Санкт-Петербургский государственный университет

Пономаренко А. К.

Математика. Часть 6.2
Квадратичные формы

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
2012

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики в качестве методических указаний для студентов естественных факультетов.

Рецензент: Волкова Н. А.

Автор: Пономаренко А. К.

Пономаренко А. К.

П56 Математика. Часть 6.2. Квадратичные формы. Учебное пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. — 27 с.

Методическое пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университета, изучение математики на которых происходит в сокращенном объеме. Необходимые для решения задач теоретические сведения приводятся в каждом параграфе. Особое внимание уделяется вопросам, которые, как показывает опыт проведения практических занятий, вызывают у студентов наибольшие трудности в понимании. Пособие снабжено большим количеством примеров, а также содержит контрольное задание для индивидуальной работы.

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

1^0. Билинейные и квадратичные формы

Пусть $\mathcal{U}$ — линейное векторное пространство над полем $\mathcal{R}$ вещественных чисел.

Числовая функция $F: \mathcal{U}\times\mathcal{U}\to\mathcal{R}$ (т.е. $F = F(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{U}$, $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}$) называется *билинейной формой*, заданной на $\mathcal{U}$, если для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ из $\mathcal{U}$ и любых вещественных чисел α и β выполняются соотношения

$$F(\alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha\, F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta\, F(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$
$$F(\mathbf{x}, \alpha\,\mathbf{y} + \beta\,\mathbf{z}) = \alpha\, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta\, F(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Другими словами, билинейная форма $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является числовой функцией векторных аргументов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, принадлежащих линейному векторному пространству $\mathcal{U}$, линейной относительно этих аргументов.

Билинейная форма $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется *симметричной,* если для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{U}$ имеет место равенство $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Пусть теперь $\mathcal{U} = \mathcal{U}_n$ — n- мерное линейное пространство над $\mathcal{R}$, $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — базис в $\mathcal{U}_n$. Возьмем произвольные векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{U}_n$.

Пусть их разложения по базису e имеют вид

$$\mathrm{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j,\ \mathrm{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k.$$

Тогда

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\, \boldsymbol{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k\, \boldsymbol{e}_k\Big) = \sum_{j,k=1}^{n} F(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) x_j y_k = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}$$

$x_j y_k$. Здесь обозначено $a_{jk} = F(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$.

Пусть $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — симметричная билинейная форма, заданная на $\mathcal{U}$. При $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ эта форма называется *квадратичной формой*: $F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$

$= \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$. В силу симметричности формы F выполняются равенства

$$a_{jk} = a_{kj}, \ j,k = 1, 2, \ldots, n. \ (*)$$

Квадратичную форму $F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в базисе $\boldsymbol{e}$ обычно обозначают $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2^0. Приведение квадратичных форм к каноническому виду

При учете симметрии квадратичную форму f с n аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно записать в виде

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + \\ +2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ +2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +2a_{n-1n}x_{n-1}x_n, \end{gathered} \tag{1}$$

где a_{ij} $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ – вещественные коэффициенты[1].

Множитель 2 введен для удобства записи.

Вернемся к исходному написанию формы

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + \ldots + a_{3n}x_3x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2. \end{gathered}$$

[1] Здесь рассматриваются только вещественные формы. В общем случае коэффициенты квадратичной формы могут принадлежать какому - либо кольцу или полю, например, полю комплексных чисел.

Введем матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Их называют матрицей и вектором аргументов квадратичной формы (1) соответственно.

В матричном виде форма (1) переписывается в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

где $X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [2]– транспонированная матрица-столбец X. Отметим также, что в силу условия (*) матрица A – симметрическая матрица ($A^T = A$).

При линейном невырожденном преобразовании $X = BY$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}, \ \det B \neq 0, \ Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T,$$

форма f переходит в квадратичную форму аргументов

$$y_1, y_2, \ldots, y_n: \ f = X^T AX = (BY)^T A(BY) = Y^T (B^T AB)Y \ ^3.$$

Матрица $B^T AB$ – симметрическая матрица. Действительно

$$(B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T AB \ \text{(См. сноску } ^3\text{.)}$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1

Для любой квадратичной формы (1) существует невырожденное *линейное преобразование, приводящее эту форму к <u>каноническому виду</u>, т.е. к виду*

[2] Значок T в записи C^T означает транспонирование матрицы C.

[3] Использовано правило $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

$$f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j^2 , \qquad (2)$$

где λ_j *— коэффициенты,* z_j *– новые аргументы,* $j = 1, 2, ..., n$.

Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, применим метод Лагранжа [4], заключающийся в последовательном дополнении до полного квадрата по каждому аргументу формы (1). При этом используется формула

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_{2n-1} + a_1a_n +$$
$$a_2a_3 + ... + a_2a_{n-1} + a_2a_n +$$
$$..............................$$
$$+a_{2n-1}a_n \; .$$

Предположим сначала, что хоть один из коэффициентов $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, ..., n$. Не умаляя общности, можно считать $a_{11} \neq 0$.

Выполним преобразование

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n =$$
$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}x_3^2 - ... - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 -$$
$$-2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}x_2x_3 - ... - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}x_{n-1}x_n .$$

Форма f примет вид

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* x_i x_j ,$$

где a_{ij}^* — коэффициенты при $x_i x_j$, полученные в результате этого преобразования.

[4] Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — французский математик и механик, чл. Берлинской АН, Парижской АН, почетный чл. Петербургской АН.

Сделаем невырожденное линейное преобразование

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n , \\ y_2 = \qquad\quad x_2 , \\ .... \\ y_n = \qquad\qquad\qquad\quad x_n . \end{cases} \qquad (3)$$

Имеем $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* y_i y_j .$

Рассмотрим теперь форму $\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* y_i y_j .$ Если она тождественно равна нулю, то форма f уже приведена к каноническому виду.

Пусть $\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* y_i y_j$ не тождественный нуль. В этом случае выделение полного квадрата можно применить к слагаемым, содержащим аргумент y_2, сделать соответствующее неособенное линейное преобразование вида (3) для $y_2,$ затем это проделать для y_3 и так далее. В конце концов, квадратичная форма f будет приведена к виду (2) с помощью неособенного линейного преобразования, равного произведению линейных преобразований вида (3).

Пусть теперь все коэффициенты a_{ii} в исходной форме (1) равны нулю и хоть один из коэффициентов $a_{ij} \neq 0,\ i \neq j$, например, $a_{12} \neq 0$. Проделав невырожденное линейное преобразование $x_1 = t_1 + t_2,\ x_2 = t_1 - t_2,\ x_j = t_j,\ j = 3, 4, ..., n,$ будем иметь в преобразованной форме (1) при t_1^2 коэффициент $2a_{12} \neq 0$; теперь можно применить описанный выше алгоритм выделения полных квадратов.

Выражение в правой части равенства (2) называется *каноническим видом (канонической формой)* квадратичной формы f, число отличных от нуля коэффициентов в канонической записи формы - ее *рангом (индексом инерции)* .

Отметим, что каноническому виду (2) квадратичной формы соответствует диагональная матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — коэффициенты формы (2). Здесь учитываются и нулевые коэффициенты. Так, например, если в форме $h = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$ выполнить неособенное линейное преобразование $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$, то получим $h = y_2^2$. Имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Замечание. Примененный выше алгоритм приведения квадратичной формы к сумме квадратов (каноническому виду) можно использовать на практике.

Примеры. Привести к каноническому виду форму:

а) $f = 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 6yz$.

Записываем форму в виде

$$f = 5(x^2 + \frac{2}{5}xy + \frac{2}{5}xz) + y^2 + z^2 + 6yz =$$

$$5\left(x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right)^2 + \frac{4}{5}y^2 + \frac{4}{5}z^2 + \frac{28}{5}yz = 5\left(x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right)^2 +$$

$$+\frac{4}{5}\left(y^2 + 7yz\right) + \frac{4}{5}z^2 = 5\left(x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right)^2 + \frac{4}{5}\left(y + \frac{7}{2}z\right)^2 - 9z^2 .$$

Выполнив преобразование

$$\begin{cases} t = x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z, \\ u = \qquad y + \frac{7}{2}z, \\ v = \qquad\qquad z, \end{cases}$$

получим каноническую форму $f = 5t^2 + \frac{4}{5}u^2 - 9v^2$.

б) $g = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Положив $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$, получим

$$g = y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 =$$
$$y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 .$$

Проделав преобразование $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$, найдем $g = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$.

Рассмотрим теперь вопрос о приведении квадратичной формы к сумме квадратов с помощью ортогонального преобразования.

Матрица A квадратичной формы $f = X^T AT$ — вещественная симметрическая матрица.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2.

Вещественная симметрическая матрица ортогонально подобна диагональной матрице ([1 – 5]).

Это означает, что для матрицы A существует ортогональная матрица B ($B^T = B^{-1}$) такая, что $B^{-1}AB$ является диагональной матрицей, на главной диагонали которой расположены собственные (характеристические) числа матрицы A . При этом собственное число повторяется столько раз, какова его кратность. Столбцы матрицы B - ортонормированные собственные векторы матрицы A , соответствующие ее собственным числам.

При линейном преобразовании $X = BY$ квадратичная форма $f = X^T AT$ преобразуется, как было выяснено выше, к виду $f = Y^T(B^T AB)Y$. Если взять в качестве матрицы B ортогональную матрицу, то $B^T AB = B^{-1}AB$ будет матрицей, подобной матрице A.

Для практического построения матрицы B следует найти собственные числа матрицы A, ее собственные векторы, соответствующие этим собственным числам, нормировать их (если собственное число имеет кратность $s, s > 1$, то нужно найти s линейно независимых собственных векторов, соответствующих этому собственному числу, затем ортонормировать эти векторы, например, используя алгоритм Шмидта). Полученные ортонормальные векторы взять в качестве столбцов матрицы B.

В качестве примера применим этот процесс для приведения к каноническому виду форм, для которых выше использовался метод Лагранжа.

Примеры. . Привести к каноническому виду ортогональным преобразованием форму:

а) $f = 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 6yz$.

Напишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычтем из 2-го столбца определителя 3-й

$$: \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -(2+\lambda) & 3 \\ 1 & \lambda+2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вынесем из 2-го столбца

$$\lambda+2 : (\lambda+2)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После прибавления к 1-му столбцу

2-го, разложения полученного определителя по элементам 1-го столбца и простых преобразований придем к уравнению $(\lambda+2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$, корни которого $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$.

Найдем собственные векторы.

1). $\lambda = \lambda_1$.

Пусть этому собственному числу соответствует собственный вектор

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^T.$$

Для его координат имеем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 3 \\ 1 & 3 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} 7x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0, \\ x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} = 0, \end{cases}$$

решение которой $\begin{cases} x_1^{(1)} = 0, \\ x_3^{(1)} = -x_2^{(1)} \end{cases}$, где $x_2^{(1)}$ - произвольное, отличное от нуля число. Нормируем $x^{(1)}$, т.е. делим его на $\sqrt{\sum_{j=1}^{3} {x_j^{(1)}}^2}$, откуда

$$x^{(1)} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

2). $\lambda = \lambda_2$.

Пусть этому собственному числу соответствует собственный вектор $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^T$. Для его координат получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 & 3 \\ 1 & 3 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что дает систему $\begin{cases} 2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + x_3^{(2)} = 0, \\ x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} + 3x_3^{(2)} = 0, \end{cases}$

решение которой $\begin{cases} x_1^{(2)} = -x_3^{(2)}, \\ x_2^{(2)} = x_3^{(2)} \end{cases}$;

где $x_3^{(2)}$ - любое отличное от нуля число.

Делим вектор $x^{(2)}$ на $\sqrt{\sum_{j=1}^{3} {x_j^{(2)}}^2}$.

Получим

$$x^{(2)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)^T .$$

3). $\lambda = \lambda_3$

Обозначим $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})^T$ – собственный вектор, соответствующий λ_3.

Уравнение

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_3 & 3 \\ 1 & 3 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

сводится к системе $\begin{cases} -x_1^{(3)} + x_2^{(3)} + x_3^{(3)} = 0, \\ x_1^{(3)} - 5x_2^{(3)} + 3x_3^{(3)} = 0, \end{cases}$

которая имеет решение $\begin{cases} x_1^{(3)} = 2x_3^3, \\ x_2^{(3)} = x_3^{(3)} \end{cases}$, где $x_3^{(3)}$ - произвольное не равное нулю число.

Нормируем $x^{(3)}$: делим его на $\sqrt{\sum_{j=1}^{3} {x_j^{(3)}}^2}$.

Находим

$$x^{(3)} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{6}\right)^T .$$

Запишем матрицу

$$B = \left(x^{(1)} x^{(2)} x^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Преобразование $X = BY$, где обозначено $X = (x, y, z)^T$, $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$, или, в координатной форме:

$$\begin{cases} x = \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3, \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3, \end{cases}$$

приводит форму f к каноническому виду $f = -2y_1^2 + 5y_2^2 + 6y_3^2$.

Запишем также обратное преобразование $Y = B^{-1}X$. B – ортогональная матрица, поэтому

$$B^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \text{ и } \begin{cases} y_1 = \quad \frac{1}{\sqrt{2}} y - \frac{1}{\sqrt{2}} z, \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} y + \frac{1}{\sqrt{3}} z, \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} x + \frac{1}{\sqrt{6}} y + \frac{1}{\sqrt{6}} z. \end{cases}$$

б) Второй пример:
$g = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
Здесь матрица

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\textit{Вычтем из последней}\\\textit{строки вторую}}}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\0&1+\lambda&-1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\0&1&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{\textit{Прибавим ко}\\\textit{2-му столбцу 3-й}}}{=}(\lambda+1)\begin{vmatrix}-\lambda&2&1\\1&1-\lambda&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=$$

$$\overset{\substack{\textit{Прибавим ко}\\\textit{2-му столбцу 3-й}}}{=}(\lambda+1)\begin{vmatrix}-\lambda&2&1\\1&1-\lambda&1\\0&0&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{\textit{Разложим по элементам}\\\textit{последней строки}}}{=}.$$

$$=-(\lambda+1)\begin{vmatrix}-\lambda&2\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

Корни характеристического уравнения: а) $\lambda=\lambda_1=-1$ кратности 2, б) $\lambda=\lambda_2=2$ - простой корень.

а) $\lambda=\lambda_1$. Обозначим $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})^T$ - собственный вектор, соответствующий этому собственному числу. Для его координат имеем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}-\lambda_1&1&1\\1&-\lambda_1&1\\1&1&-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

эквивалентное уравнению $x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+x_3^{(1)}=0$.

Это уравнение имеет два линейно независимые решения $x^{(1,1)}=(0,1,-1)^T$, $x^{(1,2)}=(1,0,-1)^T$.

(Они действительно линейно независимы, ибо при $\alpha=const$, $\beta=const$ имеем

$$\alpha x^{(1,1)}+\beta x^{(1,2)}=$$

$$(0,0,0)^T\Leftrightarrow\alpha(0,1,-1)^T+\beta(1,0,-1)^T=(0,0,0)^T\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0,\\\alpha=0,\\-\alpha-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0,\\\beta=0.\end{cases}$$

А это и означает, что рассматриваемые векторы линейно независимы.)

Ортонормируем систему векторов $x^{(1,1)},x^{(1,2)}$.

Вычислим норму вектора $x^{(1,1)}$: $\left\|x^{(1,1)}\right\|=\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Введем вектор

$$e^{(1)}=\frac{x^{(1,1)}}{\left\|x^{(1,1)}\right\|}=\left(0,.\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

Его норма (длина) равна 1.

Введем далее вектор $u^{(1,2)}=x^{(1,2)}+a_{2,1}e^{(1)}$.

Число $a_{2,1}$ выберем так, чтобы вектор $u^{(1,2)}$ был бы ортогонален к вектору $e^{(1)}$:

$$(u^{(1,2)},e^{(1)})=0\Leftrightarrow(x^{(1,2)},e^{(1)})+a_{2,1}\left\|e^{(1)}\right\|^2=0,\ a_{2,1}=-(x^{(1,2)},e^{(1)})=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда $u^{(1,2)}=(1,0,-1)^T-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T=\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T$.

Нормируем вектор $u^{(1,2)}$.

Вычислим $\left\|u^{(1,2)}\right\|=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Положим

$$e^{(2)}=\frac{u^{(1,2)}}{\left\|u^{(1,2)}\right\|}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T=\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

Ясно, что $e^{(2)} \perp e^{(1)}$, и $\|e^{(1)}\| = \|e^{(2)}\| = 1$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ – ортонормальные собственные векторы, соответствующие характеристическому числу λ_1.

б) $\lambda = \lambda_2$. Обозначим $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^T$ – собственный вектор, соответствующий этому собственному числу. Для его координат получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое эквивалентно системе $\begin{cases} -2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + x_3^{(2)} = 0, \\ x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} + x_3^{(2)} = 0 \end{cases}$, решение которой $a(1,1,1)^T$, где a – число, отличное от нуля.

Возьмем a равным 1 и нормируем вектор $x^{(2)} = (1,1,1)^T$:

$$\|x^{(2)}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Вектор $e^{(3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ имеет единичную норму, и он ортогонален к векторам $e^{(1)}, e^{(2)}$.

Как и выше, матрица

$$B = \left(x^{(1)} x^{(2)} x^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$ - ортогональная матрица,

$B^T AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, преобразование $X = BY$, где $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$, или, в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3, \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3, \end{cases}$$

приводит форму g к каноническому виду $g = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$.

Обратное преобразование $Y = B^{-1}X$ в координатной форме записывается следующим образом

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_3, \\ y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} x_3, \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_3. \end{cases}$$

Следует отметить, что существуют и другие методы приведения квадратичной форме к сумме квадратов (см. литературу в конце пособия).

3^0. Закон инерции

В рассмотренных выше примерах число положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы f равно двум, отрицательных одному, у формы g один положительный коэффициент и два отрицательных как в результате применения метода Лагранжа, так и при использовании ортогональных преобразований. Это не случайно. Имеет место

ТЕОРЕМА 3 (*Закон инерции квадратичных форм*).

Число слагаемых с положительными коэффициентами и число слагаемых с отрицательными коэффициентами в канонической записи квадратичной формы не зависит от способа приведения этой формы к каноническому виду.

Число положительных коэффициентов в канонической записи квадратичной формы называется *положительным индексом инерции* формы, число отрицательных коэффициентов - ее *отрицательным индексом инерции,* число ненулевых коэффициентов - *индексом инерции* формы.

(Конечно, здесь предполагается, что приведение квадратичной формы к каноническому виду осуществляется с помощью неособенного линейного преобразования ее аргументов).

4^0. Классификация квадратичных форм

Классификацию квадратичных форм приведем согласно книге [1].

Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если ее значения положительны для любых вещественных значений ее аргументов, каждый из которых отличен от нуля.

Пример. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если ее значения отрицательны для любых вещественных значений ее аргументов, каждый из которых не равен нулю.

Пример. $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-2x_2^2-3x_3^2$.

Квадратичная форма называется *положительно полуопределенной*, если ее значения неотрицательны для любых вещественных значений ее аргументов.

Пример. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2=2x_1^2+(x_2-x_3)^2$.

Эта форма принимает положительные значения для любых вещественных значений аргументов x_1,x_2,x_3, кроме $x_1=0$ и $x_2=x_3$ (x_3 - любое вещественное число), и обращается в нуль при

$x_1=0$ и $x_2=x_3$ (x_3 - любое вещественное число, которое может и не быть равным нулю).

Квадратичная форма называется *отрицательно полуопределенной*, если она имеет отрицательные или нулевое значения для любых вещественных значений ее аргументов.

Пример. $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2=-x_1^2-(x_2+x_3)^2$.

Квадратичные формы, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются *неопределенными.*

Пример. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-3x_3^2$.

При $x_1\neq 0,\ x_2=x_3=0$ форма f имеет положительные значения, при $x_1=0,\ x_2$ или $x_3\neq 0$ отрицательные.

ТЕОРЕМА 4.

Для того чтобы квадратичная форма (1) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к каноническому виду (2) все ее коэффициенты $\lambda_j,\ j=1,2,...,n$, были положительны.

Для того чтобы квадратичная форма (1) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к каноническому виду (2) все ее коэффициенты $\lambda_j,\ j=1,2,...,n$, были отрицательны.

Для того чтобы квадратичная форма (1) была положительно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к каноническому виду (2) часть ее коэффициентов λ_j были бы положительными, а остальные коэффициенты равнялись нулю .

Для того чтобы квадратичная форма (1) была отрицательно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к каноническому виду (2) часть ее коэффициентов λ_j были бы отрицательными, а остальные коэффициенты равнялись нулю .

Для того чтобы квадратичная форма (1) была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к каноническому виду (2) часть ее коэффициентов λ_j были бы положительными, а остальные отрицательными.

Для выяснения вопроса о том, является ли квадратичная форма положительно или отрицательно определенной, часто используется

Критерий Сильвестра.

Для того чтобы квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X \quad \text{с матрицей} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{была}$$

положительно определенной, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \dots,\ \Delta_n > 0, \qquad (4)$$

где обозначено

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с матрицей A была отрицательно определенной, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0\ . \qquad (5)$$

Примеры. Будут ли положительно или отрицательно определенными формы

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$,

2) $g(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$?

1). Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Здесь $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 > 0$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Прибавим к 1-й строке 2-ю,} \\ \text{умноженную на 3, к 3-й 2-ю}}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

Выполнены условия (4), форма f положительно определенная. Действительно, как легко видеть, $f = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2$, и невырожденное линейное преобразование

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_3 = x_2 + x_3 \end{cases}$$

(ибо $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$), приводит форму f к каноническому виду $f = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$.

2). Матрица квадратичной формы g имеет вид $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 > 0$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & -3 \\ -9 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 < 0$. Выполнены условия (5), форма g определена отрицательно. Ясно также, что $g = -(x_1 - x_2 - x_3)^2 - (x_1 + x_2)^2 - (x_2 + 2x_3)^2$. Преобразование

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1 + x_2, \\ y_3 = \quad\quad x_2 + 2x_3, \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$ при-

водит эту форму к виду $g = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ЗАДАНИЯ:

1. Используя метод Лагранжа, привести к каноническому виду квадратичные формы пунктов а), б), в). Выписать соответствующие линейные преобразования.
2. Ортогональными преобразованиями привести к каноническому виду квадратичные формы пунктов в), г). Выписать эти преобразования.
3. С помощью критерия Сильвестра проверить, являются ли квадратичные формы пункта г) положительно определенными или отрицательно определенными.
4. По каноническому виду каждой из квадратичных форм пунктов а)-г) установить, будет ли форма положительно определенной, отрицательно определенной, положительно полуопределенной, отрицательно полуопределенной или неопределенной.
5. Указать индекс инерции, положительный индекс инерции, отрицательный индекс инерции каждой из квадратичных форм пунктов а)-г). Сохраняются ли эти числа, если квадратичную форму привести к каноническому виду другим невырожденным линейным преобразованием?

№ варианта	Заданные квадратичные формы
1.	а) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$, б) $x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$, в) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_2(x_1 + x_3)$, г) $11x_1^2 + 17x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 16x_2x_3$.
2.	а) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, б) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$, в) $x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1(x_2 + x_3)$, г) $17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.
3.	а) $4x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$, б) $4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$, в) $x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2(x_1 + x_3)$, г) $11x_1^2 + 17x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 16x_2x_3$.
4.	а) $2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3$, б) $x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$, в) $2x_1^2 + x_3^2 - 4x_3(x_1 + x_2)$, г) $17x_1^2 + 11x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 8x_2x_3$.
5.	а) $-2x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, б) $2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3$, в) $-2x_1^2 - x_2^2 + 4x_2(x_1 + x_3)$, г) $17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 + 16x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.
6.	а) $5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, б) $2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2x_3$, в) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2(x_1 + x_3)$, г) $17x_1^2 + 11x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$.
7.	а) $-2x_1^2 - 10x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, б) $6x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$, в) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1(x_2 + x_3)$, г) $13x_1^2 + 13x_2^2 + 10x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
8.	а) $2x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$, б) $4x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2x_3$, в) $3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_2(x_1 + x_3)$, г) $13x_1^2 + 10x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.
9.	а) $x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

б) $6x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$, в)
$2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-4x_1(x_2+x_3)$,
г) $13x_1^2+13x_2^2+10x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$.

10. а) $10x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$,
б) $4x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$,
в) $-x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+4x_2(x_1+x_3)$,
г) $10x_1^2+13x_2^2+13x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$.

11. а) $2x_1^2+10x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,
б) $6x_1x_2+6x_1x_3+x_2x_3$, в)
$3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_2(x_1-x_3)$,
г) $13x_1^2+10x_2^2+13x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

12. а) $5x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$,
б) $2x_1x_2+8x_1x_3+x_2x_3$, в)
$4x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1(x_2-x_3)$,
г) $10x_1^2+13x_2^2+13x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$.

13. а) $x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,
б) $8x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3$, в)
$5x_1^2+4x_2^2+3x_3^2-4x_2(x_1-x_3)$,
г) $13x_1^2+13x_2^2+10x_3^2+8x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

14. а) $2x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$,
б) $4x_1x_2+8x_1x_3+x_2x_3$, в)
$3x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+4x_3(x_1-x_2)$,
г) $10x_1^2+13x_2^2+13x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

15. а) $5x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

б) $8x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$,
в) $-3x_1^2-4x_2^2-5x_3^2-4x_2(x_1-x_3)$,
г) $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

16. а) $-5x_1^2-x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,
б) $x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$, в)
$5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1(x_2+x_3)$,
г) $14x_1^2+14x_2^2+17x_3^2+8x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$.

17. а) $2x_1^2+x_2^2+17x_3^2-2x_1x_2-10x_1x_3+2x_2x_3$,
б) $x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$, в)
$6x_1^2+5x_2^2+4x_3^2-4x_2(x_1+x_3)$,
г) $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$.

18. а) $x_1^2+2x_2^2+17x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-10x_2x_3$,
б) $4x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$, в) $4x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-4x_3(x_1+x_2)$,
г) $14x_1^2+17x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

19. а) $17x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-10x_1x_3-2x_2x_3$,
б) $x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$, в)
$5x_1^2+4x_2^2+6x_3^2-4x_1(x_2+x_3)$,
г) $14x_1^2+14x_2^2+17x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$.

20. а) $2x_1^2+17x_2^2+x_3^2-10x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$,
б) $4x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$,
в) $-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1(x_2+x_3)$
,г) $14x_1^2+14x_2^2+17x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$

21. а) $-2x_1^2-x_2^2-17x_3^2+2x_1x_2+10x_1x_3-2x_2x_3$,
б) $x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$, в)

$7x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-8x_2\left(x_1-x_3\right)$,

г) $14x_1^2+17x_2^2+14x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-4x_2x_3$.

22. а) $5x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-6x_1x_2-8x_1x_3+4x_2x_3$,

б) $x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$, в)

$5x_1^2+7x_2^2+3x_3^2-8x_1\left(x_2-x_3\right)$,

г) $14x_1^2+17x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$.

23. а) $2x_1^2+5x_2^2+4x_3^2-6x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$,

б) $x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$, в)

$3x_1^2+5x_2^2+7x_3^2+8x_2\left(x_1-x_3\right)$,

г) $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

24. а) $4x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-6x_2x_3$,

б) $x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$,

в) $7x_1^2+3x_2^2+5x_3^2-8x_3\left(x_1-x_2\right)$,

г) $25x_1^2+19x_2^2+19x_3^2-8x_1x_2-8x_1x_3-16x_2x_3$.

25. а) $5x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$,

б) $2x_1x_2+x_1x_3+2x_2x_3$,

в) $-7x_1^2-5x_2^2-3x_3^2+8x_2\left(x_1-x_3\right)$,

г) $19x_1^2+25x_2^2+19x_3^2-8x_1x_2-16x_1x_3-8x_2x_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. СПб: Лань, 2004, 416 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб: Лань, 2008, 432 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М: Физматлит, 2010, 560 с.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Физматлит, 2005, 280 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.3, ч.1. М: Мир, 1968, 120 с.
6. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. Лань, 2007, 288 с.
7. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М: Наука, 1978, 384 с.

Подписано к печати 02.03.12. Формат $60\times84\ ^1/_8$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать цифровая. Печ. л. 1,80.
Тираж 150 экз. Заказ 5377.

Отпечатано в Отделе оперативной полиграфии химического факультета СПбГУ
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26
Тел.: (812) 428-4043, 428-6919