

## Устойчивость вертикального спуска тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде\*

Ю. М. Окунев, О. Г. Привалова, В. А. Самсонов

Научно-исследовательский институт механики МГУ,  
Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1

**Для цитирования:** Окунев Ю. М., Привалова О. Г., Самсонов В. А. Устойчивость вертикального спуска тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 144–151. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.114>

Рассматривается свободное падение оперенного тела в сопротивляющейся среде. Оперение на теле установлено таким образом, что существует режим поступательного спуска с постоянной скоростью. Ранее изучался спуск тяжелого тела в режиме авторотации, который возникает, когда лопасти на теле установлены на одинаковые углы. Были определены общие свойства и тенденции движения объекта при задании различных начальных условий, а также при изменении его параметров. В настоящей работе исследуется спуск тела, лопасти которого установлены на углы одинаковой величины, но с поочередной сменой знака. Исследуется асимптотическая устойчивость положения тела в режиме поступательного спуска с постоянной скоростью, возникающего с указанной установкой лопастей. Строятся области устойчивости на плоскости значений установочного угла лопасти и смещения центра масс для тел, лопасти которых представляют собой тонкие пластины в форме круга и прямоугольника. Проводится сравнение областей устойчивости режима авторотации и режима поступательного спуска с постоянной скоростью. Приводятся траектории центра масс тел указанной формы на спуске. Показывается, что при тех значениях параметров задачи, при которых вертикальный поступательный спуск с постоянной скоростью неустойчив, возникают различные типы движения центра масс тела.

*Ключевые слова:* устойчивость, оперенное тело, режим авторотации, режим поступательного спуска с постоянной скоростью.

**1. Введение.** Рассматривается задача о движении тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде. В случае, когда лопасти (оперение) установлены на одинаковые углы, спуск тела происходит в режиме авторотации вокруг оси симметрии [1–5]. В том случае, когда лопасти установлены на углы одинаковой величины, но с поочередной сменой знака, существует режим поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью. В работе [6] было показано, что скорость спуска в режиме поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью меньше скорости в режиме авторотации при изменениях угла установки лопасти  $\beta$  от 0 до 1.3 рад для тел, лопасти которых представляют собой тонкие пластины в форме круга и прямоугольника, а аэродинамические характеристики известны [7]. Устойчивость режима авторотации для двух форм лопастей рассмотрена в работе [2].

\*Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского государственного университета «Математические методы анализа сложных систем».

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

Ставится задача о построении области устойчивости режима поступательного спуска с постоянной скоростью для тела с лопастями той же формы и сравнения ее с областью устойчивости спуска тела в режиме авторотации.

Приводятся характерные траектории центра масс тела на спуске при задании различных параметров тела и форм лопастей, когда лопасти установлены на углы одинаковой величины, но с поочередной сменой знака.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим свободное падение тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде. В работе будем исследовать те тенденции движения, которые вызваны собственно оперением, поэтому в качестве механической модели оперенного тела выберем симметричную вертушку с четырьмя одинаковыми лопастями. Будем считать, что воздействие среды сосредоточено на ее лопастях. Лопасти на теле размещаются таким образом, что центры лопастей оказываются в плоскости, ортогональной оси тела, на одинаковом расстоянии  $r$  от нее. Углы между державками, на которых установлены лопасти, одинаковы (рис. 1, а). Лопасти устанавливаются на углы  $\beta_i$  — установочные углы лопастей, углы между нормалью к плоскости лопасти и плоскостью, проходящей через центры давления лопастей. Угол атаки  $\alpha_i$   $i$ -й лопасти вводим как угол между вектором скорости точки  $O_i$  и плоскостью, жестко связанной с лопастью (рис. 1, б).

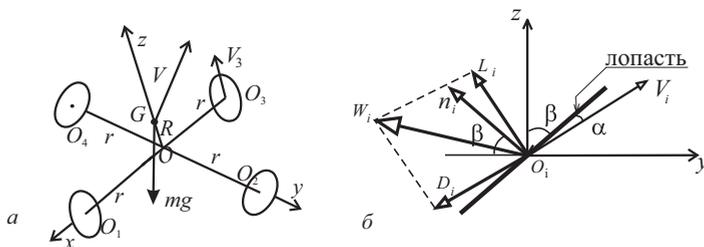


Рис. 1. а — модель тела; б — определение установочного угла лопасти и угла атаки  $\alpha_i$ .

Исследуем спуск тела, лопасти которого установлены на углы одинаковой величины, но с поочередной сменой знака. На тело действуют сила тяжести и аэродинамические силы. Будем предполагать, что аэродинамическое воздействие сосредоточено на лопастях, а распределенная система аэродинамических сил, действующих на лопасть, эквивалентна равнодействующей, приложенной в центре лопасти  $O_i$  (центре давления). Используем квазистатическую модель воздействия среды на тело [8]. Нелинейная система уравнений движения тела выписана в работе [9].

Очевидно, что при таком расположении лопастей существует режим установившегося поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью, направленной вдоль оси тела. В этом режиме углы атаки на лопастях таковы:  $\alpha_i = \beta_i = \beta_0$ ,  $\alpha_{2i} = \beta_{2i} = -\beta_0$ ,  $i = 1, \dots, n/2$ .

**3. Устойчивость режима равномерного поступательного вертикального спуска.** Исследуем асимптотическую устойчивость положения оси тела в режиме равномерного поступательного вертикального спуска. В данной работе представляется сложным применение прямого метода Ляпунова [10], поэтому воспользуемся методом первого приближения.

Система уравнений в вариациях в окрестности режима равномерного поступательного спуска разбивается на две независимые между собой подсистемы, одна из которых описывает малые колебания оси тела относительно ее положения в этом режиме.

Малые колебания оси симметрии относительно ее положения в рассматриваемом режиме описываются системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами шестого порядка. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\theta} &= \Delta \omega_x, \\ \Delta \dot{\varphi} &= \Delta \omega_y, \\ m \Delta \dot{V}_x &= -ad \Delta V_x - 2krd \Delta \omega_x - (Rad + V_{z0}) \Delta \omega_y + mg \Delta \varphi, \\ m \Delta \dot{V}_y &= -ad \Delta V_y + (Rad + V_{z0}) \Delta \omega_x + 2krd \Delta \omega_y - mg \Delta \theta, \\ \frac{A}{d} \Delta \dot{\omega}_x &= r \left( k - \frac{c'_x}{c_x} \right) \Delta V_x + aR \Delta V_y - (aR^2 + 2r^2) \Delta \omega_x - rR \left( k + \frac{c'_x}{c_x} \right) \Delta \omega_y, \\ \frac{A}{d} \Delta \dot{\omega}_y &= -aR \Delta V_x - r \left( k - \frac{c'_x}{c_x} \right) \Delta V_y - rR \left( k + \frac{c'_x}{c_x} \right) \Delta \omega_x - (aR^2 + 2r^2) \Delta \omega_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $m$ ,  $A$  — масса, экваториальный момент инерции тела;  $R$  — смещение центра масс;  $c_x$ ,  $c'_x$ ,  $k = c_y/c_x$ ,  $k'$  — значения аэродинамических функций  $c_x(\alpha)$ ,  $k(\alpha)$  и их производных по углу  $\alpha$  в точке  $\alpha_0$ ;  $V_{z0}$  — вертикальная скорость спуска;  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$  — приращения проекции вектора  $V$  скорости центра масс тела;  $\Delta \omega_x$ ,  $\Delta \omega_y$  — соответствующие приращения проекции угловой скорости  $\omega$  тела на оси системы координат  $Oxyz$ , ось  $z$  которой совпадает с осью тела, а оси  $x$  и  $y$  направлены так, что центры давления  $O_i$  лежат на этих осях. Ориентация тела в пространстве определяется при помощи углов  $\varphi$ ,  $\theta$  — углов Крылова, характеризующих положение оси  $z$  ( $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \theta$  — их приращения). Коэффициенты  $d$  и  $a$  имеют следующий вид:  $d = c_x \rho s |V_{z0}|$ ,  $a = 2 - ktg \alpha_0 + k' + kc'_x/c_x$ , где  $\rho$  — плотность воздуха,  $s$  — площадь лопасти.

Достаточные условия асимптотической устойчивости рассматриваемого установившегося режима определим как условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения системы (1). Для определения интервалов значений угла  $\beta$ , при которых затухают колебания оси тела в режиме равномерного поступательного спуска при учете смещения  $R$  центра масс для тел с одинаковыми массовыми характеристиками, но с различными формами лопастей, используем условия теоремы Гурвица.

Представим области устойчивости на плоскости значений угла  $\beta$  и безразмерной величины  $R/r$  для двух форм лопастей с равными площадями (см. рис. 2).

Граница области устойчивости оси тела с лопастями в виде круга проведена пунктирной линией, а с лопастями в виде прямоугольника — сплошной.

Там, где область устойчивости для обеих форм лопастей имеет общую часть, штриховка двойная, а там, где устойчивость имеется только для одной формы лопасти, — одинарная. Отметим, что область устойчивости для тела с круглой лопастью шире. Для тела с лопастями прямоугольной формы область устойчивости состоит из двух частей: первая отвечает значениям угла  $\beta$  от 0 до 0.2 рад, а вторая — значениям угла  $\beta$  от 0.4 рад до 0.63 рад.

Сравним области устойчивости спуска тяжелого тела в режиме авторотации [2] и в режиме поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью.

Область устойчивости спуска тела в режиме авторотации для каждой из форм лопастей состоит из двух частей: часть I отвечает малым значениям угла  $\beta$ ,

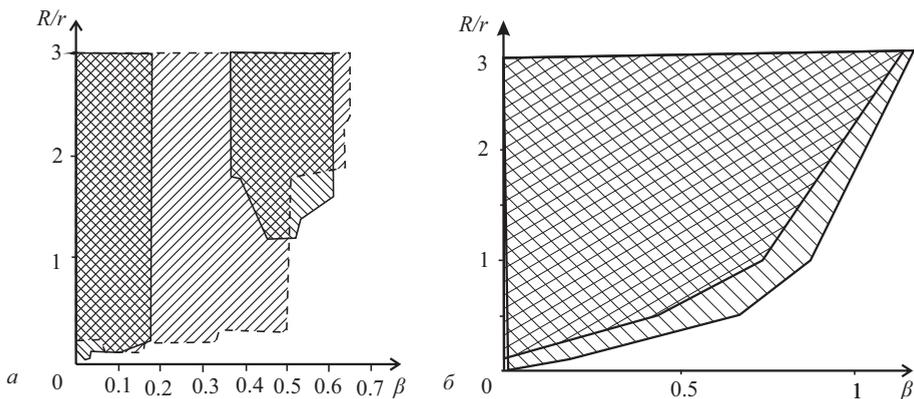


Рис. 2. Области устойчивости режима поступательного спуска с постоянной скоростью (а) и режима авторотации (б).

часть II — большим (близким к  $\pi/2$ ). Причем часть II области устойчивости очень узкая.

Область устойчивости режима поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью отвечает только малым значениям угла  $\beta < 0.7$  рад. Для тела с лопастями прямоугольной формы в диапазоне изменения угла  $\beta$  от 0.2 до 0.4 рад поступательный вертикальный спуск с постоянной скоростью неустойчив для всех значений смещения центра масс  $R$ .

Из рис. 2, а и б, видно, что область устойчивости в пространстве параметров угла установки лопасти и смещения центра масс тела при поступательном спуске меньше, чем в режиме авторотации. Однако имеются большие участки их пересечения. Таким образом, могут быть выбраны параметры тела, при которых спуск будет происходить с меньшей скоростью в режиме равномерного поступательного вертикального спуска [6], что может быть необходимым при доставке груза на землю.

**4. Характерные движения оперенного тела на спуске.** Рассмотрим движение тела в случае больших начальных отклонений от значений переменных, отвечающих режиму равномерного поступательного спуска. Проведем численное решение нелинейной системы уравнений, приведенных в [9], методом Рунге — Кутты с известными аэродинамическими характеристиками (представленными в виде таблиц) лопастей и углами их установки.

Особое внимание уделим траекториям центра масс тела, когда значения угла  $\beta$  и смещения центра масс  $R$  принадлежат интервалу значений, при которых тривиальный режим неустойчив. На рис. 3 представим несколько траекторий центра масс тела с тонкими лопастями в виде круга. Траектория  $Q$  при значениях  $\beta = 0.6$  рад и  $R/r = 1$  зеленого цвета;  $W$  при  $\beta = 0.7$  рад и  $R/r = 1$  фиолетового цвета;  $E$  при  $\beta = 0.8$  рад и  $R/r = 1$  синего цвета;  $U$  при  $\beta = 0.9$  рад и  $R/r = 1$  красного цвета;  $P$  при  $\beta = 0.7$  рад и  $R/r = 2.5$  черного цвета.

Этим траекториям центра масс тела соответствуют траектории в фазовом пространстве угловых скоростей (см. рис. 4).

Изображающие точки, двигаясь по фазовым траекториям  $E$ ,  $W$ ,  $Q$ , приходят в точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соответственно, которые отвечают стационарным значениям проекций угловых скоростей тела. На рис. 3, а, это представлено винтовыми траекториями

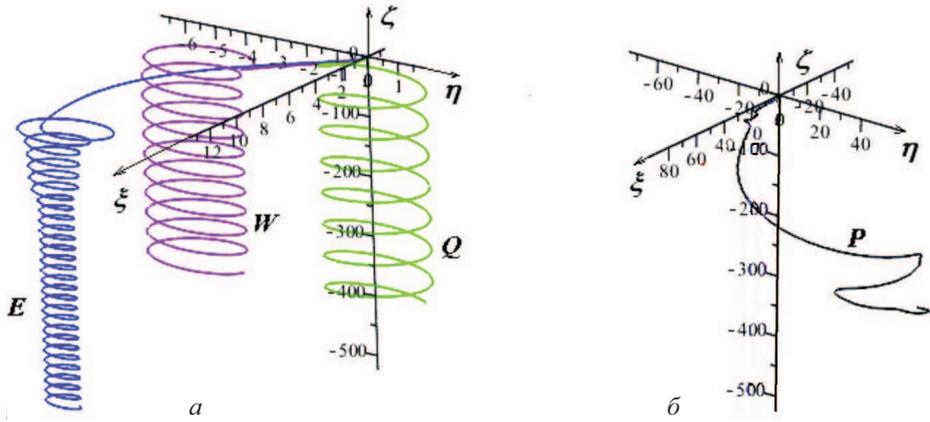


Рис. 3. Траектории центра масс тела с лопастями в форме круга.

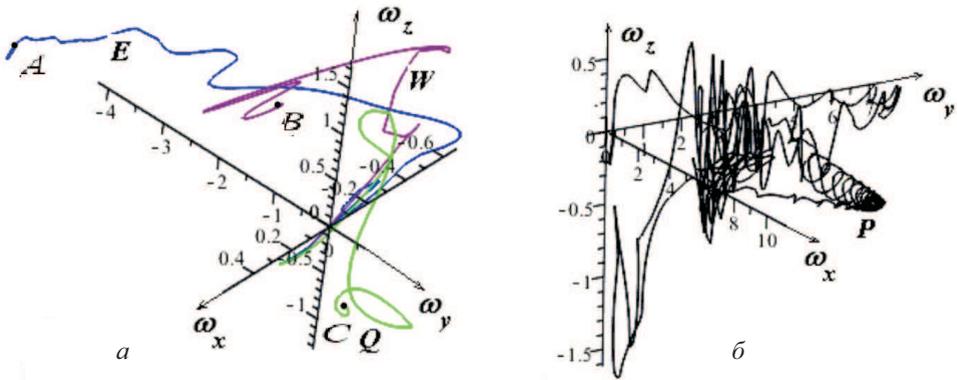


Рис. 4. Фазовое пространство угловых скоростей для тела с лопастями в форме круга.

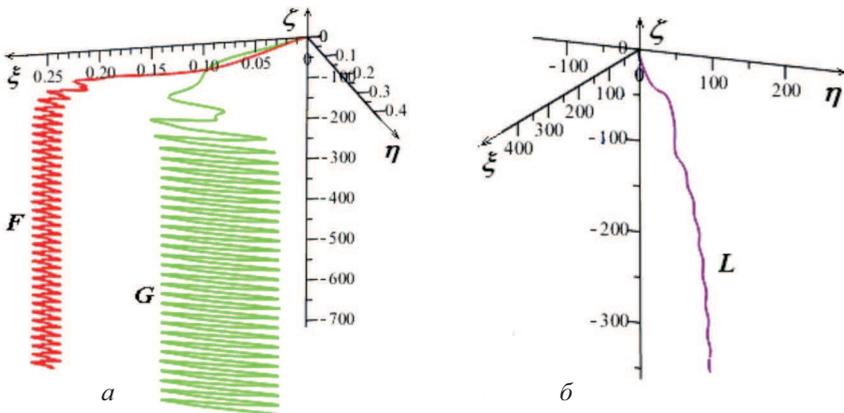


Рис. 5. Траектории центра масс тела с лопастями в форме прямоугольника.

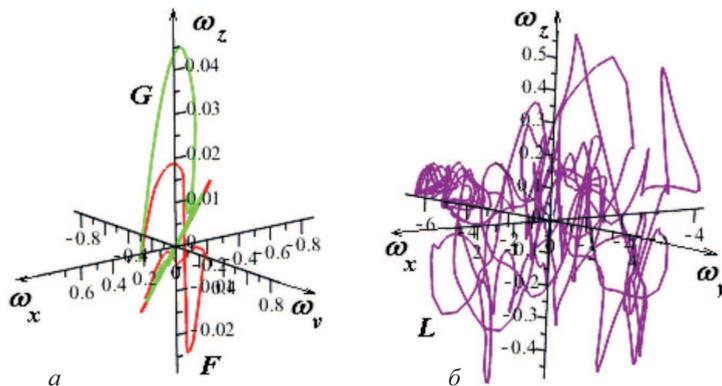


Рис. 6. Фазовое пространство угловых скоростей для тела с лопастями в форме прямоугольника.

спуска. На рис. 4, б, фазовая траектория угловых скоростей соответствует хаотическому движению центра масс тела (кривая  $P$  рис. 3, б). На рис. 5 представим траектории центра масс тела с тонкими лопастями в виде прямоугольника. При значениях  $\beta = 0.3$  рад и  $R/r = 2$  (кривая  $F$ ) и значениях  $\beta = 0.5$  рад и  $R/r = 1$  (кривая  $G$ ) происходит колебательное движение центра масс в плоскости. На рис. 5, б, кривая  $L$  отвечает значениям  $\beta = 1.2$  рад и  $R/r = 1$ . В этом случае движение центра масс тела имеет нерегулярный характер.

На рис. 6, а и б, представлены фазовые траектории угловых скоростей, соответствующие траекториям центра масс тела, которые изображены на рис. 5, а и б. Колебания центра масс тела проиллюстрированы на рис. 5, а. При этом угловые скорости выходят на колебательный режим в плоскости  $\omega_x = 0$  (рис. 6, а). Таким образом, когда поступательный спуск с постоянной скоростью неустойчив, при определенных значениях угла установки лопасти и величины смещения центра масс возможно как винтовое его движение, так и колебательное его движение в плоскости. Также возникает движение центра масс, которое носит нерегулярный характер (рис. 5, б, рис. 6, б).

**5. Заключение.** Установлено, что область устойчивости режима поступательного спуска с постоянной скоростью в пространстве значений установочного угла лопасти и смещения центра масс для тела с тонкими лопастями в виде круга шире, чем для тела с лопастями в виде прямоугольной пластины удлинения 8.

Показано, что кроме режима поступательного спуска с постоянной скоростью, отвечающего семейству тривиальных стационарных решений, возникают движения центра масс тела различной формы: винтовое, колебательное, а также хаотическое.

Проведено сопоставление областей устойчивости оси тяжелого тела с оперением в виде тонких пластин в форме круга и прямоугольника в режиме авторотации и в режиме поступательного спуска с постоянной скоростью. Найдены участки пересечения областей устойчивости в пространстве параметров установочного угла лопасти и смещения центра масс для двух рассматриваемых режимов спуска тела. Таким образом, могут быть выбраны параметры тела, при которых движение будет происходить с меньшей скоростью, а именно в режиме поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью (для тел с рассматриваемыми формами лопастей).

## Литература

1. Okunev Yu. M., Privalova O. G., Samsonov V. A. The geometry of stability domains of systems with different dimensions. *2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading*, 1–4 (2015). <https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106763>
2. Okunev Yu., Privalova O., Samsonov V. Influence of blade shape upon the auto-rotation stability. *2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*, 1–3 (2016). <https://doi.org/10.1109/STAB.2016.7541212>
3. Привалова О. Г., Окунев Ю. М., Самсонов В. А. Устойчивость движения оперенного тела, авторотирующего в среде. *Труды Московского физико-технического института* **9**, № 3 (35), 51–56 (2017).
4. Окунев Ю. М., Привалова О. Г., Самсонов В. А. Переменная диссипация в задаче о торможении оперенного тела в сопротивляющейся среде. В: *Теоретическая механика: сборник научно-методических статей*, вып. 31, 80–91 (2020).
5. Dosaev M. Interaction between internal and external friction in rotation of vane with viscous filling. *Applied Mathematical Modelling* **68**, 21–28 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
6. Okunev Yu. M., Privalova O. G., Samsonov V. A. Influence of shape of blades upon descent of a finned body in media. *Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB)*, 1–2 (2020). <https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140653>
7. Табачников В. Г. Стандартные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки. *Тр. ЦАГИ*, вып. 1621, 79–93 (1974).
8. Зенкин А. Н., Привалов В. А., Самсонов В. А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело. *МТТ*, № 4, 73–78 (1993).
9. Локшин Б. Я., Привалова О. Г., Самсонов В. А. *К динамике ротошота*. Москва, Изд-во Московского ун-та (2018).
10. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Одноосная стабилизация вращательного движения твердого тела при наличии возмущений с нулевыми средними значениями. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6 (64)**, вып. 2, 270–280 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209>

Статья поступила в редакцию 30 марта 2021 г.;  
доработана 23 июня 2021 г.;  
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.

### Контактная информация:

Окунев Юрий Михайлович — канд. физ.-мат. наук, академик РАЕН, доц.;  
okunev@imec.msu.ru

Привалова Ольга Георгиевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; privalova@imec.msu.ru  
Самсонов Виталий Александрович — д-р физ.-мат. наук, глав. науч. сотр., проф.;  
samson@imec.msu.ru

## Stability of a vertical descent of a heavy finned body in resisting medium\*

Yu. M. Okunev, O. G. Privalova, V. A. Samsonov

Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University,  
1, Michurinsky pr., Moscow, 119192, Russian Federation

**For citation:** Okunev Yu. M., Privalova O. G., Samsonov V. A. Stability of a vertical descent of a heavy finned body in resisting medium. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 144–151.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.114> (In Russian)

A free descent of a finned body in resisting medium is studied. Fins are installed in such a way that there is a regime of a translational descent with a constant speed. Beforehand, a

---

\*The research was carried out with the support of the Interdisciplinary scientific-educational school of the Moscow State University “Mathematical methods of analysis of complex systems”.

descent of a heavy body in an autorotation mode was studied. It exists when pitch angles of all fins are equal to each other. For a descent with autorotation, general properties and tendencies of motion were described depending on initial conditions and parameters. In the current paper, the descent of a body is discussed for the case when fins have equal absolute values of pitch angles, but signs of these angles alternate. Asymptotic stability of a translational descent with a constant speed is studied for such orientation of fins. Domains of stability are constructed in the plane of the following parameters: pitch angle of fins and displacement of the center of mass. Fins represented either by circle or rectangular blades are discussed. Domains of stability are compared with that for the autorotation mode descent. Trajectories of the center of mass are constructed. Varied types of such trajectories are obtained when parameters of the model correspond to the case of unstable translational descents with a constant speed.

*Keywords:* stability, finned body, autorotation mode, translational descent with a constant speed.

## References

1. Okunev Yu. M., Privalova O. G., Samsonov V. A. The geometry of stability domains of systems with different dimensions. *2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading*, 1–4 (2015). <https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106763>
2. Okunev Yu., Privalova O., Samsonov V. Influence of blade shape upon the auto-rotation stability. *2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*, 1–3 (2016). <https://doi.org/10.1109/STAB.2016.7541212>
3. Privalova O. G., Okunev Yu. M., Samsonov V. A. Stability of motion of a finned body autorotating in a medium. *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (State University)* **9**, no. 3 (35), 51–56 (2017). (In Russian)
4. Okunev Yu. M., Privalova O. G., Samsonov V. A. Variable dissipation in the problem of deceleration of a finned body in resisting medium. In: *Theoretical mechanics: a collection of scientific and methodological papers*, iss. 31, 80–91 (2020). (In Russian)
5. Dosaev M. Interaction between internal and external friction in rotation of vane with viscous filling. *Applied Mathematical Modelling* **68**, 21–28 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
6. Okunev Yu. M., Privalova O. G., Samsonov V. A. Influence of shape of blades upon descent of a finned body in media. *Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB)*, 1–2 (2020). <https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140653>
7. Tabachnikov V. G. Steady characteristics of wings for small values of speed for the whole range of angle of attack. *Trudy TSAGI*, iss. 1621, 79–93 (1974). (In Russian)
8. Zenkin A. N., Privalov V. A., Samsonov V. A. On a quasi-static model of the medium influence on a body performing autorotations. *Proceedings of the RAS Mechanics of Solids*, no. 4, 73–78 (1993).
9. Lorshin B. Ya., Privalova O. G., Samsonov V. A. *On the dynamics of the rotochute*. Moscow, Moscow Univ. Press (2018). (In Russian)
10. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Uniaxial Attitude Stabilization of a Rigid Body under Conditions of Nonstationary Perturbations with Zero Mean Values. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6 (64)**, iss. 2, 270–280 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **52**, iss. 2, 187–193 (2019). <https://doi.org/10.1134/S106345411902002X>].

Received: March 30, 2021

Revised: June 23, 2021

Accepted: September 2, 2021

### Authors' information:

Yuriy M. Okunev — [okunev@imec.msu.ru](mailto:okunev@imec.msu.ru)

Olga G. Privalova — [privalova@imec.msu.ru](mailto:privalova@imec.msu.ru)

Vitaliy A. Samsonov — [samson@imec.msu.ru](mailto:samson@imec.msu.ru)