

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.3
MSC 70F05

Определение предварительной орбиты геометрическим методом Коши — Курышева — Перова

В. Б. Кузнецов

Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

Для цитирования: *Кузнецов В. Б.* Определение предварительной орбиты геометрическим методом Коши — Курышева — Перова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 716–727.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.417>

Определение предварительных орбит небесных тел представляет интерес для наблюдательной астрономии с точки зрения открытия новых тел или идентификации с уже известными. Для решения этой задачи требуются методики, не ограниченные как значениями эксцентриситета орбиты, так и интервалами времени между наблюдениями. В данной работе рассмотрен геометрический метод Коши — Курышева — Перова для определения предварительной орбиты. Показано, как в рамках задачи двух тел, исходя только из геометрических построений, по пяти угловым наблюдениям определить орбиту, не лежащую в плоскости движения наблюдателя. Данный метод позволяет свести задачу определения предварительной орбиты к алгебраической системе уравнений относительно двух безразмерных переменных с конечным числом решений. Метод подходит для определения как эллиптических, так и гиперболических орбит. При этом он не имеет ограничений на длину орбитальной дуги наблюдаемого тела и не ограничен числом полных оборотов вокруг притягивающего центра между наблюдениями. Все возможные комбинации положений тела на орбите разделяются на 64 варианта и описываются соответствующими системами уравнений. В данной статье представлен алгоритм поиска решений задачи без наличия предварительной информации об орбите. Решения ищутся в ограниченной области, в которой производится триангуляция с ранжированием треугольников на соответствие условиям поиска, что позволяет исключить рассмотрение большинства из них еще на начальном этапе. Решения системы находятся методом Нелдера — Мида через поиск минимумов целевой функции. Полученные орбиты сравниваются посредством представления наблюдений,

и из них выбирается наилучшая. Приведен пример определения орбиты кометы Борисова 2I/Borisov.

Ключевые слова: определение предварительной орбиты, геометрический метод Коши — Курышева — Перова, метод Нелдера — Мида, алгебраические уравнения, комета Борисова.

1. Введение. История геометрического метода определения предварительной орбиты по угловым наблюдениям начинается в XIX в. [1]. В 1847 г. Коши предлагает определять предварительную орбиту через пять точек пересечения пяти прямых плоскостью, проходящей через центр Солнца [2]. Поскольку по пяти точкам можно определить коническое сечение, то следует найти такое положение плоскости орбиты, чтобы фокус коники совпал с Солнцем. На сегодняшний день не известно более ранних упоминаний о геометрическом методе, хотя они могли бы появляться начиная с работ Ньютона. В начале XX в. к этой задаче обратился Харцер, но он так и не получил какого-либо приемлемого решения [3]. По мнению Вильева, на 1917 г. проблема еще ждала исследователей [4]. Современную историю метода следует отсчитывать от 1982 г., когда появилась работа Курышева и Перова [5], в которой была построена система уравнений и предложен итерационный процесс для ее решения. Автор применил данный метод для определения предварительных орбит комет и астероидов [1]. Целью настоящей работы является построение эффективного алгоритма для численного решения системы уравнений с нахождением всех возможных орбит. В качестве примера рассматривается определение орбиты межзвездной кометы 2I/Borisov.

2. Построение системы уравнений. Обозначим через \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) радиус-векторы искомой орбиты в соответствующие моменты времени. Тогда уравнения для гелиоцентрических радиус-векторов будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_i \rho_i - \mathbf{R}_i, \quad (1)$$

где \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) — единичные векторы наблюдаемого направления на объект, \mathbf{R}_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) — векторы положения Солнца относительно топоцентра. Для построения уравнений, описывающих искомую орбиту, обратимся к формуле определения параметра орбиты по трем радиус-векторам [6]. Если известны три вектора положения объекта, то тогда мы можем через них выразить параметр искомой орбиты p [7]. Выбрав тройки векторов $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$, $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ и $(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5)$, мы получим три выражения для p :

$$\begin{aligned} p_{123} &= \frac{\pm r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| \mp r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| \pm r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{\pm |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| \mp |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| \pm |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \geq 0, \\ p_{234} &= \frac{\pm r_2 |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4| \mp r_3 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_4| \pm r_4 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|}{\pm |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4| \mp |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_4| \pm |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|} \geq 0, \\ p_{345} &= \frac{\pm r_3 |\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_5| \mp r_4 |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_5| \pm r_5 |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4|}{\pm |\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_5| \mp |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_5| \pm |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4|} \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_i = |\mathbf{r}_i|$ ($i = 1, 2, \dots, 5$), верхние и нижние знаки \mp и \pm в (2) соответствуют положительным и отрицательным знакам синуса угла между векторами в последующем векторном произведении. Как легко заметить, для уравнений (2) числитель и

знаменатель не могут иметь разные знаки. Если приравнять первое и второе уравнения (2), т. е. $p_{123} = p_{234}$, а затем второе и третье $p_{234} = p_{345}$, то мы получим два уравнения определения орбиты в некомпланарном случае. Таким образом, задача сводится к решению системы двух алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных ρ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$). Однако топоцентрические расстояния связаны между собой тремя условиями из смешанных произведений векторов (1). Это позволяет выразить через два из них три остальных и получить алгебраическую систему относительно двух переменных, например ρ_1 и ρ_5 :

$$\begin{aligned} f_1 &= (\pm r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| \mp r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| \pm r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|) (\pm |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4| \mp |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_4| \pm |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|) - \\ &- (\pm r_2 |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4| \mp r_3 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_4| \pm r_4 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|) (\pm |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| \mp |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| \pm |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|) = 0, \\ f_2 &= (\pm r_2 |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4| \mp r_3 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_4| \pm r_4 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|) (\pm |\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_5| \mp |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_5| \pm |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4|) - \\ &- (\pm r_3 |\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_5| \mp r_4 |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_5| \pm r_5 |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4|) (\pm |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4| \mp |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_4| \pm |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом, ввиду нелинейности системы (3), вероятно появление нескольких решений. Система (3) не является единственно возможной для геометрического метода [1], но одной из самых простых для вывода уравнений.

Уравнения (3) удовлетворяют как эллиптическому, так и гиперболическому типам движения. При этом различным комбинациям верхних и нижних знаков для семи углов между векторами соответствуют 64 набора уравнений для эллипса и 32 для гиперболы. Подробное описание комбинаций углов для троек векторов представлено в [6]. Причем в указанные 64 варианта уравнений для эллиптического движения входят все случаи с углами, отличающимися на значения, кратные 2π от указанных. Таким образом, для поиска решения на дуге с любым количеством оборотов вокруг притягивающего центра достаточно рассмотреть 64 системы уравнений вида (3).

3. Переход к новым переменным. Топоцентрические расстояния могут принимать только положительные значения. Соответственно, область искомых решений представляет собой открытый квадрант, который нужно ограничить максимальными значениями. Для этого в работе [6] предлагалось перейти к нормированным безразмерным переменным. Рассмотрим единичный вектор $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$, представляющий собой вектор нормали к плоскости искомой орбиты. Для удобства связи \mathbf{N} с элементами орбиты выберем эклиптическую систему координат. Выразим ρ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) через \mathbf{N} . Если уравнения (1) скалярно умножить на \mathbf{N} , то получим выражения для ρ_i [8]:

$$\rho_i = \frac{\mathbf{N}\mathbf{r}_i}{\mathbf{N}\mathbf{e}_i}. \quad (4)$$

Условие единичности \mathbf{N} можно определить так:

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = 1. \quad (5)$$

Теперь мы можем подставить (4) во все уравнения для некомпланарных орбит. Получаем (3) с ограничением (5) и безразмерными неизвестными N_x, N_y, N_z . Область решения ограничивается поверхностью единичной сферы. Точки пересечения f_1 и f_2 являются возможными направлениями \mathbf{N} . Так как кривые (3) симметричны относительно плоскости эклиптики, то можно выбрать одну из полусфер с прямым или обратным орбитальным движением. Тогда условие (5) можно записать как

$$N_z^2 = \sqrt{1 - N_x^2 - N_y^2} \quad (6)$$

и отобразить область решения единичной сферы на единичную область круга эллиптики. Таким образом, мы вернулись к двумерному случаю с неизвестными N_x и N_y . Дополнительным достоинством новых переменных является то, что они напрямую не связаны с конкретными наблюдениями и их числом, а это упрощает работу по созданию целевой функции. Из единичного круга следует исключить области с отрицательными топоцентрическими расстояниями и параметром орбиты p . Введение таких ограничений позволяет сузить поиск решения со всего единичного круга до его отдельных областей.

Мы свели задачу к поиску решения в единичном круге. Однако круг не очень удобен для разбиения и плотного покрытия простыми геометрическими фигурами, например треугольниками. Для триангуляции больше подходит квадрат, описывающий данный круг, т. е. с полустороной единичной длины. Отображение круга единичного радиуса на соответствующий квадрат осуществляется по следующим формулам [9]:

$$N_x = N_{xs} \sqrt{1 - 0.5N_{ys}^2}, \quad N_y = N_{ys} \sqrt{1 - 0.5N_{xs}^2}, \quad (7)$$

где N_{xs} и N_{ys} — координаты, соответствующие квадрату. Далее индекс s везде указывает на эти координаты.

4. Порядок положений объекта на орбите. При геометрическом решении, как правило, не учитывается порядок точек пересечения лучей зрения (наблюдений) с орбитой. Отсюда возможно появление решений, для которых порядок точек орбиты не соответствует хронологическому. Для их контроля на орбитальных дугах $\Delta\theta_{51} < 2\pi$ при вычислениях с 16 значащими цифрами можно воспользоваться следующими условиями:

$$0.999999 \leq \left| \frac{\Delta\theta_{51}}{\Delta\theta_{21} + \Delta\theta_{32} + \Delta\theta_{43} + \Delta\theta_{54}} \right| \leq 1.000001, \quad (8)$$

где $\Delta\theta_{ij}$ — величины углов между \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j , а относительная погрешность 10^{-7} не превосходит при хронологическом порядке точек и заведомо превышает при его нарушении. Последнее условие подразумевает отказ от использования очень близких наблюдений, соответствующих таким же малым дугам.

5. Особые точки в области поиска. На полученном квадрате существуют особые точки, в которых все ρ_i из (4) становятся неопределенными. В зависимости от того, обращается ли числитель или знаменатель в ноль, значение соответствующего топоцентрического расстояния может стать либо бесконечно малым, либо бесконечно большим. К тому же положительность расстояний требует одного знака для числителя и знаменателя. Десять уравнений, полученных из числителей и знаменателей (4), задают сетку из десяти кривых, попарное пересечение которых определяет границы областей, где может быть найдено искомое решение. Знание координат точек пересечения кривых, определяемых числителями и знаменателями (4), позволяет определить наименьший масштаб триангуляции. Уравнения в «квадратных» координатах будут иметь следующий вид ($i, j = 1, 2, \dots, 5$):

$$\begin{aligned} X_i N_{xs} \sqrt{1 - 0.5N_{ys}^2} + Y_i N_{ys} \sqrt{1 - 0.5N_{xs}^2} + Z_i N_{ys} \sqrt{1 - N_{xs}^2 - N_{ys}^2 + N_{xs}^2 N_{ys}^2} &= 0, \\ e_{jx} N_{xs} \sqrt{1 - 0.5N_{ys}^2} + e_{jy} N_{ys} \sqrt{1 - 0.5N_{xs}^2} + e_{jz} N_{ys} \sqrt{1 - N_{xs}^2 - N_{ys}^2 + N_{xs}^2 N_{ys}^2} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ — эллиптические векторы положения Солнца относительно топцентра, $\mathbf{e}_j = (e_{jx}, e_{jy}, e_{jz})$ — единичные эллиптические векторы наблюдаемого направления на объект.

Система (9) нелинейная и для нахождения ее корней удобно применить метод продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией [10]. Задачу можно свести к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений в виде $(i, j = 1, 2, \dots, 5)$

$$\begin{aligned} \frac{dN_{xs}}{d\mu} &= (\mathbf{R}_i \times \mathbf{e}_j)_x \sqrt{1 - 0.5N_{xs}^2} + \frac{0.5(\mathbf{R}_i \times \mathbf{e}_j)_y N_{xs} N_{ys}}{\sqrt{1 - 0.5N_{ys}^2}}, \\ \frac{dN_{ys}}{d\mu} &= (\mathbf{R}_i \times \mathbf{e}_j)_y \sqrt{1 - 0.5N_{ys}^2} + \frac{0.5(\mathbf{R}_i \times \mathbf{e}_j)_x N_{xs} N_{ys}}{\sqrt{1 - 0.5N_{xs}^2}}, \\ \frac{d\nu}{d\mu} &= \frac{(1 - 0.5(N_{xs}^2 + N_{ys}^2)) [(\mathbf{R}_i \times \mathbf{e}_j)\mathbf{N}]}{\sqrt{(1 - 0.5N_{xs}^2)(1 - 0.5N_{ys}^2)}(N_{xs}^2 - 1)(N_{ys}^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где в третьем уравнении в квадратных скобках представлено смешанное произведение векторов в эллиптической системе координат, а в первых двух уравнениях нижние индексы у векторного произведения обозначают соответствующие компоненты. Следует интегрировать систему (10) в направлении роста параметра μ , пока не будет достигнуто значение $\nu = 0$. Решение системы (10) дает нам 25 точек, минимальные и максимальные координаты которых позволят ограничить на нашем квадрате прямоугольную область с наиболее тонкой структурой области решений и, возможно, более плотным расположением искомых решений системы (3).

6. Триангуляция области поиска решений. Решения системы (3) предлагается искать в виде минимума целевой функции

$$f_{goal}(\mathbf{N}) = f_1^2(\mathbf{N}) + f_2^2(\mathbf{N}). \quad (11)$$

Причем поиск основывается на использовании триангуляции, т. е. на разбиении области возможных решений на непересекающиеся треугольники [11]. Эти треугольники необходимы как начальное приближение для переменных симплексов — подвижных треугольников, по которым производится поиск минимума целевой функции методом Нелдера — Мида [12, 13].

Вся максимально возможная область решений представляет собой квадрат с полусторонней единичной длины. В качестве базовой триангуляции разобьем этот квадрат на 1024 малых квадратов, каждый с длиной стороны, равной 0.0625. Затем эти «малые квадраты» разобьем на 4 равных треугольника с общей вершиной в центре. Этими равнобедренными треугольниками с длиной основания 0.0625 мы заполняем всю область, для которой хотя бы одна из вершин треугольника удовлетворяет условию положительности пяти уравнений (4). Исключением является «область особых точек» (описанная в предыдущем разделе). Она увеличивается во все стороны, до совпадения с границами ближайшего «малого квадрата» и получает вид прямоугольника с длиной сторон, кратной 0.0625. Далее мы разбиваем эту область на квадраты с длиной сторон 0.03125. Затем мы разбиваем полученные «малые квадраты» на треугольники с общей вершиной в центре. Для них также выполняется проверка того, что хотя бы для одной из вершин все $\rho_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) и (если необходимо) условие (8).

Таким образом, мы заполняем всю область возможных решений треугольниками двух видов. Они упорядочены в последовательность по мере построчного заполнения с левого нижнего угла «большого квадрата» до правого верхнего угла. За «большими треугольниками» в последовательности по тому же правилу идут «малые».

7. Определение рангов треугольников. Полученное множество из нескольких сотен треугольников с точки зрения перспективы поиска решений можно разделить на несколько классов. В работе Самотохина и Хуторовского [11] вводится понятие ранга треугольника. Авторы предлагают произвести линейную интерполяцию возможного решения по значениям функций f_1 и f_2 в вершинах треугольника, обозначим их как $f_{1(i)}$ и $f_{2(i)}$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда координаты точки линейной интерполяции $(N_{xs(0)}, N_{ys(0)})$ можно выразить так:

$$\begin{aligned} N_{xs(0)} &= N_{xs(1)} + \xi (N_{xs(2)} - N_{xs(1)}) + \zeta (N_{xs(3)} - N_{xs(1)}), \\ N_{ys(0)} &= N_{ys(1)} + \xi (N_{ys(2)} - N_{ys(1)}) + \zeta (N_{ys(3)} - N_{ys(1)}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $(N_{xs(i)}, N_{ys(i)})$ ($i = 1, 2, 3$) — координаты соответствующих вершин,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{f_{2(1)}f_{1(3)} - f_{1(1)}f_{2(3)}}{f_{1(2)}f_{2(3)} - f_{1(1)}f_{2(3)} - f_{1(2)}f_{2(1)} - f_{1(3)}f_{2(2)} + f_{1(3)}f_{2(1)} + f_{1(1)}f_{2(2)}}, \\ \zeta &= \frac{f_{1(1)}f_{2(2)} - f_{2(1)}f_{1(2)}}{f_{1(2)}f_{2(3)} - f_{1(1)}f_{2(3)} - f_{1(2)}f_{2(1)} - f_{1(3)}f_{2(2)} + f_{1(3)}f_{2(1)} + f_{1(1)}f_{2(2)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Точка $(N_{xs(0)}, N_{ys(0)})$ будет находиться внутри треугольника при выполнении следующих условий:

$$\xi > 0, \quad \zeta > 0, \quad \xi + \zeta < 1. \quad (14)$$

Указанная интерполяция является обобщением метода хорд для решения нелинейного уравнения от одной переменной. При этом необходимо учесть, что подобная линеаризация при выполнении (14) не гарантирует существование реального решения внутри треугольника. Здесь условия (3) соответствуют двум прямым линиям — линиям нулевого уровня, пересекающимся в точке $(N_{xs(0)}, N_{ys(0)})$.

Опишем возможные ранги треугольников: 0 — ни одна из линий нулевого уровня не пересекает ни одной из сторон треугольника (значения f_1 и f_2 для всех вершин имеют один знак); 1 — только одна из линий нулевого уровня имеет пересечения со сторонами треугольника (значения либо f_1 , либо f_2 имеют разные знаки для разных вершин); 2 — обе линии нулевого уровня пересекают стороны треугольника, но точка $(N_{xs(0)}, N_{ys(0)})$ находится вне треугольника (значения f_1 и f_2 имеют разные знаки для разных вершин, но условия (14) не выполняются); 3 — точка $(N_{xs(0)}, N_{ys(0)})$ лежит внутри треугольника, но одна из его сторон не пересекается ни одной из линий нулевого уровня (условия (14) выполняются, но суммы знаков произведений значений f_1 и f_2 для вершин каждой из сторон нигде не равны нулю); 4 — точка $(N_{xs(0)}, N_{ys(0)})$ лежит внутри треугольника, и все три его стороны пересекаются с линиями нулевого уровня (условия (14) выполняются, и есть стороны, для которых суммы знаков произведений значений f_1 и f_2 для их вершин равны нулю).

Подобное ранжирование удобно для уменьшения объема вычислений. При наличии треугольников с рангом 4 и 3 поиск решения следует начать с них. Затем

при отсутствии результата или для проверки его полноты следует перейти к треугольникам с рангом 2. Обычно этого достаточно для нахождения всех приемлемых решений. К треугольникам с рангом 1 следует обращаться только в случае отсутствия решений, для того, чтобы в этом окончательно убедиться.

8. Метод Нелдера — Мида. После того как произведено ранжирование треугольников, можно переходить к поиску решений. Для этого хорошо подходит метод Нелдера — Мида [12]. Этот итерационный метод относится к безградиентным, т. е. не использующим производные. В нем производится только оценка значений целевой функции в вершинах деформируемого на каждой итерации треугольника. Описание алгоритма и текст программы на языке Фортран представлены в [14] и [15].

В качестве нулевого приближения рассматривается равнобедренный треугольник из раздела 6. После оценки целевой функции во всех вершинах симплекса находим точку $\langle 1 \rangle$ с максимальным значением $f_{goal}(N\langle 1 \rangle)$ и точку $\langle 3 \rangle$ с минимальным $f_{goal}(N\langle 3 \rangle)$. Далее по двум оставшимся вершинам $\langle 2 \rangle$ и $\langle 3 \rangle$ строим «центр тяжести» — точку $\langle 0 \rangle$:

$$\mathbf{N}_{\langle 0 \rangle} = \frac{1}{2} (\mathbf{N}_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{N}_{\langle 3 \rangle}). \quad (15)$$

Поиск новой вершины происходит вдоль прямой $\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle$. Сначала производится операция «отражение»: находим отражение точки $\langle 1 \rangle$ относительно точки $\langle 0 \rangle$:

$$\mathbf{N}_{\langle 4 \rangle} = \mathbf{N}_{\langle 0 \rangle} + \alpha (\mathbf{N}_{\langle 0 \rangle} - \mathbf{N}_{\langle 1 \rangle}), \quad (16)$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент отражения.

Если $f(\mathbf{N}_{\langle 4 \rangle}) \leq f(\mathbf{N}_{\langle 3 \rangle})$, то вектор $\mathbf{N}_{\langle 4 \rangle} - \mathbf{N}_{\langle 0 \rangle}$ растягивается в соответствии с соотношением

$$\mathbf{N}_{\langle 5 \rangle} = \mathbf{N}_{\langle 0 \rangle} + \gamma (\mathbf{N}_{\langle 4 \rangle} - \mathbf{N}_{\langle 0 \rangle}), \quad (17)$$

где $\gamma > 1$ — коэффициент растяжения. Если $f(\mathbf{N}_{\langle 5 \rangle}) < f(\mathbf{N}_{\langle 3 \rangle})$, то $\mathbf{N}_{\langle 1 \rangle}$ заменяем на $\mathbf{N}_{\langle 5 \rangle}$, в противном случае $\mathbf{N}_{\langle 1 \rangle}$ заменяем на $\mathbf{N}_{\langle 4 \rangle}$. Затем начинаем следующую итерацию с операции «отражение».

Если $f(\mathbf{N}_{\langle 4 \rangle}) > f(\mathbf{N}_{\langle i \rangle})$ для всех $i \neq 1$, то вектор $\mathbf{N}_{\langle 1 \rangle} - \mathbf{N}_{\langle 0 \rangle}$ сжимается в соответствии с соотношением

$$\mathbf{N}_{\langle 6 \rangle} = \mathbf{N}_{\langle 0 \rangle} + \beta (\mathbf{N}_{\langle 1 \rangle} - \mathbf{N}_{\langle 0 \rangle}), \quad (18)$$

где $0 < \beta < 1$ — коэффициент сжатия. Заменяем $\mathbf{N}_{\langle 1 \rangle}$ на $\mathbf{N}_{\langle 6 \rangle}$, затем начинаем следующую итерацию с операции «отражение».

Если $f(\mathbf{N}_{\langle 4 \rangle}) > f(\mathbf{N}_{\langle i \rangle})$, то для $i = 1, 2$ векторы $\mathbf{N}_{\langle i \rangle} - \mathbf{N}_{\langle 3 \rangle}$ уменьшаются в 2 раза в соответствии с формулой

$$\mathbf{N}_{\langle i \rangle} = \mathbf{N}_{\langle 3 \rangle} + 0.5 (\mathbf{N}_{\langle i \rangle} - \mathbf{N}_{\langle 3 \rangle}), \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Затем начинаем следующую итерацию с операции «отражение».

Критерий окончания итерационного процесса состоит в проверке условия

$$\sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 [f(\mathbf{N}_{\langle i \rangle}) - f(\mathbf{N}_{\langle 0 \rangle})]^2} \leq \epsilon, \quad (20)$$

где ϵ — произвольное малое число.

9. Поиск решений и представление наблюдений. Как было описано в разделе 6, поиск решений осуществляется по всем треугольникам с рангами 4 и 3, если таковые имеются, и с рангом 2, если в этом есть необходимость. Полученные решения необходимо попарно сравнить и отбросить кратные. Условием кратности будет расстояние между точками, меньшее заданного малого числа. Затем мы переводим координаты \mathbf{N} в квадрате в координаты на круге (7) и от эклиптических координат переходим к экваториальным: $\mathbf{N}^{eqv} = \{N_x^{eqv}, N_y^{eqv}, N_z^{eqv}\}$. Подставляя \mathbf{N}^{eqv} в (4), получим значения пяти топоцентрических расстояний ρ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$). После их подстановки в (1) определим векторы гелиоцентрического положения для пяти моментов времени. По векторам для первого и пятого наблюдений можно вычислить орбиты для всех найденных решений. Представление орбитами центральных наблюдений (второго, третьего и четвертого) наилучшим образом (значения «О–С») позволит выбрать искомое решение.

10. Пример. В качестве численного примера рассмотрим определение орбиты кометы 2I/Borisov на короткой дуге (в уравнениях (3) берутся только верхние знаки). Эта комета была открыта 30 августа 2019 г. Геннадием Борисовым в крымской обсерватории MARGO (пос. Научный). Это первая межзвездная комета, движущаяся по гиперболической траектории с эксцентриситетом $e = 3.36$ (см. [16] и табл. 1).

Таблица 1. Наблюдения кометы 2I/Borisov (Minor Planet Center)

t (UT) (год, месяц, день)	α (2000) (час, мин, с)	δ (2000) (град, мин, с)	Обсерватория
2019 09 08.630642	08 44 37.105	+30 57 54.54	Mauna Kea
2019 09 28.234820	09 21 15.673	+24 15 06.14	OGS, Tenerife
2019 10 18.14757	09 57 58.12	+15 25 08.0	Piszkesteto Stn. (Konkoly)
2019 11 07.19364	10 34 06.83	+04 03 59.1	Buchloe
2019 11 27.22933	11 09 09.82	-09 44 49.4	Tacande, La Palma

Здесь: t — всемирное время (год, месяц, день); α — прямое восхождение (часы, минуты, секунды) и δ — склонение кометы (градусы, минуты, секунды), представленные в экваториальной системе координат, отнесенные к экватору на эпоху J2000.0 [16].

На рис. 1 и 2 построены графики уравнений (3) в «квадратных» координатах по осям N_{xs} и N_{ys} . Серым цветом окрашены области с отрицательными топоцентрическими расстояниями и параметром орбиты p , а также там, где условие (8) не выполняется; соответственно, области возможных решений окрашены белым.

На рис. 1 заметны трапециевидная область белого цвета справа и треугольная слева, образованные пересечением кривых (9) и условий (8). На рис. 2 в центре видны еще две треугольные области меньшего размера. Точки касания этих областей между собой соответствуют одновременному равенству нулю числителя и знаменателя (4). Уравнения (4) в этих точках не определены, а соответственно, и система (8), однако в их малых окрестностях функции f_1 и f_2 близки друг к другу. Далее находятся координаты точек пересечения (9) из решения системы (10). Все двадцать пять точек расположены в прямоугольнике $[-0.293, 0.221] \times [-0.894, 0.757]$. Увеличим границы до величин, кратных 0.0625: $[-0.313, 0.250] \times [-0.906, 0.781]$ — получим прямоугольник с соотношением сторон $9 : 28$. Его удобно разбить на 18×56 «малых» квадратов и 4032 «малых» треугольников. Доля «больших» квадратов составит 772, а треугольников — 3088. После проверки на покрытие областей возможных решений останется 1302 треугольника: 1081 «большой» и 221 «малый».

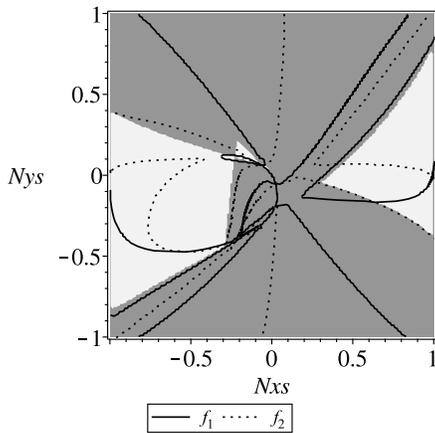


Рис. 1. Графики уравнений (3). Общий вид.

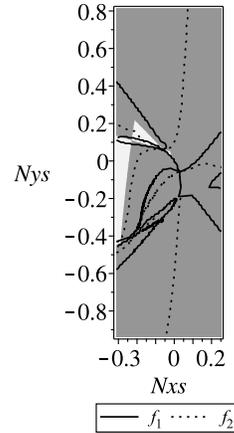


Рис. 2. Окрестности точек пересечения кривых (9).

Ранжирование треугольников дает: 5 — четвертого ранга, 6 — третьего, 37 — второго, 258 — первого и 996 — нулевого. Поиск минимумов целевой функции (11) производился методом Нелдера — Мида при следующих заданных параметрах: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 2$, $\epsilon = 10^{-16}$. Пять треугольников 4-го ранга дали три решения. Шесть треугольников 3-го ранга дали пять решений. Из 37 треугольников 2-го ранга решения были найдены для 31. Реальных решений, конечно же, меньше 39, и необходимо отбросить все дубликаты, оставив в каждом случае лишь одно — с наименьшим значением целевой функции. В качестве минимального расстояния между различными решениями была принята величина 10^{-3} . После его проверки были по-

Таблица 2. Решения для кометы 2I/Borisov

№	N_{xs}	N_{ys}	f_{goal}	№	N_{xs}	N_{ys}	f_{goal}
1	0.39143	0.06996	$2.76 \cdot 10^{-17}$	5	0.99008	0.00045	$6.48 \cdot 10^{-17}$
2	-1.00000	-0.05046	$2.81 \cdot 10^{-12}$	6	-1.00000	-0.04986	$2.81 \cdot 10^{-12}$
3	-0.17961	0.11626	$8.26 \cdot 10^{-18}$	7	0.62035	-0.16045	$1.05 \cdot 10^{-16}$
4	-0.57975	-0.47088	$6.98 \cdot 10^{-17}$	8	1.00000	0.05041	$2.81 \cdot 10^{-12}$

Здесь: № — номер набора, N_{xs} и N_{ys} — «квадратные» координаты точки решения; f_{goal} — значение целевой функции в этой точке.

Таблица 3. Элементы решений орбит кометы 2I/Borisov

Орбита	T_0/M_0 (°)	a (а. е.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
2	2019 11 11.56	-0.711	2.217	90.000	218.008	272.045
3	108.666	0.782	0.253	12.294	50.101	237.209
4	2019 12 08.52	-0.851	3.360	44.044	209.110	308.155
6	2019 11 11.55	-0.714	2.213	90.000	217.963	272.021
8	2019 11 11.56	-0.711	2.217	90.000	218.005	272.043
MPC	2019 12 08.55	-0.851	3.357	44.053	209.127	308.149

Здесь: T_0 — момент прохождения перигелия, M_0 — значение средней аномалии на момент третьего наблюдения. Второе, шестое и восьмое решения представляют собой близкие гиперболические орбиты, перпендикулярные плоскости эклиптики. Третье решение соответствует эллиптической орбите. Элементы четвертого решения хорошо совпадают с элементами эталонной орбиты. Значения «О-С» в табл. 4 подтверждают это.

Таблица 4. Представление наблюдений кометы 2I/Borisov орбитой «4»

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
$\Delta\alpha''$	0.0	-0.3	-1.8	-3.3	0.0
$\Delta\delta''$	0.0	7.9	8.8	5.1	0.0

лучены 8 наборов решений. Минимальные значения целевая функция принимает в решениях, представленных в табл. 2.

После перехода к эклиптическим координатам на круге (7) и от них к экваториальным — из (4) были получены значения топоцентрических расстояний. Первое решение содержало отрицательное значение топоцентрического расстояния ρ_1 , а пятое и седьмое — имели отрицательные значения параметра орбиты p и поэтому были сразу отброшены. Для оставшихся пяти решений элементы орбиты представлены в табл. 3, и в качестве эталона приведены элементы орбиты кометы 2I/Borisov на эпоху 2020 05 31.0, полученные с учетом всех возмущений на сайте MPC [16].

Крайние наблюдения в моменты времени t_1 и t_5 точно представляются всеми орбитами. Однако только четвертое решение хорошо представляет средние наблюдения в моменты времени t_2, t_3 и t_4 , поэтому остальные решения можно отбросить.

Литература

1. Кузнецов В. Б. Применение геометрического метода Курьшева—Перова для определения орбит астероидов и комет. *Труды международной научн. конф. «Околоземная астрономия — 2015»*. п. Терскол, 31 августа — 5 сентября 2015 г., Москва, 51–57 (2015).
2. Cauchy A. *Memoire sur deux formules generals etc.* C. R. 25 (1847).
3. Harzer P. *Über eine geometrische Methode zur Bahnbestimmung der Bahnen von Himmelskörper aus fünf Beobachtungen.* A. N., 184 (1910); Kiel, Publ. der Sternwarte, 12 (1910).
4. Вильев М. А. Исследования по вопросу о числе решений основной задачи теоретической астрономии в связи с общим ее положением в настоящее время. В: *Труды АО ЛГУ, серия математических наук (астрономия)* 5 (27), 81–256 (1938).
5. Курьшев В. И., Перов Н. И. О нетрадиционном способе определения элементов орбит неизвестных космических объектов по данным обработки обзорных фотоснимков на ЭВМ. *Астрономический журнал* 59 (6), 1212–1217 (1982).
6. Кузнецов В. Б. К вопросу об определении предварительной орбиты небесного тела. *Астрономический вестник* 53 (6), 456–466 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0320930X19060057>
7. Stumpff K. *Himmelsmechanik.* Vol. 1. Berlin, Deutscher Verlag (1959).
8. Sarnecki A. J. A projective approach to orbit determination from three sight-lines. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 66 (4), 425–451 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF00049380>
9. Fong C. Analytical methods for squaring the disc. In: *Seoul ICM 2014* (2014).
10. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике.* Москва, Эдиториал УРСС (1999).
11. Самотохин А. С., Хуторовский З. Н. Метод первоначального определения параметров околоземных орбит по трем угловым измерениям. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша* 44 (2014).
12. Nelder J. A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal* 7 (4), 308–313 (1965). <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>
13. Химмельблау Д. *Прикладное нелинейное программирование*, пер. с англ. Москва, Мир (1975).
14. Потемкин В. *Язык программирования Fortran* (2005). Доступно на: <http://fortran-90.pvbk.spb.ru/min.html#FM28> (дата обращения: 10.09.2021).
15. Арушанян О. Б. *Научно-образовательный интернет-ресурс НИВЦ МГУ по численному анализу* (2006). Доступно на: http://num-anal.srcc.msu.ru/lib_na/cat/mn/mnb6r.htm (дата обращения: 10.09.2021).

16. *The International Astronomical Union. Minor Planet Center 2I/Borisov = C/2019 Q4 (Borisov)* (2020). Доступно на: https://minorplanetcenter.net/db_search/show_object?utf8=%E2%9C%93&object_id=2I (дата обращения: 10.09.2021).

Статья поступила в редакцию 24 января 2021 г.;
после доработки 19 апреля 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Кузнецов Владимир Борисович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; vb.kuznetsov@iaaras.ru

The determination of a preliminary orbit by Cauchy — Kuryshev — Perov method

V. B. Kuznetsov

Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences,
10, nab. Kutuzova, St. Petersburg, 191187, Russian Federation

For citation: Kuznetsov V. B. The determination of a preliminary orbit by Cauchy — Kuryshev — Perov method. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 716–727.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.417> (In Russian)

The determination of preliminary orbits of celestial bodies is of interest for observational astronomy, from the point of the view of the discovery of new bodies or identification with already known ones. To solve this problem, the techniques are required that are not limited both by the values of eccentricity of the orbit and by the time intervals between observations. In this paper, we consider the geometric Cauchy — Kuryshev — Perov method for determining the preliminary orbit. It is shown how, within the framework of the two-body problem, proceeding only from geometric constructions, using five angular observations to determine an orbit that does not lie in the plane of the observer's motion. This method allows us to reduce the problem of determining the preliminary orbit to an algebraic system of equations for two dimensionless variables, with a finite number of solutions. The method is suitable for determining both elliptical and hyperbolic orbits. Moreover, it has no restrictions on the length of the orbital arc of the observed body and is unlimited by the number of complete revolutions around the attracting center between observations. All possible combinations of body positions in orbit are divided into 64 variants and represented by the corresponding systems of equations. This article presents an algorithm for finding solutions to the problem without a priori information about the desired orbit. Solutions are sought in a limited area, in which triangulation is performed with ranking triangles for compliance with the search conditions, which makes it possible to exclude consideration of most of them at the initial stage. Solutions of the system are found by the Nelder — Mead method through the search for the minima of the objective function. The obtained orbits are compared, through the presentation of observations, and the best one is selected. An example of determining the orbit of comet Borisov 2I is given.

Keywords: preliminary orbit determination, geometric method of Cauchy — Kuryshev — Perov, method of Nelder — Mead, algebraic equations, 2I/Borisov.

References

1. Kuznetsov V.B. The using of geometrical method of Kuryshev—Perov for determination of asteroid and comet orbits. *Proceedings of the International conference “Near-Earth Astronomy — 2015”*, Terskol, 31 August — 5 September 2015, Moscow, 51–57 (2015). (In Russian)
2. Cauchy A. *Memoire sur deux formules generals etc.* C. R. 25 (1847).
3. Harzer P. *Über eine geometrische Methode zur Bahnbestimmung der Bahnen von Himmelskörper aus fünf Beobachtungen.* A. N., 184 (1910); Kiel, Publ. der Sternwarte, 12 (1910).
4. Vil’ev M. A. Research on the number of solutions to the main problem of theoretical astronomy in connection with its general position at the present time. In: *Trudy AO LGU, serii matematicheskikh nauk (astronomiia)* **5** (27), 81–256 (1938). (In Russian)
5. Kuryshev V. I. Perov N. I. A nontraditional means of determining the orbital elements of unknown cosmic objects from the data of computer processing of survey photographs. *Astronomicheskii Zhurnal* **59** (6), 1212–1217 (1982) (In Russian) [Engl. transl.: *Soviet Astronomy* **26** (6), 727–729 (1982)].
6. Kuznetsov V.B. Revisiting the Determination of a Preliminary orbit for a Celestial Body. *Astronomicheskii vestnik* **53** (6), 456–466 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0320930X19060057> (In Russian) [Engl. transl.: *Solar System Research* **53** (6), 462–472 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0038094619060054>].
7. Stumpff K. *Himmelsmechanik.* Vol. 1. Berlin, Deutscher Verlag (1959).
8. Sarnecki A. J. A projective approach to orbit determination from three sight-lines. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **66** (4), 425–451 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF00049380>
9. Fong C. Analytical methods for squaring the disc. In: *Seoul ICM 2014* (2014).
10. Shalashilin V. I., Kuznetsov E. B. *Metod prodolzheniia resheniia po parametru i nailuchshaia parametrizatsiia v prikladnoi matematike i mekhanike.* Moscow, Editorial URSS Publ. (In Russian) [Engl. transl.: Shalashilin V. I. Kuznetsov E. B. *Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics.* Dordrecht, Springer (2003)].
11. Samotokhin A. S., Khutorovsky Z. N. Method for initial determining Earth satellites orbits on base of three angular observations. *Keldysh Institute Preprints* **44** (2014). (In Russian)
12. Nelder J. A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal* **7** (4), 308–313 (1965). <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>
13. Himmelblau D.M. *Applied Nonlinear Programming.* Texas, McGraw-Hill Book Company (1972). [Russ. ed.: Himmelblau D.M. *Prikladnoe nelineinoe programmirovaniie.* Moscow, Mir Publ. (1975)].
14. Potemkin V. *Programming language Fortran* (2005). Available at: <http://fortran-90.pvbk.spb.ru/min.html#FM28> (accessed: September 10, 2021). (In Russian)
15. Arushanyan O.B. *Scientific and educational Internet resource of the Research Computing Center of Moscow State University on numerical analysis* (2006). Available at: http://numanal.srcc.msu.ru/lib_na/cat/mn/mmb6r.htm (accessed: September 10, 2021). (In Russian)
16. *The International Astronomical Union. Minor Planet Center 2I/Borisov = C/2019 Q4 (Borisov)* (2020). Available at: https://minorplanetcenter.net/db_search/show_object?utf8=%E2%9C%93&object_id=2I (accessed: September 10, 2021). (In Russian)

Received: January 24, 2021

Revised: April 19, 2021

Accepted: June 17, 2021

Author’s information:

Vladimir B. Kuznetsov — vb.kuznetsov@iaaras.ru