигураций (**A**, **B** и **C**) коэффициент  $\hat{\nu}_{yx}$  уменьшается, в то время как  $\hat{\nu}_{xy} = 1$  при всех  $m$ . Дополнительные расчеты показали, что при плотности трещин, вдвое превышающей плотность  $\rho = 0.08680(5)$  в конфигурациях **C**, коэффициенты  $\hat{\nu}_{xy}$  и  $\hat{\nu}_{yx}$  более чем в 2 раза отличаются от рассчитанных без учета взаимодействия трещин.

Следует отметить, что для сплошного ортотропного материала должно выполняться равенство  $\nu_{xy}E_y = \nu_{yx}E_x$ . Как видно из правых частей табл. 1 и 2, это равенство выполняется для материала с одной системой параллельных трещин для всех конфигураций (этот факт можно доказать аналитически). В материале с двумя взаимно перпендикулярными системами трещин данное равенство нарушается. Для конфигураций типа **B** погрешность не превышает 1% при всех  $m$ , для прямоугольной конфигурации **A** при  $m = 4$  достигает 2%, для более высокой плотности трещин — в конфигурации **C** — при  $m = 4$  превышает 10%. Таким образом, гипотеза

о возможности замены трещиноватого материала сплошным модельным материалом с эффективными упругими свойствами в некоторых случаях требует доработки (симметризации тензора эффективных постоянных).

**5. Заключение.** Было исследовано влияние взаимодействия трещин, образующих геометрические структуры с прямоугольной симметрией, на эффективные упругие свойства материала. На конкретных примерах показано, что отклонение от квадратной симметрии вызывает заметную анизотропию эффективных свойств даже при равных собственных числах тензора плотности трещин. Расчеты показали, что эффективная податливость материала в определенном направлении в большей степени обуславливается эффектами взаимодействия (экранирования и амплификации) внутри системы трещин, перпендикулярных этому направлению. Взаимодействие же указанной системы трещин с перпендикулярной системой параллельных трещин оказывает слабое влияние на указанные свойства в случае прямоугольной симметрии системы. При этом взаимодействие взаимно перпендикулярных систем трещин приводит к нарушению симметрии тензора эффективных упругих постоянных.

## Литература

1. *Kachanov M.* On the effective moduli of solids with cavities and cracks // Intern. J. of Fracture. 1993. Vol. 59(1). P. R17–R21. <https://doi.org/10.1007/BF00032223>
2. *Doan T., Le-Quang H., To Q.-D.* Effective elastic stiffness of 2D materials containing nanovoids of arbitrary shape // Intern. J. of Engineering Science. 2020. Vol. 150. N 103234. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103234>
3. *Du K., Cheng L., Barthelemy J. F., Sevostianov I., Giraud A., Adessina A.* Numerical computation of compliance contribution tensor of a concave pore embedded in a transversely isotropic matrix // Intern. J. of Engineering Science. 2020. Vol. 152. N 103306. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103306>
4. *Markov A., Trofimov A., Sevostianov I.* A unified methodology for calculation of compliance and stiffness contribution tensors of inhomogeneities of arbitrary 2D and 3D shapes embedded in isotropic matrix — open access software // Intern. J. of Engineering Science. 2020. Vol. 157. N 103390. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103390>
5. *Sevostianov I., Kushch V. I.* Compliance contribution tensor of an arbitrarily oriented ellipsoidal inhomogeneity embedded in an orthotropic elastic material // Intern. J. of Engineering Science. 2020. Vol. 149. N 103222. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103222>
6. *Kachanov M.* Elastic solids with many cracks and related problems // Advances in Applied Mechanics. 1993. Vol. 30(C). P. 259–445. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70176-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70176-5)
7. *Kachanov M., Mishakin V. V.* On crack density, crack porosity, and the possibility to interrelate them // Intern. J. of Engineering Science. 2019. Vol. 142. P. 185–189. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.010>
8. *Bristow J. R.* Microcracks and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-worked metals // British J. Appl. Phys. 1960. Vol. 11. P. 81–85.
9. *Vakulenko A., Kachanov M.* Continuum theory of medium with cracks // Mech. of Solids. 1971. Vol. 6(4). P. 145–151.
10. *Kachanov M.* On the problems of crack interactions and crack coalescence // Intern. J. of Fracture. 2003. Vol. 120(3). P. 537–543.
11. *Sevostianov I., Kachanov M.* On approximate symmetries of the elastic properties and elliptic orthotropy // Intern. J. of Engineering Science. 2008. Vol. 46(3). P. 211–223.
12. *Abakarov A., Pronina Y., Kachanov M.* Symmetric arrangements of cracks with perturbed symmetry: extremal properties of perturbed configurations // Intern. J. of Engineering Science. 2021. Vol. 171(4). N 103617. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2021.103617>
13. *Grekov M. A., Sergeeva T. S.* Interaction of edge dislocation array with bimaterial interface incorporating interface elasticity // Intern. J. of Engineering Science. 2020. Vol. 149. N 103233. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103233>
14. *Pronina Yu., Maksimov A., Kachanov M.* Crack approaching a domain having the same elastic properties but different fracture toughness: Crack deflection vs penetration // Intern. J. of Engineering Science. 2020. Vol. 156. N 103374. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103374>

15. *Shuvalov G. M., Vakaeva A. B., Shamsutdinov D. A., Kostyrko S. A.* The effect of nonlinear terms in boundary perturbation method on stress concentration near the nanopatterned bimaterial interface // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 165–176. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.208>

Статья поступила в редакцию 1 июня 2021 г.

Статья принята к печати 1 февраля 2022 г.

Контактная информация:

Абакаров Абдулла Мурадович — студент; [st046811@student.spbu.ru](mailto:st046811@student.spbu.ru)

Пронина Юлия Григорьевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; [y.pronina@spbu.ru](mailto:y.pronina@spbu.ru)

## On the effective elastic properties of a material with mutually perpendicular systems of parallel cracks\*

*A. M. Abakarov, Yu. G. Pronina*

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Abakarov A. M., Pronina Yu. G. On the effective elastic properties of a material with mutually perpendicular systems of parallel cracks. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 111–119. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.109> (In Russian)

The effective properties of cracked solids are often expressed in terms of the crack density parameter or its tensor generalization, using the approximation of noninteracting cracks. This approximation remains accurate at sufficiently high crack densities, provided the location of cracks are random. The presented analysis confirms that the effective elastic moduli of a material with ordered fracture structures strongly depend on the linear dimensions of cracks and their mutual arrangement even at a constant crack density. A change in these parameters can cause a noticeable anisotropy of the effective properties of the material even when the eigenvalues of the crack density tensor are equal to each other. The effective elastic characteristics of a material with one doubly periodic system of parallel cracks are compared with those for a material with two mutually perpendicular systems of such cracks in a two-dimensional formulation. The calculations are carried out using the approximate method of M. Kachanov for determining the mean stresses at the cracks edges, applicable for large systems of interacting cracks. Analysis of the obtained results showed that the effective compliance of the material in a certain direction is largely determined by the effects of interaction (shielding and amplification) within a system of parallel cracks perpendicular to this direction. The interaction of this system of cracks with the perpendicular system has a weak effect on the indicated properties in the case of rectangular symmetry of the system. In this case, the interaction of mutually perpendicular systems of cracks leads to a violation of the symmetry of the tensor of effective elastic constants.

*Keywords:* crack density, crack interaction, effective elastic properties.

## References

1. Kachanov M. On the effective moduli of solids with cavities and cracks. *Intern. J. of Fracture*, 1993, vol. 59(1), pp. R17–R21. <https://doi.org/10.1007/BF00032223>
2. Doan T., Le-Quang H., To Q.-D. Effective elastic stiffness of 2D materials containing nanovoids of arbitrary shape. *Intern. J. of Engineering Science*, 2020, vol. 150, no. 103234. <https://doi.org/10.1016/j.i.jengsci.2020.103234>

---

\* This work was supported by the Russian Science Foundation (grant N 21-19-00100).



3. Du K., Cheng L., Barthelemy J. F., Sevostianov I., Giraud A., Adessina A. Numerical computation of compliance contribution tensor of a concave pore embedded in a transversely isotropic matrix. *Intern. J. of Engineering Science*, 2020, vol. 152, no. 103306. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103306>
4. Markov A., Trofimov A., Sevostianov I. A unified methodology for calculation of compliance and stiffness contribution tensors of inhomogeneities of arbitrary 2D and 3D shapes embedded in isotropic matrix — open access software. *Intern. J. of Engineering Science*, 2020, vol. 157, no. 103390. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103390>
5. Sevostianov I., Kushch V. I. Compliance contribution tensor of an arbitrarily oriented ellipsoidal inhomogeneity embedded in an orthotropic elastic material. *Intern. J. of Engineering Science*, 2020, vol. 149, no. 103222. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103222>
6. Kachanov M. Elastic solids with many cracks and related problems. *Advances in Applied Mechanics*, 1993, vol. 30(C), pp. 259–445. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70176-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70176-5)
7. Kachanov M., Mishakin V. V. On crack density, crack porosity, and the possibility to interrelate them. *Intern. J. of Engineering Science*, 2019, vol. 142, pp. 185–189. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.010>
8. Bristow J. R. Microcracks and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-worked metals. *British J. Appl. Phys.*, 1960, vol. 11, pp. 81–85.
9. Vakulenko A., Kachanov M. Continuum theory of medium with cracks. *Mech. of Solids*, 1971, vol. 6(4), pp. 145–151.
10. Kachanov M. On the problems of crack interactions and crack coalescence. *Intern. J. of Fracture*, 2003, vol. 120(3), pp. 537–543.
11. Sevostianov I., Kachanov M. On approximate symmetries of the elastic properties and elliptic orthotropy. *Intern. J. of Engineering Science*, 2008, vol. 46(3), pp. 211–223.
12. Abakarov A., Pronina Y., Kachanov M. Symmetric arrangements of cracks with perturbed symmetry: extremal properties of perturbed configurations. *Intern. J. of Engineering Science*, 2021, vol. 171(4), no. 103617. <http://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2021.103617>
13. Grekov M. A., Sergeeva T. S. Interaction of edge dislocation array with bimaterial interface incorporating interface elasticity. *Intern. J. of Engineering Science*, 2020, vol. 149, no. 103233. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103233>
14. Pronina Yu., Maksimov A., Kachanov M. Crack approaching a domain having the same elastic properties but different fracture toughness: Crack deflection vs penetration. *Intern. J. of Engineering Science*, 2020, vol. 156, no. 103374. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103374>
15. Shuvalov G. M., Vakaeva A. B., Shamsutdinov D. A., Kostyrko S. A. The effect of nonlinear terms in boundary perturbation method on stress concentration near the nanopatterned bimaterial interface. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 165–176. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.208>

Received: June 01, 2021.

Accepted: February 01, 2022.

#### A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

*Abdulla M. Abakarov* — Student; [st046811@student.spbu.ru](mailto:st046811@student.spbu.ru)

*Yulia G. Pronina* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; [y.pronina@spbu.ru](mailto:y.pronina@spbu.ru)