УДК 517.521 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1
MSC 30B10

Мультипликативное свойство рядов, используемых в задаче Неванлинны — Пика

А. В. Железняк

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина),
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

Для цитирования: *Железняк А. В.* Мультипликативное свойство рядов, используемых в задаче Неванлинны — Пика // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 37–45.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.104

В статье получено принципиально новое достаточное условие отрицательности коэффициентов степенного ряда, обратного ряду с положительными коэффициентами. А именно, доказывается, что поэлементное произведение степенных рядов сохраняет это свойство. В частности, это дает обобщение классической теоремы Харди — Калуцо о степенных рядах. Эти результаты обобщены на случай рядов нескольких переменных. Такого рода результаты находят применение в теории Неванлинны — Пика.

Ключевые слова: степенной ряд, ядра Неванлинны — Пика, логарифмическая выпуклость.

1. Введение. Хорошо известно, что у формального степенного ряда одной переменной с первым положительным коэффициентом и остальными отрицательными ряд, обратный исходному, будет иметь строго положительные коэффициенты (см. [1]). Однако обратное утверждение неверно, и в случае ряда одной переменной $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Харди показал, что логарифмической выпуклости коэффициентов, т. е. выполнения условия

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{1}$$

достаточно для того, чтобы ряд, обратный формальному степенному ряду с положительными коэффициентами, имел все отрицательные коэффициенты кроме самого первого (см. [2]). Этот результат имеет приложение в интерполяционной задаче Неванлинны — Пика (см. [3]). Отметим, что условие Харди (1) не сохраняется ни при сложении, ни при умножении формальных степенных рядов. С другой стороны, условие Харди (1) сохраняется при поэлементном умножении степенных рядов:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \star \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n x^n.$$

Мы покажем, что операция $\star$ сохраняет не только условие Харди, но и неотрицательность коэффициентов обратного ряда.

Теорема 1. *Пусть* $f_1(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *и* $f_2(x) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *— два формальных степенных ряда с положительными коэффициентами, и пусть* $g_1(x) =$

$b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ и $g_2(x) = d_0 - \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ — ряды, обратные f_1 и f_2 соответственно, причем коэффициенты b_n и d_n неотрицательны при всех n. Пусть $F(x) = f_1(x) \star f_2(x)$, $G(x) = l_0 - \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n$ — ряд, обратный F. Тогда все коэффициенты l_n ряда G будут неотрицательны.

Аналогичный результат получен для формальных степенных рядов от нескольких переменных (см. теорему 3 ниже).

2. Связь с интерполяционной задачей Неванлинны — Пика. Условие отрицательности коэффициентов обратного степенного ряда естественным образом возникает в интерполяционной задаче Неванлинны — Пика. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, а $H^2(\mathbb{D})$ — пространство Харди в $\mathbb{D}$. Для данных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{D}$ и значений $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ мы хотим найти функцию $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ такую, что $\varphi(x_k) = w_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Известно, что задача Неванлинны — Пика разрешима тогда и только тогда, когда матрица $A = (\frac{1 - w_k \overline{w_l}}{1 - x_k \overline{x_l}})_{1 \leq k,l \leq n}$ положительно определена, то есть

$$\text{матрица } A = ((1 - w_k \overline{w_l}) k(x_k, x_l))_{1 \leq k,l \leq n} \text{ положительно определена,} \tag{2}$$

где $k(x, y) = \frac{1}{1 - x\overline{y}}$ — воспроизводящее ядро пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$. Это условие впервые было получено Пиком в 1916 г. Более того, он доказал, что такое решение единственно и представимо в виде произведения Бляшке, а в 1919 г. Р. Неванлинна рассмотрел эту задачу независимо от Пика.

Рассмотрим общую задачу Неванлинны — Пика. Пусть H — гильбертово пространство аналитических функций в $\mathbb{D}$ такое, что функционал вычисления значения в точке непрерывен, то есть H — пространство с воспроизводящим ядром $k(w, z)$, $(f(z), k(w, z))_H = f(w)$. Для данных $x_1, x_2, \ldots, x_n, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ мы ищем мультипликатор φ пространства H такой, что $\varphi(x_k) = w_k, k = 1, 2, \ldots, n$, и $||\varphi|| \leq 1$. Известно (см. [1]), что условие положительной определенности матрицы $A = ((1 - w_k \overline{w_l}) k(x_k, x_l))_{1 \leq k,l \leq n}$ будет необходимым для существования мультипликатора φ. Это условие будет достаточным, если

$$\text{матрица } K = (k(x_k, x_l))_{1 \leq k,l \leq n} \text{ положительно определена,} \tag{3}$$

где $k(x, y) = \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{1 - b(x,y)}$, причем

$$\text{матрица } B = (b(x_k, x_l))_{1 \leq k,l \leq n} \text{ положительно определена.} \tag{4}$$

Ядра $k(x, y)$ называются ядрами Неванлинны — Пика. Рассмотрим ядра следующего вида: $k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x\overline{y})^n$ (воспроизводящее ядро пространства $H^2(\mathbb{D})$). Для выполнения условия (3) достаточно неотрицательности чисел a_n, а для выполнения условия (4) достаточно, чтобы у степенного ряда $1/k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x\overline{y})^n$ все коэффициенты, кроме нулевого, были неположительны.

3. Доказательство основных результатов. В этом параграфе будет доказана теорема 1 и сформулирован и доказан аналогичный результат для формальных степенных рядов от нескольких переменных (теорема 2).

Доказательство теоремы 1. Не умаляя общности можем считать, что $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 1$. Поскольку для рядов $F(x)$ и $G(x)$, $f_1(x)$ и $g_1(x)$, $f_2(x)$ и $g_2(x)$ выполнены соотношения

$$F(x)G(x) = 1, \quad f_1(x)g_1(x) = 1, \quad f_2(x)g_2(x) = 1,$$

то, приравнивая коэффициенты при x^n, получим

$$a_n c_n l_0 = a_{n-1} c_{n-1} l_1 + a_{n-2} c_{n-2} l_2 + \dots + a_0 c_0 l_n,$$

$$a_n b_0 = a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_0 b_n,$$

$$c_n d_0 = c_{n-1} d_1 + c_{n-2} d_2 + \dots + c_0 d_n.$$

Учитывая, что $b_0 = d_0 = l_0 = 1$, имеем

$$a_n c_n = a_{n-1} c_{n-1} l_1 + a_{n-2} c_{n-2} l_2 + \dots + a_0 c_0 l_n, \tag{5}$$

$$a_n = a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_0 b_n,$$

$$c_n = c_{n-1} d_1 + c_{n-2} d_2 + \dots + c_0 d_n.$$

Перемножая два последних тождества, получим

$$a_n c_n = (a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_0 b_n)(c_{n-1} d_1 + c_{n-2} d_2 + \dots + c_0 d_n) = \\ = \sum_{0 \le k, m \le n-1} a_k c_m b_{n-k} d_{n-m}.$$

Будем преобразовывать полученное выражение по следующему принципу. Если $k = m$, то слагаемое, содержащее $a_k c_k$, оставляем без изменений. В случае, если $k > m$, коэффициент c_m оставляем без изменений, а коэффициент a_k заменяем на равное ему выражение $a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \dots + a_m b_{k-m} + \dots + a_0 b_k = a_k$. В случае $m > k$ коэффициент a_k оставляем без изменений, а коэффициент c_m заменяем на равное ему выражение $c_{m-1} d_1 + c_{m-2} d_2 + \dots + c_k d_{m-k} + \dots + c_0 d_k = c_m$. После данной замены оставляем слагаемое, содержащее $a_l c_l$, $l = m$ или $l = k$, а к остальным применяем аналогичную операцию. Продолжаем применять такую замену до тех пор, пока остаются слагаемые вида $a_k c_m$ при $k \ne m$. Тем самым мы сможем выразить коэффициент $a_n c_n$ через коэффициенты $a_k c_k, k < n$. Приведя подобные и обозначив через $h_{n-k,n}$ коэффициент, стоящий при $a_k c_k$, получим равенство

$$a_n c_n = \sum_{0 \le k \le n-1} h_{n-k,n} a_k c_k. \tag{6}$$

Очевидно, что каждый из коэффициентов $h_{n-k,n}$ будет неотрицательным, так как представляет собой сумму неотрицательных коэффициентов.

Лемма 1. *Коэффициент $h_{k,n}$ не зависит от выбора числа n, то есть $h_{k,n} = h_{k,m}$ при всех натуральных числах $n, m \ge k$.*

Доказательство леммы 1. Поскольку $h_{k,n}$ и $h_{k,m}$ — это коэффициенты при $a_{n-k} c_{n-k}$ и $a_{m-k} c_{m-k}$ в (6) соответственно, то в их формировании не участвуют слагаемые вида $a_s c_t$ при $s < n - k$ или $t < n - k$ в первом случае и $s < m - k$ или $t < m - k$ во втором случае. Поэтому достаточно рассмотреть произведения вида

$$S_n = (a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_{n-k} b_k)(c_{n-1} d_1 + c_{n-2} d_2 + \dots + c_{n-k} d_k), \tag{7}$$

$$S_m = (a_{m-1}b_1 + a_{m-2}b_2 + \cdots + a_{m-k}b_k)(c_{m-1}d_1 + c_{m-2}d_2 + \cdots + c_{m-k}d_k), \tag{8}$$

поскольку слагаемые, содержащие $a_s c_t$ при $s < n-k$ или $t < n-k$ в первом случае и $s < m-k$ или $t < m-k$ во втором случае, можно отбросить. По тем же причинам, для удобства, будем считать, что $X_{m,i} = a_{m-i} - (a_{m-i-1}b_1 + a_{m-i-2}b_2 + \cdots + a_{m-k}b_{k-i})$ и $Y_{m,i} = c_{m-j} - (c_{m-j-1}d_1 + c_{m-j-2}d_2 + \cdots + c_{m-k}d_{k-j})$, откуда получаем соотношения

$$a_{m-i} = a_{m-i-1}b_1 + a_{m-i-2}b_2 + \cdots + a_{m-k}b_{k-i} + X_{m,i}, \tag{9}$$

$$c_{m-j} = c_{m-j-1}d_1 + c_{m-j-2}d_2 + \cdots + c_{m-k}d_{k-j} + Y_{m,i}. \tag{10}$$

Аналогично будем иметь

$$a_{n-i} = a_{n-i-1}b_1 + a_{n-i-2}b_2 + \cdots + a_{n-k}b_{k-i} + X_{n,i}, \tag{11}$$

$$c_{n-j} = c_{n-j-1}d_1 + c_{n-j-2}d_2 + \cdots + c_{n-k}d_{k-j} + Y_{n,i}. \tag{12}$$

Заметим, что числа $X_{m,i}, Y_{m,i}, X_{n,i}, Y_{n,i}$ не содержат слагаемых вида $a_s b_q, c_t d_q$ при $s < m-k$ или $t < m-k$ в первом случае и $s < n-k$ или $t < n-k$ во втором. Положим, что на начальном этапе имеем равенства

$$M_{i,j}(0) = N_{i,j}(0) = b_i d_j,$$

$$U(0) = V(0) = 0.$$

Раскрывая скобки в выражениях (7) и (8), получим

$$S_n = \sum_{1\le i,j\le k} a_{n-i}c_{n-j}b_i d_j = \sum_{0\le i,j\le k} a_{n-i}c_{n-j}N_{i,j}(0) + U(0),$$

$$S_m = \sum_{1\le i,j\le k} a_{m-i}c_{m-j}b_i d_j = \sum_{0\le i,j\le k} a_{m-i}c_{m-j}M_{i,j}(0) + V(0).$$

Будем преобразовывать полученные выражения для S_n и S_m к виду (6) по вышеописанному алгоритму для построения чисел $h_{k,n}$. Оставляя без изменений слагаемые вида $a_{n-i}c_{n-i}$ и $a_{m-i}c_{m-i}$, будем последовательно на каждом шаге заменять слагаемые вида $a_{n-i}c_{n-j}$ и $a_{m-i}c_{m-j}$ при $i \ne j$, используя формулы (9)–(12). Обозначим через $N_{i,j}(p)$ и $M_{i,j}(p)$ соответственно коэффициенты при $a_{n-i}c_{n-j}$ и $a_{m-i}c_{m-j}$ в S_n и S_m на p-м шаге замен. Обозначим также

$$U(p) = S_n - \sum_{1\le i,j\le k} a_{n-i}c_{n-j}N_{i,j}(p) \quad \text{и} \quad V(p) = S_m - \sum_{1\le i,j\le k} a_{m-i}c_{m-j}M_{i,j}(p).$$

Заметим, что выражение $U(p)$ содержит только слагаемые вида $a_s c_t$, где хотя бы одно из чисел s, t удовлетворяет соотношению $s < n-k$ или $t < n-k$. Аналогично, выражение $V(p)$ содержит только слагаемые вида $a_s c_t$, где хотя бы одно из чисел s, t удовлетворяет соотношению $s < m-k$ или $t < m-k$. Кроме того, введенные таким образом числа $U(p)$, $V(p)$, $M_{i,j}(p)$ и $N_{i,j}(p)$ совпадают со введенными ранее $U(0)$, $V(0)$, $M_{i,j}(0)$ и $N_{i,j}(0)$ при $p = 0$.

Докажем, что на каждом шаге с номером p будет верно $M_{i,j}(p) = N_{i,j}(p)$. Будем проводить доказательство по индукции.

База $p = 0$. Верно по построению чисел $M_{i,j}(0) = N_{i,j}(0) = b_i d_j$.

Переход. Пусть $M_{i,j}(p) = N_{i,j}(p)$. Зафиксируем числа I и J. Пусть для простоты $I < J$. Заменим в первой сумме $a_{n-I}c_{n-J}N_{I,J}(p)$ на $(a_{n-I-1}b_1 + a_{n-I-2}b_2 + \dots + a_{n-k}b_{k-I} + X_{n,I})c_{n-J}N_{I,J}(p)$, а во второй сумме — $a_{m-I}c_{m-J}M_{I,J}(p)$ на $(a_{m-I} = a_{m-I-1}b_1 + a_{m-I-2}b_2 + \dots + a_{m-k}b_{k-I} + X_{m,I})c_{m-J}M_{I,J}(p)$. Получим соответственно

$$S_n = \sum_{1\le i,j\le k} a_{n-i}c_{n-j}N_{i,j}(p+1) + U(p+1)$$

и

$$S_m = \sum_{1\le i,j\le k} a_{m-i}c_{m-j}M_{i,j}(p+1) + V(p+1).$$

Посмотрим, что произойдет с коэффициентами $N_{i,j}(p+1)$ и $M_{i,j}(p+1)$:

1) $M_{I,J}(p+1) = N_{I,J}(p+1) = 0$;

2) при $1 \le s \le (k-I)$ $N_{I+s,J}(p+1) = N_{I+s,J}(p) + N_{I,J}(p)b_s$ и $M_{I+s,J}(p+1) = M_{I+s,J}(p) + M_{I,J}(p)b_s$, следовательно, $M_{I+s,J}(p+1) = N_{I+s,J}(p+1)$;

3) в остальных случаях $N_{i,j}(p) = N_{i,j}(p+1)$ и $M_{i,j}(p) = M_{i,j}(p+1)$.

Тем самым после проведения такой замены получаем $M_{i,j}(p+1) = N_{i,j}(p+1)$. Заметим, что по построению коэффициентов $h_{k,n}$ на последнем шаге с номером p будут верны равенства $M_{i,j}(p) = N_{i,j}(p) = 0$ при $i \ne j$ и $M_{i,i}(p) = N_{i,i}(p)$ при всех $i : 1 \le i \le k$. Кроме того, по определению коэффициентов $h_{k,n}$ и $h_{k,m}$ имеем $h_{k,n} = N_{k,k}(p)$ и $h_{k,m} = M_{k,k}(p)$ на последнем шаге p. Следовательно, $h_{k,n} = h_{k,m}$.

Лемма 1 доказана. □

Используя лемму 1, можно считать, что $h_{k,n} = h_k$. Перепишем выражение (6) в более удобной форме:

$$a_n c_n = \sum_{0\le k\le n-1} h_{n-k}a_k c_k = a_{n-1}c_{n-1}h_1 + a_{n-2}c_{n-2}h_2 + \dots + a_0 c_0 h_n. \qquad (13)$$

Докажем, что $h_n = l_n$. Индукция по n.

База $n = 1$. Заметим, что

$$a_1 = b_1 a_0, \quad c_1 = d_1 c_0, \quad a_1 c_1 = a_0 c_0 b_1 d_1 = a_0 c_0 l_1 = a_0 c_0 h_1.$$

Переход от $(n-1)$ к n. Приравнивая выражения (5) и (13) и учитывая, что по предположению индукции $h_1 = l_1, h_2 = l_2, \dots, h_{n-1} = l_{n-1}$, получим требуемое равенство $h_n = l_n$. Тем самым, поскольку коэффициент h_n положителен, получим, что коэффициент l_n тоже положителен. Что и требовалось доказать.

Замечание 1. При построении коэффициентов получается, что коэффициент h_n есть симметрический многочлен с целыми неотрицательными коэффицентами, зависящий от $b_1, b_2, \dots, b_n, d_1, d_2, \dots, d_n$, тем самым $h_n = h_n(b_1, b_2, \dots, b_n, d_1, d_2, \dots, d_n) = h_n(d_1, d_2, \dots, d_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$. Более того, верно соотношение $h_n(1, 1, \dots, 1) = 3^{n-1}$.

Приведем примеры нескольких первых коэффициентов h_n:

$$h_1 = b_1 d_1,$$

$$h_2 = b_1^2 d_2 + b_2 d_1^2 + b_2 d_2,$$

$$h_3 = b_1^3 d_3 + 2b_1 b_2 d_1 d_2 + 2b_1 b_2 d_3 + b_3 d_1^3 + 2b_3 d_1 d_2 + b_3 d_3,$$

$$h_4 = b_1^4 d_4 + 2b_1^2 b_2 d_1 d_3 + b_1^2 b_2 d_2^2 + 3b_1^2 b_2 d_4 + 2b_1 b_3 d_1^2 d_2 + 2b_1 b_3 d_1 d_3 + 2b_1 b_3 d_2^2 +$$
$$+2b_1 b_3 d_4 + b_2^2 d_1^2 d_2 + 2b_2^2 d_1 d_3 + b_2^2 d_4 + b_4 d_1^4 + 3b_4 d_1^2 d_2 + 2b_4 d_1 d_3 + b_4 d_2^2 + b_4 d_4.$$

Замечание 2. Используя процесс построения коэффициентов h_n в доказательстве теоремы 2, можно получить оценку для коэффициентов l_n, а именно:

$$l_n > b_n d_n.$$

Действительно, поскольку верно соотношение $h_n = l_n$, то достаточно проверить, что верно неравенство $h_n > b_n d_n$, а это является верным, поскольку слагаемое $b_n d_n$ входит в разложение коэффициента h_n, а остальные слагаемые, входящие в него, положительны.

4. Многомерный случай. Теорему 1 можно расширить на случай формальных степенных рядов нескольких переменных. Для этого в дальнейшем нам потребуются следующие вспомогательные обозначения. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на i-м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \ldots, 1)$ — мультииндексы, состоящие из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ и $a_s = a_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$. Также будем писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum_{i=1}^n s_i$ порядок мультииндекса s. Будем говорить, что $s \gg t$, если выполнены два условия: $s \geq t$ и $s \neq t$. Кроме того, $s >< t$, если коэффициенты s и t несравнимы.

Теорема 2. *Пусть* $f_1(x) = a_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} a_s x^s$ *и* $f_2(x) = c_{\mathbb{O}} + \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} c_s x^s$ *— два формальных степенных ряда от* n *переменных с положительными коэффициентами, и пусть* $g_1(x) = b_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} b_s x^s$ *и* $g_2(x) = d_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} d_s x^s$ *— ряды, обратные* f_1 *и* f_2 *соответственно, причем коэффициенты* b_s *и* d_s *неотрицательны при всех* s. *Пусть* $a_{\mathbb{O}} = b_{\mathbb{O}} = c_{\mathbb{O}} = d_{\mathbb{O}} = 1$. *Пусть ряд* $F(x) = f_1(x) \star f_2(x)$, $G(x) = l_{\mathbb{O}} - \sum\limits_{s>>\mathbb{O}}^{\infty} l_s x^s$ *— ряд, обратный* F. *Тогда все коэффициенты* l_s *ряда* G *будут неотрицательны.*

Доказательство теоремы 2. Поскольку для рядов $F(x)$ и $G(x)$, $f_1(x)$ и $g_1(x)$, $f_2(x)$ и $g_2(x)$ выполнены соотношения

$$F(x)G(x) = 1, \quad f_1(x)g_1(x) = 1, \quad f_2(x)g_2(x) = 1,$$

то, приравнивая коэффициенты при x^s, получим

$$a_s c_s l_{\mathbb{O}} = \sum_{\mathbb{O} \leq u << s} a_u c_u l_{s-u},$$

$$a_s b_{\mathbb{O}} = \sum_{\mathbb{O} \leq u << s} a_u b_{s-u},$$

$$c_s d_{\mathbb{O}} = \sum_{\mathbb{O} \leq v << s} c_v d_{s-v}.$$

Учитывая, что $b_{\mathbb{O}} = d_{\mathbb{O}} = l_{\mathbb{O}} = 1$, имеем

$$a_s c_s = \sum_{\mathbb{O} \le u << s} a_u c_u l_{s-u}, \tag{14}$$

$$a_s = \sum_{\mathbb{O} \le u << s} a_u b_{s-u},$$

$$c_s = \sum_{\mathbb{O} \le v << s} c_v d_{s-v}.$$

Перемножая два последних тождества, получим

$$a_s c_s = \left(\sum_{\mathbb{O} \le u << s} a_u b_{s-u} \right) \left(\sum_{\mathbb{O} \le v << s} c_v d_{s-v} \right) = \sum_{\mathbb{O} \le u,v << s} a_u c_v b_{s-u} d_{u-v}.$$

Будем преобразовывать полученное выражение по следующему алгоритму. Если $u = v$, то слагаемое, содержащее $a_u c_v$, оставляем без изменений. В случае, если $u \gg v$, c_v оставляем без изменений, а a_u заменяем на равное ему выражение $a_u = \sum\limits_{\mathbb{O} \le t \ll u} a_t b_{u-t}$. При $v \gg u$ действуем аналогично. В случае, если $u >< v$, c_v заменяем на равное ему выражение $c_v = \sum\limits_{\mathbb{O} \le t \ll u} c_t d_{v-t}$, а a_u заменяем на равное ему выражение $a_u = \sum\limits_{\mathbb{O} \le t \ll u} a_t b_{u-t}$. После данной замены и раскрытия скобок оставляем слагаемые вида $a_v c_v$, а к остальным применяем аналогичную операцию. Продолжаем применять такую замену до тех пор, пока остаются слагаемые вида $a_u c_v$ при $u \ne v$. Тем самым выразим коэффициент $a_s c_s$ через коэффициенты $a_u c_u, u \ll s$; приведя подобные и обозначив через $h_{s-u,s}$ коэффициент, стоящий при $a_u c_u$, получим равенство

$$a_s c_s = \sum_{\mathbb{O} \le u \ll s} h_{s-u,s} a_u c_u. \tag{15}$$

Очевидно, как и в случае для одной переменной, что коэффициент $h_{s-u,s}$ будет неотрицательным, так как он есть сумма неотрицательных коэффициентов.

Лемма 2. *Коэффициент $h_{u,s}$ не зависит от s, то есть $h_{u,s} = h_{u,t} = h_{u,u}$ при всех $s, t \gg u$.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1. Учитывая лемму 2, можно считать, что $h_{u,s} = h_u$. Поэтому перепишем выражение (15) в более удобной форме:

$$a_s c_s = \sum_{0 \le u << s} a_u c_u h_{s-u}. \tag{16}$$

Докажем, что $h_s = l_s$. Индукция по порядку мультииндекса s.

База $||s|| = 1$. В этом случае все сводится к случаю одной переменной.

Переход от $||s|| = (k-1)$ к $||s|| = k$. Приравнивая выражения (14) и (16) и учитывая, что по предположению индукции имеем $h_u = l_u$ для всех u, чей порядок $||u||$ не превосходит $(k-1)$, получим требуемое $h_s = l_s$. Тем самым, поскольку коэффициент h_s положителен, получим, что коэффициент l_s положителен. Лемма 2 доказана. $\square$

Замечание 3. Используя процесс построения коэффициентов h_s в доказательстве теоремы 3, можно получить оценку для коэффициентов l_s, а именно:

$$l_s > b_s d_s.$$

5. Приложения. Теорема 1 имеет важное приложение в теории гильбертовых пространств функций с воспроизводящими ядрами Неванлинны — Пика. Одним из важных примеров является пространство $l^2(w_n)$ функций $f(z)$, аналитических в единичном круге, т. е. функций $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} f_n z^n$ с нормой

$$||f|| = \sum_{n \geq 0} w_n ||f_n||^2 < \infty.$$

При этом числа w_n строго положительны и для формального степенного ряда $\sum\limits_{n \geq 0} (w_n)^{(-1)} x^n$ справедливы соотношения

$$\left(\sum_{n \geq 0} (w_n)^{(-1)} x^n \right)^{(-1)} = w_0 - \sum_{n > 0} b_n x^n, \quad b_n \geq 0, \quad n > 0.$$

В обозначениях теоремы 2 можем записать $w_n = a_n^{(-1)}$. Из теоремы 2 следует полугрупповое свойство пространств: если пространства $l^2(w_n)$ и $l^2(v_n)$ обладают ядрами Неванлинны — Пика, то и пространство $l^2(w_n v_n)$ обладает тем же свойством.

Литература

1. Agler J., McCarthy John E. *Pick interpolation and Hilbert function spaces.* In: Graduate Studies in Mathematics, vol. 44. Providence, American Mathematician Society (2002).
2. Hardy G. H. *Divergent Series.* Oxford, Clarendon Press (1949).
3. Полиа З. Г., Сегё Г. *Задачи и теоремы из анализа*, пер. с нем. Москва, Наука (1978).

Статья поступила в редакцию 24 марта 2021 г.;
доработана 18 мая 2021 г.;
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.

Контактная информация:

Железняк Александр Владимирович — ст. преп.; ferrum2001@mail.ru

Multiplicative property of series used in the Nevanlinna — Pick problem

A. V. Zheleznyak

St Petersburg Electrotechnical University LETI,
5, ul. Professora Popova, St Petersburg, 197376, Russian Federation

For citation: Zheleznyak A. V. Multiplicative property of series used in the Nevanlinna — Pick problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 37–45. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.104 (In Russian)

In the paper we obtained substantially new sufficient condition for negativity of coefficients of power series inverse to series with positive ones. It has been proved that element-wise product of power series retains this property. In particular, it gives rise to generalization of the classical Hardy theorem about power series. These results are generalized for cases of series with multiple variables. Such results are useful in Nevanlinna — Pick theory. For example, if function $k(x, y)$ can be represented as power series $\sum_{n\geq 0} a_n(x\bar{y})^n$, $a_n > 0$, and reciprocal function $1/k(x, y)$ can be represented as power series $\sum_{n\geq 0} b_n(x\bar{y})^n$ such that $b_n < 0$, $n > 0$, then $k(x, y)$ is a reproducing kernel function for some Hilbert space of analytic functions in the unit disc $\mathbb{D}$ with Nevanlinna — Pick property. The reproducing kernel $1/(1 - x\bar{y})$ of the classical Hardy space $H^2(\mathbb{D})$ is a prime example for our theorems.

Keywords: power series, Nevanlinna — Pick kernels, logarithmical convexity.

References

1. Agler J., McCarthy John E. *Pick interpolation and Hilbert function spaces.* In: Graduate Studies in Mathematics, vol. 44. Providence, American Mathematician Society (2002).

2. Hardy G. H. *Divergent Series.* Oxford, Clarendon Press (1949).

3. Pólya Z. G., Szegö G. *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis.* Berlin, Springer-Verlag (1964). [Rus. ed.: Pólya Z. G., Szegö G. *Zadachi i teoremy iz analiza.* Moscow, Nauka Publ. (1978)].

Received: March 24, 2021
Revised: May 18, 2021
Accepted: September 2, 2021

Author's information:

Alexander V. Zheleznyak — ferrum2001@mail.ru