УДК 519.853 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1
MSC 65D15, 65D05

Представления непрерывных кусочно-аффинных функций*

В. Н. Малозёмов[1], *Г. Ш. Тамасян*[1,2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Для цитирования: *Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш.* Представления непрерывных кусочно-аффинных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 53–63.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.106

Непрерывные кусочно-аффинные функции находят широкое применение в вычислительной математике. В одномерном случае такие функции называются ломаными. В статье анализируются аналитические представления ломаных как в формах, принятых в теории полиномиальных сплайнов, так и в виде разности максимумов двух конечных семейств аффинных функций. Устанавливается связь между этими представлениями.

Ключевые слова: кусочно-аффинная функция, ломаная, аналитические представления ломаных, разность выпуклых функций.

1. Рассмотрим конечный набор точек на плоскости

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), \tag{1}$$

где $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, $n \geqslant 1$. Обозначим через $\ell_k(x)$ прямую, проходящую через точки (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}):

$$\ell_k(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k). \tag{2}$$

У этой прямой коэффициент при x является разделенной разностью:

$$y[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}\,.$$

Набор точек (1) однозначно определяет ломаную $F(x)$ с аналитическим представлением

$$F(x) = \begin{cases} \ell_0(x) & \text{при} \quad x \leqslant x_1, \\ \ell_k(x) & \text{при} \quad x \in [x_k, x_{k+1}],\ k \in 1:n-1, \\ \ell_n(x) & \text{при} \quad x \geqslant x_n. \end{cases} \tag{3}$$

Точки $x_1, \ldots, x_n$ называются *узлами* ломаной.

*Результаты раздела 7 получены в Институте проблем машиноведения РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-71-10032).

2. Ломаную можно рассматривать как полиномиальный сплайн первого порядка [1]. Это позволяет использовать принятую в теории полиномиальных сплайнов технику. Обозначим $(x)_+ = \max\{0, x\}$.

Теорема 1. *Ломаная* $F(x)$ *вида* (3) *допускает представление*

$$F(x) = \ell_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \Big(y[x_i, x_{i+1}] - y[x_{i-1}, x_i] \Big) (x - x_i)_+. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно (2) имеем

$$\ell_i(x) - \ell_{i-1}(x) = y_i - y_{i-1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) = \\ = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)(x - x_i).$$

Отсюда следует, что

$$\ell_k(x) = \ell_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \big(\ell_i(x) - \ell_{i-1}(x) \big) = \ell_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \Big(y[x_i, x_{i+1}] - y[x_{i-1}, x_i] \Big)(x - x_i). \tag{5}$$

Обозначим через $g(x)$ правую часть формулы (4). Учитывая определение функций $(x - x_i)_+$ и упорядоченность точек x_i, получаем

$$g(x) = \ell_0(x) \quad \text{при} \quad x \leqslant x_1.$$

При $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k \in 1 : n-1$, те же соображения и формула (5) приводят к равенству

$$g(x) = \ell_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \Big(y[x_i, x_{i+1}] - y[x_{i-1}, x_i] \Big)(x - x_i) = \ell_k(x).$$

Наконец, при $x \geqslant x_n$ имеем

$$g(x) = \ell_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \Big(y[x_i, x_{i+1}] - y[x_{i-1}, x_i] \Big)(x - x_i) = \ell_n(x).$$

На основании определения ломаной (3) заключаем, что $g(x) \equiv F(x)$.

Теорема доказана. □

3. Пусть будет $n \geqslant 3$. Зафиксируем абсциссы $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ точек из набора (1) и построим систему базисных ломаных

$$B_0(x), B_1(x), \ldots, B_n(x), B_{n+1}(x)$$

с узлами $x_1, \ldots, x_n$, исходя из условий

$$B_k(x_i) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при остальных} \quad i \in 0 : n+1. \end{cases} \tag{6}$$

Базисные ломаные разделятся на три группы: внутренние базисные ломаные, левые граничные и правые граничные.

Ко внутренним относятся базисные ломаные $B_k(x)$ при $k \in 2 : n-1$ (см. рис. 1).

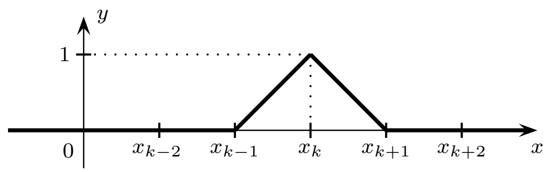

Рис. 1. Внутренняя базисная ломаная $B_k(x)$.

По теореме 1 имеем

$$B_k(x) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1})_+ - \Big(\frac{1}{x_{k+1} - x_k} + \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\Big)(x - x_k)_+ + \\ + \frac{1}{x_{k+1} - x_k}(x - x_{k+1})_+.$$

Левые граничные базисные ломаные — это $B_0(x)$ и $B_1(x)$ (см. рис. 2).

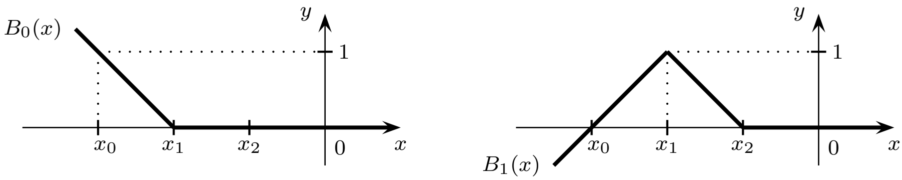

Рис. 2. Ломаные $B_0(x)$ и $B_1(x)$.

По теореме 1 имеем

$$B_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_1 - x_0}(x - x_1)_+\,,$$
$$B_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} - \Big(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_0}\Big)(x - x_1)_+ + \frac{1}{x_2 - x_1}(x - x_2)_+\,.$$

Правые граничные базисные ломаные — это $B_n(x)$ и $B_{n+1}(x)$ (см. рис. 3).

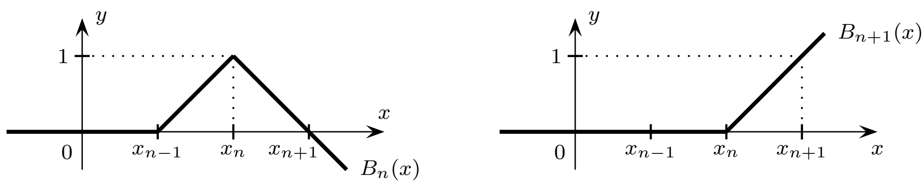

Рис. 3. Ломаные $B_n(x)$ и $B_{n+1}(x)$.

По теореме 1 имеем

$$
\begin{aligned}
B_n(x) &= \frac{1}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1})_+ - \Big(\frac{1}{x_{n+1} - x_n} + \frac{1}{x_n - x_{n-1}}\Big)(x - x_n)_+, \\
B_{n+1}(x) &= \frac{1}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n)_+ \,.
\end{aligned}
$$

На основании свойства (6) базисных ломаных заключаем, что произвольная ломаная $F(x)$, определяемая формулой (3), допускает представление

$$
F(x) = \sum_{k=0}^{n+1} y_k B_k(x).
$$

4. Вернемся к представлению (4) ломаной $F(x)$. Обозначим

$$
c_i = y[x_i, x_{i+1}] - y[x_{i-1}, x_i].
$$

Введем индексные множества $I_1 = \{i \in 1:n \mid c_i > 0\}$, $\quad I_2 = \{i \in 1:n \mid c_i < 0\}$ и перепишем формулу (4) в виде

$$
F(x) = \ell_0(x) + \sum_{i \in I_1} c_i (x - x_i)_+ - \sum_{i \in I_2} |c_i| (x - x_i)_+ \,.
$$

Выделим ломаные с положительными коэффициентами:

$$
F_1(x) = \sum_{i \in I_1} c_i (x - x_i)_+ \,, \quad F_2(x) = \sum_{i \in I_2} |c_i| (x - x_i)_+ \,.
$$

Тогда получим

$$
F(x) = \ell_0(x) + F_1(x) - F_2(x). \tag{7}
$$

Ломаные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеют одинаковые свойства, поэтому достаточно разобраться с $F_1(x)$.

Упростим обозначения. Пусть $I_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, причем $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$. Положим $\hat{x}_\alpha = x_{i_\alpha}$, $\quad \hat{c}_\alpha = c_{i_\alpha}$ и запишем

$$
F_1(x) = \sum_{\alpha=1}^{s} \hat{c}_\alpha (x - \hat{x}_\alpha)_+ \,.
$$

Здесь $\hat{c}_\alpha > 0$ и $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \ldots < \hat{x}_s$. В силу выпуклости функций $(x - \hat{x}_\alpha)_+$ и положительности коэффициентов $\hat{c}_\alpha$ функция $F_1(x)$ является выпуклой ломаной (см. рис. 4).

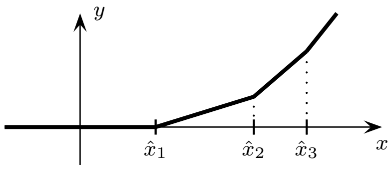

Рис. 4. Выпуклая ломаная $F_1(x)$.

По определению $(x-\hat{x}_\alpha)_+$ имеем

$$
\begin{aligned}
&F_1(x) = 0 && \text{при} \quad x \leqslant \hat{x}_1;\\
&F_1(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} \hat{c}_\alpha (x-\hat{x}_\alpha) && \text{при} \quad x \in [\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}], \quad k \in 1:s-1;\\
&F_1(x) = \sum_{\alpha=1}^{s} \hat{c}_\alpha (x-\hat{x}_\alpha) && \text{при} \quad x \geqslant \hat{x}_s.
\end{aligned}
$$

Обозначим $p_k(x) = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \hat{c}_\alpha (x-\hat{x}_\alpha)$. Получим

$$
\begin{aligned}
&F_1(x) = p_k(x) \quad \text{при} \quad x \in [\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}], \quad k \in 1:s-1;\\
&F_1(x) = p_s(x) \quad \text{при} \quad x \geqslant \hat{x}_s.
\end{aligned}
$$

Отметим, что аффинные функции $p_k(x)$ связаны рекуррентным соотношением

$$
\begin{aligned}
&p_k(x) = p_{k-1}(x) + \hat{c}_k(x-\hat{x}_k), \quad k = 1, \ldots, s;\\
&p_0(x) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

Рис. 4 делает очевидной следующую формулу:

$$F_1(x) = \max\bigl\{0, p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)\bigr\}. \tag{8}$$

Аналогичный результат справедлив и для выпуклой ломаной $F_2(x)$. Пусть $I_2 = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$, и $\hat{x}_\beta = x_{j_\beta}$, $\hat{c}_\beta = c_{j_\beta}$,

$$q_k(x) = \sum_{\beta=1}^{k} |\hat{c}_\beta|(x-\hat{x}_\beta), \quad k \in 1:r.$$

Тогда

$$F_2(x) = \max\bigl\{0, q_1(x), q_2(x), \ldots, q_r(x)\bigr\}. \tag{9}$$

Аффинные функции $q_k(x)$ связаны рекуррентным соотношением

$$
\begin{aligned}
&q_k(x) = q_{k-1}(x) + |\hat{c}_k|(x-\hat{x}_k), \quad k = 1, \ldots, r;\\
&q_0(x) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

Подведем итог.

Теорема 2. *Ломаная $F(x)$ вида* (3) *допускает представление* (7), *в котором выпуклые ломаные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ определяются формулами* (8) *и* (9).

Отметим, что $s + r = n - d$, где d — количество нулевых c_i. Другими словами, d — это количество тех $i \in 1:n$, при которых три соседние точки (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) из набора (1) лежат на одной прямой.

5. Рассмотрим пример на использование теоремы 2.

Пример 1. Построим ломаную по следующему набору точек (см. рис. 5):

$$(-3,-1), \quad (-2,1), \quad (-1,-1), \quad (0,-1), \quad (2,1), \quad (3,0), \quad (4,1).$$

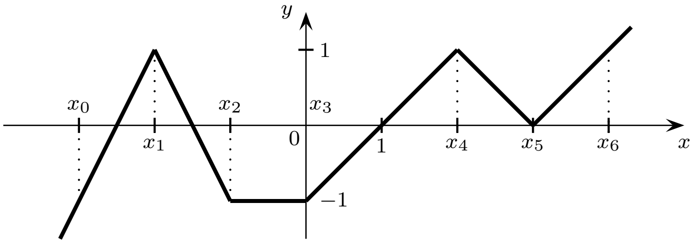

Рис. 5. Ломаная с пятью узлами.

Вычислим $\ell_0(x) = 2x + 5$, $c_1 = -4$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$, $c_4 = -2$, $c_5 = 2$,

$$F_1(x) = 2(x+1)_+ + (x)_+ + 2(x-3)_+,$$
$$F_2(x) = 4(x+2)_+ + 2(x-2)_+.$$

Далее запишем $p_1(x) = 2x + 2$, $p_2(x) = 3x + 2$, $p_3(x) = 5x - 4$. Значит,

$$F_1(x) = \max\{0,\, 2x+2,\, 3x+2,\, 5x-4\}.$$

Аналогично получаем $q_1(x) = 4x + 8$, $q_2(x) = 6x + 4$. Значит,

$$F_2(x) = \max\{0,\, 4x+8,\, 6x+4\}.$$

Все атрибуты представления (7), в котором выпуклые ломаные $F_1(x)$, $F_2(x)$ имеют вид (8), (9) соответственно, найдены.

6. Представим аффинную функцию $\ell_0(x)$ в виде разности двух аффинных функций:

$$\ell_0(x) = p_0(x) - q_0(x). \tag{10}$$

Достаточно выбрать $p_0(x)$. Тогда $q_0(x) = p_0(x) - \ell_0(x)$. На основании (7), (8) и (9) получаем

$$F(x) = \max\bigl\{p_0(x);\ p_0(x) + p_k(x),\ k \in 1:s\bigr\} - \max\bigl\{q_0(x);\ q_0(x) + q_k(x),\ k \in 1:r\bigr\}.$$

Таким образом, любую ломаную можно представить в виде разности максимумов двух конечных семейств аффинных функций.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3. *Пусть*

$$F(x) = \max\bigl\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_s(x)\bigr\} - \max\bigl\{q_0(x), q_1(x), \ldots, q_r(x)\bigr\},$$

где $p_k(x) = a_k x + b_k$ и $q_k(x) = c_k x + d_k$ — произвольные аффинные функции. Утверждается, что $F(x)$ можно привести к виду (7).

Доказательство. Достаточно рассмотреть один максимум. Обозначим

$$P(x) = \max\bigl\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_s(x)\bigr\}. \tag{11}$$

Требуется преобразовать максимум в сумму.

Предварительный шаг. В индексном множестве $S = 0 : s$ выделим подмножество $M = \Big\{k \in S \ \Big| \ a_k = \min\limits_{i \in S} a_i\Big\}$. В M пометим индекс k_0, соответствующий наибольшему b_{k_0}. Обозначим $J_0 = S \backslash M$. Очевидно, что

$$P(x) = \max\big\{p_{k_0}(x);\ p_k(x), k \in J_0\big\} = p_{k_0}(x) + \max\big\{0;\ p_k(x) - p_{k_0}(x),\ k \in J_0\big\}. \quad (12)$$

При этом для всех $k \in J_0$ коэффициент при x у аффинной функции

$$p_k^{(0)}(x) = p_k(x) - p_{k_0}(x)$$

положительный.

Основной шаг. Рассмотрим функцию

$$P_0(x) = \max\big\{0;\ p_k^{(0)}(x),\ k \in J_0\big\} = \\ = \max\big\{\max\big\{0,\ p_k^{(0)}(x)\big\},\ k \in J_0\big\} = \max_{k \in J_0} \big(p_k^{(0)}(x)\big)_+ . \quad (13)$$

Здесь $p_k^{(0)}(x) = a_k^{(0)} x + b_k^{(0)}$, причем $a_k^{(0)} > 0$ при всех $k \in J_0$. Обозначим $x_k^{(0)} = -b_k^{(0)}/a_k^{(0)}$. Тогда $p_k^{(0)}(x) = a_k^{(0)}\big(x - x_k^{(0)}\big)$ и

$$\big(p_k^{(0)}(x)\big)_+ = a_k^{(0)}\big(x - x_k^{(0)}\big)_+. \quad (14)$$

Во множестве $M_0 = \Big\{k \in J_0 \ \Big| \ x_k^{(0)} = \min\limits_{i \in J_0} x_i^{(0)}\Big\}$ пометим индекс k_1, соответствующий наибольшему $a_{k_1}^{(0)}$, после чего к M_0 присоединим индексы $k \in J_0 \backslash M_0$, на которых $a_k^{(0)} \leqslant a_{k_1}^{(0)}$. Обозначим $J_1 = J_0 \backslash M_0$. Очевидно, что

$$P_0(x) = \max\big\{\ \big(p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ ;\ \big(p_k^{(0)}(x)\big)_+ ,\ k \in J_1\big\}. \quad (15)$$

Здесь $x_{k_1}^{(0)} < x_k^{(0)}$ и $0 < a_{k_1}^{(0)} < a_k^{(0)}$ при всех $k \in J_1$. Покажем, что при этих условиях справедливо равенство

$$P_0(x) = \big(p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ + \max_{k \in J_1} \big(p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ . \quad (16)$$

Доказательство основано на том, что при всех $k \in J_1$ выполняется соотношение

$$\max\big\{\ \big(p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ , \big(p_k^{(0)}(x)\big)_+\ \big\} = \big(p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ + \big(p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ . \quad (17)$$

Рис. 6 поясняет этот факт.

Если $\xi_k^{(0)}$ — точка, в которой $p_k^{(0)}(\xi_k^{(0)}) = p_{k_1}^{(0)}(\xi_k^{(0)})$, то равенство (17) легко проверяется при $x \leqslant \xi_k^{(0)}$ и при $x \geqslant \xi_k^{(0)}$.

Продолжим преобразование формулы (15). В силу (17) имеем

$$P_0(x) = \max_{k \in J_1} \Big\{\max\big\{\ \big(p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ , \big(p_k^{(0)}(x)\big)_+\ \big\}\Big\} = \\ = \max_{k \in J_1} \Big\{\big(p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ + \big(p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+\Big\} = \big(p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ + \max_{k \in J_1} \big(p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x)\big)_+ .$$

Формула (16) установлена.

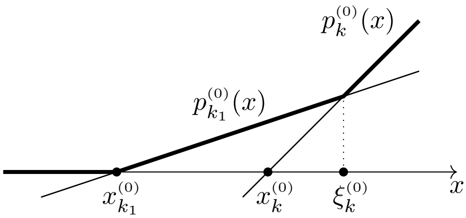

Рис. 6. Пояснение к формуле (17).

Для интересующей нас функции $P(x)$ вида (11) на основании (12), (13) и (16) получаем представление

$$P(x) = p_{k_0}(x) + \left(p_{k_1}^{(0)}(x)\right)_+ + \max_{k \in J_1} \left(p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x)\right)_+ . \tag{18}$$

Обозначим

$$\ell_0(x) = p_{k_0}(x), \qquad p_k^{(1)}(x) = p_k^{(0)}(x) - p_{k_1}^{(0)}(x), \qquad P_1(x) = \max_{k \in J_1} \left(p_k^{(1)}(x)\right)_+ .$$

С учетом (14) формулу (18) можно переписать в виде

$$P(x) = \ell_0(x) + a_{k_1}^{(0)}(x - x_{k_1}^{(0)})_+ + P_1(x).$$

Напомним, что $0 < a_{k_1}^{(0)} < a_k^{(0)}$ при всех $k \in J_1$. Значит, при $k \in J_1$ коэффициент при x у прямой $p_k^{(1)}(x)$ положительный.

К функции $P_1(x)$ можно применить то же преобразование, что и к функции $P_0(x)$. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока очередное индексное множество J_α не будет состоять из одного элемента.

Теорема доказана. □

7. Приведем сначала простой пример использования теоремы 3.

Пример 2. Пусть $P(x) = \max\{1, x, -x\}$. Покажем, что $P(x)$ приводится к виду

$$P(x) = -x + (x+1)_+ + (x-1)_+. \tag{19}$$

Предварительный шаг. Вынесем из максимума аффинную функцию с наименьшим коэффициентом при x. Получим

$$P(x) = -x + \max\{x+1, 2x, 0\} = -x + \max\{(x+1)_+, (2x)_+\}.$$

Основной шаг. Обозначим

$$P_0(x) = \max\{(x+1)_+, (2x)_+\}.$$

Имеем $x_1^{(0)} = -1$, $x_2^{(0)} = 0$; $a_1^{(0)} = 1$, $a_2^{(0)} = 2$. На основании (17) запишем

$$\max\{(x+1)_+, (2x)_+\} = (x+1)_+ + (x-1)_+.$$

В результате приходим к формуле (19).

Пример 3. Пусть

$$P(x) = \max\big\{-x+2,\ x-1,\ 2x+1,\ 3x,\ -2x-3,\ 5x-10,\ 3x-7,\ 6x-15\big\}.$$

Покажем, что

$$P(x) = -2x - 3 + (x+5)_+ + 3(x-\tfrac{1}{3})_+ + (x-1)_+ + 3(x-5)_+. \tag{20}$$

Предварительный шаг. Имеем

$$P(x) = -2x - 3 + \max\big\{(x+5)_+, (3x+2)_+, (4x+4)_+, (5x+3)_+, (7x-7)_+, (5x-4)_+, (8x-12)_+\big\}. \tag{21}$$

Выполним основные шаги.

1. Обозначим

$$P_0(x) = \max_{k\in 1:7} \big(p_k^{(0)}(x)\big)_+ \ ,$$

где $p_1^{(0)}(x) = x+5$, $p_2^{(0)}(x) = 3x+2$, $p_3^{(0)}(x) = 4x+4$, $p_4^{(0)}(x) = 5x+3$, $p_5^{(0)}(x) = 7x-7$, $p_6^{(0)}(x) = 5x-4$, $p_7^{(0)}(x) = 8x-12$.

Имеем $x_1^{(0)} = -5$, $x_2^{(0)} = -\frac{2}{3}$, $x_3^{(0)} = -1$, $x_4^{(0)} = -\frac{3}{5}$, $x_5^{(0)} = 1$, $x_6^{(0)} = \frac{4}{5}$, $x_7^{(0)} = \frac{3}{2}$, $a_1^{(0)} = 1$, $a_2^{(0)} = 3$, $a_3^{(0)} = 4$, $a_4^{(0)} = 5$, $a_5^{(0)} = 7$, $a_6^{(0)} = 5$, $a_7^{(0)} = 8$.

Наименьший корень является единственным: $x_1^{(0)} = -5$, при этом $a_1^{(0)} < a_k^{(0)}$ при всех $k \in 2:7$. По описанию алгоритма справедливо равенство

$$P_0(x) = (x+5)_+ + \max\big\{(2x-3)_+, (3x-1)_+, (4x-2)_+, (6x-12)_+, (4x-9)_+, (7x-17)_+\big\}. \tag{22}$$

2. Обозначим

$$P_1(x) = \max_{k\in 1:6} \big(p_k^{(1)}(x)\big)_+ \ ,$$

где $p_1^{(1)}(x) = 2x-3$, $p_2^{(1)}(x) = 3x-1$, $p_3^{(1)}(x) = 4x-2$, $p_4^{(1)}(x) = 6x-12$, $p_5^{(1)}(x) = 4x-9$, $p_6^{(1)}(x) = 7x-17$.

Имеем $x_1^{(1)} = \frac{3}{2}$, $x_2^{(1)} = \frac{1}{3}$, $x_3^{(1)} = \frac{1}{2}$, $x_4^{(1)} = 2$, $x_5^{(1)} = \frac{9}{4}$, $x_6^{(1)} = \frac{17}{7}$; $a_1^{(1)} = 2$, $a_2^{(1)} = 3$, $a_3^{(1)} = 4$, $a_4^{(1)} = 6$, $a_5^{(1)} = 4$, $a_6^{(1)} = 7$.

Наименьший корень единственный: $x_2^{(1)} = \frac{1}{3}$, при этом $a_2^{(1)} > a_1^{(1)}$ и $a_2^{(1)} < a_k^{(1)}$ при всех $k \in 3:6$. По описанию алгоритма справедливо равенство

$$P_1(x) = (3x-1)_+ + \max\big\{(x-1)_+, (3x-11)_+, (x-8)_+, (4x-16)_+\big\}. \tag{23}$$

3. Обозначим

$$P_2(x) = \max_{k\in 1:4} \big(p_k^{(2)}(x)\big)_+ \ ,$$

где $p_1^{(2)}(x) = x-1$, $p_2^{(2)}(x) = 3x-11$, $p_3^{(2)}(x) = x-8$, $p_4^{(2)}(x) = 4x-16$.

Имеем $x_1^{(2)} = 1$, $x_2^{(2)} = \frac{11}{3}$, $x_3^{(2)} = 8$, $x_4^{(2)} = 4$, $a_1^{(2)} = 1$, $a_2^{(2)} = 3$, $a_3^{(2)} = 1$, $a_4^{(2)} = 4$.

Наименьший корень единственный: $x_1^{(2)} = 1$. При этом $a_1^{(2)} = a_3^{(2)}$ и $a_1^{(2)} < a_2^{(2)}$, $a_1^{(2)} < a_4^{(2)}$. По описанию алгоритма справедливо равенство

$$P_2(x) = (x-1)_+ + \max\big\{(2x-10)_+, (3x-15)_+\big\}. \tag{24}$$

4. Обозначим

$$P_3(x) = \max\left\{p_1^{(3)}(x), p_2^{(3)}(x)\right\}_+ ,$$

где $p_1^{(3)}(x) = 2x - 10$, $p_2^{(3)}(x) = 3x - 15$.

Имеем $x_1^{(3)} = 5$, $x_2^{(3)} = 5$, $a_1^{(3)} = 2$, $a_2^{(3)} = 3$. Очевидно, что

$$P_3(x) = (3x - 15)_+ = 3(x - 5)_+. \tag{25}$$

Объединив равенства (21)–(25), придем к представлению (20) функции $P(x)$.

На рис. 7 представлен график ломаной $P(x)$.

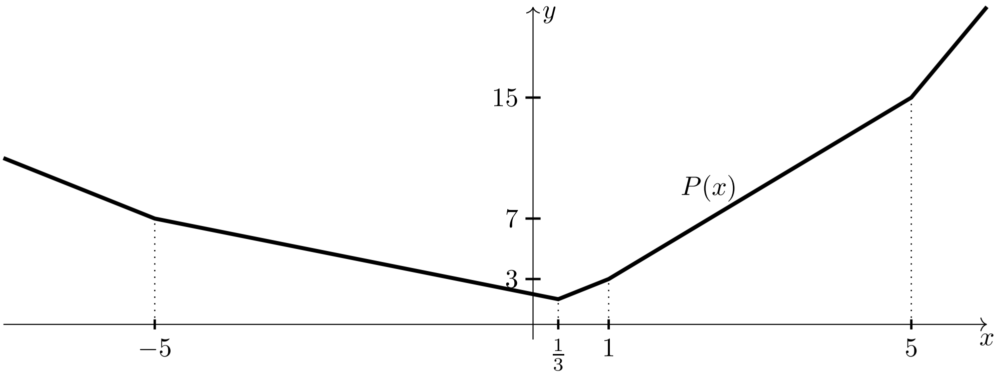

Рис. 7. График ломаной $P(x)$.

Приведенный анализ показывает, что функция одной переменной является ломаной (непрерывной кусочно-аффинной функцией) тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде разности максимумов двух конечных семейств аффинных функций. Этот факт делает естественным следующее определение.

Определение. Функция n переменных

$$F(x) = \max_{i\in 1:s}\left\{\langle a_i, x\rangle + b_i\right\} - \max_{j\in 1:r}\left\{\langle c_j, x\rangle + d_j\right\}$$

называется кусочно-аффинной функцией.

Исследованию свойств многомерных кусочно-аффинных функций посвящены работы [2–4].

Литература

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Полиномиальные сплайны.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1986).

2. Melzer D. On the expressibility of piecewise-linear continuous functions as the difference of two piecewise-linear convex functions. In: Demyanov V. F., Dixon L. C. W. (ed.) *Quasidifferential Calculus*, 118–134. Berlin, Heidelberg, Springer (1986).

3. Kripfganz A., Schulze R. Piecewise affine functions as a difference of two convex functions. *Optimization* **18** (1), 23–29 (1987). https://doi.org/10.1080/02331938708843210

4. Gorokhovik V. V., Zorko O. I. Piecewise affine functions and polyhedral sets. *Optimization* **31** (3), 209–221 (1994). https://doi.org/10.1080/02331939408844018

Статья поступила в редакцию 10 июня 2021 г.;
доработана 29 августа 2021 г.;
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.

Контактная информация:

Малозёмов Василий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.malozemov@spbu.ru
Тамасян Григорий Шаликович — канд. физ.-мат. наук, доц.; g.tamasyan@spbu.ru

Representations of continuous piecewise affine functions*

V. N. Malozemov[1], *G. Sh. Tamasyan*[1,2]

[1] St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoy pr. V. O., St Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Malozemov V. N., Tamasyan G. Sh. Representations of continuous piecewise affine functions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 53–63. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.106 (In Russian)

Continuous piecewise affine functions are widely used in computational mathematics. In one-dimensional case such functions are called broken lines. The article analyzes the analytical representations of broken lines in the forms accepted in the theory of polynomial splines as well as in the form of the difference of the maxima of two finite families of affine functions. The connection between these representation is being determined.

Keywords: piecewise affine function, broken line, analytical representations of broken lines, difference of convex functions.

References

1. Malozemov V. N., Pevnyj A. B. *Polynomial splines.* Leningrad, Leningrad University Press (1986). (In Russian)

2. Melzer D. On the expressibility of piecewise-linear continuous functions as the difference of two piecewise-linear convex functions. In: Demyanov V. F., Dixon L. C. W. (ed.) *Quasidifferential Calculus*, 118–134. Berlin, Heidelberg, Springer (1986).

3. Kripfganz A., Schulze R. Piecewise affine functions as a difference of two convex functions. *Optimization* **18** (1), 23–29 (1987). https://doi.org/10.1080/02331938708843210

4. Gorokhovik V. V., Zorko O. I. Piecewise affine functions and polyhedral sets. *Optimization* **31** (3), 209–221 (1994). https://doi.org/10.1080/02331939408844018

Received: June 10, 2021
Revised: August 29, 2021
Accepted: September 2, 2021

Authors' information:

Vassili N. Malozemov — v.malozemov@spbu.ru
Grigoriy Sh. Tamasyan — g.tamasyan@spbu.ru

*The results of Section 7 were obtained in the Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences with the support of the Russian Science Foundation (project No. 20-71-10032).