УДК 517.925.52 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2022. Т. 18. Вып. 1
MSC 34A34

О конвергенции динамических квазипериодических систем

С. А. Стрекопытов, М. В. Стрекопытова

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Стрекопытов С. А., Стрекопытова М. В.* О конвергенции динамических квазипериодических систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 79–86.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.106

Описывается задача о конвергенции для неавтономных систем дифференциальных уравнений (ДУ) с квазипериодической по независимому аргументу правой частью. Предлагается рассмотрение множества решений описываемой системы ДУ заменить рассмотрением движений динамической квазипериодической системы, которую порождают эти ДУ. Получены необходимые и достаточные условия, при которых динамическая квазипериодическая система обладает свойством конвергенции. Приводится доказательство задачи.

Ключевые слова: конвергенция, динамическая квазипериодическая система, квазипериодическое движение.

1. Введение. Работа посвящена свойству конвергенции множества решений неавтономных систем дифференциальных уравнений (ДУ) с квазипериодической по независимому аргументу правой частью. Предлагается рассмотрение множества решений исходной системы ДУ заменить изучением множества движений динамической квазипериодической системы, которую порождает эта система ДУ.

Давно стал классическим метод, когда задача об общих геометрических свойствах интегральных кривых автономных систем ДУ сводится к задаче об общих геометрических свойствах движений динамических систем [1].

В работах В. И. Зубова [2, 3] и В. А. Плисса [4, 5] метод распространяется на неавтономные системы ДУ с периодической по независимому аргументу правой частью, вводится понятие динамической периодической системы, получены результаты, которые распространяют в основном геометрические свойства движений динамических систем на движение динамических периодических систем [6].

Применение метода при изучении общих геометрических свойств интегральных кривых исследуемых систем показало, что многие общие геометрические свойства движений динамических и динамических периодических систем имеют свои аналоги для движений динамических квазипериодических систем.

В настоящей работе, применяя описанный метод, формулируются необходимые и достаточные условия, при выполнении которых динамическая квазипериодическая система обладает свойством конвергенции, приводится доказательство их обоснованности [7–13].

2. Постановка задачи. Будем рассматривать систему уравнений

$$\begin{cases} X' = F(Z, X), \\ Z = \Omega t, \end{cases} \tag{1}$$

где $F(Z, X)$ — вектор-функция, определенная и непрерывная при всех $Z \in E^m$ и $X \in E^n$, кроме того положим, что она имеет период 2π по всем компонентам вектора Z и в любой ограниченной области $Q \subset E^n$ удовлетворяет условию Липшица по компонентам вектора X, $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, компоненты ω_i, $i = \overline{1, m}$, несоизмеримы. Для любых $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ и $X_0 \in E^n$ существует единственное непродолжимое решение системы (1) $X = X(t)$ такое, что $X(t_0) = X_0$. Не умаляя общности, будем полагать, что вектор-функция $X(t)$ определена при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Пусть $X(t, X_0, t_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} X' = F(Z, X), \\ Z = \Omega t + \Omega t_0, \end{cases} \tag{2}$$

для которого $X(0, X_0, t_0) = X_0$. Вектор-функция $X(t, X_0, t_0)$ совпадает с вектор-функцией $X(t + t_0)$, где $X(t)$ — решение системы (1) такое, что $X(t_0) = X_0$ и эта функция

1) определена и непрерывна по совокупности своих аргументов для всех $t \in (-\infty, +\infty)$, $X_0 \in E^n$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$;

2) $X(t_1 + t_2, X_0, t_0) = X(t_2, X(t_1, X_0, t_0), t_0 + t_1)$.

Так как вектор-функция $F(Z, X)$, $Z \in E^m, X \in E^n$, имеет период 2π по всем компонентам вектора Z, то $F(\Omega t + \Omega t_0, X) = F(\Omega t + Z_0, X)$, где $Z_0 = \Omega t_0 (\mathrm{mod} 2\pi)$, $z_{0i} = \omega_i t + 2\pi k_i$, $0 \leqslant z_{0i} \leqslant 2\pi$, $k_i \in Z$, $i = \overline{1, m}$, и любое решение $X(t, X_0, t_0)$ системы (2) является решением системы

$$\begin{cases} X' = F(Z, X), \\ Z = \Omega t + Z_0, \end{cases} \tag{3}$$

где $Z_0 \in P = \{Z_0 \in E^m |\ 0 \leqslant z_{0i} \leqslant 2\pi,\ i = \overline{1, m}\}$. Но, так как не для всех $Z_0 \in P$ существует $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, такой что $Z_0 = \Omega t_0 (\mathrm{mod} 2\pi)$, то не все решения системы (3) будут решениями системы (2). Множество $P_1 = \{Z_0 \in E^m |\ Z_0 = \Omega t_0 (\mathrm{mod} 2\pi), t_0 \in (-\infty, +\infty),\ 0 \leqslant z_{0i} \leqslant 2\pi,\ i = \overline{1, m}\}$ всюду плотно во множестве P.

Система уравнений (3) определяет $(n + m)$-параметрическое семейство вектор-функций $X(t, X_0, Z_0)$ таких, что

1) для любых $X_0 \in E^n, Z_0 \in E^m$ вектор-функция $X(t, X_0, Z_0)$ — единственная функция, тождественно удовлетворяющая системе (3) при $t \in (-\infty, +\infty)$, такая, что $X(0, X_0, Z_0) = X_0$, когда $Z = \Omega t + Z_0$;

2) вектор-функция $X(t, X_0, Z_0)$ определена и непрерывна по совокупности своих аргументов при всех $t \in (-\infty, +\infty), X_0 \in E^n, Z_0 \in E^m$;

3) $X(t, X_0, Z_0 + \Phi) = X(t, X_0, Z_0)$ при всех $t \in (-\infty, +\infty), X_0 \in E^n, Z_0 \in E^m$, когда $\Phi = 2\pi(k_1, \ldots, k_m)$, $k_i \in Z$, $i \in \overline{1, m}$;

4) $X(t + t_1, X_0, Z_0) = X(t, X(t_1, X_0, Z_0), Z_0 + \Omega t_1) = X(t, X(t_1, X_0, Z_0), \overline{Z_0})$, где $\overline{Z_0} = (\Omega t_1 + Z_0)(\mathrm{mod} 2\pi)$, $0 \leqslant \overline{z_{0i}} \leqslant 2\pi$, $i = \overline{1, m}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Семейство вектор-функций $X(t, X_0, Z_0)$ будем называть динамической квазипериодической системой в E^n, а функцию $X(t, X_0, Z_0)$ при заданных значениях $X_0 \in E^n$ и $Z_0 \in E^m$ — движением этой динамической системы, а множество точек $S = \{X \in E^n |\ X = X(t, X_0, Z_0),\ t \in (-\infty, +\infty)\}$ назовем его траекторией [11].

Теорема 1. *Если для некоторого $\overline{X_0} \in E^n$ существует последовательность $t_k \to +\infty(-\infty)$ такая, что $X(t_k, X_0, Z_0) \to \overline{X_0}$, то существует $\overline{Z_0} \in P$ такая, что для любой точки траектории движения $X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ существует последовательность $\overline{t_k} \to +\infty(-\infty)$, для которой $X(\overline{t_k}, X_0, Z_0) \to X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$.*

Действительно, если при $t_k \to +\infty(-\infty)$ $X(t_k, X_0, Z_0) \to \overline{X_0}$, причем можно считать, что $(Z_0 + \Omega t_k)(\mathrm{mod} 2\pi) \to \overline{Z_0}$, то $X(t + t_k, X_0, Z_0) = X(t, X(t_k, X_0, Z_0), Z_0 + \Omega t_k) \to X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), t + t_k = \overline{t_k} \to +\infty(-\infty)$.

3. Квазипериодические движения. Конвергенция. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ — положительные числа такие, что при любых целых $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_m\omega_m \neq 0$, вещественную функцию $h(t)$, определенную при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, будем называть квазипериодической, если существует вещественная непрерывная функция $H(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, определенная при любых вещественных значениях своих аргументов, 2π-периодическая по всем своим аргументам и такая, что $h(t) = H(\omega_1 t, \ldots, \omega_m t)$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Таким образом, вещественная непрерывная функция $H(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, 2π-периодическая по всем своим аргументам, определяет квазипериодическую функцию $h(t)$ при заданном наборе величин $\omega_1, \ldots, \omega_m$, удовлетворяющим вышеприведенному условию, такие величины называют несоизмеримыми.

Если $H(z_1, \ldots, z_m), G(z_1, \ldots, z_m)$ — вещественные, непрерывные, 2π-периодические по всем своим аргументам функции такие, что $H(\omega_1 t, \ldots, \omega_m t) \equiv G(\omega_1 t, \ldots, \omega_m t)$, то $H(z_1, \ldots, z_m) \equiv G(z_1, \ldots, z_m)$. Действительно, так как величины $\omega_1, \ldots, \omega_m$ несоизмеримы, то для любого $Z \in E^m$ существует последовательность вещественных чисел $t_k \to +\infty$ такая, что $(\Omega t_k)(\mathrm{mod} 2\pi) \to Z$, тогда поскольку $H(\omega_1 t_k, \ldots, \omega_m t_k) = G(\omega_1 t_k, \ldots, \omega_m t_k)$ и функции $H(z_1, \ldots, z_m)$, $G(z_1, \ldots, z_m)$ равномерно непрерывные и 2π-периодические по всем своим аргументам, то $H(z_1, \ldots, z_m) \equiv G(z_1, \ldots, z_m)$.

Теорема 2 [11]. *Для того чтобы функция $h(t)$, определенная и непрерывная при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, была квазипериодической, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности t_k такой, что $(\Omega t_k)(\mathrm{mod} 2\pi) \to Z$ при $k \to \infty$, $Z \in E^m, \Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, существовал $\lim\limits_{k\to\infty} h(t_k)$.*

Движение $X(t, X_0, Z_0)$ будем называть квазипериодическим, если вектор-функция $X(t, X_0, Z_0)$ является квазипериодической функцией t.

Множество $A \subset E^n$ будем называть инвариантным множеством динамической квазипериодической системы. Если для любого $X_0 \in A$ найдется такое $Z_0 \in E^m$, что $X(t, X_0, Z_0) \in A$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, то множество A состоит из некоторого подмножества всех траекторий динамической квазипериодической системы.

Если $X(t, X_0, Z_0)$ — квазипериодическое движение, то существует вектор-функция $H(z_1, \ldots, z_m)$, определенная и непрерывная при всех $Z \in E^m, 2\pi$-периодическая по всем своим аргументам и такая, что $X(t, X_0, Z_0) = H(\omega_1 t, \ldots, \omega_m t)$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Пусть $\overline{Z_0} \in E^m$ и $\overline{X_0} = H(\overline{Z_0})$, выберем $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ так, что $(\Omega t_k)(\mathrm{mod} 2\pi) \to \overline{Z_0}$, тогда

$$X(t_k, X_0, Z_0) = H(\omega_1 t_k, \ldots, \omega_m t_k) \to H(\overline{Z_0}) = \overline{X_0},$$

поэтому

$$X(t + t_k, X_0, Z_0) = H(\omega_1(t + t_k), \ldots, \omega_m(t + t_k)) =$$
$$= X(t, X(t_k, X_0, Z_0), Z_0 + \Omega t_k) \to X(t, \overline{X_0}, Z_0 + \overline{Z_0}) = H(\Omega t + \overline{Z_0}).$$

Следовательно, квазипериодическое движение $X(t, X_0, Z_0)$ определяет в пространстве $E^n m$-мерное инвариантное множество B, которое является областью значений вектор-функции $H(z_1, \ldots, z_m)$, т. е. ограниченное замкнутое связное множество, состоящее из траекторий квазипериодических движений, каждая точка которых является предельной точкой квазипериодического движения $X(t, X_0, Z_0)$ [11], поэтому верна

Теорема 3. *Если $X(t, X_0, Z_0)$ — квазипериодическое движение, то для любых $\overline{Z_0} \in E^m$ и $\overline{X_0} = H(\overline{Z_0})$ движение $X(t, \overline{X_0}, Z_0 + \overline{Z_0})$ также будет квазипериодическим, причем если $X(t, X_0, Z_0) = H(\Omega t)$, то $X(t, \overline{X_0}, Z_0 + \overline{Z_0}) = H(\Omega t + \overline{Z_0})$.*

Определение [2]. Будем говорить, что динамическая квазипериодическая система обладает свойством конвергенции, если при некотором $\overline{Z_0} \in E^m$ существует единственное $\overline{X_0} \in E^n$ такое, что движение $X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ будет квазипериодическим, таким что

1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $||X_0 - X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0})|| < \delta(\varepsilon)$, то при $t \geqslant 0$ $||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \varepsilon$;

2) $||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно относительно $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ и $X_0 \in E^n$ таких, что $||X_0|| \leqslant r > 0$.

Теорема 4. *Для того чтобы динамическая квазипериодическая система обладала свойством конвергенции, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\overline{Z_0} \in E^m$ такое, что*

1) любое движение динамической квазипериодической системы $X(t, X_0, \overline{Z_0})$ было ограниченным при $t \geqslant 0$;

2) для любых $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно было бы указать $\delta(r, \varepsilon) > 0$ такое, что при $||X_0 - Y_0|| < \delta(r, \varepsilon)$ и $t \geqslant 0$ $||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \varepsilon$, причем $||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по отношению к $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $||X_0|| < r$, $||Y_0|| < r$;

3) для любой последовательности $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и любого движения $X(t, X_0, Z_0)$ существовал $\lim\limits_{t_k \to +\infty} X(t_k, X_0, Z_0)$, если существует $\lim\limits_{t_k \to +\infty} \Omega t_k (\mathrm{mod} 2\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Если динамическая квазипериодическая система обладает свойством конвергенции, то при некотором $\overline{Z_0} \in E^m$ существует единственное $\overline{X_0}$ такое, что движение $X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ будет квазипериодическим. Так как квазипериодическая функция является ограниченной функцией, то найдется положительная константа M такая, что вектор-функция $X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ будет удовлетворять неравенству

$$||X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})|| \leqslant M, \ t \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда для любого движения $X(t, X_0, \overline{Z_0})$ при $t \geqslant 0$ имеем

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0})|| \leqslant ||X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})|| + ||X(t, X_0, \overline{Z_0}) - X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})||.$$

Так как $||X(t, X_0, \overline{Z_0}) - X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})|| \to 0$ при $t \to +\infty$, то существует $T > 0$ такое, что $||X(t, X_0, \overline{Z_0}) - X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})|| \leqslant 1$ при $t \geqslant T$. Функция $||X(t, X_0, \overline{Z_0}) - X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})||$ непрерывна при $t \in [0, T]$, поэтому ограничена на этом отрезке, т. е. существует положительная константа M_1 такая, что

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0}) - X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})|| \leqslant M_1, \ t \in [0, T].$$

Следовательно, $||X(t, X_0, \overline{Z_0})|| \leqslant M + \overline{M}$ при $t \geqslant 0$, $\overline{M} = \max[1, M_1]$.

Покажем теперь, что выполнено условие 2 теоремы. В силу определения свойства конвергенции для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие $\delta > 0$ и $T > 0$, что

$$||X(T, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(T, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \delta/2,$$

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \varepsilon/2$$

при $t \geqslant T$ и любых $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $X_0 \in E^n, ||X_0|| \leqslant r$.

По данному $T > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что если $||X_0 - Y_0|| < \delta_1$, $||X_0|| \leqslant r$, $||Y_0|| \leqslant r$, то $||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \delta$ при $t \in [0, T]$. Действительно, если предположить обратное, то существовали бы сходящиеся последовательности X_{0k}, Y_{0k}, t_k такие, что $||X_{0k}|| \leqslant r$, $||Y_{0k}|| \leqslant r$, $t_k \in [0, T]$ и $\lim\limits_{k \to +\infty} X_{0k} = \lim\limits_{k \to +\infty} Y_{0k} = U_0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = \overline{t}$. Однако $||X(t_k, X_{0k}, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t_k, Y_{0k}, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \geqslant \delta > 0$, но это противоречит непрерывности вектор-функции $X(t, X_0, Z_0)$, поэтому предположение неверно. Таким образом, если $||X_0|| \leqslant r$, $||Y_0|| \leqslant r$, $||X_0 - Y_0|| < \delta$, то $||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \delta < \varepsilon$ при $t \in [0, T]$, и

$$||X(T, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(T, \overline{X_0}, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \delta/2,$$

$$||X(T, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(T, \overline{X_0}, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \delta/2$$

при $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, тогда

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \varepsilon/2,$$

$$||X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \varepsilon/2$$

при $t \geqslant T$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $||X_0|| \leqslant r$, $||Y_0|| \leqslant r$, поэтому

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \leqslant$$

$$\leqslant ||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| +$$
$$+ ||X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

при $t \geqslant T$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $||X_0|| \leqslant r$, $||Y_0|| \leqslant r$, $||X_0 - Y_0|| < \delta_1$, следовательно,

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \varepsilon$$

при $t \geqslant T$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $||X_0|| \leqslant r$, $||Y_0|| \leqslant r$, $||X_0 - Y_0|| < \delta_1$; кроме того, так как

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \to 0$$

при $t \to +\infty$ равномерно относительно $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $||X_0|| \leqslant r$, то

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, Y_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \to 0$$

при $t \to +\infty$ равномерно относительно $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $||X_0|| \leqslant r$, $||Y_0|| \leqslant r$.

Теперь покажем, что выполнено условие 3. Пусть $X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)$ — движение динамической квазипериодической системы, обладающей свойством конвергенции, последовательность $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ такая, что существует $\lim\limits_{t_k \to +\infty} \Omega t_k (\mathrm{mod} 2\pi)$. Тогда $\lim\limits_{t_k \to +\infty} X(t_k, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0) = \lim\limits_{t_k \to +\infty} X(t_0 + t_k, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ и $||X(t_k, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t_k, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \to 0$ при $t_k \to +\infty$, поэтому

$$||X(t_k, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t_l, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \leqslant$$

$$\leqslant ||X(t_k, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t_k, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| +$$
$$+ ||X(t_k, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t_l, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| +$$
$$+ ||X(t_l, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t_l, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)||.$$

Все три слагаемых, расположенные в правой части неравенства, будут сколь угодно малыми величинами, если k и l выбрать достаточно большими. Таким образом, последовательность $X(t_k, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0)$ сходится.

Достаточность. Так как любое движение $X(t, X_0, \overline{Z_0})$ ограничено при $t \geqslant 0$, то последовательность $\tau_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ можно выбрать так, чтобы существовали $\lim\limits_{k\to+\infty} X(\tau_k, X_0, \overline{Z_0}) = \overline{X_0}$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} \Omega\tau_k = 0(\mathrm{mod} 2\pi)$. Рассмотрим теперь движение $X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ и последовательность t_k, ε_k такие, что существует $\lim\limits_{k\to+\infty} \Omega t_k(\mathrm{mod} 2\pi)$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Будем также считать, что последовательность τ_k выбрана так, что $(t_k + \tau_k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и

$$||X(t_k, \overline{X_0}, \overline{Z_0}) - X(t_k, X(\tau_k, X_0, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega\tau_k)|| < \varepsilon_k.$$

Тогда

$$\begin{gathered}||X(t_k, \overline{X_0}, \overline{Z_0}) - X(t_l, \overline{X_0}, \overline{Z_0})|| \leqslant \\ \leqslant ||X(t_k, \overline{X_0}, \overline{Z_0}) - X(t_k, X(\tau_k, X_0, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega\tau_k)|| + \\ + ||X(t_l, \overline{X_0}, \overline{Z_0}) - X(t_l, X(\tau_l, X_0, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega\tau_l)|| + \\ + ||X(t_k, X(\tau_k, X_0, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega\tau_k) - X(t_l, X(\tau_l, X_0, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega\tau_l)||.\end{gathered}$$

Так как $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$, то первые два слагаемых при достаточно больших k и l будут сколь угодно малыми величинами, а третье слагаемое

$$||X(t_k, X(\tau_k, X_0, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega\tau_k) - X(t_l, X(\tau_l, X_0, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega\tau_l)|| =$$

$$= ||X(t_k + \tau_k, X_0, \overline{Z_0}) - X(t_l + \tau_l, X_0, \overline{Z_0})||$$

будет сколь угодно малой величиной при достаточно больших k и l в силу условия 3. Следовательно, для любой последовательности t_k такой, что существует $\lim\limits_{k\to+\infty} \Omega t_k(\mathrm{mod} 2\pi)$, последовательность $X(t_k, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ сходится, поэтому движение $X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ квазипериодическое.

Если теперь в условии 2 в качестве одного из движений взять $X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$, то получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $||X_0 - X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0})|| < \delta(\varepsilon)$ будет

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| < \varepsilon$$

при $t \geqslant 0$. Кроме того,

$$||X(t, X_0, \overline{Z_0} + \Omega t_0) - X(t, X(t_0, \overline{X_0}, \overline{Z_0}), \overline{Z_0} + \Omega t_0)|| \to 0$$

при $t \to +\infty$ равномерно относительно $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $||X_0|| < r$, где $r > 0$ — произвольное, но фиксированное число. Таким образом, $X(t, \overline{X_0}, \overline{Z_0})$ является единственным квазипериодическим движением динамической квазипериодической системы, которая, в силу вышесказанного, обладает свойством конвергенции.

4. Заключение. Была рассмотрена задача о конвергенции решений неавтономных систем дифференциальных уравнений с квазипериодической по независимому аргументу правой частью. Выделены геометрические свойства интегральных кривых, являющихся признаками конвергенции. Сформулированы необходимые и достаточные условия конвергенции, приведено доказательство их обоснованности.

Литература

1. *Биркгоф Г.* Динамические системы. Ижевск: Издат. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.
2. *Зубов В. И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962. 632 с.
3. *Зубов В. И.* Колебания и волны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. 416 с.
4. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964. 368 с.
5. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.
6. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.
7. *Levitan B., Zhikov V.* Almost periodic functions and differential equations. New York: Cambridge University Press, 1982. 211 p.
8. *Косов А. А.* Исследование конвергенции сложных почти периодических систем с помощью вектор-функций сравнения с компонентами в виде форм четной степени // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 2015. Т. 59. № 7. С. 25–35.
9. *Kosov A. A., Shchennikov V. N.* On the convergence phenomenon in complex almost periodic systems // Differential Equations. 2014. Vol. 50. Iss. 12. P. 1573–1583.
10. *Aleksandrov A., Aleksandrova E.* Convergence conditions for some classes of nonlinear systems // Systems & Control Letters. 2017. Vol. 104. P. 72–77.
11. *Стрекопытов С. А.* Теория квазипериодических систем. СПб.: ВВМ, 2014. 157 с.
12. *Атаева Н. Н.* Свойство конвергенции для разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. Вып. 4. С. 91–98.
13. *Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В.* Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308

Статья поступила в редакцию 13 января 2022 г.
Статья принята к печати 1 февраля 2022 г.

Контактная информация:

Стрекопытов Сергей Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц.; sastrek@yandex.ru

Стрекопытова Мария Владимировна — канд. физ.-мат. наук; mariya-str@yandex.ru

On the convergence of dynamic quasi-periodic systems

S. A. Strekopytov, M. V. Strekopytova

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Strekopytov S. A., Strekopytova M. V. On the convergence of dynamic quasi-periodic systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 79–86.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.106 (In Russian)

The convergence problem for non-autonomous systems of differential equations with a quasi-periodic right-hand side in an independent argument is considered. It is proposed to replace the consideration of the set of solutions of the system of differential equations under consideration by considering the movements of a dynamic quasi-periodic system generated by these differential equations. Necessary and sufficient conditions are obtained when a dynamic quasi-periodic system has the convergence property, and a proof is given.

Keywords: convergence, dynamic quasi-periodic system, quasi-periodic motion.

References

1. Birkhoff G. *Dinamicheskie sistemi* [*Dynamical systems*]. Ijevsk, Udmurtskiy University Press, 1999, 408 p. (In Russian)

2. Zubov V. I. *Kolebaniya v nelineynih i upravlyaemih sistemah* [*Oscillations in nonlinear and controlled systems*]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1962, 632 p. (In Russian)

3. Zubov V. I. *Kolebaniya i volni* [*Oscillations and waves*]. Leningrad, Leningrad University Press, 1989, 416 p. (In Russian)

4. Pliss V. A. *Nelokalnye problemi teorii kolebaniy* [*Nonlocal problems of the theory of oscillations*]. Moscow, Nauka Publ., 1964, 368 p. (In Russian)

5. Pliss V. A. *Integralnie mnojestva periodicheskih sistem differencialnih uravneniy* [*Integral sets of periodic systems of differential equations*]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 304 p. (In Russian)

6. Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M. *Lineynie differencialnie uravneniya s periodicheskimi koefficientami i ih prilojeniya* [*Linear differential equation with periodic coefficients and applications*]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 720 p. (In Russian)

7. Levitan B., Zhikov V. *Almost periodic functions and differential equations.* New York, Cambridge University Press, 1982, 211 p.

8. Kosov A. A. Issledovanie konvergencii slojnih pochti periodicheskih sistem s pomosh'u vektor-funkciy sravneniya s komponentami v vide form chetnoy stepeni [Investigation of convergence of large scale almost periodic systems by means of comparison vector functions with components as forms of even degrees]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [*Russian Mathematics*], 2015, vol. 59, no. 7, pp. 25–35. (In Russian)

9. Kosov A. A., Shchennikov V. N. On the convergence phenomenon in complex almost periodic systems. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, iss. 12, pp. 1573–1583.

10. Aleksandrov A., Aleksandrova E. Convergence conditions for some classes of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2017, vol. 104, pp. 72–77.

11. Strekopytov S. A. *Teoriya kvasiperiodicheskih sistem* [*Theory of quasi-periodic systems*]. St Petersburg, VVM Publ., 2014, 157 p. (In Russian)

12. Ataeva N. N. Svoiystvo konvergencii dlya raznostnih sistem [Property of convergence for difference systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2004, iss. 4, pp. 91–98. (In Russian)

13. Ekimov A. V., Zhabko A. P., Yakovlev P. V. Ustoiychivost' differencial'no-raznostnih sistem s lineyno vozrastayushim zapazdivaniem [The stability of differential-difference equations with proportional time delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308 (In Russian)

Received: January 13, 2022.
Accepted: February 01, 2022.

Authors' information:

Sergey A. Strekopytov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; sastrek@yandex.ru

Maria V. Strekopytova — PhD in Physics and Mathematics; mariya-str@yandex.ru