САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
1999

Утверждено на заседании
кафедры общей математики и информатики
в качестве методических указаний
для студентов естественных факультетов

Составители: А.Ф.Сизова, А.К.Пономаренко
Рецензент - Н.М.Салтыкова

СОДЕРЖАНИЕ

В отличие от теории вероятностей, изучающей математические модели случайных величин, в математической статистике по известным реализациям случайных величин (имеющим обычно числовой вид) с определенной степенью достоверности строят соответствующие теоретико-вероятностные модели.

В математической статистике рассматривают следующие основные задачи: проверка статистических гипотез, статистическое оценивание неизвестных параметров, построение доверительных интервалов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При изучении случайного явления в практических задачах единственно, что мы можем сделать, — это получить все характеристики случайных явлений опыта. Следовательно, мы должны на основании экспериментальных данных охарактеризовать как неизвестное распределение, так и числовые характеристики, т.е. математическое ожидание, дисперсию, корреляции и т.д., изучаемой случайной величины X. С этой целью проводится серия независимых однотипных испытаний, в каждом из которых определяется значение случайной величины X.

Последовательность n независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ назовем выборкой объема n для данной случайной величины.

Последовательность n наблюденных значений мы будем называть *выборочными значениями.* Если последовательность выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ расположена в порядке возрастания, то такую последовательность принято называть *вариационным рядом.*

Если $x_1 \leq x_2, \leq \ldots \leq x_n$, то это — *вариационный ряд.*

Какова функция распределения $F(x)$ случайной величины X, нам неизвестно. Мы должны по результатам выборочных значений оценить функцию $F(x)$. Так как $F(x) = P(X < x)$ есть вероятность события $X < x$, то эту вероятность мы сможем оценить с помощью относительной частоты этого же события.

Под эмпирической или выборочной функцией распределения $F_n^*(x)$ мы будем понимать относительную частоту события $X < x$

в полученной при наблюдении выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть x — произвольное число. Тогда

$$F_n^*(x) = W(X < x) = \frac{\nu_x}{n},$$

где ν_x — количество выборочных значений, меньших x.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — члены выборки, а $\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2 \leq \ldots \tilde{x}_n$ — вариационный ряд этой выборки. Если в выборке встречаются одинаковые члены, то можно перечислить только различные члены $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_s^*$ этой выборки. Очевидно $s \leq n$, так как некоторые члены в выборке могут повторяться. Обозначим через n_k число членов выборки, равных x_k^*. Пусть ν_k — число членов выборки, не превосходящих значения x_k^*, т.е. ν_k — это число членов, удовлетворяющих неравенству $x_i < x_k^*$. Тогда

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_1^*, \\ \dfrac{\nu_k}{n}, & \text{если } x_k^* < x \leq x_{k+1}^*, \quad k = 1, 3, \ldots s-1, \\ 1, & \text{если } x > x_s^*. \end{cases} \tag{1}$$

Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события $X < x$ стремится по вероятности к вероятности этого события. Другими словами, при больших n величины $F_n^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются друг от друга в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{|F_n^*(x) - F(x)| < \varepsilon\} = 1 \quad (\varepsilon > 0). \tag{2}$$

Отсюда следует, что $F_n^*(x)$ целесообразно использовать для приближенного представления теоретической функции распределения $F(x)$ случайной величины X, которую мы наблюдаем в эксперименте.

Для наглядного представления обширного статистического материала принята следующая методика. При большом числе наблюдений весь диапазон полученных наблюдений нужно разбить на k интервалов и для каждого i-го интервала (y_i, y_{i+1}) найти частоту m_i (количество наблюдений, попавших в i-й интервал) и относительную частоту $w_i = \dfrac{m_i}{n}$. Построенная таким образом таблица называется *статистическим рядом* (табл. 1).

Таблица 1

Статистический ряд

Границы интервалов	y_1, y_2	y_2, y_3	$\ldots$	y_k, y_{k+1}
Частота в интервале	m_1	m_2	$\ldots$	m_k
Относительная частота	w_1	w_2	$\ldots$	w_k

Если на оси абсцисс отложить интервалы $[y_i, y_{i+1}]$ $(i = 1, \ldots, k)$, и на каждом из интервалов, как на основании, построить прямоугольник, площадь которого равна относительной частоте попадания случайной величины в пределы данного интервала, то мы получим фигуру, которую принято называть *гистограммой выборки* (рис. 1).

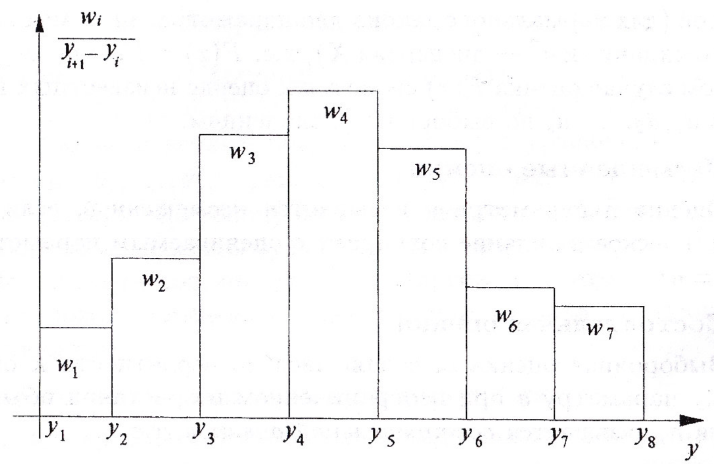

Рис. 1. Гистограмма

При больших n можно ожидать, что эта площадь будет приблизительно равна вероятности для наблюденного значения попасть в соответствующий интервал, т.е. будет приблизительно равна интегралу от плотности вероятностей $f(x)$, распространенному на данный интервал, а верхняя часть контура гистограммы будет статистическим аналогом графика плотности $f(x)$ случайной величины X (непрерывного типа) так же, как эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ — аналог теоретической функции распределения

$F(x)$. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

От выбора длины промежутков (чисел $h_i = y_{i+1} - y_i$) зависит большая или меньшая "выразительность" гистограммы. При малых h гистограмма содержит слишком много случайного. При большом h в гистограмме почти теряются индивидуальные черты сделанной выборки, следовательно, изучаемого процесса. Реально можно сделать следующие рекомендации: выбирать число интервалов не более

$$k = \text{целая часть } \{3.2 \ln n\} \tag{2}$$

и после построения статистического ряда объединять те интервалы, в которых частота попадания меньше 5.

Во многих случаях бывает заранее известно, что функция распределения $F(x)$ (или плотность распределения $f(x)$) принадлежит к определенному классу функций (например, распределенных по нормальному закону), зависящему от одного или нескольких параметров (для нормального закона два параметра: m — математическое ожидание и σ^2 — дисперсия X), т.е. $F(x) = F(x;\, a_1, a_2, \ldots, a_s)$. В этом случае оценка $F(x)$ сводится к оценке неизвестных параметров $a_1, a_2, \ldots, a_s$ по выборочным значениям.

Несмещенные оценки

Оценка $\widetilde{a}$ параметра a называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание совпадает с оцениваемым параметром a ($E\widetilde{a} = a$).

Состоятельная оценка

Выборочная оценка $\widetilde{a}$, сходящаяся по вероятности к оцениваемому параметру a при неограниченном возрастании объема выборки n, называется *состоятельной оценкой*, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\widetilde{a} - a| < \varepsilon) = 1$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ выборка объема n. Среднее выборочное

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

является несмещенной и состоятельной оценкой для математического ожидания m.

Выборочная дисперсия

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{4}$$

является несмещенной и состоятельной оценкой для дисперсии σ^2.

Для практического получения оценок часто используют метод моментов и метод максимального правдоподобия.

Метод моментов

Пусть известна функция распределения $F(x;\theta_1, \ldots, \theta_s)$ случайной величины X, где $\theta_1, \ldots, \theta_s$ - параметры, числовые значения которых неизвестны. Для получения оценок $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_s$ этих параметров производят n независимых наблюдений случайной величины X, в результате которых получают ее значения $x_1, \ldots, x_n$, затем вычисляют первые s выборочных моментов (начальных $\hat{a}_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^k$ или центральных $\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^k$, k=1, ..., s). Приравняв выборочные моменты теоретическим ($a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x;\theta_1, \ldots, \theta_s)$ или $m_k = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^k dF(x;\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $a = a_1$ соответственно), получим систему s уравнений с s неизвестными $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_s$, решив которую, найдем и функцию $F(x;\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_s)$. По закону больших чисел при больших значениях n выборочные моменты будут близки к теоретическим.

Метод моментов, введеный К. Пирсоном, дает состоятельные (но, возможно, смещенные оценки), как правило, невысокой эффективности.

Метод максимального правдоподобия

Р. Фишер в качестве общего метода нахождения оценок предложил один из наиболее важных методов — метод максимального правдоподобия. [1]

Пусть имеется выборка $x_1, \ldots, x_n$ значений случайной величины X, причем закон распределения зависит от параметра θ (Например, плотность распределения вероятности есть $f(x, \theta)$). *Функцией правдоподобия* называется функция

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta),$$

[1] В частных случаях этот метод применялся еще К. Гауссом.

если X — непрерывная случайная величина, $f(x_j,\theta) = P_\theta(x = x_j)$, если X — дискретная.

При фиксированной выборке $x_1,\ldots,x_n$ функция L — функция аргумента θ. Метод максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве оценки параметра θ берут то значение этого параметра, при котором функция L имеет наибольшее значение. Так как функции L и lnL имеют одни и те же точки экстремума, то вместо $\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ решают уравнение $\frac{\partial lnL}{\partial\theta} = 0$. Последнее уравнение принято называть *уравнением правдоподобия*. Его решение $\hat\theta$ называется *оценкой максимального правдоподобия* параметра θ.

Если закон распределения случайной величины X зависит от нескольких параметров $\theta_1,\ldots,\theta_s$, то уравнение правдоподобия $\frac{\partial lnL}{\partial\theta} = 0$ заменяется системой уравнений

$$\frac{\partial lnL}{\partial\theta_1} = 0, \ldots, \frac{\partial lnL}{\partial\theta_s} = 0,$$

что приводит к системе s уравнений с s неизвестными $\theta_1,\ldots,\theta_s$.

Оценки, получаемые с помощью метода максимального правдоподобия, всегда состоятельные, эффективные, но могут оказаться смещенными. (После введения соответствующих поправок их, как обычно, можно сделать несмещенными).

Продолжим изучение оценок.

Пусть a — точное значение параметра, а $\widetilde{a}$ — его несмещенная оценка, полученная на основе опытных данных. Оценка $\widetilde{a}$ тем точнее определяет параметр a, чем меньше $|a-\widetilde{a}|$. Если $\varepsilon > 0$ и $|a-\widetilde{a}| < \varepsilon$, то положительное число ε характеризует *точность оценки*. Чем меньше ε, тем лучше точность. Поскольку оценка $\widetilde{a}$ является случайной (зависит от случайных результатов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в серии измерений), то можно говорить лишь о вероятности β выполнения неравенства $|a-\widetilde{a}| < \varepsilon$, т.е.

$$P\big(|a-\widetilde{a}| < \varepsilon\big) = \beta,$$

или

$$P(\widetilde{a}-\varepsilon < a < \widetilde{a}+\varepsilon) = \beta.$$

Интервал $(\widetilde{a}-\varepsilon, \widetilde{a}+\varepsilon)$ называется *доверительным интервалом*, а вероятность β *доверительной вероятностью*, или *надежностью* оценки параметра a (рис. 2), если

$$P(\widetilde{a}-\varepsilon < a < \widetilde{a}+\varepsilon) = \beta.$$

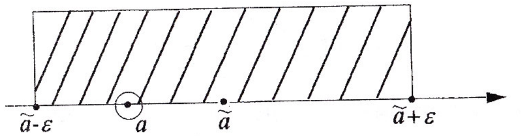

Рис. 2. Доверительный интервал

Следует еще раз отметить, что границы $\widetilde{a}-\varepsilon$, $\widetilde{a}+\varepsilon$ доверительного интервала являются случайными величинами, а параметр a — фиксированной, неслучайной величиной. Поэтому было бы, например, ошибочно сказать, что параметр a попадает в интервал $(\widetilde{a}-\varepsilon, \widetilde{a}+\varepsilon)$. На самом деле с вероятностью β доверительный интервал заключает в себе (накрывает) неизвестный параметр a.

Доверительная вероятность обычно задается заранее, причем в качестве β берут достаточно большую вероятность, например: $0,9$; 0.95; $0,99$ или 0.999.

1. Построение доверительного интервала

Построим доверительный интервал для математического ожидания m нормального распределения, т.е. $X \in N(m,\sigma^2)$.

Случай А. Пусть дисперсия $DX = \sigma^2$ известна.

Так как $\bar{x}$ является наилучшей оценкой математического ожидания $m = EX$, то в качестве оценки $\widetilde{a}$ следует взять $\bar{x}$, и для построения доверительного интервала нужно найти такое ε, что

$$P\big(\bar{x}-m| < \varepsilon\big) = \beta.$$

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{n=1}^{n} x_i$ распределено по нормальному закону с $E\bar{x} = m$, $D\bar{x} = \sigma^2/n$. Поэтому по формуле вычисления вероятностей попадания нормально распределенной величины в заданный интервал (симметричный относительно математического ожидания m) имеем

$$P\big(\bar{x}-m| < \varepsilon\big) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right).$$

Здесь $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$, $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-y^2/2}dy$ — функция Лапласа.

Следовательно,

$$P\big(|\bar{x}-m| < \varepsilon\big) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

и, значит,

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \beta. \tag{5}$$

По таблице (приложение 2) функций Лапласа $\Phi(z)$ находим такое z_β, чтобы $2\Phi(z_\beta) = \beta$. Тогда $z_\beta = \varepsilon\sqrt{n}/\sigma$, отсюда

$$\varepsilon = \frac{z_\beta \sigma}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Таким образом, доверительный интервал имеет вид

$$\left(\bar{x} - \frac{z_\beta\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \frac{z_\beta\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{7}$$

Он с доверительной вероятностью β включает в себя истинное значение измеряемой величины m.

Если требуется оценить математическое ожидание с заданной точностью ε так, чтобы вероятность такого отклонения была не меньше β, то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по формуле

$$n = \frac{z_\beta^2 \sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Случай Б. Теперь рассмотрим случай, когда математическое ожидание m и дисперсия σ^2 нормального распределения случайной величины X нам неизвестны.

Известно, что для выборки из нормальной совокупности наилучшей оценкой математического ожидания является $\bar{x}$. Как и в случае А, по заданной доверительной вероятности β найдем доверительный интервал для математического ожидания m, т.е. найдем такое ε, чтобы $P(|\bar{x} - m| < \varepsilon) = \beta$. Так как σ^2 нам неизвестно, то заменим его наилучшей оценкой, а именно несмещенной выборочной дисперсией $\bar{s}^2$.

Случайная величина

$$T = \frac{\sqrt{n}\,|\bar{x} - m|}{\bar{s}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы (n — *объем выборки* /). Обозначим плотность распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы через $S_{n-1}(t)$. Тогда она имеет

вид

$$S_{n-1}(t) = B_n\left(1 - \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2},$$

$$B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma((n-1)/2)}.$$

Распределение Стьюдента является четной функцией, определяется параметром n — объемом выборки и не зависит от неизвестных параметров m и σ^2. Тогда вероятность

$$P(-t_\beta < T < t_\beta) = P\left(-t_\beta < \frac{\sqrt{n}\,|\bar{x} - m|}{\bar{s}} < t_\beta\right) =$$

$$= P\left(-t_\beta\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < |\bar{x} - m| < t_\beta\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}\right) = \beta.$$

Отсюда по заданному β и числу степеней свободы $(n-1)$ из таблиц (приложение 1) распределения Стьюдента находим верхний предел t_β интеграла

$$\int\limits_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)\,dt = \frac{\beta}{2}.$$

Таким образом, доверительный интервал для математического ожидания m, когда дисперсия нормально распределенной случайной величины X нам неизвестна, таков:

$$\left(\bar{x} - t_\beta\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_\beta\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}\right). \tag{8}$$

З а м е ч а н и е. При неограниченном возрастании объема выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому при большом числе измерений (практически $n > 30$) вместо распределения Стьюдента можно пользоваться нормальным. В этом случае неизвестное значение σ можно приближенно заменить оценкой $\bar{s}$ и для определения ε воспользоваться формулой (6), где z_β находится из уравнения (5).

2. Статистические гипотезы

Одним из важнейших разделов математической статистики является проверка статистических гипотез. Критерии (правила), используемые для этого, называются *критериями проверки.* Мы можем выдвигать гипотезу о проверке закона распределения, зависящего от одного или нескольких параметров. Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о величине неизвестного параметра известного распределения, о независимости выборки и др. Иногда наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине гипотезы принято различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу и обозначают ее H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит H_0.

Правило проверки использует принцип: *маловероятные события считаются практически невозможными.* Правило проверки называется *критерием значимости.* Если гипотеза H_0 верна, то величина критерия должна быть, как правило, небольшой. Если же величина критерия попадает в область больших отклонений, называемую *критической областью*, то это указывает на то, что проверяемая гипотеза неверна. Попадание критерия значимости в критическую область, если гипотеза H_0 верна, должно быть практически невозможным событием. В качестве таких событий понимаются те, вероятности которых не превышают $q = 0.05; 0.02; 0.01$. Вероятность q называют *уровнем значимости*, она является вероятностью попадания значений критерия в критическую область.

Значения, лежащие вне критической области, образуют дополнительную область и называются *"допустимыми значениями"*. Если q — уровень значимости, то вероятность попасть в область допустимых значений равна $1 - q$. Последнее событие (попадание в область допустимых значений) признается практически достоверным. Если значение критерия, вычисленное по данным выборки, окажется в критической области, то мы отвергаем гипотезу H_0. Если гипотеза H_0 верна, то попадание значения критерия в критическую область практически невозможно. Если же значение критерия окажется в области допустимых значений, то мы говорим, что наблюдения не противоречат гипотезе.

2.1. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормально распределенных совокупностей.

Пусть две независимые случайные величины X и Y распределены нормально: $X \in N(m_x, \sigma_x^2)$, $Y \in N(m_y, \sigma_y^2)$.

Пусть имеются две независимые выборки

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; \qquad y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$$

объемов n_1 и n_2 соответственно для X и Y.

Нужно проверить гипотезу H_0, состоящую в том, что $EX = EY$, т.е.

$$H_0: \quad m_x = m_y.$$

Для проверки гипотезы H_0 следует воспользоваться различными критериями значимости в зависимости от того, известны или неизвестны дисперсии случайных величин X и Y. Рассмотрим оба случая.

а) Пусть σ_x и σ_y известны. Так как

$$\bar{x} \in N\left(m_x, \frac{\sigma_x^2}{n_1}\right), \quad \bar{y} \in N\left(m_y, \frac{\sigma_y^2}{n_2}\right),$$

а случайные величины $\bar{x}$ и $\bar{y}$ независимы, то

$$\sigma^2_{(\bar{x}-\bar{y})} = D(\bar{x} - \bar{y}) = D\bar{x} + D\bar{y} = \frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{x} - \bar{y} \in N\left(m_x - m_y, \ \sigma^2_{(\bar{x}-\bar{y})}\right).$$

Для проверки гипотезы H_0 в качестве критерия рассмотрим величину

$$z = (\bar{x} - \bar{y}) \Bigg/ \left(\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}\right). \tag{9}$$

Если гипотеза верна, то $z \in N(0,1)$, и в качестве критической области следует взять область больших по модулю отклонений z, т.е. $|z| > z_q$, где z_q определяется из соотношений

$$\int_{-z_q}^{z_q} \varphi(y)\, dy = 1 - q, \qquad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2},$$

а q — уровень значимости.

Рассмотрим гипотезу $H_0 : m_x = m_y$, когда дисперсии σ_x и σ_y неизвестны, но выполнено условие

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2. \qquad (10)$$

При выполнении условия (10) величина z в (9) принимает вид

$$u = (\bar{x} - \bar{y}) \Bigg/ \left(\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right), \qquad (11)$$

причем при выполнении гипотезы H_0 случайная величина $u \in \in N(0,1)$. Случайные величины $\eta_1 = n_1 s_x^2/\sigma^2$ и $\eta_2 = n_2 s_y^2/\sigma^2$ имеют χ^2-распределение соответственно с $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ степенями свободы (здесь $s_x^2 = (1/n_1)\sum\limits_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2$, $s_y^2 = (1/n_2)\sum\limits_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2$), а так как X, Y, $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x, s_y независимы, то $\eta_1 + \eta_2$ имеет χ^2-распределение с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. Отсюда

$$t = \frac{u\sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\eta_1 + \eta_2}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \qquad (12)$$

распределена по закону Стьюдента с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

Далее поступаем следующим образом. Задаем уровень значимости $q = 0.05$; 0.01 и т.д. и затем по таблице (приложение 3) распределений Стьюдента находим $t_{q,k}$, где $k = n_1 + n_2 - 2$. Если значение $|t| > t_{q,k}$, то отвергаем H_0; если $|t| < t_{q,k}$, то говорим, что гипотеза H_0 не противоречит данным и принимаем ее.

2.2. Проверка гипотезы о типе распределения.

Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предполагать, что он имеет определенный вид (например, нормальный), то выдвигают гипотезу, что случайная величина X распределена по этому закону (нормальному). Таким образом, в этой гипотезе гипотезе H_0 идет речь о *виде* (*типе*) предполагаемого распределения. Принцип применения *критерия согласия* состоит в следующем: по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ строится некоторая случайная величина v (мера расхождения), характеризующая степень расхождения теоретического и эмпирического распределений. Эта

величина может быть построена различными способами, причем каждый способ построения означает применение того или иного критерия. Закон распределения этой случайной величины v зависит от распределения искомой величины X и от объема выборки n.

Рассмотрим один из таких критериев, который носит название *критерий Пирсона*, или *критерий хи-квадрат*.

Случайная величина χ^2 (мера расхождения) представляет собой сумму квадратов разностей между наблюденными частотами и истинными частотами (если закон распределения задан), деленными на истинные частоты:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \qquad (13)$$

Здесь все выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сгруппированы в k интервалов, где m_i — число x_i попавших в i-й интервал, а p_i — вероятность попадания X в i-й интервал, в предположении, что гипотеза H_0 верна. Если значения случайной величины лежат в пределах $A \le X \le B$, то границы k интервалов запишем в виде (y_i, y_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, k$, причем $y_1 = A$, $y_{k+1} = B$. Вероятность p_i попадания случайной величины X, имеющей плотность распределения $f(x)$, в i-й интервал с границами (y_i, y_{i+1}) вычисляется по формуле

$$p_i = \int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} f(x)\,dx, \quad \text{или} \quad p_i = F(y_{i+1}) - F(y_i), \qquad (14)$$

где $F(x)$ — функция распределения X. В этом случае величина np_i есть "теоретическое среднее" числа попаданий в i-й интервал при n наблюдениях. При достаточно большом n закон распределения суммы χ^2 практически не зависит ни от предполагаемого теоретического закона, ни от числа наблюдений n, и при $n \to \infty$ приближается к известному в теории вероятностей закону распределения χ^2 с $k-1$ степенью свободы. Вид плотности распределения χ^2 сложен, и интегрирование ее является трудоемким процессом, поэтому составлены таблицы распределения χ^2 (приложение 4).

Число степеней свободы r распределения χ^2 зависит от числа интервалов k и числа независимых условий (*связей*). Одной такой связью всегда является требование

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_k^* = 1, \quad \text{где} \quad p_i^* = \frac{m_i}{n}. \tag{15}$$

Если проверяемый закон распределения зависит от l параметров и они неизвестны, то их оценивают на основании той же выборки, при этом число степеней свободы уменьшается на l и равно

$$r = k - 1 - l. \tag{16}$$

Например, если проверяется принадлежность выборки к нормальной совокупности, то следует найти оценки математического ожидания и дисперсии, а для этого, как известно, используются выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочная дисперсия $\bar{s}^2$.

Если исходные данные заданы в виде статистического ряда (см. табл. 1), в которой указаны границы (y_i, y_{i+1}) интервалов и количество m_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ наблюдений, попавших в эти интервалы, то выборочные оценки $\bar{x}$ и s^2 находятся по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i^* p_i^*; \\ s^2 &= \sum_{i=1}^{k} (\widetilde{x}_i^* - \bar{x})^2 p_i^* = \sum_{i=1}^{k} (\widetilde{x}_i^*)^2 p_i^* - \bar{x}^2, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\widetilde{x}_i^*$ — среднее значение i-го интервала,

$$\widetilde{x}_i^* = \frac{y_{i+1} + y_i}{2}. \tag{18}$$

В этом случае число связей l равно двум, а число степеней свободы

$$r = k - 1 - 2 = k - 3. \tag{19}$$

Ясно, что если вычисленная мера расхождения χ^2 будет большой, то выбранное теоретическое распределение не согласуется с экспериментальными данными. Вопрос о том, какой должна быть величина χ^2, чтобы теоретическое распределение было согласовано с экспериментальными данными, зависит от выбранной доверительной вероятности β (или уровня значимости $q = 1 - \beta$), которая выбирается обычно 0.95 (уровень значимости $q = 0.05$).

Пусть уровень значимости q задан. Тогда применение критерия Пирсона будет заключаться в следующем. Определяем число степеней свободы r, при уровне значимости q находим по таблицам χ^2-распределения значение $\chi^2_{q,r}$ такое, что

$$P(\chi^2 \geq \chi^2_{q,r}) = q. \tag{20}$$

Вычисляем величину χ^2 по формуле (13). Если оказалось, что

$$\chi^2 \geq \chi^2_{q,r}, \tag{21}$$

то, так как это событие имеет вероятность q, мы отвергаем проверяемую гипотезу и говорим, что выбранное теоретическое распределение не согласуется с экспериментальными данными. Если же

$$\chi^2 \leq \chi^2_{q,r}, \tag{22}$$

то принимается гипотеза о согласованности теоретического и статистического распределений.

Для применимости критерия Пирсона в общем случае необходимо, чтобы число наблюдений n было достаточно велико (практически $n \geq 50$) и чтобы численность каждого интервала была не меньше 5. Если в каких-то интервалах окажется меньше 5 наблюдений, то следует объединить эти интервалы.

Из других критериев проверки гипотезы о типе распределения часто используется *критерий Колмогорова-Смирнова*.

В критерии Колмогорова используется статистика

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n^*(x) - F(x)|,$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, а $F_n^*(x)$ — ее эмпирическая функция распределения.

Имеет место

ТЕОРЕМА:

Если $F(x)$ непрерывна на $-\infty < x < +\infty$, то распределение статистики D_n не зависит от функции $F(x)$.

А.Н.Колмогоров доказал, что

$$\lim_{n \to \infty} P(\sqrt{n} D_n \leq x) = K(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}, \quad x > 0.$$

Это равенство используется для построения критерия Колмогорова.

Пусть k_α — корень уравнения $1 - K(k_\alpha) = \alpha$. (α — уровень значимости критерия).
Если $\sqrt{n}D_n \le k_\alpha$, то гипотеза о том, что выборка $x_1, \dots, x_n$ взята из распределения с функцией $F(x)$, принимается, а если $\sqrt{n}D_n > k_\alpha$,— отвергается.
Функция $K(x)$ протабулирована.

С функцией $K(x)$ связан и критерий Смирнова. Обозначим

$$D_{n,m} = \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n^*(x) - F_m^*(x)|,$$

где $F_n^*(x)$ — эмпирическая функция распределения, найденная по выборке $x_1, \dots, x_n$, соответствующей распределению с функцией $F(x)$, а $F_m^*(x)$ — эмпирическая функция распределения, найденная по выборке $y_1, \dots, y_m$, соответствующей распределению с функцией $G(x)$.
Н.В.Смирнов показал, что если $F(X) = G(x)$ и непрерывны, $n \to \infty, m \to \infty, \frac{n}{m} \to \tau, 0 < \tau < +\infty$, то случайная величина $\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m}$ в пределе имеет тот же закон распределения $K(x)$. Эта предельная теорема дает возможность построить критерий проверки гипотезы о принадлежности выборок $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_m$ одному и тому же распределению.

2.3. Проверка гипотезы об отсутствии корреляционной связи.

Пусть имеются совместные наблюдения случайных величин X и Y

$$y_1, y_2, \dots, y_n; \quad x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Нужно проверить гипотезу об отсутствии корреляционной связи, иначе говоря,

$$H_0: \ \rho_{xy} = 0.$$

Коэффициент корреляции ρ_{xy} определяется равенством

$$\rho_{xy} = \frac{E(X-EX)(Y-EY)}{\sqrt{DXDY}},$$

а *выборочный коэффициент корреляции* r находится по формуле

$$r = \tilde{r}_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}. \tag{23}$$

Можно показать, что случайная величина

$$t = \sqrt{n-2}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \tag{24}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы и может служить критерием для проверки H_0. Нужно выбрать уровень значимости q, найти $t_{q,n-2}$ по таблицам распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы (приложение 3). Если

$$|t| > t_{q,n-2}, \tag{25}$$

то значения попадают в критическую область, и мы должны отвергнуть гипотезу H_0 и, следовательно, считаем, что имеется корреляционная связь между случайными величинами X и Y. Если

$$|t| < t_{q,n-2}, \tag{26}$$

то говорим, что данные не противоречат гипотезе H_0, т.е. корреляционная связь между X и Y отсутствует.

3. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y связаны некоторой неизвестной функциональной зависимостью $y = \varphi(x)$. Задавая аргумент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, мы получим n значений величины y: $y_1, y_2, \dots, y_n$. В результате неизбежных во всяком эксперименте ошибок измерения, полученные экспериментальные точки $A_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, вообще говоря, не будут лежать на графике функции $y = \varphi(x)$, а будут как-то разбросаны около него. В ряде случаев по расположению

точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ можно заранее судить о типе функциональной зависимости $y = \varphi(x)$.

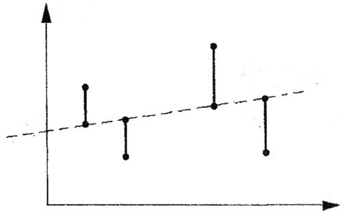

Рис. 3.

На рис. 3 экспериментальные точки с небольшими отклонениями располагаются вдоль прямой, поэтому искомую функциональную зависимость следует искать в виде $y = ax + b$, где параметры a и b подлежат определению. Геометрический смысл задачи заключается в проведении плавной кривой $y = \varphi(x)$, проходящей вблизи наблюденных точек $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

На основании полученных измерений и при *известном типе* зависимости $y = \varphi(x)$ метод наименьших квадратов позволяет находить числовые параметры $a, b, c, \ldots$ этой зависимости так, что плавная кривая $y = \varphi(x)$ в известном смысле наилучшим образом отображает экспериментальные данные. Остановимся подробнее на нахождении параметров a и b для линейной зависимости ($\varphi(x) = ax + b$). Считая параметры a и b переменными, выберем их так, чтобы сумма квадратов отклонения экспериментальных точек от прямой $y = ax + b$ была бы наименьшей: $u = u(a, b) = (A_1B_1)^2 + \ldots + (A_nB_n)^2 = \min$. Каждая точка B_i лежит на прямой $y = ax + b$, поэтому ее координаты: $B_i(x_i, ax_i + b)$. Отклонение A_iB_i находится как разность ординат точек A_i и B_i: $A_iB_i = (y_i - (ax_i + b))$. Таким образом,

$$u = u(a, b) = \left[y_1 - (ax_1 + b)\right]^2 + \ldots + \left[y_n - (ax_n + b)\right]^2 = \min.$$

Оценки $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ параметров прямой $y = ax + b$, при которых функция $u(a, b)$ принимает минимальное значение, определяются, как известно, из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Вычислив частные производные функции $u(a, b)$, получаем

$$\begin{cases} \widetilde{a} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \widetilde{b} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\[2mm] \widetilde{a} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n\widetilde{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{27}$$

Полученные уравнения называются ***нормальными уравнениями метода наименьших квадратов*** для линейной зависимости. Из этой системы определяются коэффициенты $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ искомой линейной зависимости.

Если нет оснований считать $\varphi(x)$ функцией определенного типа, то в порядке первого приближения иногда ограничивают задачу отыскания $\varphi(x)$ среди функций, возможно более простых. Например, среди

а) многочленов заданной степени

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \quad (m < n),$$

б) дробно-линейных функций

$$\varphi(x) = \frac{a + bx}{c + dx}$$

или других элементарных функций при небольшом числе параметров a_k, подлежащих определению. Среди этих функций выбираем ту, которая дает наименьшее значение

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - \varphi(x_k)\right]^2,$$

где разность $y_k - \varphi(x_k)$ есть отклонение по ординате экспериментальной точки от искомой кривой $\varphi(x)$.

4. Понятие регрессии

Между случайными величинами X и Y может существовать и другой более общий тип зависимости — это *вероятностная* или *стохастическая* зависимость. Две случайные величины X и Y находятся в *вероятностной зависимости, если одна из них реагирует на изменение другой изменением своего закона распределения.*

В частности, вероятностная зависимость проявляется еще и в том, что *при изменении одной величины* (X) *изменяется среднее значение другой величины* (Y). Такой тип зависимости называют *корреляционной зависимостью.* Понятие корреляционной зависимости более узкое, чем понятие вероятностной зависимости, так как математическое ожидание — только один из параметров распределения и он не определяет закон распределения в целом. Мы рассмотрим случай корреляционной зависимости, когда с изменением X изменяется среднее значение Y, т.е. вводится понятие условного математического ожидания Y: $E(Y/X) = \bar{y}(x)$ при условии, что $X = x$. Аналогично $E(X/Y) = \bar{x}(y)$. В случае некоррелированности X и Y будет $\bar{y}(x) =$const, $\bar{x}(y) =$const. Мы видим, что в случае корреляционной зависимости условное математическое ожидание Y при условии $X = x$ есть функция от x, т.е. $E(Y/X) = \bar{y}(x)$, которую называют *функцией регрессии Y на X.* Математическое ожидание $E(X/Y) = \bar{x}(y)$ есть функция от y и называется *функцией регрессии X на Y.*

Будем предполагать, что регрессии $\bar{x}(y)$ и $\bar{y}(x)$ — линейны, т.е. линии регрессии $y = \bar{y}(x)$, $x = \bar{x}(y)$ — прямые. Тогда $E(Y/X) = \bar{y}(x) = ax + c$. Необходимо определить коэффициенты a и c, выразив их через числовые характеристики системы (X, Y). Проделав несложные выкладки, можно показать, что

$$a = a(Y/X) = \rho_{xy}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \tag{28}$$

$$c = m_y - am_x. \tag{29}$$

Следовательно,

$$E(Y/X) = y = ax + c = a(x - m_x) + m_y$$

или

$$y - m_y = \rho_{xy}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,(x - m_x). \tag{30}$$

Это равенство называют *уравнением линейной регрессии или прямолинейной регрессии Y на X.*

Аналогично

$$a(X/Y) = \rho_{xy}\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \tag{31}$$

и уравнение регрессии X на Y принимает вид.

$$x - m_x = \rho_{xy}\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,(y - m_y). \tag{32}$$

Оценки коэффициентов корреляции и регрессии по выборочным значениям имеют вид

$$\tilde{r}_{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)\Big/ n}{\left[\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2\Big/ n\right\}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2\Big/ n\right\}\right]^{1/2}}, \tag{33}$$

$$\tilde{a}(X/Y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)\Big/ n}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2\Big/ n}, \tag{34}$$

$$\tilde{a}(Y/X) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)\Big/ n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2\Big/ n}, \tag{35}$$

а оценки прямолинейных регрессий (30) и (32) будут иметь вид

$$y - \bar{y} = \tilde{a}(Y/X)(x - \bar{x}), \tag{36}$$

$$x - \bar{x} = \tilde{a}(X/Y)(y - \bar{y}). \tag{37}$$

Задание 1. Даны две выборки объема $n = 50$ каждая для случайных величин $Y \in N(m_y, \sigma_y^2)$ и $X \in N(m_x, \sigma_x^2)$

N	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	X_iY_i
1	5.03	4.11	25.301	16.892	20.673
2	4.27	2.81	18.233	7.896	11.999
3	3.48	3.91	12.110	15.288	13.607
4	3.12	4.53	9.734	20.521	14.134
5	3.61	3.92	13.032	15.366	14.151
6	3.99	3.49	15.920	12.180	13.925
7	4.19	4.03	17.556	16.241	16.886
8	3.73	3.91	13.913	15.288	14.584
9	4.56	1.68	20.794	2.822	7.661
10	5.20	4.06	27.040	16.484	21.112
11	1.70	3.36	2.890	11.290	5.712
12	3.59	3.24	12.888	10.498	11.632
13	3.60	3.81	12.960	14.516	13.716
14	4.32	3.73	18.662	13.913	16.114
15	3.70	3.26	13.690	10.628	12.062
16	4.46	4.67	19.892	21.809	20.828
17	4.02	6.10	16.160	37.210	24.522
18	4.30	2.93	18.490	8.585	12.599
19	4.83	3.62	23.329	13.104	17.485
20	3.15	3.08	9.923	9.486	9.702
21	2.74	4.27	7.508	18.233	11.700
22	3.42	4.01	11.696	16.080	13.714
23	4.65	4.90	21.623	24.010	22.785
24	2.97	4.21	8.821	17.724	12.504
25	3.63	3.47	13.177	12.041	12.596
26	2.90	3.05	8.410	9.303	8.845
27	4.68	4.95	21.902	24.503	23.166
28	5.10	4.23	26.010	17.893	21.573
29	2.46	4.28	6.052	18.318	10.529
30	5.70	5.88	32.490	34.574	33.516
31	4.53	3.92	20.521	15.366	17.758
32	3.43	4.89	11.765	23.912	16.773
33	4.77	2.56	22.753	6.554	12.211
34	4.89	5.62	23.912	31.584	27.482
35	3.58	3.69	12.816	13.616	13.210
36	3.29	2.29	10.824	5.244	7.534
37	3.29	3.19	10.824	10.176	10.495
38	2.42	3.56	5.856	12.674	8.615
39	3.48	3.44	12.110	11.834	11.971
40	4.45	3.45	19.803	11.903	15.353
41	3.35	4.72	11.223	22.278	15.812
42	4.29	4.30	18.404	18.490	18.447
43	3.93	3.44	15.445	11.834	13.519
44	2.47	5.84	6.101	34.106	14.425
45	5.52	4.73	30.470	22.373	26.110
46	2.97	3.47	8.821	12.041	10.306
47	4.47	4.63	19.981	21.437	20.696
48	4.76	5.24	22.658	27.458	24.942
49	2.63	4.55	6.917	20.703	11.966
50	4.13	3.67	17.057	13.469	15.157
Σ	193.75	198.7	788.467	829.748	776.814

1. Построить гистограмму для массива X.

2. Вычислить для массива X выборочное среднее и дисперсию.

3. Проверить гипотезу на нормальность распределения X.

4. Проверить гипотезу о равенстве средних арифметических для X и Y (дисперсии неизвестны).

5. Вычислить коэффициент корреляции между X и Y.

6. Построить доверительный интервал для математического ожидания X (дисперсия неизвестна).

7. Проверить гипотезу: значимо ли отклонение коэффициента корреляции от нуля.

8. Построить регрессии (прямолинейные) для X и Y.

Решение

1. Для построения гистограммы построим статистический ряд (см. табл. 1). Для этого разобьем весь интервал значений X от $X_{\min} = 1.70$ до $X_{\max} = 5.70$ на k интервалов, где k определим как целую часть $3.2 \ln 50$ (см. (2)): $k = 12$. Найдем

$$h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k} = \frac{5.70 - 1.70}{12} = \frac{4}{12} \approx 0.3$$

v_i, v_{i+1}	1.7, 2	2, 2.3	2.3, 2.6	2.6, 2.9	2.9, 3.2	3.2, 3.5	3.5, 3.8	3.8, 4.1	4.1, 4.4	4.4, 4.7	4.7, 5.0	5.0, 5.3	5.3, 5.7
m_i	1	0	3	2	5	7	7	3	6	7	4	3	2

Так как в 1–4, 8, 11–13 интервалах наблюдений меньше пяти, объединим 1–4 интервалы, 8 и 9, 11–13. Получим следующий статистический ряд:

v_i, v_{i+1}	1.7, 2.9	2.9, 3.2	3.2, 3.5	3.5, 3.8	3.8, 4.4	4.4, 4.7	4.7, 5.7
m_i	6	5	7	7	9	7	9
w_i	0.12	0.10	0.14	0.14	0.18	0.14	0.18
w_i/h_i	0.1	0.33	0.47	0.47	0.3	0.47	0.18

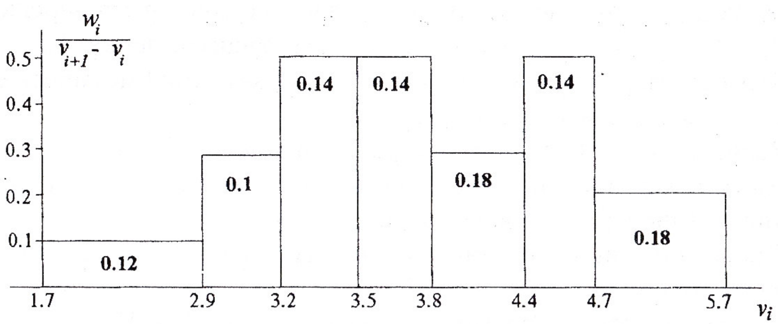

Рис. 4

2. По формулам (3) и (4) найдем выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочную дисперсию $\bar{s}_x^2$

$$\bar{x} = 3.875, \quad \bar{s}_x^2 = 0.769, \quad \bar{s}_x = 0.877.$$

3. $H_0 : f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(x-m_x)^2/2\sigma_x^2}, \quad -\infty<x<\infty.$ Так как m_x и σ_x^2 неизвестны, то возьмем их оценки $\bar{x} = 3.875$, $\bar{s}_x = 0.877$. Если H_0 верна, то p_i вычисляются по формуле (14), которая для нормального распределения будет иметь вид

$$p_i = \Phi\left(\frac{v_{i+1} - \bar{x}}{\bar{s}_x}\right) - \Phi\left(\frac{v_i - \bar{x}}{\bar{s}_x}\right),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-y^2/2} dy$ (приложение 2).

Используем критерий Пирсона (см. формулу (13)) для полученного статистического ряда

$v_i,\ v_{i+1}$	m_i	$\frac{v_i-\bar{x}}{\bar{s}_x},\ \frac{v_{i+1}-\bar{x}}{\bar{s}_x}$	$\Phi(\frac{v_i-\bar{x}}{\bar{s}_x})$	p_i	np_i	$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$
1.7, 2.9	6	$-\infty$, −1.111	−0.5	0.1333	6.665	0.066
2.9, 3.2	5	−1.111, −0.770	−0.3667	0.0873	4.365	0.092
3.2, 3.5	7	−0.770, −0.428	−0.2794	0.1137	5.685	0.304
3.5, 3.8	7	−0.428, −0.086	−0.1657	0.1314	6.570	0.028
3.8, 4.4	9	−0.086, 0.599	−0.0343	0.2597	12.985	1.223
4.4, 4.7	7	0.599, 0.941	0.2254	0.1012	5.060	0.744
4.7, 5.7	9	0.941, ∞	0.3266	0.1734	8.670	0.013
Σ	50			1.0000	50.000	2.47

Получили $\chi^2 = 2.47$. Число степеней свободы $k = r-1-l$, где $r = 7$ (число интервалов), $l = 2$ (так как $\bar{x}$ и $\bar{s}_x$ определяли по выборке). Следовательно, $k = 4$. Зададимся уровнем значимости $q = 5\%$ (0.05). По таблице приложения 4 находим $\chi^2_{4,\,0.05} = 9.5$. Получили, что $\chi^2 = 2.47 < \chi^2_{4,\,0.05} = 9.5$. Таким образом (см. оценку (22)), мы должны заключить, что данная выборка не противоречит гипотезе о нормальности распределения случайной величины X.

4. $H_0 : m_x = m_y$. Так как σ_x и σ_y нам неизвестны, то в качестве критерия возьмем формулу (12):

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = -0.550$$

Здесь $\bar{x} = 0.875$, $\bar{s}_x^2 = 0.769$, $\bar{y} = 3.974$, $\bar{s}_y^2 = 0.819$, $n_1 = n_2 = 50$. Число степеней свободы распределения Стьюдента $k = n_1 + n_2 - 2 = 98$. Зададимся уровнем значимости $q = 0.05$ (5%). По таблице распределения Стьюдента (см. приложение 3) находим $t_{5\%,98} = t_{q,k} = 1,96$. Следовательно, $|t| < t_{q,k} = 0.550 < 1.96$, и гипотеза H_0 не противоречит опытным данным.

5. По формуле (33) находим оценку для коэффициента корреляции $\tilde{r}_{x,y} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{50} X_i Y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{50} X_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{50} Y_i\right)\Big/ n}{\left[\left\{\sum\limits_{i=1}^{50} X_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{50} X_i\right)^2\Big/ n\right\}\left\{\sum\limits_{i=1}^{50} Y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{50} Y_i\right)^2\Big/ n\right\}\right]^{1/2}} =$ 0.176.

6. Построим доверительный интервал для параметра $m_x = EX$. Так как σ_x и σ_y нам неизвестны, то рассмотрим случай Б и воспользуемся для построения доверительного интервала с вероятностью доверия $\beta = 0.99$ формулой (8), где $\varepsilon = t_\beta \bar{s}_x/\sqrt{n}$. Здесь t_β есть аргумент функции $C(t_\beta) = \beta/2$. Функция $C(t_\beta)$ задается таблицей распределения Стьюдента (см. приложение 1). Число степеней свободы величины t_β есть $k = n - 1$, где n — объем выборки. Следовательно, по таблице находим $t_{49;0.99} = 2.66$, $\varepsilon = 2.66 \cdot \frac{0.877}{\sqrt{50}} = 0.330$. Интервал имеет значение $(\bar{x} - 0.330, \bar{x} + 0.330)$ или $(3.545; 4.205)$.

7. $H_0 : r_{xy} = 0$. В п.5 мы определили $r_{xy} = 0.176$. Выберем в качестве критерия формулу (24):

$$t = \sqrt{n-2}\,\frac{r_{xy}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = \frac{6.93 \cdot 0.176}{0.984} = 1.24,$$

t имеет распределение Стьюдента с $k = n-2$ степенями свободы, т.е. $k = 50-2$. Зададимся уровнем значимости $q = 0.05$ (5%) и по таблице распределения Стьюдента (приложение 3) найдем $t_{k,q} = t_{48;5\%} = 1.96$. Мы получили, что $|t| = 1.24 < t_{q,k} = 1.96$ (см. формулу (26)). Данные не противоречат гипотезе H_0, следовательно, корреляционная связь между X и Y отсутствует.

8. Так как X и Y имеют нормальное распределение, то их регрессии будут прямолинейные (см. (30) и (32))

$$y - m_y = \rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x), \quad x - m_x = \rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y).$$

Нами найдены оценки для m_x, m_y, σ_x, σ_y и ρ_{xy} соответственно: $\bar{x} = 3.875$, $\bar{y} = 3.974$, $\bar{s}_x = 0.877$, $\bar{s}_y = 0.905$, $\tilde{r}_{xy} = 0.176$.

Отсюда оценки прямолинейных регрессий имеют вид (см. (36), (37)):

$$y - 3.974 = 0.182(x - 3.875), \quad x - 3.875 = 0.171(y - 3.974),$$

или

$$y = 0.182x + 3.269, \quad x = 0.171y + 3.195$$

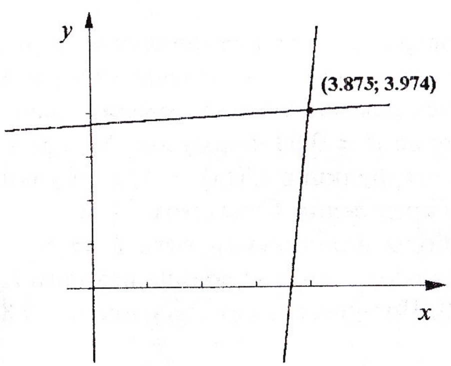

Рис. 5

Задание 2. Найти линейную функциональную зависимость между случайными величинами X и Y, если имеются следующие выборочные значения

N	x_i	y_i		x_i^2	$x_i y_i$
1	2.45	9.90		6.0025	24.255
2	2.08	9.17		4.3264	19.0736
3	2.40	9.80		5.76	23.52
4	2.18	9.36		4.7524	20.4048
5	2.11	9.22		4.4521	19.4542
6	2.24	9.48		5.0176	21.2352
7	1.94	8.88		3.7636	17.2272
8	1.64	8.28		2.6896	13.9792
9	2.44	9.89		5.9536	24.1316
10	1.93	8.87		3.7249	17.1191
11	2.22	9.45		4.9284	20.979
12	1.64	8.29		2.6896	13.5956
13	1.91	8.82		3.6481	16.8462
14	2.40	9.80		5.76	23.52
15	1.91	8.82		3.6481	16.8462
16	1.94	8.88		3.7636	17.2272
17	2.11	9.23		4.4521	19.4753
18	2.22	9.44		4.9284	20.9568
19	2.38	9.76		5.6644	23.2288
20	2.29	9.59		5.2441	21.9611
Σ	42.43	184.93		91.1695	394.6361

Здесь объем выборки $n = 20$. По формуле (27) находим $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$:

$$\begin{cases} \tilde{a}\sum\limits_{i=1}^{20} x_i^2 + \tilde{b}\sum\limits_{i=1}^{20} x_i = \sum\limits_{i=1}^{20} x_i y_i, \\ \tilde{a}\sum\limits_{i=1}^{20} x_i + 20\,\tilde{b} = \sum\limits_{i=1}^{20} y_i, \end{cases}$$

$$y = \tilde{a}x + \tilde{b},$$

$$\begin{cases} 91.1695\,\tilde{a} + 42.43\,\tilde{b} = 394.6361, \\ 43.43\,\tilde{a} + 20\,\tilde{b} = 184.93, \end{cases}$$

$$\tilde{a} = 2, \quad \tilde{b} = 5, \quad y = 2x + 5.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Выполните требования пунктов 1-8 **задания 1**.

N	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6	
	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
1	5.08	4.15	5.13	4.19	5.18	4.23	5.23	4.27	5.28	4.31	5.33	4.33
2	4.31	2.83	4.35	2.87	4.39	2.90	4.44	2.92	4.47	2.95	4.53	2.98
3	3.51	3.95	3.54	3.99	3.58	4.03	3.62	4.07	3.65	4.11	3.69	4.15
4	3.15	4.57	3.18	4.62	3.21	4.66	3.24	4.71	3.28	4.76	3.31	4.81
5	3.64	3.95	3.68	3.99	3.71	4.04	3.75	4.07	3.79	4.11	3.83	4.16
6	4.02	3.52	4.07	3.56	4.11	3.59	4.15	3.62	4.19	3.67	4.23	3.70
7	4.23	4.07	4.27	4.11	4.31	4.15	4.36	4.19	4.41	4.23	4.44	4.27
8	3.76	3.94	3.81	3.98	3.84	4.02	3.88	4.06	3.92	4.11	3.96	4.15
9	4.61	1.69	4.65	1.71	4.69	1.73	4.74	1.75	4.79	1.77	4.84	1.78
10	5.25	4.11	5.31	4.14	5.35	4.18	5.41	4.22	5.46	4.26	5.51	4.31
11	1.71	3.38	1.73	3.41	1.76	3.45	1.78	3.48	1.81	3.52	1.83	3.56
12	3.62	3.27	3.66	3.31	3.69	3.33	3.73	3.37	3.77	3.40	3.81	3.43
13	3.64	3.84	3.67	3.89	3.71	3.92	3.75	3.96	3.78	4.01	3.82	4.05
14	4.36	3.76	4.40	3.81	4.44	3.84	4.49	3.88	4.54	3.91	4.57	3.93
15	3.73	3.29	3.77	3.32	3.81	3.36	3.84	3.39	3.89	3.43	3.91	3.46
16	4.51	4.72	4.54	4.76	4.60	4.81	4.64	4.86	4.67	4.91	4.73	4.95
17	4.06	6.15	4.11	6.22	4.14	6.27	4.18	6.34	4.22	6.40	4.26	6.46
18	4.34	2.96	4.39	2.98	4.43	3.02	4.47	3.05	4.52	3.08	4.56	3.11
19	4.87	3.66	4.92	3.69	4.98	3.73	5.02	3.77	5.08	3.80	5.13	3.83
20	3.18	3.11	3.21	3.14	3.24	3.17	3.27	3.21	3.31	3.23	3.34	3.27
21	2.76	4.31	2.79	4.35	2.82	4.39	2.85	4.44	2.88	4.47	2.91	4.53
22	3.45	4.05	3.49	4.09	3.52	4.13	3.55	4.17	3.59	4.21	3.63	4.26
23	4.70	4.95	4.74	4.99	4.79	5.05	4.83	5.09	4.88	5.14	4.93	5.20
24	2.99	4.25	3.02	4.29	3.05	4.33	3.08	4.38	3.11	4.42	3.14	4.46
25	3.67	3.51	3.71	3.53	3.73	3.57	3.77	3.61	3.81	3.64	3.85	3.68
26	2.93	3.08	2.96	3.11	2.98	3.14	3.01	3.17	3.04	3.21	3.07	3.23
27	4.72	4.99	4.77	5.05	4.82	5.10	4.87	5.15	4.92	5.21	4.96	5.25
28	5.15	4.27	5.20	4.31	5.25	4.36	5.31	4.40	5.36	4.44	5.42	4.49
29	2.48	4.32	2.51	4.36	2.53	4.41	2.56	4.45	2.58	4.48	2.61	4.54
30	5.76	5.93	5.81	6.00	5.87	6.05	5.93	6.12	5.99	6.17	6.05	6.24
31	4.57	3.96	4.62	3.99	4.66	4.04	4.71	4.08	4.76	4.12	4.81	4.16
32	3.46	4.93	3.49	4.98	3.53	5.02	3.56	5.08	3.60	5.13	3.63	5.18
33	4.81	2.59	4.86	2.61	4.91	2.63	4.96	2.66	5.01	2.69	5.04	2.73
34	4.93	5.67	4.98	5.73	5.02	5.78	5.06	5.84	5.11	5.89	5.16	5.95
35	3.62	3.73	3.65	3.76	3.69	3.79	3.72	3.83	3.75	3.87	3.80	3.92
36	3.32	2.31	3.35	2.34	3.38	2.37	3.43	2.42	3.46	2.45	3.50	2.49
37	3.31	3.22	3.34	3.26	3.37	3.29	3.41	3.32	3.45	3.36	3.49	3.41
38	2.44	3.61	2.47	3.65	2.49	3.70	2.51	3.75	2.53	3.79	2.56	3.83
39	3.51	3.48	3.56	3.51	3.70	3.54	3.74	3.58	3.79	3.62	3.82	3.66
40	4.47	3.49	4.51	3.52	4.55	3.56	4.58	3.59	4.62	3.63	4.66	3.67
41	3.38	4.76	3.41	4.81	3.42	4.85	3.45	4.90	3.49	4.93	3.52	4.97
42	4.31	4.34	4.35	4.37	4.40	4.41	4.46	4.47	4.49	4.51	4.53	4.54
43	3.96	3.48	4.00	3.52	4.05	3.56	4.11	3.61	4.15	3.66	4.21	3.71
44	2.51	5.87	2.53	5.92	2.56	5.97	2.58	6.01	2.61	6.05	2.63	6.11
45	5.55	4.76	5.60	4.81	5.65	4.84	5.71	4.89	5.76	4.83	5.81	4.88
46	3.01	3.51	3.05	3.55	3.09	3.60	3.13	3.64	3.16	3.69	3.20	3.74
47	4.51	4.66	4.56	4.71	4.59	4.75	4.63	4.78	4.66	4.83	4.69	4.87
48	4.80	5.27	4.85	5.33	4.89	5.37	4.93	5.42	4.97	5.46	5.02	5.51
49	2.65	4.59	2.67	4.64	2.69	4.68	2.72	4.73	2.76	4.78	2.79	4.85
50	4.17	3.71	4.22	3.74	4.26	3.77	4.29	3.81	4.33	3.86	4.37	3.91

N	Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10		Вариант 11		Вариант 12	
	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
1	4.83	3.94	4.78	3.90	4.73	3.86	4.68	3.82	4.63	3.78	4.59	3.75
2	4.09	2.69	4.05	2.66	4.01	2.63	3.98	2.60	3.95	2.57	3.91	2.54
3	3.33	3.75	3.30	3.72	3.26	3.69	3.23	3.65	3.20	3.62	3.17	3.59
4	3.00	4.34	2.97	4.30	2.94	4.26	2.91	4.23	2.87	4.20	2.83	4.16
5	3.46	3.75	3.42	3.71	3.39	3.67	3.36	3.64	3.34	3.61	3.31	3.55
6	3.82	3.34	3.78	3.32	3.74	3.31	3.71	3.28	3.68	3.25	3.65	3.23
7	4.01	3.87	3.97	3.82	3.94	3.79	3.90	3.75	3.86	3.71	3.82	3.69
8	3.57	3.74	3.53	3.71	3.50	3.68	3.48	3.65	3.44	3.61	3.41	4.58
9	4.38	1.61	4.34	1.59	4.30	1.57	4.27	1.55	4.23	1.53	4.20	1.51
10	4.98	3.91	4.93	3.86	4.89	3.83	4.85	3.80	4.81	3.77	4.78	3.73
11	1.12	3.21	1.11	3.18	1.10	3.15	1.09	3.12	1.08	3.09	1.06	3.06
12	3.44	3.11	3.40	3.08	3.36	3.05	3.33	3.01	3.29	2.98	3.26	2.95
13	3.46	3.65	3.42	3.62	3.38	3.59	3.34	3.56	3.31	3.53	3.28	3.50
14	4.14	3.57	4.10	3.54	4.07	3.51	4.04	3.48	4.00	3.45	3.97	3.42
15	3.54	3.13	3.50	3.09	3.47	3.06	3.43	3.03	3.39	3.00	3.36	2.97
16	4.28	4.48	4.24	4.43	4.20	4.39	4.17	4.36	4.13	4.32	4.09	4.29
17	3.85	5.84	3.81	5.78	3.78	5.73	3.74	5.68	3.71	5.63	3.67	5.59
18	4.12	2.81	4.08	2.78	4.04	2.76	4.00	2.73	3.97	2.70	3.93	2.67
19	4.62	3.48	4.58	3.44	4.54	3.41	4.51	3.37	4.48	3.34	4.45	3.31
20	3.02	2.95	2.99	2.92	2.96	2.89	2.93	2.86	2.89	2.83	2.87	2.81
21	2.62	4.09	2.60	4.05	2.57	4.01	2.54	3.96	2.51	3.92	2.47	3.88
22	3.28	3.84	3.24	3.81	3.21	3.77	3.17	3.74	3.13	3.71	3.09	3.68
23	4.47	4.70	4.42	4.66	4.38	4.61	4.35	4.58	4.31	4.54	4.27	4.51
24	2.84	4.04	2.81	4.00	2.78	3.96	2.75	3.92	2.72	3.89	2.69	3.85
25	3.49	3.33	3.45	3.30	3.42	3.27	3.39	3.24	3.36	3.21	3.32	3.18
26	2.78	2.93	2.76	2.90	2.72	2.87	2.68	2.84	2.64	2.81	2.61	2.78
27	4.48	4.74	4.43	4.69	4.38	4.64	4.34	4.61	4.31	4.57	4.27	4.53
28	4.89	4.06	4.84	4.02	4.79	3.99	4.75	3.95	4.71	3.91	4.67	3.86
29	2.36	4.11	2.33	4.07	2.31	4.03	2.29	4.01	2.26	3.98	2.23	3.95
30	5.47	5.63	5.42	5.58	5.37	5.53	5.33	5.49	5.29	5.44	5.25	6.41
31	4.34	3.76	4.30	3.72	4.26	3.69	4.22	3.66	4.18	3.62	4.14	3.57
32	3.28	4.68	3.25	4.64	3.22	4.60	3.18	4.56	3.14	4.53	3.10	4.48
33	4.57	2.46	4.52	2.44	4.48	2.40	4.44	2.36	4.41	2.32	4.36	2.29
34	4.68	5.39	4.64	5.33	4.60	5.28	4.56	5.23	4.52	5.16	4.28	5.11
35	3.44	3.54	3.41	3.51	3.37	3.46	3.33	3.42	3.30	3.37	3.26	3.34
36	3.15	2.19	3.12	2.17	3.08	2.13	3.05	2.12	3.02	2.09	2.99	2.06
37	3.14	3.06	3.11	3.03	3.09	3.01	3.06	2.99	3.03	2.97	3.01	2.95
38	2.31	3.43	2.29	3.40	2.27	3.37	2.25	3.34	2.23	3.31	2.20	3.27
39	3.33	3.31	3.31	3.28	3.29	3.25	3.26	3.22	3.23	3.18	3.21	3.15
40	4.25	3.32	4.21	3.29	4.17	3.27	4.13	3.23	4.08	3.19	3.03	3.16
41	3.21	4.52	3.18	4.47	3.15	4.42	3.12	4.37	3.09	4.33	3.05	4.29
42	4.10	4.12	4.05	4.07	4.00	4.02	3.96	3.97	3.92	3.96	3.88	3.91
43	3.76	3.31	3.72	3.27	3.68	3.23	3.63	3.19	3.58	3.15	3.54	3.11
44	2.38	5.58	2.36	5.52	2.34	5.47	2.32	5.42	2.29	5.37	2.27	5.32
45	5.27	4.52	5.22	4.47	5.17	4.42	5.12	4.37	5.08	4.33	5.03	4.29
46	2.86	3.33	2.83	3.30	2.80	3.27	2.77	3.24	2.74	3.21	2.71	3.18
47	4.28	4.42	4.24	4.38	4.21	4.34	4.18	4.31	4.15	4.27	4.11	4.23
48	4.56	5.01	4.51	4.96	4.46	4.91	4.41	4.86	4.37	4.81	4.33	4.76
49	2.51	4.36	2.49	4.32	2.47	4.28	2.45	4.24	2.42	4.21	2.39	4.18
50	3.96	3.52	3.92	3.49	3.88	3.46	3.84	3.43	3.80	3.40	3.76	3.35

N	Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15		Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18	
	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
1	5.31	4.33	5.37	4.37	5.41	4.42	5.47	4.46	5.53	4.51	5.58	4.56
2	4.50	2.96	4.54	2.98	4.59	3.02	4.63	3.05	4.68	3.08	4.72	3.11
3	3.66	4.13	3.70	4.17	3.73	4.21	3.77	4.25	3.80	4.28	3.84	4.32
4	3.30	4.77	3.33	4.82	3.37	4.86	3.41	4.91	3.45	4.95	3.49	4.99
5	3.81	4.12	3.84	4.17	3.88	4.22	3.91	4.26	3.95	4.31	3.98	4.35
6	4.20	3.67	4.24	3.71	4.29	3.74	4.33	3.78	4.36	3.85	4.39	3.90
7	4.41	4.26	4.46	4.30	4.50	4.34	4.55	4.39	4.59	4.43	4.63	4.47
8	3.93	4.11	3.97	4.15	4.02	4.19	4.07	4.23	4.11	4.28	4.15	4.33
9	4.82	1.77	4.87	1.79	4.91	1.82	4.96	1.84	5.01	1.86	5.06	1.89
10	5.48	4.30	5.53	4.34	5.57	4.38	5.62	4.43	5.67	4.47	5.71	4.52
11	1.22	3.53	1.23	3.57	1.24	3.60	1.25	3.64	1.27	3.67	1.28	3.71
12	3.78	3.42	3.82	3.46	3.86	3.49	3.91	3.53	3.95	3.56	4.00	3.59
13	3.81	4.02	3.84	4.06	3.88	4.09	3.92	4.13	3.96	4.16	4.01	4.21
14	4.55	3.93	4.60	3.97	4.64	4.01	4.69	4.05	4.73	4.09	4.78	4.14
15	3.89	3.44	3.93	3.48	3.97	3.51	4.02	3.55	4.06	3.58	4.11	3.62
16	4.71	4.93	4.76	4.98	4.80	5.03	4.85	5.07	4.89	5.11	4.94	5.16
17	4.24	6.42	4.28	6.48	4.32	6.55	4.37	6.61	4.41	6.68	4.46	6.74
18	4.53	3.09	4.58	3.12	4.62	3.15	4.66	3.18	4.72	3.22	4.76	3.25
19	5.08	3.83	5.13	3.87	5.18	3.91	5.24	3.94	5.29	3.98	5.34	4.02
20	3.32	3.24	3.36	3.28	3.39	3.31	3.42	3.34	3.46	3.38	3.49	3.41
21	2.88	4.49	2.91	4.54	2.94	4.59	2.97	4.64	3.00	4.68	3.03	4.73
22	3.61	4.22	3.64	4.27	3.68	4.31	3.71	4.35	3.75	4.40	3.79	4.44
23	4.91	5.17	4.97	5.22	5.02	5.27	5.07	5.33	5.11	5.38	5.17	5.43
24	3.12	4.44	3.15	4.49	3.18	4.56	3.22	4.57	3.25	4.62	3.28	4.66
25	3.84	3.66	3.87	3.70	3.92	3.74	3.96	3.77	3.99	3.81	4.03	3.85
26	3.06	3.22	3.09	3.26	3.12	3.29	3.15	3.32	3.18	3.35	3.21	3.39
27	4.93	5.21	4.98	5.27	5.03	5.32	5.08	5.37	5.13	5.42	5.18	5.48
28	5.38	4.47	5.43	4.51	5.49	4.56	5.54	4.60	5.60	4.64	5.65	4.69
29	2.60	4.52	2.62	4.57	2.65	4.61	2.67	4.66	2.70	4.70	2.73	4.75
30	6.01	6.19	6.08	6.25	6.14	6.32	6.19	6.38	6.25	6.44	6.32	6.51
31	4.77	4.14	4.82	4.18	4.87	4.22	4.92	4.26	4.96	4.30	5.02	4.35
32	3.61	5.15	3.65	5.20	3.68	5.25	3.72	5.30	3.75	5.36	3.79	5.41
33	5.03	2.71	5.08	2.73	5.13	2.76	5.18	2.79	5.23	2.82	5.28	2.84
34	5.15	5.93	5.20	5.99	5.25	6.05	5.30	6.11	5.36	6.17	5.41	6.23
35	3.78	3.89	3.82	3.93	3.86	3.97	3.90	4.01	3.94	4.05	3.98	4.09
36	3.46	2.41	3.50	2.43	3.53	2.46	3.57	2.48	3.61	2.51	3.64	2.53
37	3.17	3.37	3.20	3.40	3.24	3.43	3.27	3.47	3.30	3.50	3.33	3.53
38	2.54	3.77	2.57	3.81	2.59	3.85	2.62	3.89	2.64	3.93	2.67	3.97
39	3.66	3.64	3.70	3.67	3.74	3.71	3.77	3.75	3.81	3.79	3.85	3.83
40	4.68	3.65	4.72	3.69	4.77	3.72	4.82	3.76	4.86	3.80	4.91	3.84
41	3.53	4.97	3.57	5.02	3.60	5.07	3.64	5.12	3.67	5.17	3.71	5.22
42	4.51	4.53	4.56	4.57	4.60	4.62	4.65	4.67	4.69	4.72	4.74	4.76
43	4.15	3.64	4.19	3.67	4.23	3.71	4.27	3.75	4.32	3.79	4.36	3.83
44	2.62	6.14	2.64	6.20	2.67	6.26	2.70	6.32	2.72	6.38	2.75	6.45
45	5.80	4.96	5.85	5.01	5.91	5.06	5.97	5.11	6.03	5.16	6.09	5.21
46	3.15	3.66	3.18	3.70	3.21	3.74	3.24	3.77	3.27	3.81	3.31	3.85
47	4.71	4.86	4.76	4.91	4.80	4.96	4.85	5.01	4.90	5.06	4.95	5.11
48	5.01	5.51	5.07	5.57	5.12	5.62	5.16	5.68	5.22	5.73	5.27	5.79
49	2.76	4.80	2.79	4.84	2.82	4.89	2.84	4.94	2.87	4.99	2.90	5.04
50	4.36	3.87	4.40	3.91	4.44	3.94	4.49	3.99	4.53	4.03	4.58	4.07

N	Вариант 19		Вариант 20		Вариант 21		Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24	
	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
1	5.26	4.29	5.20	4.24	5.15	4.20	5.10	4.16	5.05	4.12	5.00	4.08
2	4.45	2.93	4.41	2.90	4.37	2.87	4.32	2.84	4.28	2.81	4.24	2.79
3	3.62	4.09	3.58	4.04	3.55	4.01	3.52	3.97	3.48	3.93	3.45	3.89
4	3.27	4.72	3.23	4.68	3.20	4.63	3.17	4.58	3.14	4.54	3.11	4.49
5	3.77	4.08	3.73	4.04	3.70	4.00	3.66	3.96	3.62	3.92	3.59	3.88
6	4.16	3.63	4.12	3.60	4.08	3.56	4.03	3.53	4.00	3.49	3.95	3.46
7	4.37	4.22	4.32	4.18	4.28	4.13	4.24	4.09	4.19	4.05	4.16	4.01
8	3.89	4.07	3.85	4.03	3.81	3.99	3.78	3.95	3.73	3.91	3.70	3.87
9	4.77	1.77	4.72	1.75	4.68	1.73	4.63	1.72	4.58	1.70	4.54	1.68
10	5.42	4.26	5.37	4.21	5.32	4.17	5.26	4.13	5.21	4.09	5.16	4.05
11	1.21	3.49	1.20	3.46	1.18	3.42	1.17	3.39	1.16	3.36	1.15	3.32
12	3.74	3.39	3.70	3.35	3.67	3.32	3.63	3.29	3.59	3.25	3.56	3.22
13	3.77	3.98	3.73	3.94	3.70	3.90	3.66	3.86	3.62	3.82	3.59	3.87
14	4.50	3.89	4.46	3.85	4.41	3.81	4.37	3.78	4.33	3.74	4.28	3.70
15	3.85	3.41	3.81	3.37	3.77	3.34	3.74	3.30	3.69	3.27	3.66	3.24
16	4.66	4.88	4.61	4.83	4.57	4.78	4.52	4.74	4.48	4.69	4.43	4.64
17	4.20	6.36	4.16	6.29	4.11	6.23	4.07	6.17	4.03	6.11	3.99	6.04
18	4.48	3.06	4.44	3.03	4.39	3.00	4.35	2.97	4.31	2.94	4.26	2.91
19	5.02	3.79	4.98	3.75	4.93	3.72	4.88	3.68	4.83	3.64	4.78	3.61
20	3.29	3.21	3.25	3.18	3.22	3.14	3.19	3.11	3.15	3.08	3.12	3.05
21	2.85	4.44	2.82	4.40	2.79	4.36	2.77	4.31	2.73	4.27	2.71	4.22
22	3.57	4.18	3.54	4.13	3.50	4.09	3.47	4.05	3.43	4.01	3.40	3.97
23	4.86	5.12	4.81	5.06	4.76	5.02	4.72	4.97	4.67	4.92	4.62	4.86
24	3.09	4.40	3.06	4.35	3.02	4.31	3.00	4.27	2.97	4.22	2.94	4.18
25	3.80	3.58	3.76	3.55	3.73	3.51	3.69	3.47	3.66	3.44	3.62	3.41
26	3.03	3.19	3.00	3.16	2.97	3.12	2.94	3.09	2.91	3.06	2.88	3.03
27	4.88	5.16	4.83	5.11	4.78	5.06	4.73	5.01	4.69	4.95	4.64	4.91
28	5.33	4.43	5.27	4.38	5.22	4.33	5.17	4.29	5.12	4.25	5.07	4.21
29	2.57	4.47	2.54	4.43	2.52	4.39	2.50	4.34	2.47	4.29	2.45	4.26
30	5.95	6.13	5.89	6.07	5.83	6.01	5.77	5.95	5.72	5.89	5.66	5.83
31	4.72	4.10	4.68	4.06	4.63	4.02	4.58	3.98	4.53	3.94	4.49	3.89
32	3.57	5.10	3.53	5.05	3.50	5.00	3.47	4.95	3.43	4.90	3.40	4.85
33	4.98	2.68	4.93	2.66	4.88	2.63	4.83	2.60	4.78	2.57	4.74	2.5
34	5.10	5.87	5.05	5.81	5.00	5.75	4.95	5.70	4.90	5.64	4.85	5.58
35	3.74	3.85	3.70	3.81	3.66	3.77	3.63	3.74	3.59	3.70	3.56	3.6
36	3.44	2.39	3.40	2.36	3.37	2.34	3.33	2.32	3.30	2.29	3.27	2.27
37	3.13	3.34	3.10	3.30	3.08	3.27	3.05	3.24	3.01	3.20	2.98	3.17
38	2.51	3.73	2.49	3.69	2.46	3.66	2.44	3.62	2.42	3.59	2.39	3.55
39	3.62	3.60	3.58	3.57	3.55	3.53	3.52	3.49	3.48	3.46	3.45	3.43
40	4.63	3.61	4.59	3.58	4.54	3.54	4.50	3.51	4.45	3.47	4.41	3.44
41	3.49	4.92	3.46	4.87	3.42	4.82	3.39	4.77	3.36	4.73	3.33	4.68
42	4.46	4.48	4.42	4.44	4.38	4.39	4.33	4.35	4.29	4.31	4.25	4.26
43	4.11	3.60	4.07	3.57	4.03	3.53	3.99	3.50	3.95	3.46	3.91	3.43
44	2.59	6.08	2.57	6.02	2.54	5.96	2.52	5.90	2.49	5.84	2.47	5.78
45	5.74	4.91	5.68	4.86	5.62	4.81	5.57	4.76	5.52	4.72	5.46	4.67
46	3.12	3.62	3.09	3.59	3.06	3.5	3.03	3.52	3.00	3.48	2.96	3.45
47	4.66	4.81	4.62	4.76	4.57	4.72	4.52	4.67	4.48	4.62	4.43	4.58
48	4.96	5.45	4.91	5.40	4.86	5.35	4.81	5.29	4.76	5.24	4.72	5.19
49	2.73	4.75	2.71	4.70	2.68	4.66	2.65	4.61	2.62	4.56	2.60	4.52
50	4.32	3.83	4.27	3.79	4.23	3.76	4.19	3.72	4.15	3.68	4.10	3.64

*Приложение*1. Значения t_β, удовлетворяющие равенству $2\int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)\,dt=\beta$, в зависимости от β и $n-1$

$n-1$ \ β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	134	271	414	569	741	941	1,190	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	132	267	408	559	727	920	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	131	265	404	553	718	906	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	4,71	5,96
7	130	263	402	549	711	896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	130	262	399	546	706	899	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	129	261	398	543	703	883	1,100	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	129	260	397	542	700	879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	129	260	396	540	697	876	1,088	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	128	259	395	539	695	873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	128	259	394	538	694	870	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	128	258	393	537	692	868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	128	258	393	536	691	866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	128	258	392	535	690	865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	128	257	392	534	689	863	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	127	257	392	534	688	862	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	127	257	391	533	688	861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	127	257	391	533	687	860	1,064	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	127	257	391	532	686	859	1,063	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	127	256	390	532	686	858	1,061	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	127	256	390	532	685	858	1,060	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	127	256	390	531	685	857	1,050	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	127	256	390	531	684	856	1,058	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	127	256	390	531	684	856	1,058	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	127	256	389	531	684	855	1,057	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	127	256	389	530	683	855	1,056	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	127	256	389	530	683	854	1,055	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	127	256	389	530	683	854	1,055	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	126	255	388	529	681	851	1,050	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
60	126	254	387	527	679	848	1,046	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	126	254	386	526	677	845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,36	2,62	3,37
∞	0.126	0.253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29

*Приложение*2. Нормированная функция Лапласа $\Phi\ (z) = 1/\sqrt{2\pi}\ \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}}dv$

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	0,0 000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	1026	1064	1103	1141
0,3	0,1 179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	0,2 257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	703	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	0,3 159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	583	554	577	599	621
1,1	643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	4015
1,3	0,4 032	049	066	082	099	115	131	147	162	177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	315	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	860	864	867	871	874	877	880	883	886	889
	966	474	906	263	545	755	894	962	962	893
2,3	892	895	898	900	903	906	908	911	913	915
	759	559	296	969	581	133	625	060	437	758
2,4	918	920	922	924	926	928	930	932	934	936
	025	237	397	506	564	572	531	493	309	128
2,5	937	939	941	942	944	946	947	949	950	952
	903	634	323	969	574	139	664	151	600	612
2,6	953	954	956	957	958	959	960	962	963	964
	388	729	035	308	547	754	930	074	189	274
2,7	965	966	967	968	969	970	971	971	972	973
	330	358	359	333	280	202	099	972	821	646

УКАЗАНИЕ.

Для значений $2.2 \leq z \leq 5.0$ под основными четырьмя десятичными цифрами функции $\Phi\ (z)$ даются мелким шрифтом еще три десятичных цифры следующих разрядов. Например, при $z = 2.51$ получаем, что $\Phi\ (2.51) = 0.4939634$.

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,8	0,4 974	975	975	976	977	978	978	979	980	980
	449	229	988	726	443	140	818	476	116	738
2,9	981	981	982	983	983	984	984	985	985	986
	342	929	498	052	589	111	618	110	588	051
3,0	986	986	987	987	988	988	988	989	989	989
	501	938	361	772	171	558	933	297	650	992
3,1	990	990	990	991	991	991	992	992	992	992
	324	546	957	260	553	836	112	378	636	886
3,2	993	993	993	993	994	994	994	994	994	994
	129	363	590	810	024	230	429	623	810	991
3,3	995	995	995	995	995	995	996	996	996	996
	166	335	499	658	811	959	103	242	376	505
3,4	996	996	996	996	997	997	997	997	997	997
	631	752	869	982	091	197	299	398	493	585
3,5	997	997	997	997	997	998	998	998	998	998
	674	759	842	922	999	074	146	215	282	347
3,6	998	998	998	998	998	998	998	998	998	998
	409	469	527	583	637	689	739	787	834	879
3,7	998	998	999	999	999	999	999	999	999	999
	922	964	004	043	080	116	150	184	216	247
3,8	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	274	305	333	359	385	409	433	456	478	499
3,9	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	519	539	557	575	593	609	6253	641	655	670
4,0	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	683	696	709	721	733	744	755	765	775	784
4,1	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	793	802	811	819	826	834	841	848	854	861
4,2	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	867	872	878	883	888	893	898	902	907	911
4,3	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	915	918	922	925	929	932	935	938	941	943
4,4	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	946	948	951	953	955	957	959	961	963	964
4,5	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	966	968	969	971	972	973	974	976	977	978
5,0	0,4999997									

Приложение3. Значения q-процентных пределов $t_{q,k}$ в зависимости от числа k степеней свободы и от вероятности $\frac{q}{100} = 2B_k \int_{t_{q,k}}^{\infty} \left(1 + t^2/2\right)^{-(k+1)/2} dt$ для распределения Стьюдента.

k \ q	10,0	5,0	2,5	2,0	1,0	0,5	0,3	0,2	0,1
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,926	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

Приложение4. Значения верхнего $q\%$ предела χ_q^2 в зависимости от вероятности $P(\chi^2 > \chi_q^2) = \frac{1}{\Gamma(k/2)2^{k/2}}\int_{\chi_q^2}^{\infty} x^{k/2-1}\, e^{-x/2}dx$ и числа k степеней свободы χ^2 распределения

k	$P(\chi^2 > \chi_q^2)$															
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,061	0,148	0,455	1,07	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,380	2,41	3,22	4,0	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31	34	36,1
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34	37	39,2
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37	40	42,3
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40	43	45,3
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46	48,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47	50	52,6
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48	51,5	54,1
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53	55,5
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,3	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51	54,5	56,9
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56	58,3
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54	57,5	59,7

ЛИТЕРАТУРА

а) *Основная:*

1. Смирнов И.В., Дунин-Барковский И.Ф. Краткий курс математической статистики для технических приложений. М.: Физматгиз, 1959.
2. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ, 1956.
3. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачи по теории вероятностей и математической статистике. Л., 1967.

б) *Дополнительная:*

1. Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1975.
2. Леман Э. Проверка статистических гипотез.М.,1972.
3. Севастьянов Б.А. Курс теории веорятностей математической статистики. М.: Наука, 1982.
4. Дунин-Барковский И.Ф., Смирнов И.В. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ГТТИ, 1955.
5. Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М., 1970.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., 1966.
7. Чарыков А.К. Математическая обработка результатов химического анализа. Л.: Химия. 1984.

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 16.11.1999 г. Формат бумаги 60X90 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 2,4 п.л. Тираж 150 экз. Заказ 1083.
НИИ химии СПбГУ.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198904, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 2.