УШАКОВ, В.Г.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 514

УШАКОВ Виталий Геннадиевич

РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ И ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ ДЕФЕКТНОСТИ

01.01.04 - геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург - 1993

Работа выполнена в Центральном конструкторском бюро "Протон", г. Харьков.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор Ю. Д. Бураго
кандидат физико-математических наук, доцент И. Х. Сабитов

Ведущая организация - Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

Защита диссертации состоится "26" 05 1993 г. в 17 час. на заседании Специализированного совета К 063.57.45 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в С.-Петербургском государственном университете (адрес совета: 198904, С.-Петербург, Ст. Петергоф, Библиотечная пл., 2, математико-механический факультет СПбУ). Защита будет проходить по адресу: 191011, С.-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, 3-й этаж, зал 311 (помещение ПОМИ).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им. А. М. Горького С.-Петербургского государственного университета, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "___" ______________ 1993 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета,
кандидат физико-маткматических наук Р. А. Шмидт

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение поверхностей постоянной дефектности имеет давнюю традицию. Ещё в 1876 году Биц установил, что для существования изгибаний гиперповерхности необходимо, чтобы гиперповерхность имела достаточно большую дефектность. Именно изучение проблем изгибания стимулировало дальнейшие исследования Картана, Яненко. В их работах дано достаточно полное описание метрик и поверхностей постоянной дефектности.

В 1952 году появилась работа Черна и Кёйпера, очень быстро ставшая классической: каждый из авторов, приближающийся к этой области исследования, непременно ссылался (и ссылается) на неё. В этой работе впервые появился "точечный подход" (т.е. были введены пространства дефектности метрики и поверхности, которые являются линейными подпространствами касательных пространств метрики или поверхности в каждой точке; термин "постоянная дефектность" означает постоянство размерности пространств дефектности), которому мы следуем в диссертации (правда, в работах Яненко содержалось практически то же самое определение, но вместо наглядных пространств дефектности он использовал более формальный аппарат внешних форм). Далее следует упомянуть работы Черна - Лашофа, Акивиса, Рыжкова, Савельева, Сэкстедера, О'Нейла - Штайла, Акивиса - Рыжкова, Хартмана, Штайла, Розенталя, Шефеля, Мальца, Феруса,. Эйба, Мура, Александера - Мальца, Борисенко, Родригиса. Проблема постоянной дефектности распространялась на пространства постоянной кривизны, римановы пространства, комплексные пространства. Оказалось, что эти поверхности естественным образом возникают при исследовании многомерных поверхностей с одинаковым грассмановым образом, а также при изучении других геометрических проблем.

Исследования, вылившиеся в настоящую работу, начались с поиска ответа на вопрос о возможности погружения римановых многообразий постоянной дефектности (РМПД) в классе поверхностей постоянной дефектности (ППД) (начиная с этого места, мы будем активно использовать сокращения; их перечень приведен в конце автореферата перед списком работ автора). Этот вопрос поставил автору А. А. Борисенко.

Несмотря на активное использование подвижного репера и аппарата внешних форм, во всей диссертации удаётся сохранить достаточно низкие требования гладкости, поскольку все интересующие нас ВДС решаются в явном виде без критерия инволютивности Картана, а значит, и без теоремы Коши - Ковалевской.

Цель работы состоит в

1) выписывании ВДС на многомерные ППД, РМПД;
2) систематическом изучении l-мерных поверхностей ПД $l-1$;
3) выделении и полном описании 3-мерных метрик ПД 1 из специального класса Q ;
4) получении критерия изометрического погружения метрик класса Q в классе ППД евклидова пространства;
5) описании погружаемых метрик класса Q ;
6) изучении локальных и глобальных ППД, несущих метрики класса Q ;
7) выяснении роли ППД, несущих метрики класса Q , в проблеме изгибания гиперповерхностей.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми. Впервые: выписана ВДС на многомерные ППД, РМПД;

систематически изучены l-мерные поверхности ПД $l-1$; дано уточнение теоремы об аффинно устойчивых погружениях метрик постоянной дефектности; введена взаимная система координат; выделены и полностью описаны 3-мерные метрики ПД 1 из специального класса Q ; получен критерий изометрического погружения метрик класса Q в классе ППД евклидова пространства; описаны погружаемые метрики класса Q ; изучены локальные и глобальные ППД, несущие метрики класса Q ; указана роль этих поверхностей в проблеме изгибания гиперповерхностей.

Методы исследований - метод подвижного репера, метод внешних форм Картана, введение взаимной системы координат, методы римановой геометрии и линейной алгебры.

Практическое и теоретическое значение. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в проблеме изгибания поверхностей, в проблеме единственности восстановления поверхности по ее грассманову образу. Материалы работы могут быть также использованы при чтении спецкурсов студентам, специализирующимся по специальности "геометрия".

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Харьковском городском геометрическом семинаре (рук. - акад. А.В.Погорелов), на семинаре кафедры геометрии ХГУ (рук. - проф. Ю.А.Аминов), на семинаре МГУ по геометрии "в целом" (рук. - проф. Э.Г.Позняк, доц. И.Х.Сабитов, доц. Э.Р.Розендорн), на семинаре ЛОМИ АН СССР (рук. - проф. Ю.Д.Бураго, проф. В.А.Залгаллер), а также на Всесоюзной конференции по геометрии "в целом" (г.Новосибирск, 1986 г.), на IX Всесоюзной конференции по геометрии (г.Кишинев, 1988 г.), на Всесоюзной конференции по геометрии и анализу (г.Новосибирск, 1989 г.), на Международной конференции

"Лобачевский и современная геометрия" (г. Казань, 1992 г.), на конференции по геометрии "в целом" (г. С.-Петербург, 1992 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 2 работы, 2 тезисов (список привелен в конце автореферата); тезисы, написанные совместно с Л.Н. Сергиенко, содержат равный вклад авторов.

Объём и структура работы. Работа состоит из введения и шести параграфов. Объём работы - 118 страниц машинописного текста, список литературы содержит 56 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В первом параграфе дано систематическое описание поверхностей постоянной дефектности (ППД). Основной метод исследования - метод подвижного репера. Даётся два эквивалентных определения ППД:

Определение 1. Поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ называется ППД k, если в каждой точке $Q \in F^l$ размерность пространства дефектности $T_0^{ext}(Q)$ равна k.

Пространством дефектности $T_0^{ext}(Q)$ называется нуль-пространство векторнозначной второй фундаментальной формы A поверхности $F^l \subset E^{l+p}$:

$$T_0^{ext}(Q) = \{x \in T_Q F^l \mid A(x,\cdot) = 0\};$$

Определение 2. Поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ называется ППД k, если она является k-линейчатой поверхностью с касательной плоскостью, стационарной вдоль образующих.

ППД являются многомерным обобщением развёртывающихся поверхностей $F^2 \subset E^3$.

Заметим, что разные авторы использовали разные термины для обозначения этого же класса поверхностей :

- поверхности постоянного ранга (Яненко, Акивис);
- тангенциально вырожденные поверхности (Рыжков, Акивис);
- k-развёртывающиеся поверхности (Топоногов, Шефель);
- сильно k-параболические поверхности (Борисенко);
- поверхнс ти постоянной дефектности (все англоязычные авторы, начиная с Черна и Кййпера).

В п. 1.9 первого параграфа выводится внешняя дифференциальная система (ВДС) на ППД, являющаяся одним из основных инструментов исследования в диссертации.

В п. п. 1.10, 1.11 изучены поверхности размерности l ПД $l-1$.

Теорема 2. *Поверхность размерности l ПД $l-1$ в окрестности точки общего положения является торсом или цилиндроконусом над торсом.*

Теорема 3. *Поверхность с точечной коразмерностью 1 и глобальной коразмерностью > 1 является поверхностью размерности l ПД $l-1$.*

Теорема 4. *Поверхность с плоской метрикой и точечной коразмерностью 1 является поверхностью размерности l ПД $l-1$, и наоборот.*

Теорема 5. *Поверхность размерности l ПД $l-1$ является l-мерной $(l-1)$-линейчатой поверхностью с плоской метрикой, и наоборот.*

Поверхности размерности l ПД $l-1$ естественно возникают в проблеме аффинно-устойчивых погружений римановых многообразий постоянной дефектности (РМПД), что подробно обсуждается в параграфе 3 диссертации.

Во втором параграфе изучаются РМПД, для которых также выписана ВДС.

Римановым многообразием постоянной дефектности k называется многообразие, в каждой точке Q которого размерность пространства дефектности (внутреннего) $T_0^{int}(Q)$ равна k.

Пространством дефектности $T_0^{int}(Q)$ в точке $Q \in M^l$ называется множество векторов из касательного пространства $T_Q M^l$, обращающих в нуль тензор кривизны R:

$$T_0^{int}(Q) = \left\{ x \in T_Q M^l \mid R(x, \cdot) = 0 \right\}$$

Третий параграф посвящен анализу связи между РМПД и ППД. Легко видеть, что ППД k несёт метрику ПД k (уравнение Гаусса). Довольно естественно возникает обратная задача: любое ли РМПД k допускает изометрическое вложение в евклидово пространство в качестве ППД k (подробное исследование этого вопроса проводится в параграфе 5 диссертации). На естественность такой постановки вопроса указывает схема Шефеля, устанавливающая удобное соответствие между некоторыми классами метрик и поверхностей. Обсуждению схемы Шефеля и её применимости к проблеме постоянной дефектности посвящены пункты 3.2, 3.3. Одним из основных элементов конструкции Шефеля является понятие аффинно-устойчивого погружения.

Пусть задан класс метрик R^l. Поверхность F^l называется аффинно-устойчивым погружением метрики из R^l, если

- она несёт метрику из класса R^l;
- для любого аффинного преобразования g объемлющего евклидового пространства поверхность $g(F^l)$ несёт метрику из класса R^l.

В пункте 3.4 параграфа 3 обсуждаются аффинно-устойчивые погружения РМПД.

Теорема 6. *Аффинно-устойчивым погружением РМПД k является*

а) ППД k, если $k < l$;

б) ППД $(l-1)$ или ППД l, если $k = l$.

Пункт а) теоремы был доказан А.А.Борисенко в 1982 году. В диссертации приведено другое доказательство, опирающееся на специальную алгебраическую лемму.

<u>В четвёртом параграфе</u> вводится взаимная система координат, которая позволяет переходить от заданного ортонормированного (неголономного) репера на римановом многообразии к голономному реперу, порождаемому некоторой системой координат. Взаимная система координат однозначно определяется неголономным репером и выбором фиксированной точки P_0 - начала системы координат. Все дальнейшие рассмотрения ведутся во взаимной системе координат.

<u>В пятом параграфе</u> выделяется специальный класс Q 3-мерных РМПД 1.

Классом Q назван набор всех 3-мерных РМПД 1, для которых

$$\Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^1_{22} = 0 \ , \ \Gamma^2_{31} \neq 0 \ , \ R \neq 0 \ ,$$

где Γ - символы Кристоффеля неголомного репера: $d_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ji} \cdot e_k$.

Теорема 7. *Для задания метрики класса Q функции*

$$\Gamma^1_{21}(u^1, u^2, 0) = \varphi(u^1, u^2) \ , \ \Gamma^2_{31}(u^1, 0, 0) = \psi(u^1) \neq 0$$

выбираются произвольно, а оставшиеся восстанавливаются по формулам

$$\Gamma^1_{21}(u^1, u^2, u^3) = \varphi(u^1, u^2),$$

$$\Gamma^2_{31}(u^1, u^2, u^3) = \psi(u^1) \exp(-\int_0^{u^2} \varphi(u^1, t)dt) \ ,$$

$$R(u^1, u^2, u^3) = -\varphi^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial u^2}.$$

Теорема 8. *Коэффициенты метрического тензора метрики класса Q, определяемой функциями $\varphi(u^1, u^2)$, $\psi(u^1)$, задаются формулами*

$$g_{11} = \exp\Big(2\int_0^{u^2}\varphi(u^1, t)dt\Big) + [(u^2)^2 + (u^3)^2]\psi^2(u^1),$$

$$g_{12} = u^3\psi(u^1), \qquad g_{13} = -u^2\psi(u^1),$$

$$g_{22} = g_{33} = 1, \qquad g_{23} = 0.$$

Теорема 9. *Для существования изометрического погружения РМПД класса Q в классе ППД* **произвольного** *евклидова пространства, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

а) $R < 0$;

б) $\dfrac{\partial^2\varphi}{(\partial u^2)^2} + 6\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^2} + 4\varphi^3 = 0$

или (УРАВНЕНИЕ ПОГРУЖАЕМОСТИ)

$$\frac{\partial^2 R}{(\partial u^2)^2} - \frac{5}{4R}\left[\frac{\partial R}{\partial u^2}\right]^2 - 4R^2 = 0.$$

Теорема 10. *Если метрика класса Q погружаема в некоторое E^n, то она погружаема в E^4.*

Теорема 11. *Для задания погружаемой метрики класса Q достаточно выбрать три функции одной переменной*

$$A(u^1),\ B(u^1) > 0,\ \psi(u^1) \neq 0.$$

Оставшиеся функции восстанавливаются по формулам

$$\Gamma^1_{21}(u^1, u^2, u^3) = \varphi(u^1, u^2) = \frac{A + u^2}{B + (A + u^2)^2},$$

$$\Gamma^2_{31}(u^1, u^2, u^3) = \frac{\psi\sqrt{B + A^2}}{\sqrt{B + (A + u^2)^2}},$$

$$R(u^1, u^2, u^3) = \frac{-B}{[B + (A + u^2)^2]^2} .$$

Сами функции $A(u^1)$ *и* $B(u^1)$ *восстанавливаются по* $R = R(u^1, 0, 0)$ *и* $R' = \frac{\partial R}{\partial u^2}(u^1, 0, 0)$ *так:*

$$A = \frac{4RR'}{16R^3 - (R')^2} , \quad B = \frac{-256 \cdot R^5}{[16R^3 - (R')^2]^2} .$$

В пятом параграфе выписан метрический тензор непогружаемой метрики класса Q, обладающей следующим любопытным свойством: секционные кривизны по площадкам, содержащим вектор дефектности, обращаются в нуль, а по площадке, ортгональной этому вектору, равны -1 в каждой точке.

В шестом параграфе изучаются локальные и глобальные ППД, несущие метрики класса Q. Указан способ построения локальных поверхностей по заданной метрике в E^4 (теорема 12), в E^n (теорема 13), определён произвол задания таких поверхностей. Доказано, что существует единственная глобальная поверхность в E^4, реализующая заданную метрику класса Q (теорема 15). В последнем пункте шестого параграфа анализируется проблема изгибания гиперповерхностей и роль ППД класса Q в решении этой проблемы.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ВДС - внешняя дифференциальная система

ПД - постоянная дефектность

ППД - поверхность постоянной дефектности

РМПД - риманово многообразие постоянной дефектности

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ушаков В.Г. О базе сильно параболического риманова многообразия // Укр. геометр. сб. - 1991. - Вып. 34. - С. 112 - 121.

2. Ушаков В.Г. Характеристические свойства римановых многообразий с нулевыми секционными кривизнами вдоль геодезического слоения // Междунар. научн. конф. "Лобачевский и современная геометрия". Часть I. - Казань, 1992. - С. 103 - 104.

3. Сергиенко Л.Н., Ушаков В.Г. Линейные неголономные многообразия постоянной дефектности в E^n // Междунар. научн. конф. "Лобачевский и современная геометрия". Часть I. - Казань, 1992. - С. 90 - 91.

4. Ушаков В.Г. Римановы многообразия и поверхности постоянной дефектности / Харьков, 1992. - 116 с. - Деп. в ВИНИТИ 22.12.92, №: 3607 - В92.

Подп. к печ. 26.01.93 Формат 60x84[1]/16. Бумага тип. Печать офсетная

Усл. печ. л. 1,0 Уч.-изд. л. 1,0 Тираж 100 экз. Зак. № 249 Бесплатно

Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие

310093, Харьков, ул. Свердлова, 115.