САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Рябов В.М., Лебедева А.В., Пакулина А.Н.

Обращение преобразования Лапласа
Часть 1

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2022

Рецензенты:
докт. физ.-мат. наук, проф. Ю.К. Демьянович (С.-Петербургский гос. ун-т),
докт. физ.-мат. наук, проф. В.Б. Хазанов (С.-Петербургский гос. морской техн. ун-т).

Рекомендовано к печати
Учебно-методической комиссией математико-механического факультета по УГСН 01.00.00 Математика и механика.
Протокол 05/2.1/01-03-4 от 11.04.2022 г.

Рябов В.М., Лебедева А.В., Пакулина А.Н.
Обращение преобразования Лапласа. Часть 1. СПб., СПбГУ, 2022. – 53 с.
В учебно-методическом пособии рассматривается задача приближенного обращения интегрального преобразования Лапласа, широко применяемого при решении различных задач математики и математической физики. Рассмотрены алгоритмы обращения с помощью рядов Лагерра и квадратурных формул. Изучены вопросы устойчивости и построения оценок погрешности конкретных методов обращения. Наличие ссылок делает удобной навигацию по всем рассматриваемым разделам. Пособие предназначено для обучающихся по специальности «Прикладная математика» и может представлять интерес для специалистов в области естественных наук, где требуется применение численных методов.

Содержание

Предисловие

Интегральное преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$,

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-p\,t} f(t)\,d\,t,$$

представляет собой мощный инструмент для решения широкого класса прикладных задач математической физики. Одним из его главных достоинств является алгебраизация процедур математического анализа, с помощью которой удается свести интегральные и дифференциальные уравнения к более простым. Кроме того, изображение Лапласа является регулярной функцией в некоторой полуплоскости $\mathrm{Re}\,p > \gamma$, что позволяет привлечь к исследованию решаемой задачи результаты теории функций комплексного переменного.
Как правило, при решении задач операционными методами наиболее трудным этапом является процесс обращения, т. е. определение оригинала по его изображению. Существуют таблицы соответствия функций-оригиналов и их изображений [7], теоремы разложения, формула обращения Римана–Меллина, позволяющие теоретически точно находить оригинал. Но решение практических задач часто приводит к изображениям, к которым не могут быть применены эти классические приемы обращения. Следовательно, возникает необходимость разработки и применения приближенных методов.
Наиболее полно возможные подходы к задаче обращения и их реализация описаны в книге [13]. Обзор других способов обращения, не вошедших в [13], приведен в статье [21]. Теоретические основы операционного исчисления содержатся в классических работах [7], [38], [5], [14]. Вопросам приложения операционного исчисления к решению прикладных задач, среди прочих, посвящены фундаментальные труды [16], [28]. Среди недавних работ, содержащих обзор приближенных методов обращения, укажем книгу [35]. Разумеется, список цитированной литературы можно было бы бесконечно пополнять, однако ссылки на все наиболее интересные работы по рассматриваемой тематике можно обнаружить в приведенном списке работ.
Не существует универсального метода обращения, дающего удовлетворительные результаты для произвольного изображения $F(p)$. Любой конкретный метод обращения должен учитывать специфику поведения изображения (или функции-оригинала), что прежде всего находит отражение в выборе подходящих систем функций в пространствах оригиналов и изображений, с которыми легко работать и с помощью которых могут быть хорошо приближены заданные образы и оригиналы. Выбор метода обращения существенно зависит от способа задания информации об изображении искомого оригинала. Перечислим типичные ситуации:

1) известны значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой фиксированной точке, отличной от бесконечности;

2) известны значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки;

3) известны значения изображения $F(p)$ на вещественной полуоси $p \geqslant 0$;

4) известны значения изображения $F(p)$ во всей полуплоскости $\mathrm{Re}\,p > \gamma$.

Выбор подходящих методов обращения для указанных ситуаций, их описание либо отсылка к соответствующей литературе рассмотрены в работе [21].

Предполагается, что читатель знаком с проблемой обращения преобразования Лапласа и теоретическими подходами к её решению, изложенными, например, в книге [14].
Нумерация формул, теорем, утверждений и т. п. в каждом разделе своя и начинается с единицы. Таблицы и рисунки (иллюстрации) ввиду их малого количества имеют сквозную нумерацию по всему методическому пособию. Конец доказательства обозначается знаком $\Box$.

1. Обращение преобразования Лапласа с помощью разложения в ряды Лагерра

1.1. Постановка задачи. Выбор параметра функций Лагерра

Дано уравнение

$$(Ax)(p) \equiv \int_0^\infty \exp(-p\,t)x(t)\,dt = F(p), \tag{1}$$

где $x(t)$ — искомая вещественная функция-оригинал, а $F(p)$ — её изображение по Лапласу.
Рассмотрим систему функций Лагерра

$$\{l_k(t)\}_{k=0}^\infty, \quad l_k(t) = \exp(-t/2)L_k(t),$$

$$L_k(t) = \frac{e^t}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\left(t^k e^{-t}\right) \text{ — многочлен Лагерра.}$$

Эта система полна и ортонормирована в пространстве $L_2(0,\infty)$.
Пусть a — произвольное положительное число. Система функций

$$\{\eta_k(t)\}_{k=0}^\infty, \quad \eta_k(t) = \sqrt{a}\,l_k(at), \tag{2}$$

также будет полна и ортонормирована в $L_2(0,\infty)$.
Предположим, что решение $x(t)$ уравнения (1) при некотором $a > 0$ представимо в виде ряда по системе функций (2):

$$x(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k \eta_k(t).$$

Подставляя его в уравнение (1), получаем

$$\sum_{k=0}^\infty c_k (A\eta_k)(p) = F(p). \tag{3}$$

Следовательно, задача нахождения $x(t)$ сводится к определению коэффициентов c_k из уравнения (3).
Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных методов решения этой задачи, остановимся на выборе значения параметра a, входящего в определение системы функций (2).
Как известно, изображение $F(p)$ является регулярной функцией комплексной переменной p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant p_0$ при некотором вещественном p_0.
Заметим, что в случае конечного p_0 переход к новому оригиналу $f_1(t) = f(t)\exp(-p_0 t)$ приводит нас к случаю $p_0 = 0$.
Пусть выполнены следующие условия:

1) $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant 0$,

2) существует конечный предел $\lim_{p\to\infty} pF(p)$,

3) все особые точки $F(p)$ можно заключить в замкнутый круг, целиком лежащий в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p < 0$.

По изображениям многочленов Лагерра

$$(AL_k)(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) L_k(t)\, dt = \frac{(p-1)^k}{p^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

вычисляем изображения функций системы (2):

$$(A\eta_k)(p) = \sqrt{a} \int_0^\infty e^{-p\,t} e^{-at/2} L_k(at)\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{(p/a - 0.5)^k}{(p/a + 0.5)^{k+1}}.$$

Их подстановка в (3) приводит к уравнению

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k c_k \sqrt{a} \left(\frac{a/2 - p}{a/2 + p}\right)^k = \left(\frac{a}{2} + p\right) F(p).$$

Положим

$$b_k = (-1)^k c_k \sqrt{a}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

и сделаем замену переменной

$$z = (a/2 - p)/(a/2 + p). \tag{4}$$

Преобразование (4) конформно отображает правую полуплоскость $\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$ на круг $|z| \leqslant 1$. Функция

$$G(z) = \left(\frac{a}{2} + p\right) F(p)\Big|_{p = a(1-z)/(2(1+z))} = \frac{a}{1+z} F\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z}\right) \tag{5}$$

в силу сделанных относительно $F(p)$ предположений будет регулярна на круге $|z| \leqslant 1$.
Итак, функция (5) имеет представление

$$G(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k z^k, \tag{6}$$

причем радиус сходимости ряда (6) не менее единицы.
Как известно, радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию от точки $z = 0$ до ближайшей особой точки $G(z)$. Укажем способ выбора такого значения параметра a, при котором радиус сходимости ряда (6) максимален, что равносильно самому быстрому убыванию коэффициентов этого ряда [33].
Пусть ρ — радиус сходимости ряда (6) и $\rho > 1$. При отображении

$$p = \frac{a}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z},$$

обратном к преобразованию (4), внешность круга $|z| \geqslant \rho$ конформно отображается на внутренность круга $|p - p_0| \leqslant r$ радиусом $r = a\rho/(\rho^2 - 1)$ с центром в точке

$$p_0 = \frac{a}{2} \cdot \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}.$$

Это число отрицательно. Равенство $p_0^2 - r^2 = (a/2)^2$ означает, что $a/2$ равно длине отрезка касательной к этому кругу от точки $p = 0$ до точки касания, и на границе этого круга по предположению лежит хотя бы одна особая точка изображения $F(p)$. Пусть 2φ — угол, под которым этот круг виден из начала координат, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{a/2} = \frac{2\rho}{\rho^2 - 1}.$$

Эта функция убывает при $\rho > 1$. Значит, радиус сходимости ряда (6) будет наибольшим, если все особые точки функции $F(p)$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, заключить в замкнутый круг с центром на отрицательной полуоси, который виден из начала координат под наименьшим углом, а в качестве параметра a взять удвоенную длину отрезка касательной к этому кругу от точки касания до точки $p = 0$.

Замечание 1. *Если множество всех особых точек $F(p)$ лежит в полуплоскости $Re\, p < 0$, но неограничено, то при любом выборе параметра a радиус сходимости ряда* (6) *не превосходит единицы.*

Пусть радиус сходимости ряда (6) больше единицы. Тогда на единичном круге $|z| \leqslant 1$ он сходится абсолютно и равномерно, и его там можно почленно дифференцировать любое число раз. Очевидно, что в этом случае выполнено неравенство $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$, которое гарантирует равномерную сходимость ряда (6), поскольку функции Лагерра (2) равномерно ограничены.

Предположим, что мы выбрали узлы интерполирования на круге $|z| \leqslant 1$ так, что интерполяционный процесс по ним сходится равномерно к $G(z)$. В таком случае наряду со сходимостью интерполяционных многочленов к $G(z)$ будут сходиться и производные интерполяционных многочленов к соответствующим производным функции $G(z)$, в частности, и их значения при $z = 0$, т. е. коэффициенты интерполяционных многочленов будут стремиться к коэффициентам ряда (6), которые мы и разыскиваем.

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории сходимости интерполяционных процессов на комплексной плоскости. Для детального изучения вопроса рекомендуем книги [2], [29].

Пусть K — компактное множество в $\mathcal{C}$, дополнение $K^c = \mathcal{C} \setminus K$ которого является односвязной областью расширенной комплексной плоскости $\mathcal{C}$. Тогда существует конформное отображение

$$z = \psi(w) = cw + c_0 + \frac{c_1}{w} + \ldots, \quad c > 0, \tag{7}$$

внешности единичного круга $|w| > 1$ на K^c.

Выберем узлы интерполирования $z_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ для всех $n = 0, 1, \ldots$ принадлежащими K и положим

$$\omega(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(z - z_k^{(n)} \right). \tag{8}$$

Рассмотрим числа

$$M_n = \max\{ |\omega(z)| : z \in K\}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Они удовлетворяют неравенству $M_n \geqslant c^{n+1}$.

Определение. *Узлы $z_k^{(n)}$ называются равномерно распределенными (или равнораспределенными) на K, если*

$$\sqrt[n+1]{M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} c. \tag{9}$$

Теорема 1. *Для того чтобы для каждой регулярной на компакте K функции f*

$$L_n(z) \rightrightarrows f(z) \quad (n \to \infty,\ z \in K),$$

необходимо и достаточно, чтобы узлы интерполяции $z_k^{(n)}$ были равномерно распределены на K.

Итак, для обеспечения равномерной сходимости интерполяционных многочленов узлы интерполирования, т. е. корни многочленов (8), следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (9).
Известны три принципа выбора узлов на компакте, обеспечивающие равномерную сходимость: Вандермонда (Фекете), Чебышёва, Фейера.
Принцип Вандермонда. Для заданных точек $z_k \in K$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ составим произведение

$$P(z_0, z_1, \dots, z_n) = \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|.$$

Это ограниченная и непрерывная функция $(n+1)$ точек на K, и потому существует набор точек $z_0^{(n)}, z_1^{(n)} \dots, z_n^{(n)}$ из K, для которых это произведение максимально. Этот набор называют n-й системой узлов Фекете (Вандермонда) (или W-системой). Заметим, что поставленная задача эквивалентна задаче максимизации модуля определителя Вандермонда

$$W(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \dots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix},$$

откуда и происходит второе название системы узлов.
Узлы Вандермонда попарно различны, расположены на границе $\partial K = \partial K^c$ компакта K и “максимально удалены” друг от друга. К тому же многочлены влияния интерполяционного многочлена по ним

$$l_k(z) = \frac{\omega(z)}{(z - z_k^{(n)})\omega'\left(z_k^{(n)}\right)}$$

удовлетворяют неравенству $|l_k(z)| \leqslant 1$ для всех k и $z \in K$.
Если K — единичный круг плоскости z, то узлы Вандермонда суть корни многочлена (с точностью до поворота на любой угол) $\omega(z) = z^{n+1} - 1$. Очевидно, в этом случае $M_n = 2$, конформное отображение (7) имеет вид $z = w$, и условие (9) выполняется.
Принцип Чебышёва. Как и выше, выберем узлы интерполирования $z_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \dots n)$ для всех $n = 0, 1, \dots$ принадлежащими K и положим

$$\omega(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(z - z_k^{(n)}\right).$$

Функция $|\omega(z)|$ ограничена и непрерывна на K, и потому существует набор точек $z_0^{(n)}, z_1^{(n)} \dots, z_n^{(n)}$ из K, на котором она принимает минимальное значение. Этот набор называют n-й системой узлов Чебышёва (или T-системой).
Если K — единичный круг плоскости z, то узлы Чебышёва суть корни многочлена $\omega(z) = z^{n+1}$. Следовательно, $M_n = 1$, конформное отображение (7) имеет вид $z = w$, и условие (9)

выполняется. Очевидно, в этом случае речь идет об интерполировании Эрмита с одним кратным узлом $z = 0$.
Если $K = [-1, 1]$, то многочленами вида (8), наименее уклоняющимися от нуля на K, являются многочлены Чебышёва первого рода $\omega(z) = T_{n+1}(z)/2^n$ с корнями

$$z_k^{(n)} = \cos((2k+1)\pi/(2n+2)).$$

Принцип Фейера. Пусть компакт K таков, что функция ψ, отображающая множество $\{w : |w| > 1\}$ на K^c, непрерывно продолжается на множество $\{w : |w| \geqslant 1\}$. Пусть набор узлов $\{w_k^{(n)}\}_{k=0}^n$ равнораспределен на $|w| = 1$. Тогда набор точек

$$z_k^{(n)} = \psi\left(w_k^{(n)}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \tag{10}$$

называется n-й системой узлов Фейера (или F-системой).

Пример 1. Пусть $K = [-1, 1]$. В этом случае отображение (7) задается функцией Жуковского $z = (w + 1/w)/2$, отображающей окружность $|w| = 1$ на $K = [-1, 1]$.
Положим $w_k^{(n)} = \exp(2\pi ik/(n+1))$, тогда $z_k^{(n)} = \cos(2\pi k/(n+1))$. Заметим, что $z_1^{(n)} = z_n^{(n)}$, $z_2^{(n)} = z_{n-1}^{(n)}, \dots$ В этих точках нужно использовать значения интерполируемой функции и ее производной.

Пример 2. Пусть $K = [-1, 1]$, $w_k^{(n)} = \exp((4k+1)\pi i/(2n+2))$, тогда

$$z_k^{(n)} = \cos((4k+1)\pi/(2n+2)).$$

Их удобнее перенумеровать, положив

$$z_k^{(n)} = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Следовательно, $\omega(z) = T_{n+1}(z)/2^n$, $M_n = 2^{-n}$, и условие (9) выполнено.

Замечание 2. *Далее в качестве компакта K плоскости z рассматривается единичный круг или некоторое его подмножество, на которых порожденная изображением функция (6) регулярна. Скорость сходимости равномерно сходящихся интерполяционных процессов зависит от “размера” наибольшей области регулярности функции $G(z)$. В случае $K = [-1, 1]$ такой областью будет эллипс с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей $\rho > 1$. Тогда погрешность интерполяции будет величиной порядка ρ^{-n}. Подробнее на этих вопросах мы не будем останавливаться и отсылаем читателей к работам [2], [29].*

Наша задача заключается в описании эффективных методов определения коэффициентов рядов Лагерра на основе уравнения (6).
Она решается совсем просто в случае узлов Чебышёва, если K — единичный круг. Действительно, из уравнения (6) находим $b_k = G^{(k)}(0)/k!$, $k = 0, 1, \dots$, и в итоге в силу (5) искомые коэффициенты выражаются через значения производных $F^{(k)}(a/2)$.

1.2. Интерполяционные методы обращения

Дальнейшее содержание этого раздела относится к изучению интерполяционных методов для W и T систем узлов интерполирования применительно к нахождению решения уравнения (1) в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta_k(t). \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть при некотором $a > 0$ решение уравнения (1) представимо в виде ряда (11), коэффициенты которого удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty, \tag{12}$$

и пусть все особые точки изображения $F(p)$ заключены в замкнутый круг с центром на отрицательной полуоси, целиком лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$. Далее, пусть $z_0^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)}$ есть W или F система узлов интерполирования для единичного круга плоскости z и интерполяционный многочлен по этой системе узлов для функции $G(z)$ равен

$$P_n(z) = p_0^{(n)} + p_1^{(n)} z + \ldots + p_n^{(n)} z^n.$$

Тогда

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{a}} p_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} c_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Действительно, так как при любом $a > 0$ функции Лагерра ограничены (см. [27]): $|\eta_k(t)| \leqslant \sqrt{a}$, то ряд (11) сходится равномерно, поэтому функция (5) регулярна на некотором круге радиусом более единицы и представима там рядом (6). Коэффициенты этого ряда могут быть найдены как пределы коэффициентов интерполяционных многочленов по соответствующей системе узлов, обеспечивающей равномерную сходимость интерполяционного процесса.

Итак, приближенные значения коэффициентов b_k ряда (6) находятся как решение системы

$$\sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} z_r^k = \left(\frac{a}{2} + p_r\right) F(p_r), \quad r = 0,\, 1, \ldots, n, \tag{13}$$

по избранным узлам интерполяции $z_0, \ldots, z_n$ и соответствующим им точкам

$$p_r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - z_r}{1 + z_r}.$$

С вычислительной точки зрения реализация этой схемы сводится к решению следующих задач:

1) построение эффективных способов решения системы (13) при любых n,

2) изучение влияния погрешностей задания $F(p)$ на ее решение, а тем самым и на приближенное решение уравнения (1) в виде отрезка ряда (11).

Случай узлов Фейера. Узлами Фейера для $K = [-1, 1]$, как мы видели, являются корни многочлена Чебышёва $T_n(x)$

$$z_r = \cos \frac{2r+1}{2n}\pi, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1.$$

На плоскости p им соответствуют точки вещественной оси

$$p_r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - z_r}{1 + z_r}$$

такие, что $0 < p_0 < \cdots < p_{n-1} < \infty$.

Интерполяционный многочлен

$$P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(n)} z^k \tag{14}$$

определяется условиями $P_{n-1}(z_r) = G(z_r), \quad r = 0, 1, \ldots, n-1$.
Представим $P_{n-1}(z)$ в виде разложения по многочленам Чебышёва:

$$P_{n-1}(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu^{(n)} T_\nu(z),$$

в котором числа $d_\nu^{(n)}$ пока неизвестны. В силу ортогональности и нормировки $T_\nu(z)$ по весу $1/\sqrt{1-z^2}$ имеем

$$d_0^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(z)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz,$$
$$d_\nu^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(z)T_\nu(z)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \quad \nu = 1,\, 2, \ldots, n-1.$$

Для вычисления интегралов применим формулу Мелера

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(z)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz \approx \frac{\pi}{n}\sum_{r=0}^{n-1} f(z_r),$$

точную для любого многочлена степени не выше $2n-1$:

$$\begin{aligned} d_0^{(n)} &= \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} G(z_r), \\ d_\nu^{(n)} &= \frac{2}{n}\sum_{r=0}^{n-1} G(z_r)\cos\frac{2r+1}{2n}\pi\nu, \quad \nu = 1,\, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{15}$$

Теперь нетрудно выразить коэффициенты $b_k^{(n)}$ представления (14) через найденные значения d_ν :

$$b_k^{(n)} = \frac{1}{k!}\sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu^{(n)} T_\nu^{(k)}(0) = \sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu^{(n)} \frac{T_\nu^{(k)}(0)}{k!}. \tag{16}$$

Итак, решение системы (13) найдено.
Укажем способ вычисления входящих в формулу (16) величин $T_\nu^{(k)}(0)/k!$, $k = 0,\, 1, \ldots, n-\, 1$, $\nu = k,\, k+1, \ldots, n-1$ (остальные, очевидно, равны нулю).

Утверждение 1. *Справедливы равенства*

$$\frac{T_n^{(r)}(0)}{r!} = \begin{cases} 0, & n-r \text{ — нечетное}, \\ (-1)^{\frac{n-r}{2}} \cdot 2^{r-1} \cdot \frac{n}{r} \cdot C_{(n+r)/2-1}^{(n-r)/2}, & n-r \text{ — четное}, \end{cases} \tag{17}$$

$$0 < r \leqslant n,$$

$$T_n(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ — нечетное}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ — четное}, \end{cases} \tag{18}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \left|\frac{T_n^{(r)}(0)}{r!}\right| = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right]. \tag{19}$$

Доказательство. Из представления $T_n(x)$ в виде

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(2x)^n + \sum_{m=1}^{[n/2]}(-1)^m(2C_{n-m}^m - C_{n-m-1}^m)(2x)^{n-2m}\right], \tag{20}$$

используя тождество

$$2C_p^q - C_{p-1}^q = \frac{p+q}{p-q}C_{p-1}^q,$$

легко получаем равенства (17). Далее, левая часть в формуле (19) равна сумме модулей коэффициентов разложения $T_n(x)$ по степеням x, и знаки коэффициентов чередуются, как видно из (20). Равенство (19) получается в результате подстановки $x = \sqrt{-1}$ в представление

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right].$$

□

Известен следующий результат [4]:

Теорема 3. *Если модуль непрерывности $\omega(f;\delta)$ функции f удовлетворяет условию Дини—Липшица*

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)\ln\delta = 0,$$

то f разлагается в ряд по многочленам Чебышёва первого рода, равномерно сходящийся на отрезке $[-1,1]$.

Предположим, что функция $G(z)$ представима рядом

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu T_\nu(z) \tag{21}$$

и выясним, с какой точностью коэффициенты этого ряда приближаются величинами (20). Подстановка ряда (21) в первую формулу (15) дает

$$d_0^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m T_m(z_r)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m\left(\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} T_m(z_r)\right).$$

Значение в последних скобках вычисляется с помощью формулы Мелера: оно равно нулю для $m = 1, 2, \ldots, 2n-1$ и единице для $m = 0$. Ее значение при $m = 2n$ отлично от нуля, следовательно,

$$d_0^{(n)} - d_0 = O(|d_{2n}|), \quad n \to \infty.$$

Для остальных номеров имеем

$$d_\nu^{(n)} = \frac{2}{n}\sum_{r=0}^{n-1} G(z_r)\cos\frac{2r+1}{2n}\pi\nu = \frac{2}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m T_m(z_r)\right)\cos\frac{2r+1}{2n}\pi\nu =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} d_m\left(\frac{2}{n}\sum_{r=0}^{n-1} T_m(z_r)T_\nu(z_r)\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{22}$$

Индекс m предста́вим в виде $m = 2nj + \mu$, где $-n+1 \leqslant \mu \leqslant n$, и вычислим

$$T_m(z_r) = \cos\left((2nj+\mu)\frac{2r+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(2nj\frac{2r+1}{2n}\pi\right)\cos\left(\mu\frac{2r+1}{2n}\pi\right) = (-1)^j\, T_{|\mu|}(z_r).$$

Теперь снова для вычисления значений в последних скобках в (22) применим формулу Мелера и с учетом ортогональности многочленов Чебышева из (22) получаем

$$d_\nu^{(n)} = d_\nu + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j(d_{2nj-\nu} + d_{2nj+\nu}),$$

откуда следует равенство

$$d_\nu^{(n)} - d_\nu = O(|d_{2n-\nu}|), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1, \quad n \to \infty.$$

Как видно, с увеличением номера точность вычисления коэффициентов ряда (21) уменьшается.

Перейдем к изучению влияния погрешности задания $F(p)$ на приближенное решение в виде отрезка ряда (11)

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{c}_k^{(n)}\eta_k(t). \tag{23}$$

Утверждение 2. *Пусть в узлах Фейера* $z_k = \cos((2k+1)\pi/(2n))$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *значения функции* $G(z_k)$ *известны с погрешностью* ε_k, *причем* $|\varepsilon_k| \leqslant \varepsilon$. *Тогда возникающая при этом ошибка в правой части* (23) *по модулю не превосходит величины* $\varepsilon \cdot 10^{0.384n}$ *для любого* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим через $d_\nu^{'}$ ошибки вычисления $d_\nu^{(n)}$ по формулам (15), возникающие из-за ошибок ε_k. Очевидно, $|d_0^{'}| \leqslant \varepsilon$. Далее, для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ имеем

$$\left|\frac{nd_\nu^{'}}{2}\right|^2 = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\nu\right|^2 \leqslant n\varepsilon^2\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{2k+1}{2n}\pi\nu.$$

Последняя сумма равна $n/2$ и легко вычисляется по формуле Мелера для $f(z) = T_\nu(z)$. Следовательно, для всех ν выполняется неравенство $|d_\nu^{'}| \leqslant \varepsilon\sqrt{2}$, и из (16) вытекает, что ошибка вычисления $b_k^{(n)}$ не превосходит значения $\varepsilon\sqrt{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}|T_\nu^{(k)}(0)/k!|$. В итоге, с учетом связи $b_k^{(n)} = (-1)^k\widetilde{c}_k^{(n)}\sqrt{a}$, получаем, что ошибка вычисления правой части в формуле (23) не превосходит величины

$$\delta = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\sqrt{a}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{T_\nu^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^\nu + \left(1-\sqrt{2}\right)^\nu\right] <$$

$$< \varepsilon\sqrt{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}(1+\sqrt{2})^\nu = \varepsilon\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - 1\right] < \varepsilon\cdot 10^{0.384n}.$$

□

Случай узлов Вандермонда. Узлами Вандермонда для круга $|z| \leqslant 1$ являются корни из единицы, т. е. точки $z_k = w^k$, $w = \exp(-2\pi i/n)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. На плоскости p им соответствуют точки мнимой оси

$$p_k = i\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}.$$

В случае четного n среди них находится и бесконечно удаленная точка.
Коэффициенты интерполяционного многочлена, как и ранее, находим из системы уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^{(n)} z_k^\nu = G(z_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{24}$$

Умножим (22) на z_k^{-r}, $r = 0, 1, \ldots, n-1$, и затем просуммируем их по k от 0 до $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} G(z_k) z_k^{-r} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^{(n)} z_k^\nu \right) z_k^{-r} = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^{(n)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(w^{\nu-r} \right)^k.$$

Последняя внутренняя сумма в силу свойств корней из единицы равна n при $\nu = r$ и нулю в остальных случаях, и поэтому решением системы (24) будут числа

$$b_\nu^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} G(z_k) z_k^{-\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{25}$$

Из симметрии узлов интерполирования относительно вещественной оси вытекает, что для вещественной функции-оригинала эти числа вещественны.
Подстановка ряда (6) в (25) дает

$$b_\nu^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z_k^m \right) z_k^{-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k^{m-\nu} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (w^{m-\nu})^k \right).$$

Выражение в последних скобках при $m - \nu = nj$ равно единице и нулю в остальных случаях, и поэтому

$$b_\nu^{(n)} - b_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} b_{\nu+nj} = O(|b_{\nu+n}|), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Как видно, в отличие от узлов Фейера, теперь с ростом номера коэффициента точность их вычисления не уменьшается.

Утверждение 3. *Пусть в узлах Вандермонда $z_k = w^k$ значения функции $G(z_k)$ известны с погрешностью ε_k, причем $|\varepsilon_k| \leqslant \varepsilon$. Тогда возникающая при этом ошибка в правой части* (23) *по модулю не превосходит величины $n\varepsilon$ для любого $t \geqslant 0$.*

Доказательство этого утверждения формально проводится так же, как и для узлов Фейера, хотя оно очевидно следует из представления (25).

1.3. Обращение преобразования Лапласа при помощи рядов по обобщённым функциям Лагерра

Пусть при некотором $s \geqslant 1$ функция $\varphi_s(p)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > 0$ и пусть существуют значения $f(+0), f(+\infty)$, $\varphi_s(\infty)$.
Дальнейшее изложение является обобщением выше изложенного материала, соответствующего случаю $s = 1$.
Пусть $s > 1$. Напишем тождество

$$\varphi_s(p) = p^{s-1} \left(pF(p) \right)$$

и устремим в нём p к бесконечности: слева в пределе имеем конечное значение $\varphi_s(\infty)$, второй сомножитель справа равен $f(+0)$, а первый неограниченно возрастает. Следовательно, $f(0) = 0$. Далее, предположим, что $f'(t)$ также является оригиналом. Преобразования Лапласа $f(t)$ и $f'(t)$ связаны соотношением $L(f') = pL(f) - f(0)$. Но $f(0) = 0$, а $f'(+0) = \lim_{p\to\infty} pL(f') = \lim_{p\to\infty} p^2F(p)$. Если $s > 2$, то из представления

$$\varphi_s(p) = p^{s-2}(p^2F(p))$$

аналогично предыдущим рассуждениям получаем $f'(0) = 0$ и т. д. Следовательно, точка $t = 0$ будет корнем кратности $s - 1$, т. е. при $t \approx 0$ будет $f(t) \approx Ct^{s-1}$.

Однако, функции Лагерра (2) таким свойством не обладают, и поэтому надеяться на то, что отрезок ряда по ним точно учитывает характер поведения оригинала при $t \approx 0$, не приходится. Следовательно, желательно иметь систему функций, все элементы которой заранее учитывают эту особенность оригинала. Отметим, что функции Лагерра при $t \to \infty$ стремятся к нулю, поэтому естественно считать выполненным условие $f(+\infty) = 0$. Если это не так, введём новый оригинал $f_1(t) = f(t) - f(+\infty)$. Однако такая замена изменяет поведение оригинала в нуле. Очевидно, функция

$$f_1(t) = f(t) - f(+\infty)(1 - e^{-t})^n$$

при любом $n \geqslant s - 1$ имеет точку $t = 0$ корнем кратности не менее $s - 1$. Введем в рассмотрение обобщенные многочлены Лагерра [30]

$$L_n(t, \alpha) = \frac{1}{n!} t^{-\alpha} e^t \left(t^{\alpha+n} e^{-t}\right)^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Они могут быть записаны в виде

$$L_n(t, \alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \cdot \frac{(-t)^k}{k!(n - k)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n + \alpha}{n - k} \frac{t^k}{k!}. \tag{26}$$

Многочлены (26) образуют полную систему в пространстве с весом $L_2(t^\alpha e^{-t}; 0, \infty)$ и ортогональны:

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} L_k(t, \alpha) L_j(t, \alpha)\, dt = \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{k!} \delta_{kj}.$$

Введём в рассмотрение две системы функций

$$\varphi_n(t) = e^{-t/2} t^{\alpha/2} L_n(t, \alpha), \tag{27}$$

$$\psi_n(t) = e^{-t/2} t^\alpha L_n(t, \alpha), \quad \alpha \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{28}$$

где $L_n(t, \alpha)$ — многочлены Лагерра (26).

Системы функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^\infty$, $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^\infty$ полны в $L_2(0, \infty)$ [27]. При $\alpha = 0$ обе системы совпадают с обычными функциями Лагерра (2). Скалярное произведение функций легко вычисляется [27]:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha L_n(t, \alpha) L_m(t, \alpha)\, dt = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n} \delta_{nm}.$$

Следовательно, при любом $a > 0$ система функций

$$\eta_n^\varphi(t) = \sqrt{a}\varphi_n(at) \Big/ \sqrt{\Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n}}$$

полна и ортонормирована в $L_2(0, \infty)$.

Лемма 1. *Изображение функции $t^\beta L_n(t,\alpha)$ равно*

$$\int_0^\infty e^{-p\,t} t^\beta L_n(t,\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} p^{-\beta-1} \cdot {}_2F_1\left(-n, \beta+1, \alpha+1, \frac{1}{p}\right), \qquad (29)$$

где

$${}_2F_1(a,b,c,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

есть гипергеометрический ряд.

Здесь использован символ Похгаммера

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & k=0; \\ a(a+1)\cdots(a+k-1), & k \geqslant 1. \end{cases} \qquad (30)$$

Доказательство. Интегрируя тождество

$$t^\beta L_n(t,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+\alpha)\cdots((n+\alpha)-(n-k)+1)}{(n-k)!} \cdot \frac{t^{k+\beta}}{k!}$$

после домножения его на $e^{-p\,t}$ в пределах от 0 до ∞ и осуществляя очевидные преобразования, искомое изображение последовательно записываем следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+\alpha)\cdots(k+\alpha+1)}{(n-k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{k!\,p^{k+\beta+1}} =$$

$$= p^{-\beta-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{1}{p^k} =$$

$$= p^{-\beta-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^{-k} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} =$$

$$= p^{-\beta-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{(1/p)^k}{k!} =$$

$$= p^{-\beta-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} {}_2F_1\left(-n, \beta+1, \alpha+1, \frac{1}{p}\right).$$

□

Лемма 2. *Скалярное произведение функций системы* (28) *вычисляется по формуле*

$$(\psi_n, \psi_m) = \int_0^\infty e^{-t} t^{2\alpha} L_n(t,\alpha) L_m(t,\alpha)\,dt = (-1)^{m+n} \Gamma(2\alpha+1) \binom{m+\alpha}{n} \binom{n+\alpha}{m}. \qquad (31)$$

Доказательство. Исходя из определения (28), имеем

$$(\psi_n, \psi_m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+\alpha}{m-k} \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\alpha+k} L_n(t,\alpha)\,dt. \qquad (32)$$

Воспользуемся формулой (29) при $p=1$:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^\beta L_n(t,\alpha)\,dt=\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\,{}_2F_1(-n,\beta+1,\alpha+1,1).$$

Последовательно применяя рекуррентное соотношение

$${}_2F_1(a-1,b,c,1)=\frac{c-b-a}{c-a}\,{}_2F_1(a,b,c,1),$$

для натурального n получим тождество

$${}_2F_1(-n,b,c,1)=\frac{(c-b)(c-b+1)\cdots(c-b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)},\tag{33}$$

в силу чего имеем

$$\int_0^\infty e^{-t}t^\beta L_n(t,\alpha)\,dt=\frac{\Gamma(\beta+1)}{n!}(\alpha-\beta)(\alpha-\beta+1)\cdots(\alpha-\beta+n-1).\tag{34}$$

Следовательно, входящие в правую часть (32) интегралы можно вычислить по формуле (31) при $\beta=2\alpha+k$. Теперь, обозначив a_k общий член суммы в (32), устанавливаем рекуррентное соотношение

$$a_{k+1}=a_k\frac{(-m+k)(2\alpha-k+1)}{(-n+\alpha+1+k)(k+1)},\quad k=0,1,\ldots,m-1.$$

Если $a_0\neq 0$ (что имеет место при нецелом α или целом α, бóльшем $n-1$), то искомая величина равна

$$\sum_{k=0}^m a_k=a_0\cdot{}_2F_1(-m,2\alpha+1,-n+\alpha+1,1),$$

и далее остаётся снова применить формулу (33), после чего сравнение левой и правой части в (31) не составляет труда. Аналогично проводятся вычисления и в случае, когда первое отличное от нуля слагаемое в (32) есть a_j при $j>0$. □

Замечание 3. *Приводимые в [3] на с. 859 и в других руководствах по операционному исчислению формулы вычисления произведений (ψ_n,ψ_m) неверны.*
При любом $a>0$ система функций

$$\eta_n^\psi(t)=\sqrt{a}\psi_n(at)\frac{n!\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\sqrt{\Gamma(2\alpha+1)}}$$

полна и нормирована в $L_2(0,\infty)$. Заметим, что она ортогональна лишь при $\alpha=0$, а в случае натурального α матрица Грама этой системы будет $(2\alpha+1)$–диагональной, как это следует из (31). Все функции систем (31), (32) имеют точку $t=0$ корнем кратности $\alpha/2$ или α, соответственно, так что следует полагать $\alpha/2=s-1$, либо $\alpha=s-1$, где s — любое положительное число, не превосходящее скорости убывания изображения при $p\to\infty$.

Лемма 3. *Системы функций $\{\eta_n^\varphi(t)\}$, $\{\eta_n^\psi(t)\}$ равномерно ограничены при любом $a>0$, т. е. существует постоянная $M<\infty$ такая, что*

$$|\eta_n^\varphi(t)|\leqslant M,\quad |\eta_n^\psi(t)|\leqslant M,\quad t\geqslant 0,\quad n=0,1,\ldots$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением второй системы, ибо для первой системы никаких отличий в доказательстве нет.
Теорема Сегё (см. [27], с. 250) утверждает, что при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\max_{t \geqslant 0} e^{-t/2} t^{\lambda} |L_n(t,\alpha)| \sim n^Q,$$

причём

$$Q \leqslant \max\left\{\lambda - \frac{1}{3}, \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right\}.$$

При $n \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\Gamma(n+\alpha+1) \sim n!\,(n+1)^{\alpha},$$

и из определения функций $\eta_n^{\psi}(t)$ следует

$$\max_{t \geqslant 0} |\eta_n^{\psi}(t)| = O(n^{Q-\alpha}).$$

Но $Q - \alpha < 0$, откуда и следует утверждение леммы. □

Перейдём к задаче построения искомого оригинала в виде рядов по системам $\{\eta_n^{\varphi}(t)\}$, $\{\eta_n^{\psi}(t)\}$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\varphi} \eta_n^{\varphi}(t), \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\psi} \eta_n^{\psi}(t)$$

и выбору оптимального значения параметра a, входящего в определение систем функций, в зависимости от свойств данного изображения $F(p)$.
Сначала рассмотрим систему функций $\eta_n^{\psi}(t)$.
Положим $\alpha = s - 1$ и предположим, что искомый оригинал $f(t)$ представим в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\psi} \eta_k^{\psi}(t), \tag{35}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{\psi}| < \infty$.
В силу леммы 2 ряд (35) сходится абсолютно и равномерно на любом $[0, T]$, $T > 0$, при любом $a > 0$, так что его преобразование Лапласа равно

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\psi} L(\eta_k^{\psi}(t)) = F(p). \tag{36}$$

Преобразование Лапласа функции $t^{\alpha} L_n(t,\alpha)$ легко вычисляется с использованием представления (34) при $\beta = \alpha$ и равно

$$\int_0^{\infty} e^{-p\,t} t^{\alpha} L_n(t,\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \left(\frac{p-1}{p}\right)^n p^{-\alpha-1}.$$

Теперь находим изображение функций η_k^{ψ}:

$$L(\eta_k^{\psi}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\Gamma(2\alpha+1)}} \left(\frac{p/a - 0.5}{p/a + 0.5}\right)^k \frac{1}{(p/a + 0.5)^{\alpha+1}}.$$

Запишем равенство (33) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{\psi} \left(\frac{a/2-p}{a/2+p}\right)^k = \left(p+\frac{a}{2}\right)^{\alpha+1} F(p),$$

где

$$b_k^{\psi} = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\Gamma(2\alpha+1)}} a^{\alpha-1/2} c_k^{\psi}.$$

Как и ранее, положим $z=(a/2-p)/(a/2+p)$ и введём функцию

$$G(z) = \left(p+\frac{a}{2}\right)^{\alpha+1} F(p)\Big|_{p=\frac{a}{2}\cdot\frac{1-z}{1+z}} = \left(\frac{a}{1+z}\right)^{\alpha+1} F\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right).$$

В итоге приходим к уравнению

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{\psi} z^k,$$

полностью аналогичному уравнению (6), полученному ранее в случае $\alpha=0$. Поэтому все полученные ранее в п. 1.1 утверждения для обычных функций Лагерра, в частности, о выборе оптимального параметра a и способах определения коэффициентов рядов, справедливы и в нашем случае.

Пусть теперь искомый оригинал $f(t)$ представи́м в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\varphi} \eta_k^{\varphi}(t),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{\varphi}| < \infty$. Применяя формулу (29) для вычисления изображений функций $\eta_k^{\varphi}(t)$, снова получим уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{\varphi} z^k = G(z) \equiv \left(\frac{a}{1+z}\right)^{\alpha/2+1} F\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right). \tag{37}$$

В отличие от предыдущего случая коэффициент b_k^{φ} связан со всеми $c_0^{\varphi},\ldots,c_k^{\varphi}$, как следует из (29).

Допустим, мы нашли приближенные значения коэффициентов $b_0^{\varphi},\ldots,b_n^{\varphi}$. Зная b_n^{φ}, мы сможем найти c_n^{φ}, после чего, “выбросив” из $b_0^{\varphi},\ldots,b_{n-1}^{\varphi}$ составляющие “вдоль” $\eta_n^{\varphi}(t)$, аналогично найдем c_{n-1}^{φ}, и т. д. Изображение $\eta_n^{\varphi}(t)$ входит в левую часть (37) в виде слагаемого (с коэффициентом ${}_2F_1(-n,\alpha/2+1,\alpha+1,z))$, содержащего все степени z^i, $i=0,1,\ldots,n$. Если $\alpha=0$, то ${}_2F_1(-n,1,1,z)=(1-z)^n$. Следовательно, ошибка вычисления c_n^{φ} войдет в значения остальных коэффициентов с биномиальными коэффициентами. На следующем шаге характер распространения ошибки сохранится. В итоге погрешность вычисления коэффициентов c_k^{φ} может оказаться недопустимо большой. В случае $\alpha\neq 0$ картина качественно не меняется. Численные эксперименты подтвердили неустойчивость этой процедуры.

2. Обращение преобразования Лапласа с помощью квадратурных формул

2.1. Интерполяционные квадратурные формулы обращения преобразования Лапласа

2.1.1. Дано уравнение

$$\int_0^{\infty} \exp(-p\,t) f(t)\,dt = F(p),$$

где $f(t)$ — искомая функция-оригинал, а $F(p)$ — её изображение по Лапласу. Как известно, изображение $F(p)$ регулярно в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$. Далее будем считать $\gamma = 0$, чего всегда можно добиться сдвигом по p за счет домножения оригинала на соответствующую экспоненту. Как известно, обращение преобразования Лапласа задается интегралом Римана—Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\,t} F(p)\,dp, \quad c > 0, \quad t > 0.$$

Напомним, что интеграл понимается в смысле главного значения, он не зависит от c и в случае разрыва оригинала в точке t мы получаем полусумму предельных значений оригинала слева и справа от точки t.
Положим в формуле обращения $p = c + i\tau$, тогда $\exp(p\,t) = \exp(c\,t)\exp(i\tau t)$. При фиксированном t первый сомножитель постоянен, а второй пробегает единичную окружность на комплексной плоскости бесконечное число раз. С ростом t первый сомножитель и скорость пробегания окружности вторым сомножителем неограниченно возрастают, так что попытка приблизить интеграл римановыми суммами вряд ли приведет к цели. Например, в простейшем случае для $f(t) = 1$ имеем $F(p) = 1/p$, так что при любом $c > 0$ сомножитель $\exp(c\,t)$ быстро растет с увеличением t, однако оригинал постоянен и не зависит от c.
Итак, пусть $F(p)$ регулярна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ наряду с функцией $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ при некотором $s > 0$ и пусть существует значение $\varphi_s(\infty)$. Запишем формулу обращения преобразования Лапласа в виде интеграла Римана—Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p)\,dp\,, \quad c > 0. \tag{1}$$

Предположим, что оригинал $f(t)$ с достаточной точностью может быть приближен линейной комбинацией функций $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, изображения которых известны и равны $F_1(p), \ldots, F_n(p)$. Положим $\Phi_k(p) = p^s F_k(p)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Теперь выберем произвольным образом попарно различные точки $p_1, \ldots, p_n$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и построим интерполяционный “многочлен” для функции $\varphi_s(p)$ по её значениям $\varphi_s(p_1), \ldots, \varphi_s(p_n)$ относительно системы $\Phi_1(p), \ldots, \Phi_n(p)$, т. е. положим

$$\varphi_s(p) \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k(p), \tag{2}$$

а коэффициенты c_k определим из условий

$$\varphi_s(p_j) = \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k(p_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Например, в случае $f_k(t) = t^{s+k-2}$ получаем $\Phi_k(p) = p^{1-k}$ и формула (2) имеет вид

$$\varphi_s(p) \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k(p) = \sum_{k=1}^{n} l_k\left(\frac{1}{p}\right)\varphi_s(p_k), \tag{3}$$

где

$$l_k(x) = \omega_k(x)/\omega_k(x_k), \quad \omega_k(x) = \omega(x)/(x - x_k), \quad \omega(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k),\ x = 1/p, \quad x_k = 1/p_k.$$

После подстановки правой части формулы (3) в (1) получим квадратурную формулу (КФ)

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\varphi_s(p_k) \tag{4}$$

с коэффициентами

$$A_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}p^{-s} l_k\left(\frac{1}{p}\right) dp\,. \tag{5}$$

По построению формула точна для функций $f_k(t) = t^{s+k-2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и потому коэффициенты (5) имеют вид $t^{s-1}P_{n-1,k}(t)$, где $P_{n-1,k}(t)$ — некоторый многочлен степени не выше $n-1$, однозначно определяемый узлами $p_1, \ldots, p_n$. Назовем её интерполяционной квадратурной формулой (ИКФ).

2.1.2. Естественно поставить вопрос о том, нельзя ли за счет специального выбора узлов повысить степень точности (вообще говоря, узлы могут зависеть от t), и если можно, то на сколько единиц? Оказывается, что более, чем на n единиц нельзя увеличить степень точности (доказательство этого утверждения в более общем случае приведено далее в п. 4.3.

Теорема 1. *Для того чтобы формула* (4) *была точна для функций* $\varphi_s(p) = p^{-j}$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, *необходимо и достаточно выполнения двух условий:*
1) формула (4) *интерполяционная, т. е. её коэффициенты вычисляются по формуле* (5),
2) выполняются условия “ортогональности”

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}p^{-s}\omega\left(\frac{1}{p}\right)p^{-k}\,dp = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

где

$$\omega\left(\frac{1}{p}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}\right). \tag{7}$$

Доказывается эта теорема так же, как и для классических квадратурных формул типа Гаусса (см., например, [10]), и имеется в книге [13]. Здесь мы его не приводим, поскольку далее будет доказано более общее утверждение.

Итак, существование квадратурной формулы наивысшей степени точности (КФНСТ) обращения преобразования Лапласа сводится к существованию многочлена (7), удовлетворяющего условию (6).

Положив $z = pt$, $q_k = p_k t$, перепишем условие (6) в виде

$$\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} e^z z^{-s}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{q_n}\right)z^{-k}\,dz = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Далее будет показано (см. также [13]), что многочлен

$$\omega_n\left(\frac{1}{z}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{q_k}\right)$$

с точностью до постоянного сомножителя совпадает с многочленом

$$P_n^s\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(n+s-1)_k z^{-k},$$

корни которого, как будет далее показано, попарно различны и лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.
В записи многочлена P_n^s использован символ Похгаммера (см. п. 1, (30)). Следовательно, КФНСТ вида (4) существует и единственна, и её узлы попарно различны и представимы в виде $p_k = q_k t$, где q_k — корни уравнения $P_n^s(1/q) = 0$. Коэффициенты КФНСТ вычисляем по формуле (5):

$$A_k(t) = \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^z z^{-s} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{1/z - 1/q_j}{1/q_k - 1/q_j}\, dz = B_k t^{s-1}.$$

Итак, КФНСТ имеет вид

$$f(t) \approx t^{s-1}\sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_s\left(\frac{q_k}{t}\right). \tag{8}$$

Её коэффициенты можно найти как решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} B_k q_k^{-m} = \frac{1}{\Gamma(s+m)}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{9}$$

эквивалентной, как нетрудно проверить, условию интерполяционности квадратурной формулы. Очевидно, эта система однозначно разрешима в силу попарной различности чисел q_k. Заметим, что на самом деле условия (9) выполняются для $m = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

2.1.3. Сравним между собой ИКФ (4) и КФНСТ (8).
Пусть сначала $s = 1$. Если узлы ИКФ (4) не зависят от t, то правая часть в формуле (4) есть многочлен степени $n-1$, неограниченно возрастающий по модулю при $t \to \infty$. Однако искомый оригинал может себя вести совсем иначе, например, иметь предельные значения $f(+0), f(+\infty)$, которые не получаются из правой части (4) при $t \to 0$ и $t \to +\infty$, соответственно. Формула (8) даёт верные результаты как при $t \to 0$, так и при $t \to \infty$, поскольку $\sum_{k=1}^{n} B_k = 1$ (см. (9)) и $\varphi_1(0) = f(\infty)$, $\varphi_1(\infty) = f(0)$. Дело здесь в том, что зависимость приближённого решения (4) от t входит лишь в коэффициенты, но не входит в $\varphi_s(p)$, что неестественно, хотя бы с учётом тауберовых теорем (см. [38], [22]), ибо поведение оригинала при малых t определяется поведением изображения при больших по модулю p, и наоборот: поведение оригинала при больших t определяется поведением изображения при малых по модулю p. А в формуле (8) аргумент t определяет привлекаемые к вычислениям значения изображения в полном соответствии с названными теоремами.
Пусть теперь $s \neq 1$. Если функция $\varphi_s(p)$ регулярна при $p \to \infty$, то выбор в качестве s скорости убывания изображения $F(p)$ при $p \to \infty$ означает максимальный учёт гладкости оригинала в окрестности точки $t = 0$ (эта точка будет корнем оригинала кратности $s - 1$

(см. [24])), что и делает первый сомножитель справа в (8), однако при $t \to \infty$ никаких априорных ограничений на поведение оригинала при этом не накладывается.
Поясним это подробнее на примере КФНСТ с одним узлом:

$$f(t) \approx f_s(t) = \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\,\varphi_s\left(\frac{s}{t}\right). \tag{10}$$

Возьмём функцию-оригинал $f(t) = (1 - e^{-t})^3$, его изображение равно

$$F(p) = 6/p(p+1)(p+2)(p+3).$$

Очевидно, точка $t = 0$ — трёхкратный корень оригинала и $f(0) = 0,\ f(\infty) = 1$. Рассмотрим случаи $s = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. По формуле (10) находим приближённые оригиналы

$$\begin{aligned}
f_1(t) =& 6t^3/(1+t)(1+2t)(1+3t),\\
f_2(t) =& 6t^3/(1+t)(2+t)(2+3t),\\
f_3(t) =& 9t^3/(1+t)(3+t)(3+2t),\\
f_4(t) =& 32t^3/(2+t)(4+t)(4+3t),
\end{aligned}$$

откуда при $t \to 0$ получаем $f_1(t) \approx 6t^3,\ f_2(t) \approx 1.5t^3,\ f_3(t) \approx t^3, f_4(t) \approx t^3$, а при $t = \infty$ имеем $f_1(\infty) = 1,\ f_2(\infty) = 2,\ f_3(\infty) = 4.5,\ f_4(\infty) = 32/3$. Как видно, с ростом s в окрестности нуля приближение к оригиналу улучшается, а в окрестности точки $t = \infty$, наоборот, ухудшается.
В общем случае за счёт выбора s можно добиваться определённого поведения приближённого решения в окрестности точек $t = 0$ и $t = \infty$ (заметим, что при построении других методов обращения допустимы и отрицательные значения s).
Оказывается, многочлены $P_n^s(x)$, определяющие КФНСТ (8), обладают теми же свойствами, что и классические ортогональные многочлены Эрмита, Лагерра, Якоби [30].

2.2. Общие свойства ортогональных многочленов, определяющих КФНСТ

Напомним, что многочлен $\omega_n(1/z)$ удовлетворяет условию “ортогональности”

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^z z^{-s}\omega_n\left(\frac{1}{z}\right) z^{-k}\,dz = 0\,,\quad k = 0, 1, \ldots, n-1,\quad c > 0.$$

После замены переменной $z = 1/x$ получим условие

$$\int_L h(x)\omega_n(x)x^k\,dx = 0,\quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{11}$$

где $h(x) = x^{s-2}e^{1/x}$, а линия интегрирования L есть окружность

$$\left|x - \frac{1}{2c}\right| = \frac{1}{2c}\,,\quad c > 0.$$

Заметим, что здесь c — любое положительное число.
Классические многочлены Эрмита, Лагерра, Якоби удовлетворяют условию ортогональности вида

$$\int_a^b \rho(x)Q_n(x)Q_m(x)\,dx = 0,\quad m \neq n,$$

со знакопостоянным весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) (конечном или бесконечном), причём вес ρ является решением уравнения Пирсона [30]

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}, \tag{12}$$

где $A(x) = p_0 + p_1 x,\ B(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2$ — многочлены с вещественными коэффициентами. Классические веса Эрмита, Лагерра, Якоби соответствуют трём случаям:

1) уравнение $B(x) = 0$ не имеет решений ($B(x) = const \neq 0$);

2) уравнение $B(x) = 0$ имеет один простой вещественный корень;

3) уравнение $B(x) = 0$ имеет два различных вещественных корня.

Классические веса удовлетворяют предельным условиям

$$\lim_{x\to a} \rho(x)B(x) = 0, \quad \lim_{x\to b} \rho(x)B(x) = 0, \tag{13}$$

а для соответствующих ортогональных многочленов справедлива формула Родрига [30]

$$Q_n(x) = \frac{c_n}{\rho(x)} \left(\rho(x)B^n(x)\right)^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где c_n — произвольный сомножитель. В случае $B(x) = x^2$ решение уравнения Пирсона имеет вид $x^\alpha e^{\beta/x}$, оно определено для всех $x > 0$, но весом не является (на конечном отрезке это вес, но для него предельные условия не выполняются).

Построенный нами многочлен (7), определяющий КФНСТ, удовлетворяет условию ортогональности (11) с весом $h(x) = x^{s-2}e^{1/x}$. Нетрудно проверить, что $h(x)$ удовлетворяет уравнению Пирсона (12) при $B(x) = x^2,\ A(x) = (s-2)x - 1$. Далее, $h(x)B(x) = x^s e^{1/x}$, так что выполняются и предельные условия (13), только теперь вместо отрезка $(a,\, b)$ следует иметь в виду окружность L, а в качестве a и b выступает одна и та же точка $x = 0$ при стремлении к ней с разных сторон вдоль указанной окружности.

Теорема 2. *Для многочленов* (7) *справедлива формула Родрига*

$$\omega_n(x) = \frac{c_n}{h(x)} \left(h(x)B^n(x)\right)^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

Её доказательство не приводим, поскольку оно ничем не отличается от имеющегося в [30]. Как и для классических ортогональных многочленов, справедлива и аналогично доказывается

Теорема 3. *Многочлены* (7) *удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$\begin{aligned} &B(x)\omega_n''(x) + \left[A(x) + B'(x)\right]\omega_n'(x) - n(n+s-1)\omega_n(x) = 0, \ \textit{где} \\ &B(x) = x^2,\ A(x) = (s-2)x - 1. \end{aligned} \tag{15}$$

Далее, многочлены $\omega_n(x)$ удовлетворяют трёхчленному рекуррентному соотношению вида

$$\omega_n(x) = (x + a_n)\omega_{n-1}(x) + b_n\omega_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

где a_n, b_n — некоторые вещественные числа (см. [13]) (в отличие от классических многочленов здесь $b_n > 0$).

Получим явное выражение многочленов $\omega_n(x)$, исходя из формулы Родрига (14).
Пусть $g(z)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая достаточное число раз функция. Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$

откуда следует равенство

$$\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для функции $g(z) = e^z z^{-a}$, где a — константа, это равенство имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y/x}\frac{x^a}{y^{a+1}}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y/x}\frac{x^{a-1}}{y^a}\right),$$

откуда для произвольного натурального n получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{y/x}\frac{x^a}{y^{a+1}}\right) = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(e^{y/x}\frac{x^{a-n}}{y^{a-n+1}}\right). \tag{16}$$

Положим $a = 2n+s-2$. По формуле Лейбница правая часть равна

$$(-1)^n x^{n+s-2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}e^{y/x}\frac{\partial^k}{\partial y^k}y^{-(n+s-1)} =$$

$$= (-1)^n x^{s-2}e^{y/x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{k}(n+s-1)_k\, x^k y^{-(n+s-1)-k}.$$

Вычислим правую часть формулы (14) с помощью равенства (16), полагая $y = 1$ и учитывая, что $h(x)B^n(x) = e^{1/x}x^{2n+s-2}$, в результате чего придём к представлению

$$\omega_n(x) = c_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(n+s-1)_k\, x^k = c_n P_n^s(x). \tag{17}$$

Покажем, что корни x_k многочленов (17) (или корни q_k многочленов (7)) простые. Заметим, что $P_n^s(0) \neq 0$, так что все x_k отличны от нуля. Пусть $\overline{x}$ — кратный корень многочлена (17), т. е. $\omega_n(\overline{x}) = \omega_n'(\overline{x}) = 0$. Из уравнения (15) следует, что и $\omega_n'(\overline{x}) = 0$. далее, дифференцируя уравнение (15) и полагая $x = \overline{x}$, последовательно найдём, что $\omega_n'''(\overline{x}) = \cdots = \omega_n^{(n)}(\overline{x}) = 0$. Но последнее равенство невозможно. Значит, все узлы КФНСТ (8) попарно различны.
Заметим, что в формуле (8) функция $\varphi_s(p)$ предполагается регулярной в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > 0$, так что правая часть в (8) существует лишь при условии $\mathrm{Re}\, q_k > 0$, т. е. все узлы КФНСТ должны принадлежать правой полуплоскости. Справедливость этого утверждения будет доказана позже.
Итак, КФНСТ обращения преобразования Лапласа и порождающие их ортогональные многочлены по сути ничем не отличаются от классических вещественных случаев. Правда, в классических случаях узлы КФНСТ принадлежат области интегрирования. В нашем случае буквального аналога этому утверждению быть не может, ибо в формуле обращения линия интегрирования произвольна, и узлы квадратуры не могут находиться на всех этих линиях. Тем не менее и для КФНСТ обращения преобразования Лапласа, как мы покажем, имеет место утверждение, аналогичное вещественному случаю, но имеющее более общий характер.

2.3. Связь КФНСТ обращения преобразования Лапласа с аппроксимациями Паде

В предположении регулярности функции $\varphi_s(p)$ при $\mathrm{Re}\, p > 0$ перепишем формулу обращения (1) иначе (после замены переменной вида $p_1 = pt$):

$$f(t) = t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi_s(p/t)\, dp\,, \quad c > 0. \tag{18}$$

Для приближённого вычисления интеграла заменим функцию e^p её дробно-рациональной аппроксимацией Паде (см. [11], [1]). Напомним их определение.
Пусть дана функция $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,\ a_0 \neq 0$.

Определение. *Аппроксимацией Паде типа $[m/n]$ для $f(z)$ называется функция*

$$[m/n]_f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где $P_m(z)$, $Q_n(z)$ — многочлены степеней m и n соответственно, такая, что

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = O\left(|z|^{m+n+1}\right), \quad z \to 0, \quad Q_n(0) = 1. \tag{19}$$

Если $f(z)$ дифференцируема достаточное число раз, то условие (19) равносильно таким условиям:

$$f^{(k)}(0) = \left(\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}\right)^{(k)}\Bigg|_{z=0}, \quad k = 0, 1, \ldots, m+n.$$

Для функции e^z существуют аппроксимации Паде всех типов и их можно построить по формулам

$$P_m(z) = {}_1F_1(-m, -m-n, z),$$
$$Q_n(z) = {}_1F_1(-n, -m-n, -z),$$

где

$${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}$$

есть гипергеометрическая функция. В следующих утверждениях выясняется тесная связь аппроксимаций Паде с КФНСТ.

Теорема 4. *Полюсы аппроксимации Паде типа $[m/n]$ для функции e^z при $m \geqslant n-1$ являются узлами КФНСТ обращения преобразования Лапласа вида (8).*

Доказательство. Знаменатель аппроксимации Паде типа $[m/n]$ для функции

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

можно представить в виде определителя (см. [1]) (с точностью до нормировки)

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} a_{m-n+1} & a_{m-n+2} & \ldots & a_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+n} \\ z^n & z^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

При $j < 0$ следует считать $a_j = 0$.
В случае $f(z) = e^z$ имеем

$$a_j = \frac{1}{j!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-j-1}\, dp, \quad c > 0. \tag{21}$$

Рассмотрим интегралы

$$I_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-(m-n+2)} [p^{-n} Q_n(p)] p^{-j}\, dp\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Положим $s = m-n+2$. По условию $m-n+2 \geqslant 0$, так что $s \geqslant 1$, и интегралы существуют. Подставляя в них выражение (20) для $Q_n(z)$ и учитывая представление (21), придём к равенству

$$I_j = \begin{vmatrix} a_{m-n+1} & a_{m-n+2} & \ldots & a_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+n} \\ a_{m-n+1+j} & a_{m-n+2+j} & \ldots & a_{m+1+j} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что при любом $j = 0, 1, \ldots, n-1$ последняя строка определителя совпадает с одной из предыдущих строк, так что все I_j равны нулю. А это означает, что многочлен $p^{-n} Q_n(p)$ удовлетворяет тем же условиям ортогональности, что и $P_n^s(1/p)$, и они отличаются лишь нормировкой, т. е. $Q_n(p) = c p^n P_n^s(1/p)$. Следовательно, корни знаменателя аппроксимации Паде совпадают с корнями уравнения $P_n^s(1/p) = 0$, т. е. с узлами КФНСТ. □

Теорема 5. *Пусть функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ при некотором натуральном s регулярна в полуплоскости $Re\, p > 0$. Если $P_m(p)/Q_n(p)$ — аппроксимация Паде типа $[m/n]$ для e^p и $s = m-n+2$, то при достаточно малом положительном значении c справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} p^{-s} \varphi_s\left(\frac{p}{t}\right)\, dp = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_s\left(\frac{p_k}{t}\right), \tag{22}$$

где A_k, p_k — коэффициенты и узлы КФНСТ вида (8).

Доказательство. Пусть $Q_n(p)$ — знаменатель аппроксимации Паде типа $[m/n]$ для функции e^p и $m - n + 2 = s$. Возьмём любое число c такое, что $0 < c < \min_k \operatorname{Re} p_k$, где p_k — корни уравнения $Q_n(p)$. Такое число c существует, так как все узлы КФНСТ расположены в правой полуплоскости.
Пусть $P_m(p)$ — произвольный многочлен степени m. Рассмотрим функцию

$$f(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = R_{m-n}(p) - \frac{B_1}{p-p_1} - \cdots - \frac{B_n}{p-p_n}. \tag{23}$$

Если $m - n < 0$, то $R_{m-n}(p) = 0$. Пусть γ означает замкнутый контур, проходимый по часовой стрелке и состоящий из дуги C_R окружности радиусом R с центром в точке $p = 0$, лежащей слева от прямой $\operatorname{Re} p = c$ и отрезка этой прямой, стягивающей дугу C_R. Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(p) p^{-s} \varphi_s(p/t)\, dp\,. \tag{24}$$

Интеграл в (24), берущийся по дуге C_R, при $R \to \infty$ стремится к нулю, так как на C_R справедливо равенство $f(p)p^{-s} = O(p^{-2})$, а $\varphi_s(p/t)$ ограничена. Значит, при $R \to \infty$ величина (24) стремится к левой части формулы (22). С другой стороны, по теореме о вычетах

$$I = \sum_{j=1}^{n} D_j \varphi_s(p_j/t),$$

если положить $D_j = B_j p_j^{-s}$. Теперь выберем значения входящих в (23) коэффициентов B_j так, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{n} D_j p_j^{-k} = \frac{1}{\Gamma(s+k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{25}$$

Отсюда находим, что $D_j = A_j$, ибо p_j — узлы КФНСТ, и условия (25) на самом деле верны для $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, и интеграл (24) равен правой части в формуле (22).
Теперь покажем, что первое слагаемое справа в (23) можно выбрать так, чтобы левая часть в (23) совпала с аппроксимацией Паде типа $[m/n]$ для e^p. Для этого достаточно показать, что совпадают в нуле значения производных $f(p)$ и e^p, т. е. $f^{(k)}(0) = 1,\ k = 0, 1, \ldots, m+n$. Дифференцируя k раз тождество (23) и полагая $p = 0$, находим

$$f^{(k)}(0) = R_{m-n}^{(k)}(0) + k! \sum_{j=1}^{n} B_j / p_j^{k+1}.$$

При $s = 1$, т. е. при $m = n-1$ первое слагаемое справа отсутствует; далее, $B_j = D_j p_j = A_j p_j$, и поэтому

$$f^{(k)}(0) = k! \sum_{j=1}^{n} B_j / p_j^{k+1} = 1.$$

Пусть теперь $m - n = s - 2 \geqslant 0$. При $k > m - n$ имеем

$$f^{(k)}(0) = k! \sum_{j=1}^{n} B_j / p_j^{k+1} = 1, \quad k = m-n+1, m-n+2, \ldots, m+n.$$

Далее, за счёт выбора коэффициентов многочлена $R_{m-n}(p) = b_0 + b_1 p + \cdots + b_{m-n} p^{m-n}$ добъёмся выполнения условий $f^{(k)}(0) = 1,\ k = 0, 1, \ldots, m-n$. В итоге такого выбора $f(p)$ оказывается апроксимацией Паде, для которой верна формула (22). $\square$

Утверждение теоремы 5 допускает такую “моментную” формулировку: пусть заданы числа (моменты)

$$\mu_j = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} p^{-j}\, dp\,, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

где s — натуральное число, и пусть $P_m(p)/Q_n(p)$ — аппроксимация Паде типа $[m/n]$ для e^p, причём $m - n + 2 = s$. Тогда имеют место равенства

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} p^{-s} p^{-j}\, dp = \mu_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m+n.$$

Замечание 1. *Как мы видели выше, для e^p существуют аппроксимации Паде всех типов $[m/n]$, в том числе и при $m < n-1$. Их также можно использовать для построения квадратурных формул обращения преобразования Лапласа: запишем формулу обращения в виде*

$$f(t) = \frac{1}{t}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p F\left(\frac{p}{t}\right)\, dp\,,$$

а затем заменим e^p её аппроксимацией Паде, что приводит к приближённой формуле

$$f(t) \approx \frac{1}{t}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} F\left(\frac{p}{t}\right)\, dp\,. \tag{26}$$

Теперь разложение (23) на простейшие дроби не содержит целой части ($R_{m-n}(p) = 0$). Повторяя предыдущие рассуждения применительно к интегралу (26), придём к квадратурной формуле по значениям функции $F(p_k/t)$, которую можно преобразовать, домножив и разделив слагаемые в квадратурной сумме на $(p_k/t)^s$, а подынтегральную функцию в (23) на $(p/t)^s$, к формуле вида (8), но теперь $s < 0$. Такие формулы при $t \to 0$ и $t \to \infty$ ведут себя иначе, чем КФНСТ.

Замечание 2. *Изучением сходимости КФНСТ в этом пункте мы не занимаемся, поскольку далее в пункте 4 будет исследован случай “обобщённых” КФНСТ, содержащих в себе КФНСТ.*

3. Оценка погрешности квадратурных формул обращения преобразования Лапласа

3.1. Формула обращения преобразования Лапласа, связанная с гамма-функцией

Пусть $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Как известно, функция $1/\Gamma(z)$ целая. При любом комплексном s функция $1/\Gamma(s+z)$ также целая, т. е.

$$\frac{1}{\Gamma(s+z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{js} z^j,$$

и ряд сходится абсолютно и равномерно на всей комплексной плоскости. В частности, при $z = n - s + 1$ получаем абсолютно сходящийся числовой ряд

$$\frac{1}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{js}(n+s-1)^j.$$

На множестве функций, регулярных на круге $|t| \leqslant r,\ r > 0$, введём оператор (скорее, символ)

$$\Gamma^{-1}\left(s + t\frac{d}{dt}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{js}\left(t\frac{d}{dt}\right)^j.$$

Пусть $f(t) = t^m,\ m$ — неотрицательное целое число. Очевидно,

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^j t^m = \left(t\frac{d}{dt}\right)^{j-1} t\frac{d}{dt}t^m = m\left(t\frac{d}{dt}\right)^{j-1} t^m = \cdots = m^j t^m.$$

Следовательно,

$$\Gamma^{-1}\left(s+t\frac{d}{dt}\right)t^m=\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_{js}m^jt^m=\frac{t^m}{\Gamma(s+m)}.$$

Положим, как обычно, $\varphi_s(p)=p^sF(p)$, где $F(p)$ — изображение некоторой функции-оригинала, s — положительное число.

Лемма 1. *Пусть функция $P_s(t)=\varphi_s(1/t)$ регулярна на круге $|t|\leqslant r,\ r>0$. Тогда функция*

$$g(t)=\Gamma^{-1}\left(s+t\frac{d}{dt}\right)P_s(t)$$

целая, а искомый оригинал равен $t^{s-1}g(t)$.

Доказательство. Функция $P_s(t)$ регулярна на круге $|t|\leqslant r$ и представима там рядом

$$P_s(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jt^j. \tag{1}$$

Следовательно,

$$\Gamma^{-1}\left(s+t\frac{d}{dt}\right)P_s(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\Gamma^{-1}\left(s+t\frac{d}{dt}\right)t^j=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\frac{t^j}{\Gamma(s+j)}\,.$$

Перестановка порядка суммирования и применения оператора Γ^{-1} оправдана абсолютной и равномерной сходимостью ряда (1). Очевидно, функция

$$g(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\frac{t^j}{\Gamma(s+j)}$$

целая, ибо этот ряд сходится всюду.
Введём функцию $f(t)=t^{s-1}g(t)$. Она абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a,b]$, $0\leqslant a<b<\infty$, так как $s>0$, и существует её преобразование Лапласа

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\frac{t^{s-1+j}}{\Gamma(s+j)}\,dt=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j}{p^{s+j}}=p^{-s}P_s\left(\frac{1}{p}\right)=F(p).$$

□

В дальнейшем нам потребуется одно неравенство, к выводу которого мы сейчас перейдём. Пусть функция $g(t)$ регулярна на круге $|t|\leqslant r,\ r>0$. Возьмём произвольную точку z такую, что $|z|<r$, и пусть $C=\{t\mid t=re^{i\varphi},0\leqslant\varphi<2\pi\}$. По формуле Коши имеем

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{g(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(re^{i\varphi})}{1-z/t}\,d\varphi.$$

Пусть задан некоторый линейный непрерывный функционал $\mathcal{L}$, тогда

$$\mathcal{L}g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(re^{i\varphi})\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z/t}\right)d\varphi \tag{2}$$

и

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z/t}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathcal{L}(z^m)}{t^m},$$

причём этот ряд сходится абсолютно, т. е. при фиксированном z сходится ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}|\mathcal{L}(z^m)|/r^m.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к (2), получим

$$|\mathcal{L}g(z)|^2\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}|g(re^{i\varphi})|^2\,d\varphi\int_0^{2\pi}\left|\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z/t}\right)\right|^2 d\varphi. \tag{3}$$

Используя ортогональность степеней на окружности

$$\int_0^{2\pi}t^{-m}\bar{t}^{\,-q}\,d\varphi=\begin{cases}0, & m\neq q,\\ 2\pi/r^{2m}, & m=q,\end{cases}$$

придём к тождеству

$$\int_0^{2\pi}\left|\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z/t}\right)\right|^2 d\varphi=2\pi\sum_{m=0}^{\infty}|\mathcal{L}(z^m)|^2/r^{2m}.$$

В итоге из (3) получим искомое неравенство

$$|\mathcal{L}g(z)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(re^{i\varphi})|^2\sum_{m=0}^{\infty}|\mathcal{L}(z^m)|^2/r^{2m}. \tag{4}$$

При $r=1$ это неравенство превращается в известное неравенство Хэммерлина [9].

3.2. Оценки погрешности квадратурных формул обращения преобразования Лапласа

Доказанная в предыдущем параграфе лемма и неравенство (4) позволяют получить оценки погрешности широкого класса квадратурных формул обращения преобразования Лапласа, в том числе и КФНСТ.

Пусть дано изображение $F(p)$ и $\varphi_s(p)=p^sF(p)$.

Теорема 1. *Пусть при некотором $s>0$ функция $P_s(t)=\varphi_s(1/t)$ регулярна на круге $|t|\leqslant r,\ r>0$, и пусть $A_1,\dots,A_n$ — произвольные комплексные числа, а $\mu_1,\dots,\mu_n$ произвольные попарно различные комплексные числа такие, что $|\mu_k|<1,\ k=1,2,\dots,n$. Тогда соответствующая функция-оригинал представима в виде*

$$f(t)=t^{s-1}\left[\sum_{k=1}^{n}A_kP_s(\mu_kt)+\varepsilon_n(t)\right], \tag{5}$$

и при любом ρ таком, что $0<t<\rho\leqslant r$, справедлива оценка

$$|\varepsilon_n(t)|\leqslant M_{\rho s}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\Gamma(s+m)}-\sum_{k=1}^{n}A_k\mu_k^m\right|^2\left(\frac{t}{\rho}\right)^{2m}\right]^{1/2}, \tag{6}$$

где

$$M_{\rho s}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_s(\rho e^{i\varphi})|^2\,d\varphi\right]^{1/2}.$$

Доказательство. На множестве функций $g(t)$, регулярных на круге $|t| \leqslant r$, рассмотрим оператор Q_s, действующий по правилу

$$Q_s g(t) = \left(\Gamma^{-1}\left(s + t\frac{d}{dt}\right) - \sum_{k=1}^{n} A_k G_k \right) g(t), \quad G_k g(t) = g(\mu_k t).$$

Пусть z — произвольное комплексное число такое, что $|z| < \rho \leqslant r$. Положим $g(t) = P_s(t)$ и введём функционал $\mathcal{L}$ так, что

$$\mathcal{L}g(z) = Q_s g(t)\,|_{t=z}\,.$$

По лемме 1 получаем

$$\mathcal{L}g(z) = \mathcal{L}P_s(z) = z^{1-s} f(z) - \sum_{k=1}^{n} A_k P_s(\mu_k z).$$

Положим $\varepsilon_n(z) = \mathcal{L}P_s(z)$, тогда

$$f(z) = z^{s-1}\left[\sum_{k=1}^{n} A_k P_s(\mu_k z) + \varepsilon_n(z)\right],$$

т. е. получили представление (5). Для оценки величины $\varepsilon_n(z)$ воспользуемся неравенством (4). Очевидно,

$$\mathcal{L}(z^m) = \frac{z^m}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^{n} A_k (\mu_k z)^m,$$

и потому

$$|\mathcal{L}P_s(z)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_s(re^{i\varphi})|^2\, d\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^{n} A_k \mu_k^m \right|^2 \left|\frac{z}{\rho}\right|^{2m}.$$

Это неравенство равносильно (6), если положить $z = t$, считая $0 < t < \rho \leqslant r$. Заметим, что в силу сделанных предположений ряд справа сходится.
Очевидно, формулу (5) можно рассматривать как КФ обращения преобразования Лапласа с коэффициентами A_k и узлами $p_k = 1/\mu_k$ и с погрешностью $\varepsilon_n(t)$, ибо $P_s(\mu_k t) = \varphi_s(p_k/t)$. Первый сомножитель $M_{\rho s}$ в оценке (6) зависит лишь от изображения и является нормой функции $P_s(t)$ на окружности радиусом $\rho < r$, а второй сомножитель зависит только от КФ. □

Следствие 1. *Справедлива более простая, менее точная оценка*

$$|\varepsilon_n(t)| \leqslant M_{\rho s} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^{n} A_k \mu_k^m \right|^2 \right)^{1/2}, \ 0 < t < \rho \leqslant r. \tag{7}$$

Следствие 2. *Справедливо неравенство*

$$|t^{1-s} f(t)| \leqslant M_{\rho s} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma^2(s+m)} \right)^{1/2}, \ 0 < t < \rho \leqslant r. \tag{8}$$

Для его доказательства достаточно в формуле (5) положить все коэффициенты A_k равными нулю. В частности, при $s = 1$ из (8) получаем априорную оценку искомого оригинала

$$|f(t)| \leqslant M_{\rho 1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!^2} \right)^{1/2} \approx 1.51 M_{\rho 1},\ 0 < t < \rho \leqslant r.$$

Перейдём к ИКФ. Пусть КФ

$$f(t) = t^{s-1} \left[\sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_s(p_k/t) + \varepsilon_n(t) \right] \tag{9}$$

интерполяционная, т. е. $\varepsilon_n(t) = 0$ для функций $\varphi_s(p) = p^{-j},\ j = 0, 1, \dots, n-1$, или другими словами, выполнены равенства

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{-m} = 1/\Gamma(s+m), \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Если числа $\mu_k = 1/p_k$ и функция $\varphi_s(p)$ удовлетворяют условию теоремы 1, то для погрешности $\varepsilon_n(t)$ ИКФ справедлива оценка

$$|\varepsilon_n(t)| \leqslant M_{\rho s} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^{n} A_k \mu_k^m \right|^2 \right)^{1/2},\ 0 < t < \rho \leqslant r.$$

Пусть теперь КФ (9) есть КФНСТ, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{-m} = 1/\Gamma(s+m), \quad m = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Напомним, что узлы КФНСТ простые, принадлежат полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и являются корнями уравнения $P_n^s(1/p) = 0$. Приведём без доказательства следующее утверждение (см. [34]).

Лемма 2. *При любом $s > 0$ корни уравнения $P_n^s(1/p) = 0$ удовлетворяют неравенству*

$$n + s - 1 \leqslant |p_k| < 2n + s - 2/3. \tag{10}$$

При любом $n > 1$ условие $|\mu_k| = |1/p_k| < 1$ выполнено, и если функция $\varphi_s(p)$ удовлетворяет условию теоремы 1, то для погрешности КФНСТ вида (9) справедлива оценка

$$|\varepsilon_n(t)| \leqslant M_{\rho s} \left(\sum_{m=2n}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{-m} \right)^2 \left(\frac{t}{\rho} \right)^{2m} \right)^{1/2},\ 0 < t < \rho \leqslant r.$$

Если $s > 1$, то эта оценка справедлива и для $n = 1$. В отличие от предыдущих КФ теперь в оценке отсутствует знак модуля, поскольку комплексные узлы КФНСТ попарно сопряжены (коэффициенты многочленов P_n^s вещественны), как и соответствующие им коэффициенты, и поэтому величина $\sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{-m}$ вещественна.

3.3. Скорость сходимости КФНСТ обращения преобразования Лапласа

3.3.1. Поведение узлов и коэффициентов КФНСТ при возрастании числа узлов

Далее узлы и коэффициенты будем обозначать p_{kn} и A_{kn}, чтобы подчеркнуть их зависимость от n, и саму КФНСТ в виде

$$f(t) = t^{s-1}\left[\sum_{k=1}^{n} A_{kn}\varphi_s(p_{kn}/t) + \varepsilon_n(t)\right].$$

Узлы p_{kn} суть корни уравнения $P_n^s(1/p_{kn}) = 0$, где

$$P_n^s(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(n+s-1)_k\, x^k = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+s-1)}\int_0^\infty e^{-t}t^{n+s-2}(1-xt)^n\, dt, \quad (11)$$

а коэффициенты A_{kn} однозначно определяются либо из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kn}p_{kn}^{-m} = 1/\Gamma(s+m), \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

либо по явным формулам, приведённым ниже.
Положим $z_{kn} = -(2n+s-2)/p_{kn}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В работе [34] показано, что при $n \to \infty$ точки z_{kn} стремятся к точкам кривой γ:

$$\gamma = \{z : |\omega(z)| = 1,\ \operatorname{Re} z < 0\},$$

где

$$\omega(z) = \exp\left(\sqrt{1+z^{-2}}\right)\Big/\left[z\left(1+\sqrt{1+z^{-2}}\right)\right].$$

Будем исходить из представления (см. [36])

$$A_{kn} = \frac{(-1)^{n+1}n!\,(2n+s-2)^2}{n^2\, p_{kn}^2\Gamma(n+s-1)\left(P_{n-1}^s(1/p_{kn})\right)^2}.$$

Положим $x_{kn} = 1/p_{kn}$, заменим n на $n-1$ в интеграле (11) и сделаем в нём замену переменной вида $t = (2n+s-2)t'$, далее вместо t' используем снова переменную t, в результете чего получим

$$P_{n-1}^s(x_{kn}) = (-1)^{n-1}\frac{(2n+s-2)^{n+s-2}}{\Gamma(n+s-2)}\int_0^\infty g(t)e^{(n-2)h(t)}\, dt, \quad (12)$$

где

$$g(t) = t^{s-1}e^{-t(s+2)}(1+z_{kn}t), \quad h(t) = -2t + \ln[t(1+z_{kn}t)].$$

Асимптотика интеграла в формуле (12) может быть найдена методом перевала [31], для чего сначала находим точки перевала как корни $t_\pm$ уравнения $h'(t) = 0$:

$$t_\pm = \frac{1 - z_{kn} \pm \sqrt{1+z_{kn}^2}}{-2z_{kn}},$$

а затем вычисляем значения функции $h(t)$ в них:

$$h(t_+) = \frac{1 - z_{kn} + \sqrt{1+z_{kn}^2}}{z_{kn}} + \ln \frac{-1}{2\left(z_{kn} + \sqrt{1+z_{kn}^2}\right)},$$

$$h(t_-) = \frac{1 - z_{kn} - \sqrt{1+z_{kn}^2}}{z_{kn}} + \ln \frac{\left(z_{kn} + \sqrt{1+z_{kn}^2}\right)}{2}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\int_0^\infty g(t) e^{(n-2)h(t)}\, dt \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(C_1 e^{nh(t_+)} + C_2 e^{nh(t_-)}\right), \tag{13}$$

где C_1, C_2 — не зависящие от n постоянные (далее всюду буквой C с индексом или без индекса будем обозначать величины, не зависящие от n). Рассмотрим поведение первого слагаемого в формуле (12) при $n \to \infty$ после подстановки в неё асимптотики (13):

$$\frac{(2n+s-2)^{n+s-2}}{\Gamma(n+s-2)} \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{nh(t_+)},$$

считая для простоты число s натуральным. Применение формулы Стирлинга даёт для него асимптотическое представление в виде

$$C_3 \frac{2^n n^{n+s-2}}{\sqrt{n} n^{n+s-3} e^{-n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{-1}{2\left(z_{kn} + \sqrt{1+z_{kn}^2}\right)}\right)^n \times$$
$$\times \left(\exp\left(\frac{1}{z_{kn}} - 1 + \frac{\sqrt{1+z_{kn}^2}}{z_{kn}}\right)\right)^n = C_4 \omega^n(z_{kn}) \left(\exp\left(\frac{1}{z_{kn}}\right)\right)^n.$$

Аналогично получаем представление для второго слагаемого:

$$\frac{(2n+s-2)^{n+s-2}}{\Gamma(n+s-2)} \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{nh(t_-)} \sim C_5 \omega^{-n}(z_{kn}) \left(\exp\left(\frac{1}{z_{kn}}\right)\right)^n.$$

Следовательно,

$$P_{n-1}^s(x_{kn}) \sim \left(\exp(1/z_{kn})\right)^n (C_5 \omega^n(z_{kn}) + C_6 \omega^{-n}(z_{kn})).$$

Если $|\omega^n(z_{kn})| > 1$, то главным в асимптотике будет первое слагаемое, в случае противоположного неравенства — второе слагаемое. Оказывается, что высоты перевалов в точках $t_\pm$, т. е. значения $\mathrm{Re}\,(h(t_\pm))$, одинаковы, что означает выполнение соотношения $|\omega^n(z_{kn})| \to 1$ при $n \to \infty$. Итак, $P_{n-1}^s(x_{kn}) \sim C_7 \left(\exp(1/z_{kn})\right)^n$.

Замечание 1. *В работе [34] высказана гипотеза (подтверждаемая вычислениями), что при $s > 0.0709$ величина $|z_{kn}|$ меньше модуля точки кривой γ, имеющей тот же аргумент, что и точка z_{kn}.*

В итоге с учётом полученной асимптотики величины $P_{n-1}^s(x_{kn})$ и явного выражения коэффициентов КФНСТ вытекает

Теорема 2. *Для коэффициентов КФНСТ при $n \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$A_{kn} \sim C n^{-s} (\exp(-1/z_{kn}))^{2n}. \tag{14}$$

Следствие 3. *При $n \to \infty$ величины $n^s A_{kn}$ и $\exp(p_{kn})$ возрастают с одинаковой скоростью.*

Действительно,

$$\exp(p_{kn}) = \exp(-(2n+s-2)/z_{kn}) = \exp((2-s)/z_{kn})(\exp(-1/z_{kn}))^{2n}.$$

Дальнейшее очевидным образом вытекает из (14).

Следствие 4. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\exp(\mathrm{Re}\,(1/z_{kn}))|n^s A_{kn}|^{1/(2n)} \sim 1, \quad n \to \infty.$$

Замечание 2. *Если $z \in \gamma$ и $\arg z$ монотонно изменяется от $\pi/2$ до π, то $|z|$ монотонно изменяется от 1 до 1.5088, а $Re\,(z)$ — от 0 до -1.5088. Следовательно, наибольшие по модулю коэффициенты A_{kn} соответствуют узлам p_{kn} с наименьшим аргументом.*

Замечание 3. *Аналогичным образом методом перевала может быть получена формула вида (14) для любой точки $z_{kn} \in \gamma$, отличной от z_0 и соответствующей коэффициенту A_{kn}: теперь величина C в формуле вида (14) содержит множитель $\exp(-i\,n\,\mathrm{Im}(h(t_+)))$, по модулю равный единице, а основание степени 3.764 следует заменить на меньшую величину $(\exp(-\mathrm{Re}\,(h(t_+)) - 1)/2)^2$.*

Следствие 5. *Устойчивость КФНСТ по отношению к ошибкам задания функции $\varphi_s(p)$ определяется величиной*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} |A_{kn}| \leqslant C n^{1-s} \max_k |\exp(-1/z_{kn})|^{2n} \approx C n^{1-s} 3.764^n. \tag{15}$$

Действительно, при нечётном n величина $\max_k |\exp(-1/z_{kn})|^2$ достигается на единственной вещественной точке $z_0 = -1.5088$ кривой γ, соответствующей единственному вещественному узлу, и приближённо равна 3.764.

Приведём необходимые в дальнейшем две важные характеристики КФНСТ: числа

$$\mu_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{kn} p_{kn}^{-j} \exp(-p_{kn}), \quad j = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

и дельтообразные ядра

$$\delta_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{kn} p_{kn} \exp(-p_{kn} x). \tag{17}$$

Теорема 3. *Для чисел (16) при $n \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mu_{nj} = O(n^{-j}), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Доказательство очевидным образом вытекает из утверждений теоремы 2 и её следствий с учётом соотношения $p_{kn}^{-j} = O(n^{-j})$.

Теорема 4. *При $n \to \infty$ справедливы асимптотические представления*

$$\delta_n(1) = O(n), \quad \delta_n(1+\varepsilon) = o(1)$$

для любого фиксированного положительного числа ε.

Доказательство основано на отмеченной выше ограниченности величин $nA_{kn}\exp(-p_{kn})$ и очевидной формуле $\exp(-\varepsilon p_{kn}) = o(1/n)$.

Итак, ядро (17) имеет в точке $x = 1$ ярко выраженный максимум, справа от неё с ростом n ядро стремится к нулю. Слева от точки $x = 1$ поведение ядра более сложное, для описания которого нужны отдельные исследования. Детальному исследованию КФНСТ и порождаемых ими дельтообразных ядер посвящены работы [17, 18, 19, 20].

3.3.2. Оценки погрешности КФНСТ

Для погрешности $\varepsilon_n(t)$ КФНСТ

$$f(t) = t^{s-1} \left[\sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_s(p_k/t) + \varepsilon_n(t) \right]$$

была получена оценка

$$|\varepsilon_n(t)| \leqslant M_{\rho s} \left(\sum_{m=2n}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{-m} \right)^2 \left(\frac{t}{\rho} \right)^{2m} \right)^{1/2}, \ 0 < t < \rho \leqslant r. \tag{18}$$

Узлы КФНСТ удовлетворяют неравенству (10), а для величины $M_n = \sum_{k=1}^{n} |A_{kn}|$ справедливо неравенство (15). Пусть $s > 0$. Положим

$$\sigma_n(t) = \left(\sum_{m=2n}^{\infty} a_m^2 \cdot (t/\rho)^{2m} \right)^{1/2}, \tag{19}$$

где

$$a_m = \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{-m}, \quad m = 2n,\, 2n+1, \ldots .$$

Очевидно,

$$|a_m| \leqslant B_m, \quad B_m = \frac{1}{\Gamma(s+m)} + M_n \max_k \frac{1}{|p_k|^m}.$$

Из неравенства (10) следует

$$\max_k \frac{1}{|p_k|} \leqslant \frac{1}{n+s-1} \equiv b_n.$$

Далее,

$$B_{m+1} = \frac{1}{\Gamma(s+m+1)} + M_n \max_k \frac{1}{|p_k|^{m+1}} \leqslant \max\left\{ \frac{1}{s+m}, b_n \right\} B_m = B_m b_n.$$

Теперь можно оценить погрешность (18).

Теорема 5. *Для любого $s > 0$ при $n > 1$ справедливо неравенство*

$$\sigma_n(t) \leqslant \frac{B_{2n}(t/\rho)^{2n}}{\left[1 - (b_n t/\rho)^2\right]^{1/2}}.$$

Доказательство. Из определения (19) получаем

$$\sigma_n^2(t) \leqslant B_{2n}^2 (t/\rho)^{4n} + B_{2n+1}^2 (t/\rho)^{4n+2} + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant B_{2n}^2 (t/\rho)^{4n} \left[1 + b_n^2 (t/\rho)^2 + b_n^4 (t/\rho)^4 + \ldots\right] = \frac{B_{2n}^2 (t/\rho)^{4n}}{1 - b_n^2 (t/\rho)^2}.$$

□

Замечание 4. *Поскольку* $|t/\rho| < 1$, *то*

$$\sigma_n(t) \leqslant \frac{B_{2n}}{\sqrt{1-b_n^2}}.$$

Далее, при $n \to \infty$ *очевидно неравенство* $1/\Gamma(2n+s) \ll M_n b_n^{2n}$, *так что* $B_{2n} = O(M_n b_n^{2n})$.

Итак, устойчивость и сходимость КФНСТ характеризуются числами

$$M_n = O(n^{1-s} 3.764^n), \quad B_{2n} = O\left(n^{1-s}\left(\frac{3.764}{n^2}\right)^n\right).$$

Перейдём к случаю натурального s. Возьмём аппроксимацию Паде типа $[m/n]$ для функции e^p, причём $m - n + 2 = s \geqslant 1$. Запишем её разложение на простейшие дроби в форме

$$\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = R_{m-n}(p) - \frac{B_1}{p-p_1} - \cdots - \frac{B_n}{p-p_n}. \tag{20}$$

Коэффициенты A_k КФНСТ, как было показано, связаны с коэффициентами этого разложения связны соотношением $A_k = B_k p_k^{-s}$. Введём в рассмотрение числа

$$C_r^{(m,n)} = \frac{1}{r!} - \sum_{k=1}^{n} B_k p_k^{-r-1} = \frac{1}{r!} - \sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{s-r-1}, \quad r = s-1,\, s, \ldots$$

В силу интерполяционности КФНСТ они обладают свойством

$$\begin{gathered} C_r^{(m,n)} = 0, \quad r = s-1,\, s, \ldots, s+2n-2 \\ (\text{или } r = m-n+1,\, m-n+2, \ldots, m+n), \end{gathered}$$

так что величина (19) представима в виде

$$\sigma_n(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{m+n+k+1}^{(m,n)}\right)^2 (t/\rho)^{2(n+k)}\right]^{1/2}. \tag{21}$$

Ряд (21) сходится при всех $t \leqslant \rho$, поскольку $|p_k| > 1$, следовательно, для всех $t \leqslant \rho$ справедлива оценка

$$\sigma_n(t) \leqslant \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{m+n+k+1}^{(m,n)}\right)^2\right]^{1/2} \equiv \sigma_{mn}. \tag{22}$$

Продифференцируем r раз ($r \geqslant 0$) тождество (20):

$$-r! \sum_{k=1}^{n} B_k p_k^{-r-1} = R_{m-n}^{(r)}(0) - \left(\frac{P_m(p)}{Q_n(p)}\right)^{(r)}\Bigg|_{p=0}.$$

При $s = 1$ первое слагаемое справа отсутствует, а при $s \geqslant 2$ числа $C_r^{(m,n)}$ не равны нулю лишь для $r > m+n$, но тогда $R_{m-n}^{(r)}(0) = 0$. Итак, для вычисления $C_r^{(m,n)}$ достаточно уметь вычислять значения производных аппроксимации Паде в точке $p = 0$. Положим

$$D_k = \left(\frac{P_m(p)}{Q_n(p)}\right)^{(k)}\Bigg|_{p=0}, \quad k = 0,\, 1, \ldots$$

Считать непосредственно по этой формуле затруднительно. Укажем более простой способ, предварительно построив представление остаточного члена аппроксимацмм Паде. Положим $R_{mn}(z) = e^z - P_m(z)/Q_n(z)$. Из определения аппроксимации Паде следует, что функция

$$e^z Q_n(z) - P_m(z) = R_{mn}(z) Q_n(z) \tag{23}$$

при $z \to 0$ имеет порядок малости не менее $m+n+1$.

Лемма 3. *Справедливы представления*

$$R_{mn}(z) = \frac{(-1)^n m!\, n!\, z^{n+m+1} {}_1F_1(n+1, n+m+1, z)}{(m+n+1)!\,(m+n)!\, Q_n(z)},$$

$$e^z Q_n(z) - P_m(z) = (-1)^n \frac{m!}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \frac{z^{n+m+k+1}}{(n+m+k+1)!}.$$

Доказательство. Возьмём от обеих частей (23) производную порядка $n+m+k+1$ и вычислим её при $z=0$, применяя формулу Лейбница и представление аппроксимации Паде через гипергеометрический ряд. Производная левой части равна

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+m+k+1}{j} Q_n^{(j)}(0) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+m+k+1}{j} \frac{n!\,(m+n-j)!}{(n+m)!\,(n-j)!} =$$

$$= (-1)^n \frac{n!\,m!}{(m+n)!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n+m+k+1}{j} \binom{m+n-j}{n-j} = \tag{24}$$

$$= (-1)^n \frac{n!\,m!}{(m+n)!} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n+m+k+1}{n-l} \binom{m+l}{l}.$$

Рассмотрим тождество $(1+x)^i (1+x)^{-k-1} = (1+x)^{i-k-1}$ для целых неотрицательных значений i, k. Очевидны представления

$$(1+x)^i = 1 + xC_i^1 + x^2 C_i^2 + \dots + x^i C_i^i,$$
$$(1+x)^{-k-1} = 1 - xC_{k+1}^1 + x^2 C_{k+2}^2 - \dots + (-1)^l x^l C_{k+l}^l + \dots,$$
$$(1+x)^{i-k-1} = 1 + xC_{i-k-1} + x^2 C_{i-k-1}^2 + \dots + x^n C_{i-k-1} + \dots$$

Перемножим два первых тождества и затем найдём коэффициент при x^n, он будет равен (суммирование идёт по всем допустимым l)

$$\sum_l (-1)^{n-l} C_{n+k-l}^{n-l} C_i^l = \sum_l (-1)^l C_{k+l}^l C_i^{n-l}.$$

Приравнивая его к соответствующему коэффициенту в третьем равенстве, получим тождество

$$\sum_l (-1)^l C_{k+l}^l C_i^{n-l} = C_{i-k-l}^l.$$

С его помощью вычисляется последняя сумма в (24):

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n+m+k+1}{n-l} \binom{m+l}{l} = C_{n+k}^n = \frac{(n+k)!}{k!\,n!},$$

из чего следует

$$\left.(e^z Q_n(z))^{(n+m+k+1)}\right|_{z=0} = (-1)^n \frac{m!}{(n+m)!}\frac{(n+k)!}{k!}, \quad k = 0,\, 1, \ldots,$$

и окончательное представление в виде ряда

$$e^z Q_n(z) - P_m(z) = (-1)^n \frac{m!}{(n+m)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!}\frac{z^{n+m+k+1}}{(n+m+k+1)!}. \tag{25}$$

Разделив обе части этого представления на $Q_n(z)$, получим доказываемое равенство для $R_{mn}(z)$. □

Запишем левую часть (25) в виде $Q_n(p)[e^p - P_m(p)/Q_n(p)]$; её производная порядка $r \geqslant 0$ в точке $p = 0$ равна

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k} Q_n^{(k)}(0)(1 - D_{r-k}). \tag{26}$$

Значения $Q_n^{(k)}(0)$ отличны от нуля и равны

$$Q_n^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{n!\,(m+n-k)!}{(n+m)!\,(n-k)!}, \quad k = 0,\, 1, \ldots, n.$$

Приравнивая значения (26) значению производной порядка r правой части (25) при $z = 0$ и полагая последовательно $r = 0, 1, \ldots$, мы сможем определить все значения $D_k,\ k = 0, 1, \ldots$ Очевидно, $D_k = 1$, если $k \leqslant m + n$ (впрочем, эти равенства следуют из определения аппроксимации Паде), и из определения чисел $C_r^{(m,n)}$ вновь следует, что $C_r^{(m,n)} = 0$ при $r \leqslant m + n$. В итоге приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. *Для $r \geqslant m + n + 1$ величины $C_r^{(m,n)}$ могут быть вычислены по формулам*

$$\begin{aligned}
C_{m+n+1}^{(m,n)} &= (-1)^n \frac{m!\,n!}{(m+n)!\,(m+n+1)!},\\
C_r^{(m,n)} &= (-1)^n \frac{m!\,(r-m-1)!}{(n+m)!\,(r-m-n-1)!} -\\
&- \sum_{k=1}^{j}(-1)^k \frac{n!\,(m+n-k!)}{(n-k)!\,(m+n)!\,k!} C_{r-k}^{(m,n)},\\
r &= n+m+2,\, n+m+3, \ldots, \quad j = \min\{n,\, r-n-m-1\}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Теперь можно установить скорость убывания величины

$$\sigma_{mn} = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{m+n+k+1}^{(m,n)}\right)^2\right]^{1/2} \tag{28}$$

при возрастании числа узлов n.

Теорема 6. *Для любого фиксированного натурального s такого, что $m - n + 2 = s$, величина (28) при $n \to \infty$ удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$\sigma_{mn} = O\left(\frac{m!\,n!}{(m+n)!\,(m+n+1)!}\right).$$

Доказательство. Из (27) находим рекуррентное соотношение

$$C_{m+n+2}^{(m,n)} = C_{m+n+1}^{(m,n)} \left(\frac{n+1}{n+m+2} + \frac{n}{m+n} \right).$$

Ясно, что при $n \to \infty$ и m стремится к бесконечности, так что $C_{m+n+2}^{(m,n)} \sim C_{m+n+1}^{(m,n)}$. Пусть $r = m+n+j$, $j = 1, 2, \ldots$ При увеличении r на единицу первое слагаемое справа в (27) умножается на величину $(n+j)/j(n+m+j+1)$, т. е. он имеет тот же порядок относительно n, а с ростом j убывает как $1/j$. Далее, нетрудно убедиться, что сумма модулей коэффициентов при $C_{r-k}^{(m,n)}$ во втором слагаемом справа в (27) ограничена величиной $(e-1)/2$, а сами величины $C_{r-k}^{(m,n)}$ ведут себя примерно так же, как и первое слагаемое в (27). Следовательно, справедливо асимптотическое равенство

$$C_{m+n+j+1}^{(m,n)} \sim a C_{m+n+1}^{(m,n)}/j!,$$

где a — некоторая константа. Значит, скорость убывания величины (28) совпадает со скоростью убывания первого ненулевого коэффициента (26), что и требовалось доказать. $\square$

Итак, КФНСТ быстро сходятся, практически с той же скоростью, что и классические квадратуры типа Гаусса.

Замечание 5. *Утверждения лемм 3, 4 и теоремы 6 остаются в силе и при целом $s \leqslant 0$. Как и ранее, берём аппроксимацию Паде типа $[m/n]$ при $m-n+2 = s$ и рассматриваем интеграл (26) п. 2. Для его приближённого вычисления описанным ранее способом строится квадратурная формула по корням знаменателя аппроксимации Паде, т. е. корням уравнения $Q_n(p) = 0$. Оказывается, что при условии $n+s-1 > 0$ все корни этого уравнения попадают в правую полуплоскость [34]. Далее, как и ранее, вводим числа $C_r^{(m,n)}$. Покажем, что при $s \leqslant 0$ имеют место равенства*

$$C_r^{(m,n)} = 0, \quad r = s-1, s, \ldots, -1.$$

Так как $m-n < 0$, то аппроксимация Паде имеет вид

$$\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{p-p_i}.$$

Положим $p = 1/w$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{p-p_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{wB_i}{1-wp_i} = \sum_{i=1}^{n} wB_i \sum_{k=0}^{\infty} (wp_i)^k = \sum_{k=0}^{\infty} w^{k+1} \sum_{i=1}^{n} B_i p_i^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k w^{k+1},$$

где

$$d_k = \sum_{i=1}^{n} B_i p_i^{\,k}.$$

С другой стороны,

$$\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \frac{p^{(0)}p^m + p^{(1)}p^{m-1} \cdots + p^{(m)}}{q^{(0)}p^n + q^{(1)}p^{n-1} \cdots + q^{(n)}} = w^{n-m} \frac{p^{(m)}w^m + \cdots + p^{(0)}}{q^{(n)}w^n + \cdots + q^{(0)}} =$$
$$= w^{n-m} \frac{p^{(0)}}{q^{(0)}} \left(1 + c_1 w + c_2 w^2 + \ldots\right).$$

Следовательно,

$$w^{n-m}\frac{p^{(0)}}{q^{(0)}}\left(1+c_1w+c_2w^2+\dots\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}d_kw^{k+1},$$

и так как слева стоит малая величина порядка $n-m$, то необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$d_0=d_1=\dots=d_{n-m-2},$$

которые можно записать эквивалентным образом в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{p_i^{r+1}}=\frac{1}{\Gamma(r+1)},\quad r=s-1,\,s,\dots,-1.$$

Все дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в случае положительных s.

В таблице 1 приведены значения σ_{mn} для $s=1$, т. е. $m=n-1$, показывающие высокую скорость сходимости КФНСТ. Однако следует помнить, что для достижения такой точности приближенного решения необходимо обеспечить проведение вычислений с достаточным числом значащих цифр, а также обеспечить соответствующую точность вычисления изображения, иначе отмеченная ранее неустойчивость КФНСТ сведет на нет все усилия.

Таблица 1

n	σ_{mn}	n	σ_{mn}
2	$2.6\cdot10^{-2}$	8	$1.2\cdot10^{-17}$
4	$1.2\cdot10^{-6}$	10	$7.1\cdot10^{-24}$
6	$7.3\cdot10^{-12}$	12	$1.8\cdot10^{-30}$

4. Обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности обращения преобразования Лапласа

4.1. Постановка задачи

Напомним, что КФНСТ по построению точна для оригиналов вида $t^{s-1}Q_{2n-1}(t)$, где $Q_{2n-1}(t)$ — любой многочлен степени не выше $2n-1$. В предположении существования значений $f(+0), f(+\infty)$ и ограниченности оригинала следует полагать $s=1$, тогда КФНСТ при $t\to0$ и $t\to\infty$ приводит к точному результату, так как сумма коэффициентов КФНСТ равна единице. Заметим, что предельные значения оригинала $f(+0), f(+\infty)$, если они существуют, могут быть вычислены по формулам

$$f(+0)=\lim_{p\to\infty}pF(p),\qquad f(+\infty)=\lim_{p\to0}pF(p).$$

К сожалению, КФНСТ плохо приспособлены для обращения изображений, соответствующих медленно протекающим длительным процессам. Так, в задачах линейной вязкоупругости [23], описывающих напряженное состояние на основе определяющего соотношения Больцмана—Вольтерра (пространственные координаты ниже для простоты опущены), деформации ε и напряжения σ связаны соотношением (обобщённый закон Гука)

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E}\left(\sigma(t)+\lambda\int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)\,d\tau\right).\tag{1}$$

Первое слагаемое справа в (1) соответствует мгновенной деформации, а второе — наследственной деформации. Как правило, из эксперимента определяется функция ползучести материала — значение правой части (1) при $\sigma = \mathrm{const}$, т. е.

$$\varepsilon(t) = \frac{c}{E}\left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau)\, d\tau\right). \tag{2}$$

Важнейшей задачей становится выбор подходящего ядра K интегрального уравнения (1), определяющего функцию ползучести (2). Ядро K должно иметь интегрируемую особенность в точке $t = 0$. Чаще всего в качестве такового берут дробно-экспоненциальную функцию Работнова [23] (резольвента ядра Абеля)

$$Э_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^k}{\Gamma((1+\alpha)(1+k))}, \qquad -1 < \alpha \leqslant 0. \tag{3}$$

Способ определения параметров дробно-экспоненциальной функции по измеренной функции ползучести описан в работе [8].
Интеграл от этого ядра по полуоси $t \geqslant 0$ должен быть конечным, для чего необходимо выполнение условия $\beta < 0$. Не умаляя общности, далее считаем $\beta = -1$, и пусть символ $Э_\alpha(t)$ означает $Э_\alpha(-1, t)$.
В наследственной механике твердого тела наряду с функцией (3) широко используется и интеграл от нее с переменным верхним пределом. Для облегчения использования этих величин составлены таблицы функций [23]

$$F_1(\alpha, x) = t^{-\alpha} Э_\alpha(x), \quad F_2(\alpha, x) = t^{-\alpha-1} \int_0^t Э_\alpha(\tau)\, d\tau, \quad x = t^{\alpha+1}.$$

Заметим, что $F_1(\alpha, x) = E_{1/a}(-x, a), \quad a = \alpha + 1$, где

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$$

есть функция Миттаг-Леффлера [6].
Однако при решении конкретных задач необходимо вводить в память вычислительной машины части этих таблиц, соответствующие найденным параметрам $Э_\alpha$— функций, которые заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи (и в итоге таковых в таблице может не оказаться). При изменении параметров приходится эту работу проделывать заново, что неудобно и сопряжено с внесением ошибок.
Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1), получаем

$$\overline{\varepsilon}(p) = \frac{1}{E}\left(1 + \frac{\lambda}{p^{\,\alpha+1} - \beta}\right)\overline{\sigma}(p). \tag{4}$$

В частности, изображение функции ползучести равно

$$\overline{\varepsilon}(p) = \frac{c}{pE}\left(1 + \frac{\lambda}{p^{\,\alpha+1} - \beta}\right). \tag{5}$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению движения среды, получим второе соотношение между $\overline{\varepsilon}(p)$ и $\overline{\sigma}(p)$, а затем, используя (4), найдём $\overline{\varepsilon}(p)$ и $\overline{\sigma}(p)$. Если искомые

функции $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ ограничены, то можно положить $s = 1$ и в качестве $\varphi_s(p)$ рассматривать функции $p\,\overline{\varepsilon}(p)$ и $p\,\overline{\sigma}(p)$. Они зависят фактически от $p^{\,a}$, $a = \alpha + 1$. Заметим, что для реальных процессов деформирования значение s можно увеличить: так, изображение по Лапласу второго слагаемого в (2), определяющего наследственную деформацию, равно $\lambda/(p(p^{\,a} - \beta))$, и можно положить $s = 1 + a$. Искомые решения $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ на конечном по t отрезке времени допускают хорошие приближения вида $t^{s-1}Q(t^a)$ при $0 < a \leqslant 1$, где $Q(t)$ — некоторый многочлен, и при уменьшении a скорость их изменения уменьшается.
В таком случае целесообразно вместо КФНСТ построить и использовать обобщенные квадратурные формулы наивысшей степени точности (ОКФНСТ), точные для функций $\varphi(p) = p^{-aj}$, $j = \overline{0, 2n-1}$, или для оригиналов вида $t^{s-1}Q_{2n-1}(t^a)$ (Q_{2n-1} — произвольный многочлен), где a — любое положительное число (наибольший интерес представляет случай $a \in (0, 1]$).
Такие формулы были введены в работе [25] и исследованы в статье [26]. Результаты их применения к решению практических задач содержатся в [8].

4.2. Обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности

Рассматривается квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}\varphi(p)\,dp \approx \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi(p_k) \tag{6}$$

с узлами в правой полуплоскости, в которой $\varphi(p)$ регулярна. Потребуем, чтобы формула (6) была точна для функций $\varphi(p) = p^{-am}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$ (т.е. обладала $(n-1)$-свойством), где a — некоторое фиксированное положительное число. Это требование равносильно условиям

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{-am} = \frac{1}{\Gamma(s+am)},\ m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7}$$

которые будем называть условиями интерполяционности, а саму формулу (6) интерполяционной. Условия (7) эквивалентны формулам

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}\frac{\omega_n(p^{-a})}{(p^{-a} - p_k^{-a})\omega_n'(p_k^{-a})}\,dp\,, \tag{8}$$

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - p_k^{-a}). \tag{9}$$

Как и в случае КФНСТ, естественно поставить задачу построения формул наивысшей степени точности за счёт выбора узлов.

Теорема 1. *Для того чтобы формула* (6) *обладала* $(2n-1)$*-свойством, необходимо и достаточно выполнения двух условий:*
1) формула (6) *интерполяционная, т. е. её коэффициенты вычисляются по формуле* (8)*;*
2) построенный по узлам формулы многочлен (9) *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}\omega_n(p^{-a})p^{-am}\,dp = 0\,,\ m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть формула (6) обладает $(2n-1)$-свойством. Очевидно, что она интерполяционная. Возьмём произвольный многочлен $Q_{n-1}(p^{-a})$ и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}\omega_n(p^{-a})Q_{n-1}(p^{-a})\,dp\,.$$

Так как $\omega_n(p^{-a})Q_{n-1}(p^{-a})$ есть многочлен от p^{-a} степени не выше $2n-1$, то этот интеграл точно вычисляется по формуле (6), что даёт нулевое значение. Следовательно, второе условие выполнено.

Пусть теперь выполнены условия $1), 2)$ теоремы. Возьмём произвольный многочлен $P_{2n-1}(p^{-a})$ и разделим его на $\omega_n(p^{-a})$:

$$P_{2n-1}(p^{-a}) = \omega_n(p^{-a})Q_{n-1}(p^{-a}) + R_{n-1}(p^{-a}).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}P_{2n-1}(p^{-a})\,dp =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}\omega_n(p^{-a})Q_{n-1}(p^{-a})\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}R_{n-1}(p^{-a})\,dp.$$

Первый интеграл по условию 2) равен нулю, а второй интеграл по условию 1) точно равен

$$\sum_{k=1}^{n} A_k R_{n-1}\left(p_k^{-a}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_k P_{2n-1}\left(p_k^{-a}\right),$$

т. е. формула (6) обладает $(2n-1)$-свойством. □

Доказанная теорема сводит вопрос о существовании квадратурной формулы (6) с $(2n-1)$-свойством к существованию многочлена $\omega_n(x)$ вида (9), удовлетворяющего условию (10).

Лемма. *Для любых положительных чисел a, s и при любом целом неотрицательном m определитель*

$$\begin{vmatrix} 1/\Gamma(s) & 1/\Gamma(s+a) & \dots & 1/\Gamma(s+ma) \\ 1/\Gamma(s+a) & 1/\Gamma(s+2a) & \dots & 1/\Gamma(s+(m+1)a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/\Gamma(s+ma) & 1/\Gamma(s+(m+1)a) & \dots & 1/\Gamma(s+2ma) \end{vmatrix} \qquad (11)$$

отличен от нуля.

Доказательство. Для $m = 1$ утверждение очевидно. Пусть $m > 1$. Домножим первую строку и первый столбец определителя на $\Gamma(s/2)$, вторую строку и второй столбец — на $\Gamma(s/2+a)$, и так далее, последнюю строку и последний столбец — на $\Gamma(s/2+ma)$. Все эти числа не равны нулю. Воспользуемся известным соотношением между B- и Γ-функциями Эйлера

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

в результате чего получим определитель

$$
\begin{vmatrix}
B(s/2, s/2) & \dots & B(s/2, s/2+ma) \\
B(s/2+a, s/2) & \dots & B(s/2+a, s/2+ma) \\
\dots & \dots & \dots \\
B(s/2+ma, s/2) & \dots & B(s/2+ma, s/2+ma)
\end{vmatrix}. \tag{12}
$$

Теперь рассмотрим однородную систему уравнений относительно неизвестных вещественных чисел $c_0, \dots, c_m$

$$
\begin{aligned}
c_0 B(s/2, s/2) + \ldots + c_m B(s/2, s/2+ma) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
c_0 B(s/2+ma, s/2) + \ldots + c_m B(s/2+ma, s/2+ma) = 0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

или в интегральной форме

$$
\int_0^1 p(t) t^{ak} Q_m[(1-t)^a]\, dt = 0,\ k = 0, 1, \dots, m, \tag{14}
$$

где

$$
p(t) = [t(1-t)]^{s/2-1}, \quad Q_m(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m.
$$

Следовательно, для любого многочлена $P_m(x)$ будет справедливо равенство

$$
\int_0^1 p(t) P_m(t^a) Q_m[(1-t)^a]\, dt = 0. \tag{15}
$$

Если многочлен $Q_m(x)$ тождественно не равен нулю, то он не может иметь на $(0, 1)$ более m различных корней. В силу произвольности можно так выбрать многочлен $P_m(x)$ с вещественными коэффициентами, чтобы функция $P_m(t^a)$ меняла знак на $(0, 1)$ в тех же точках, что и $Q_m[(1-t)^a]$. Но в таком случае интеграл отличен от нуля. Значит, условия (13) выполняются лишь для $Q_m(x) \equiv 0$, т. е. система (13) имеет только тривиальное решение, что возможно лишь в случае, когда оба определителя (12), (11) отличны от нуля. □

Теорема 2. *Многочлен $\omega_n(x)$ вида* (9)*, удовлетворяющий условиям* (10)*, существует и единствен.*

Доказательство. Искомый многочлен запишем в виде $\omega_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$. Как известно,

$$
\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-\alpha}\, dp = \frac{1}{\Gamma(\alpha)},\ \alpha > 0,
$$

поэтому условия ортогональности равносильны системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов $b_1, \dots, b_n$:

$$
\frac{b_1}{\Gamma[s + (n+k-1)a]} + \cdots + \frac{b_n}{\Gamma[s + ka]} = -\frac{1}{\Gamma[s + (n+k)a]},\ k = 0, 1, \dots, n-1.
$$

Определитель этой системы по лемме 4.2 отличен от нуля, так что у неё существует единственное (вещественное) решение. □

Итак, многочлен $\omega_n(x)$, определяющий узлы обобщённой квадратурной фомулы наивысшей степени точности (ОКФНСТ) с $(2n-1)$-свойством, определяется однозначно. При $a=1$ ОКФНСТ совпадают с КФНСТ, построенными ранее, и их узлы, как было показано, простые. Значит, и в некоторой окрестности точки $a=1$ все точки p_k^{-a} также простые. При построении ОКФНСТ для различных значений n, s, a узлы всегда оказывались попарно различными. Видимо, утверждение о простоте корней справедливо при любом $a>0$, однако его доказательством мы не располагаем.

4.3. Расположение узлов обобщённых квадратурных формул наивысшей степени точности

В предыдущем пункте были приведены необходимые и достаточные условия того, что КФ обладает $(2n-1)$-свойством. Докажем, что это наивысшая возможная степень точности.

Теорема 3. *При любом выборе узлов квадратурная формула с n узлами не может обладать $2n$-свойством.*

Доказательство. Если КФ обладает $2n$-свойством, то она обладает и $(2n-1)$-свойством. Значит, её узлы однозначно определяются теоремой 1. Возьмём произвольный многочлен $Q_n(x)$ с вещественными коэффициентами и положим $P_{2n}(x) = \omega_n(x)Q_n(x)$. Его коэффициенты вещественны. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} P_{2n}(p^{-a})\,dp\,. \tag{16}$$

Применение к нему ОКФНСТ даёт нулевой результат. С другой стороны, в представлении

$$p^{-s}P_{2n}(p^{-a}) = [p^{-s/2}\omega_n(p^{-a})][p^{-s/2}Q_n(p^{-a})]$$

оба сомножителя суть изображения функций

$$f_1(x) = x^{s/2-1}\Omega_n(x^a), \quad f_2(x) = x^{s/2-1}q_n(x^a),$$

где $\Omega_n(x)$, $q_n(x)$ — многочлены с вещественными коэффициентами, так что интеграл (16) равен значению свёртки $(f_1 * f_2)(t)$ в точке $t=1$, т. е. интегралу

$$\int_0^1 [x(1-x)]^{s/2-1}\Omega_n(x^a)q_n[(1-x)^a]\,dx.$$

Этот интеграл имеет вид (15), и к тому же многочлен $\Omega_n(x)$ отличен от нуля, так как порождающий его многочлен $\omega_n(x)$ не нулевой. Но тогда, как было показано выше, можно так выбрать $Q_n(x)$, порождающий многочлен $q_n(x)$, что интеграл будет отличен от нуля. Следовательно, ОКФНСТ для интеграла (15) не точна. □

Перейдём к вопросу о расположении узлов ОКФНСТ.

Теорема 4. *Узлы ОКФНСТ удовлетворяют неравенствам*

$$\mathrm{Re}\,(p_k^{\,a}) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай вещественных корней (такие вседа существуют при нечётном n). Пусть r — вещественный корень уравнения $\omega_n(x) = 0$. Следовательно, $\omega_n(x) = (x - r)Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ — некоторый многочлен с вещественными коэффициентами. Запишем условие ортогональности (10) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p[p^{-\alpha}(p^{-a} - r)][p^{-\beta}Q_{n-1}(p^{-a})][p^{-\gamma}P_{n-1}(p^{-a})]\, dp = 0, \tag{17}$$

где α, β, γ — любые положительные числа такие, что $\alpha + \beta + \gamma = s$, а $P_{n-1}(x)$ — произвольный многочлен с вещественными коэффициентами. Очевидно, каждая квадратная скобка есть изображение, причём первая их них соответствует оригиналу

$$f_1(t) = t^{\alpha-1}\left[\frac{t^a}{\Gamma(\alpha + a)} - \frac{r}{\Gamma(\alpha)}\right],$$

а две другие соответствуют функциям

$$f_2(t) = t^{\beta-1}q_{n-1}(t^a), \quad f_3(t) = t^{\gamma-1}p_{n-1}(t^a),$$

где $q_{n-1}(x)$, $p_{n-1}(x)$ — некоторые многочлены с вещественными коэффициентами. Левая часть (17) есть формула обращения при $t = 1$, т.е. она равна значению оригинала, соответствующего произведению трёх изображений, входящих в (17), и этот оригинал есть свёртка $f_1 * f_2 * f_3$, значение которой в точке $t = 1$ равно интегралу в левой части формулы (17). Функция $f_1(t)$ при $r \leqslant 0$ знакопостоянна на $(0, 1)$, а функции $f_2(t), f_3(t)$ имеют на $(0, 1)$ не более $n - 1$ корней каждая. Значит, свёртка $f_1 * f_2$ имеет на $(0, 1)$ не более $n - 1$ корней (интегрирование по некоторому отрезку не увеличивает числа корней интегрируемой фукции). Далее, как и выше, можно так выбрать многочлен $p_{n-1}(x)$, что в свёртке $(f_1 * f_2) * f_3$ подынтегральная функция будет знакопостоянна, так что свёртка будет отлична от нуля, что противоречит равенству (17). Итак, необходимо $r > 0$.
Перейдём к случаю комплексных корней: пусть $\omega_n(x) = (x^2 + 2bx + c)Q_{n-2}(x)$, причём числа b, c и все коэффициенты многочлена $Q_{n-2}(x)$ вещественны, и выполнено неравенство $b^2 < c$, т.е. корни комплексны и сопряжены. Предположим, что $b \geqslant 0$. По аналогии с предыдущим случаем запишем условие ортогональности в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p[p^{-\alpha}(p^{-2a} + 2bp^{-a} + c)][p^{-\beta}Q_{n-2}(p^{-a})]\times$$
$$\times [p^{-\gamma}P_{n-1}(p^{-a})]\, dp = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = s. \tag{18}$$

Первой квадратной скобке отвечает оригинал

$$t^{\alpha-1}\left[\frac{t^{2a}}{\Gamma(\alpha + 2a)} + 2b\frac{t^a}{\Gamma(\alpha + a)} + c\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right],$$

не меняющий знака на $(0, 1)$. Его свёртка с оригиналом, отвечающем второй скобке, имеет на $(0, 1)$ не более $n - 2$ корней, а за счёт выбора $P_{n-1}(x)$ можно сделать всю свёртку знакопостоянной, а тем самым и интеграл слева в (18) отличным от нуля, что противоречит равенству (18). Значит, $b < 0$, что и доказывает теорему. □

Следствие. *Узлы КФНСТ (см. п. 2) принадлежат правой полуплоскости.*

Это утверждение вытекает из теоремы 4 при $a = 1$.

4.4. Сходимость обобщённых квадратурных формул наивысшей степени точности

Пусть при некотором $s > 0$ функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Преобразуем формулу обращения Римана-Меллина к виду

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p)\, dp. \tag{19}$$

Затем представляем $\varphi_s(p)$ в виде суммы интерполяционного многочлена для неё по узлам ОКФНСТ и погрешности интерполяции $r_n(\varphi_s, p)$ (см. п. 2.1). Для вычисления первого слагаемого в (19) применим ОКФНСТ:

$$\frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p} p^{-s} \varphi_s(p/t)\, dp \approx t^{s-1} \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_s(p_k/t), \tag{20}$$

а второе слагаемое есть погрешность $R_n(\varphi_s, t)$ ОКФНСТ (20), которая выражается через погрешность интерполяции $r_n(\varphi_s, p)$ функции $\varphi_s(p)$ по её значениям в узлах формулой

$$R_n(\varphi_s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} r_n(\varphi_s, p)\, dp\,. \tag{21}$$

Надеяться на сходимость ОКФНСТ можно только при сходимости интерполяционного процесса, поэтому исследование начнем с изучения сходимости интерполирования.
Далее считаем, что функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ зависит лишь от p^a, т. е. $\varphi_s(p)$ есть некоторая функция от p^a : $\Phi(p^a)$. В этом случае как интерполяционный многочлен для $\varphi_s(p) = p^s F(p)$, так и погрешность интерполяции также зависят лишь от p^a, и потому погрешность интерполяции в (21) далее будем обозначать как $r_n(\varphi_s, p^a)$. Положим $w = p^a$ и предположим, что все особые точки функции $\Phi(w)$ расположены в конечной части полуплоскости $\operatorname{Re} w < 0$.
В результате замены переменной

$$z = \frac{a-w}{a+w}, \quad a > 0, \tag{22}$$

полуплоскость $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ конформно отображается на круг $|z| \leqslant 1$, на котором функция

$$\Phi_1(z) = \Phi(a(1-z)/(1+z)) \tag{23}$$

заведомо регулярна. Если все особые точки $\Phi(w)$ содержатся в круге $|w - w_0| \leqslant r_0,\ w_0 < 0, w_0 + r_0 < 0$, на границе которого лежит хотя бы одна особая точка $\Phi(w)$ и который виден из начала координат под наименьшим углом, а в качестве a взять длину отрезка касательной к этому кругу от точки касания до начала координат, т. е. $a = \sqrt{w_0^2 - r_0^2}$, то функция (23) будет регулярна в круге $|z| < \rho,\ \rho = (a - w_1)/(a + w_1)$, где $w_1 = w_0 + r_0$. При этом в силу выше сказанного на окружности $|z| = \rho$ лежит хотя бы одна особая точка функции (23). Замена (22) отображает прямую $\operatorname{Re} w = 0$ на окружность $|z| = 1$, а линию интегрирования в (21) — на окружность вида $|z + (1 - \varepsilon)| = \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1$, расположенную внутри окружности $|z| = 1$ и касающуюся ее в точке $z = -1$. Точки $w_k = p_k^a$ отображаются внутрь круга $|z| \leqslant 1$. Следуя работе [8], дадим

Определение. *Пусть F, B, G — не пустые замкнутые ограниченные множества точек комплексной плоскости z, причем $F \subset G$ и $B \subset G$. Будем говорить, что выполнено условие $\{F, B, G\}$, если для всякой функции $f(z)$, регулярной на G, при любом выборе последовательности узлов интерполирования $z_k^{(n)}$ $k = 1, 2, \ldots, n,\ n = 1, 2, \ldots,$ из любого подмножества $F^* \subset F$ последовательность интерполяционных многочленов для функции $f(z)$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к $f(z)$ на любом подмножестве $B^* \subset B$.*

Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть F и B — два замкнутых ограниченных множества точек плоскости z. Пусть K_ξ — наименьший замкнутый круг, содержащий множество B и имеющий центр в точке $\xi \in F$. Тогда множество $G = \bigcup_{\xi \in F} K_\xi$ является наименьшим множеством, для которого выполняется условие $\{F, B, G\}$.*

Если $F = B = \{z : |z| \leqslant 1\}$, то наименьшим множеством, удовлетворяющим условию $\{F, B, G\}$, является круг $G = \{z : |z| \leqslant 3\}$.

Теорема 6. *Пусть при некотором $s > 0$ все особые точки функции $\Phi(w)$ заключены в круг $|w - w_0| \leqslant r_0,\ w_0 < 0,\ w_0 + r_0 < 0$, который виден из начала координат под наименьшим углом. Если $r_0 < -3w_0/5$, то последовательность интерполяционных многочленов для функции $\Phi(w)$ по узлам ОКФНСТ (20) при $n \to \infty$ равномерно сходится к $\Phi(w)$ в полуплоскости $Re\ w > 0$.*

Доказательство. Замена (22) при $a = \sqrt{w_0^2 - r_0^2}$ приводит к функции (23), регулярной в круге $|z| < \rho,\ \rho = (\sqrt{w_0^2 - r_0^2} - w_0 - r_0)/(\sqrt{w_0^2 - r_0^2} + w_0 + r_0)$. Нетрудно убедиться, что при условии $r_0 < -3w_0/5$ выполняется неравенство $\rho > 3$, т. е. функция (23) заведомо регулярна на круге $G = \{z : |z| \leqslant 3\}$. Точки $w_k = p_k^a$ при замене (22) переходят внутрь круга $F = \{z : |z| \leqslant 1\}$. Потребуем, чтобы интерполяционный процесс для функции (23) по образам точек w_k равномерно сходился к ней на множестве $B = F$ (а тем самым и на образе линии интегрирования в формуле (21)). В силу сказанного выше выполнено условие $\{F, B, G\}$, из чего следует утверждение теоремы. □

Перейдем к изучению сходимости ОКФНСТ вида (20).

Если искомый оригинал — ограниченная функция, то ее изображение регулярно в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > 0$, а предельные значения оригинала $f(+0), f(+\infty)$, если они существуют, могут быть вычислены по приведенным выше формулам. В таком случае параметр s следует выбирать из условия $s \geqslant 1$, что далее и будем предполагать.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для любого $t \in (0, T]$ $(0 < T < \infty)$ справедливо утверждение*

$$R_n(\varphi_s, t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{24}$$

Доказательство. По теореме 6 остаточный член интерполирования $r_n(\varphi_s, w)$ равномерно стремится к нулю в полуплоскости $\mathrm{Re}\, w > 0$, в том числе на линии интегрирования в (21) при $n \to \infty$, и в бесконечно удаленной точке. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящий от w номер N такой, что для $n \geqslant N$ будет выполняться неравенство $|r_n(\varphi_s, w)| \leqslant \varepsilon$. Положим $p = c + i\sigma$, тогда

$$|R_n(\varphi_s)| \leqslant \varepsilon \frac{e^{cT}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{(c^2 + \sigma^2)^{s/2}},$$

и при $s > 1$ утверждение (24) очевидно.
В случае $s = 1$ запишем представление (21) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[e^{pt}p^{-s}r_n(\varphi_s,\infty) - e^{pt}p^{-s}(r_n(\varphi_s,\infty) - r_n(\varphi_s,p^{\,a}))\right]dp\,. \tag{25}$$

Первый интеграл в (25) стремится к нулю, а второй перепишем иначе:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}p^{-s-a}\left[p^{\,a}(r_n(\varphi_s,\infty) - r_n(\varphi_s,p^{\,a}))\right]dp\,. \tag{26}$$

Вернёмся к переменной $w = p^{\,a}$ и рассмотрим стоящую в квадратных скобках в интеграле (26) величину, т. е. функцию $y(w) = w(r_n(\varphi_s,\infty) - r_n(\varphi_s,w))$. По условию $\varphi_s(p) = \Phi(p^{\,a}) = \Phi(w)$ регулярна в окрестности бесконечно удалённой точки $|w| \geqslant R$, следовательно, и погрешность $r_n(\varphi_s,w)$ и функция $r_n(\varphi_s,w) - r_n(\varphi_s,\infty)$ будут регулярны в этой окрестности. Значение интеграла (26) не зависит от выбора c. С ростом c линия интегрирования в (26) смещается вправо, как и соответствующая ей парабола в плоскости w, и при $c \to \infty$ обе линии находятся в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки. Следовательно, функция $r_n(\varphi_s,w) - r_n(\varphi_s,\infty)$ в этой окрестности будет стремиться к нулю, как $1/w$, а значит, и $w[r_n(\varphi_s,w) - r_n(\varphi_s,\infty)]$ будет регулярна в области $|w| \geqslant R$ (и в эту окрестность уже попала парабола в плоскости w). Функция $r_n(\varphi_s,w)$ сходится равномерно к нулю при $n \to \infty$ в области $|w| \geqslant R_1$ при некотором $R_1 > R$. Рассмотрим функцию $w[r_n(\varphi_s,w) - r_n(\varphi_s,\infty)]$ на границе этой области при $n \to \infty$. Погрешность $r_n(\varphi_s,w)$ равномерно относительно p стремится к нулю, как и $r_n(\varphi_s,\infty) \to 0$, а модуль $|w|$ остаётся равным R_1. Следовательно, функция $w[r_n(\varphi_s,w) - r_n(\varphi_s,\infty)]$ стремится к нулю на границе области $|w| \geqslant R_1$, и в силу принципа максимума модуля она и внутри этой области равномерно стремится к нулю. Теперь так же, как и выше, заключаем, что интеграл (26) стремится к нулю, поскольку $s + a > 1$. $\square$

Замечание. *Полученные выше оценки погрешности различных КФ справедливы лишь при ограничении вида $t < \rho \leqslant r$, в то время как в последней теореме такого условия нет.*

Материал настоящего пункта отражен в работе [15].

Список литературы

[1] *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. 1986.

[2] *Гайер Д.* Лекции по аппроксимации в комплексной плоскости. М. 1986.

[3] *Градштейн И. С, Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. 1962.

[4] *Даугавет И. К.* Введение в классическую теорию приближения функций. СПб. 2011.

[5] *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования. М. 1971.

[6] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. М. 1966.

[7] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М. 1961.

[8] *Екельчик В. С., Рябов В. М.* Об использовании одного класса наследственных ядер в линейных уравнениях вязкоупругости // Механика композитных материалов. 1981. № 3. С. 393–404.

[9] *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М. 1969.

[10] *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М. 1967.

[11] *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. Минск. 1975.

[12] *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск. 1968.

[13] *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М. 1974.

[14] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. 2002.

[15] *Лебедева А. В., Рябов В. М.* Специальные квадратурные формулы обращения преобразования Лапласа // Журн. вычисл. математ. и математ. физ. Т. 52. № 12. 2012. С. 2133-2139.

[16] *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. М.-Л. 1951.

[17] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* О некоторых свойствах квадратурных формул численного обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 1. С. 16–23.

[18] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* О свойствах некоторых квадратурных формул численного обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 2. С. 17–23.

[19] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* Обобщенные квадратурные формулы численного обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 4. С. 27–33.

[20] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* О характеристиках ядер, порождаемых квадратурными формулами обращения преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 21. СПб. 2005. С. 152–164.

[21] *Порошина Н. И., Рябов В. М.* О методах обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 55–64.

[22] *Постников А. Г.* Тауберова теория и её применение. М. 1979.

[23] *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М. 1977.

[24] *Рябов В. М.* Обращение преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул // Методы вычислений. Вып. 10. Л. 1976. С. 48–60.

[25] *Рябов В. М.* О многочленах, возникающих при численном обращении преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 12. Л. 1981. С. 46–53.

[26] *Рябов В. М.* Свойства квадратурных формул наивысшей степени точности, применяемых для обращения преобразования Лапласа // Журн. вычислит. матем. и математ. физ. 1989. Т. 29. № 7. С. 1083–1087.

[27] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. 1962.

[28] *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л. 1980.

[29] *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л. 1964.

[30] *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М. 1976.

[31] *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М. 1987.

[32] *Bobylev A. V., Cercignani C.* The inverse Laplace transform of some analytic functions with an application to the eternal solutions of the Boltzmann equation // Applied Mathematics Letters. 2002. Vol. 15. P. 807–813.

[33] *Boutros Y. Z.* Numerical methods for the inversion of Laplace transform. Zurich. 1964.

[34] *Bruin M. G., Saff E. B., Varga R. S.* On the zeros of generalised Bessel polynomials. I, II. // Indagat. math. 1981. Vol. 43. No 1. P. 1–25.

[35] *Cohen A. M.* Numerical methods for Laplace transform inversion. Berlin. 2007.

[36] *Luke Y.* The special functions and their approximations. Vol. 2. New York. 1969.

[37] *Talbot A.* The accurate numerical inversion of Laplace transform // J. Inst. Maths. Applics. 1979. Vol. 23. P. 97–120.

[38] *Widder D. V.* The Laplace transform. Princeton. 1946.