Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4
УДК 517.93:531.36
MSC 70H33, 34C25, 70E17

Равновесия и колебания в обратимой механической системе*

В. Н. Тхай

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Российская Федерация, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65

Для цитирования: *Тхай В. Н.* Равновесия и колебания в обратимой механической системе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 709–715. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.416

Исследуются симметричные периодические движения (СПД) обратимых механических систем. Дается решение задачи о двустороннем продолжении невырожденного СПД до глобального семейства таких СПД. Результат применяется к общему случаю задачи Эйлера о тяжелом твердом теле, в котором параметры тела не связаны условиями равенства. Находятся два семейства маятниковых колебаний, соединяющих нижнее и верхнее положения равновесия.

Ключевые слова: обратимая механическая система, равновесие, симметричное периодическое движение, продолжение, глобальное семейство, задача Эйлера, маятниковые колебания.

1. Введение. Теорема Ляпунова о центре находит многочисленные приложения в нелинейном локальном анализе консервативных систем. Встает вопрос о границе существования ляпуновских движений. Проблема решалась в [1]: получены условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Omega \in \mathrm{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Omega$; результаты впоследствии развиты в [2].

В механике используются различные формы уравнений: уравнения Лагранжа, уравнения в квазикоординатах и другие. На систему действуют разные силы [3]. Оказывается, что для систем, обладающих свойством пространственно-временной симметрии, справедлив (см. [4]) аналог теоремы Ляпунова. В обратимой механической системе ляпуновские движения будут симметричными. На них период меняется монотонно; в этом смысле движения являются невырожденными. Интерес представляет нелокальное продолжение любого невырожденного симметричного периодического движения (СПД). В [5] проблема изучалась для механической системы, находящейся под действием позиционных сил — потенциальных и неконсервативно позиционных: в отсутствии вырожденных СПД дано двустороннее продолжение СПД до границ области существования СПД. В частности, проанализированы ляпуновские семейства и дана интерпретация закона Пуанкаре о смене равновесий для многомерных систем. В настоящей работе для общего случая обратимой механической системы кратко излагаются результаты по продолжению невырожденного СПД до глобального семейства невырожденных СПД. Также находятся глобальные

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00146).

семейства маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в котором параметры тела не стеснены условиями равенства.

2. Симметричные решения. Рассматривается гладкая обратимая механическая система

$$\begin{aligned} &\dot u = U(u,v), \quad \dot v = V(u,v), \quad u \in R^l,\ v \in R^n,\ l \geq n, \\ &U(u,-v) = -U(u,v), \quad V(u,-v) = V(u,v). \end{aligned} \tag{1}$$

Фазовый портрет системы (1) симметричен относительно неподвижного множества $M = \{u, v : v = 0\}$; постоянные решения системы (1), принадлежащие M, называются равновесиями обратимой механической системы. На них $v = 0, V(u,0) = 0$. Для простоты излагается случай $l = n$.

Через точки множества M, где вектор $V \neq 0$, проходят симметричные решения. Для таких точек u^0 вычисляется матрица $A = ||\partial v_s(u^0,0)/\partial u_j^0||$. Обратимся к одному из связных множеств Λ_0^s точек u^0, для которых $\det A(u^0,0) \neq 0$. Если $\det A(u^0,0) \neq 0$ в некоторой точке $u^0 \in \Lambda_0^s$, то это неравенство справедливо в окрестности данной точки. Следовательно, точки множества Λ_0^s образуют область. Область Λ_0^s не содержит равновесий.

Вместе с областью Λ_0^s рассматривается область $\Lambda_T^s \in M$, вполне аналогичная по свойствам области Λ_0^s.

Симметричное решение может, в частности, пересекать множество M в двух различных точках. Тогда получается СПД. Необходимые и достаточные условия существования СПД с начальной точкой u^0 и полупериодом T даются равенствами

$$v_s(u^0,\tau) = 0, \quad \tau = 0, T; \quad s = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

которые выполняются и в случае равновесия, но при этом число T не определяется.

Условия (2) сводятся к n равенствам, полученным при $\tau = T$. Они содержат параметр T и приводят к семейству СПД по параметру T. Вводится понятие невырожденного СПД.

Определение. Случай

$$\det A \neq 0, \quad A = \left\| \frac{\partial v_s(u^0,T)}{\partial u_j^0} \right\|,$$

называется *невырожденным* для симметричного периодического движения, а само СПД — *невырожденным.*

Согласно определению, колебания линейного осциллятора будут вырожденными. Период на семействе колебаний математического маятника растет с увеличением амплитуды, поэтому колебания будут невырожденными. Они образуют глобальное семейство невырожденных СПД.

Лемма 1. *Начальная точка для невырожденного СПД принадлежит области* Λ_0^s, *конечная точка СПД — области* Λ_T^s.

Доказательство. Условие $\det A \neq 0$ в определении невырожденного СПД означает, что конечная точка СПД принадлежит области Λ_T^s. С другой стороны, из равенства $\det A \neq 0$ следует, что система уравнений в вариациях для СПД не имеет периодических решений, симметричных относительно множества M (см. [5]).

Число таких решений не меняется от временного сдвига вдоль СПД. Значит, условие $\det A \neq 0$ выполняется для начальной точки СПД, принадлежащей области Λ_0^s.

Через $M^+ \in M$ ($M^- \in M$) обозначаются начальные (конечные) точки для невырожденных СПД. По лемме 1 множество $M^+ \in \Lambda_0^s$ и $M^- \in \Lambda_T^s$.

Замечание 1. Необходимые условия существования невырожденного СПД даются неравенствами $V(u,0) \neq 0$, $dV(u,0) \neq 0$.

3. Двустороннее продолжение невырожденного СПД. Продолжение СПД проводится по начальным точкам, которые вычисляются по независимому параметру T.

Лемма 2. *Невырожденное СПД допускает двустороннее локальное продолжение по полупериоду T.*

Доказательство. Как следствие (2), при $\tau = T$ для δu^0 и δt выписываются равенства

$$\begin{aligned}
&a_{s1}(u^0,T)\delta u_1^0 + \ldots + a_{sn}(u^0,T)\delta u_n^0 + b_s(u^0,T)\delta t = 0,\\
&A(u^0,T) = ||a_{sj}(u^0,T)||,\ a_{sj}(u^0,T) = \partial v_s(u^0,T)/\partial u_j^0,\ s,j = 1,\ldots,n,\\
&b(u^0,T) = ||b_s(u^0,T)||, \quad b_s(u^0,T) = \partial v_s(u^0,T)/\partial t; \quad s = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Для невырожденного СПД $\det A(u^0,T) \neq 0$, $b(u^0,T) \neq 0$. Равенства (3) рассматриваются как система линейных уравнений с определителем, отличным от нуля. Поэтому по теореме о неявной функции система (1) вместе с данным СПД содержит семейство СПД от произвольного δt [6]. Само приращение δt ограничено только условием $(u^0 + \delta u^0) \in \Lambda_0^s$, а произвольность знака δt приводит к двустороннему продолжению СПД.

Лемма 2 доказана. □

Замечание 2. В результате продолжения получается кривая $\Gamma(\alpha) : u^0 = u^0(\alpha)$, $dT(\alpha) \neq 0$. Факт локального продолжения невырожденного СПД отмечен в [6].

Замечание 3. Достаточное условие продолжения кривой $\Gamma(\alpha)$ дается неравенствами $V(u^0(\alpha),0) \neq 0$, $dV(u^0(\alpha),0) \neq 0$.

4. Глобальное продолжение СПД. Согласно лемме 2, невырожденные СПД образуют семейство. Через Σ обозначается глобальное семейство невырожденных СПД по параметру T, содержащее все свои движения. По лемме 2 оно существует и заполняет двумерное многообразие $\hat{\Sigma}$.

Лемма 3. *Многообразие $\hat{\Sigma}$ пересекает области Λ_0^s и Λ_T^s. Граничные точки $\hat{\Sigma}$ и областей Λ_0^s и Λ_T^s совпадают.*

Доказательство. По лемме 1 для семейства Σ $M^+ \in \Lambda_0^s$, $M^- \in \Lambda_T^s$. Значит, многообразие $\hat{\Sigma}$ пересекает области Λ_0^s и Λ_T^s, а граничные точки этих областей и $\hat{\Sigma}$ совпадают.

Лемма 3 доказана. □

Теорема 1. *Пусть обратимая механическая система* (1) *допускает невырожденное СПД с полупериодом T. Тогда СПД продолжается по параметру T в обе стороны до глобального семейства Σ, на котором полупериод T меняется монотонно. Достаточное условие продолжения СПД дается неравенствами $V(u^0,0) \neq 0$, $dV(u^0,0) \neq 0$.*

Следствие. *В случае нахождения на границе Σ вырожденного СПД необходимо, чтобы $dT/d\alpha \to 0$.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что продолжение невырожденного СПД по параметру T до глобального семейства Σ проводится с применением леммы 2 к точкам кривой Γ. Система (3) содержит параметр T. На каждом шаге продолжения T получает двустороннее приращение. Это происходит до тех пор, пока кривая $\Gamma \in \Lambda_0^s$; на границе Λ_0^s получаются предельные для Σ значения монотонно меняющегося на Σ параметра T (невырожденное СПД не продолжается). Наконец, для невырожденного СПД $V(u^0, T) \neq 0$, $dV(u^0, T) \neq 0$. Тогда по лемме 1 такие условия выполняются и в области Λ_0^s.

Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание 4. Результат теоремы 1 обобщается на систему (1) с размерностями $l \geq n$. В этом случае для матрицы A размером $n \times l$ используется условие невырожденности $\mathrm{rank} A = n$.

Замечание 5. Для механической системы с позиционными силами теорема 1 установлена в [5]. Вывод о монотонном изменении T на глобальном семействе невырожденных СПД известен как закон зависимости периода колебаний от одного параметра (см. [6]). Сценарий ухода семейства Σ с бесконечно возрастающим периодом называется катастрофой голубого неба [7].

5. Маятниковые колебания тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Используются уравнения Эйлера—Пуассона

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 r - \gamma_3 q,\\ B\dot{q} &= (C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 p - \gamma_1 r,\\ C\dot{r} &= (A - B)pq + P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 q - \gamma_2 p, \end{aligned} \tag{4}$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела, P — вес тела, x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести, $\omega = (p, q, r)$ — угловая скорость, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор вертикали, направленный вверх. Система (4) допускает первые интегралы

$$\begin{aligned} &H \equiv Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = 2h(\mathrm{const}),\\ &K \equiv Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \sigma(\mathrm{const}), \quad I \equiv \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \beta(\mathrm{const}). \end{aligned}$$

Равенство $I = \beta > 0$ является первым интегралом независимо от смысла переменной γ; при $\beta = 1$ вектор γ принадлежит сфере Пуассона. Система Эйлера—Пуассона инвариантна относительно преобразования $(\omega, \gamma, t) \to (-\omega, \gamma, -t)$. Поэтому система (4) записывается в виде (1) с векторами $u = \gamma$ и $v = \omega$. Тогда СПД принадлежат уровню $\sigma = 0$. Рассматривается общий случай, когда параметры тела не подчинены условиям равенства.

Положения равновесия рассматриваемого тела принадлежат множеству $M^* = \{\gamma, \omega : \omega = 0\}$, для них

$$\frac{\gamma_1^0}{x_0} = \frac{\gamma_2^0}{y_0} = \frac{\gamma_3^0}{z_0} = \chi \tag{5}$$

(γ_s^0 — значения γ_s для равновесий). Для $\beta = 1$ получается $\chi = \pm 1/l$, где l — расстояние от неподвижной точки до центра тяжести. Для верхнего равновесия $\chi > 0$, для нижнего — $\chi < 0$. Характеристическое уравнение для равновесий содержит два нулевых корня. Остальные корни находятся из биквадратного уравнения

$$\lambda^4 - Pb\chi\lambda^2 + P^2c\chi^2 = 0,$$
$$b = \frac{x_0^2 + y_0^2}{C} + \frac{x_0^2 + z_0^2}{B} + \frac{y_0^2 + z_0^2}{A},$$
$$c = \frac{Ax_0^4 + By_0^4 + Cz_0^4 + (A+B)x_0^2y_0^2 + (A+C)x_0^2z_0^2 + (B+C)y_0^2z_0^2}{ABC}.$$

Вычисляется $D = b^2 - 4c$. Получается $D \geq 0$; $D = 0$ для равных моментов инерции. Нижнему равновесию отвечают две пары чисто мнимых корней λ_s, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, для верхнего равновесия корни действительные. К системе (4) применяется на уровне $\sigma = 0$ аналог [4] теоремы Ляпунова о центре: при $I = \beta$ к нижнему равновесию примыкают два локальных симметричных ляпуновских семейства по параметру h. Исключительное множество параметров выделяется кратностью частот $\lambda_1 = k\lambda_2,\ k \in \mathrm{N}$.

Система (4) отличается линейной по γ функцией $V(\gamma, 0)$. Поэтому $dV = 0$ в точках, где $V = 0$. Равенство выполняется только для точек равновесия (5). Следовательно, по теореме 1 ляпуновское семейство системы (4) продолжается вплоть до верхнего равновесия. При этом на M^* с учетом интеграла H параметром на кривой $\Gamma(\alpha)$ начальных точек для СПД становится $\alpha = h/P$: $\alpha = x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3$. Верхнему равновесию отвечает граница глобального семейства невырожденных СПД.

Таким образом, нижнее и верхнее равновесия соединяются глобальными семействами маятниковых колебаний, получаемых продолжением двух ляпуновских семейств. Вывод остается справедливым и для физически реализуемой задачи Эйлера, в которой $\beta = 1$.

Формулируется следующий результат.

Теорема 2. *Тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой в общем случае, в котором параметры A, B, C, x_0, y_0, z_0 не подчинены условиям равенства, исключая множество кратных частот, допускает два глобальных семейства маятниковых колебаний, соединяющих нижнее и верхнее равновесия; они получаются продолжением ляпуновских семейств, примыкающих к нижнему равновесию.*

Замечание 6. Результат теоремы 2 остается справедливым для тела, в котором центр тяжести тела принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции ($y_0 = 0$). При этом одно глобальное семейство СПД известно как колебания физического маятника [8], другое — находится при применении теоремы 2.

6. Заключение. Многие задачи механики принадлежат к классу обратимых механических систем. В них наличие в системе невырожденного СПД одновременно приводит к существованию глобального семейства таких СПД. Условие продолжения невырожденного СПД налагается на правую часть уравнений системы. В задаче Эйлера, когда параметры тела не стеснены условиями равенства, исключая множество кратных чистот, это условие выполняется для СПД ляпуновского семейства вплоть до верхнего равновесия. Тем самым устанавливается существование двух семейств маятниковых колебаний, соединяющих равновесия. Для тела с центром тяжести в главной плоскости эллипсоида инерции одно семейство переходит в колебания физического маятника, другое — пока не описано.

Литература

1. Zevin A. A. Nonlocal generalization of Lyapunov theorem. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **28** (9), 1499–1507 (1997).

2. Zevin A. A. Global continuation of Lyapunov centre orbits in Hamiltonian systems. *Nonlinearity* **12**, 1339–1349 (1999).

3. Тихонов А. А., Тхай В. Н. Симметричные колебания в задаче о вращательном движении гиростата на слабоэллиптической орбите в гравитационных и магнитных полях. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 2, 279–287 (2015).

4. Тхай В. Н. Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе. *Прикладная математика и механика* **64**, вып. 1, 56–72 (2000).

5. Tkhai V. N. A family of oscillations that connects equilibria. *2020 15th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference).* IEEE Xplore (2020).

6. Тхай В. Н. О поведении периода симметричных периодических движений. *Прикладная математика и механика* **76**, вып. 4, 616–622 (2012).

7. Fuller F. B. An index of fixed point type for periodic orbits. *American Journal of Mathematics* **89** (1), 133–148 (1967).

8. Млодзиевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. В: *Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этнограф.* Т. 7, вып. 1, 46–48 (1894).

Статья поступила в редакцию 28 марта 2021 г.;
после доработки 2 июня 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Тхай Валентин Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; tkhaivn@yandex.ru

Equilibria and oscillations in a reversible mechanical system*

V. N. Tkhai

Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences,
65, Profsoyuznaya ul., Moscow, 117997, Russian Federation

For citation: Tkhai V. N. Equilibria and oscillations in a reversible mechanical system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 709–715. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.416 (In Russian)

The paper investigates symmetric periodic motions (SPM) of reversible mechanical systems. A solution is given to the problem of bilateral continuation of a nondegenerate SPM to the global family of such SPMs. The result is applied to the general case of Euler's problem on a heavy rigid body, when the body parameters are not bound by equality conditions and two families of pendulum oscillations are found connecting the lower and upper equilibria.

Keywords: reversible mechanical system, equilibrium, symmetric periodic motion, continuation, global family, Euler's problem, pendulum oscillations.

References

1. Zevin A. A. Nonlocal generalization of Lyapunov theorem. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **28** (9), 1499–1507 (1997).

2. Zevin A. A. Global continuation of Lyapunov centre orbits in Hamiltonian systems. *Nonlinearity* **12**, 1339–1349 (1999).

*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 19-01-00146).

3. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. Symmetrical Oscillations in the Problem of Gyrostat Attitude Motion in a Weak Elliptical Orbit in Gravitational and Magnetic Fields. *Vestnik of Saint Petersburg university. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 2, 279–287 (2015). (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **48** (2), 119–125 (2015)].

4. Tkhai V. N. Lyapunov families of periodic motions in a reversible system. *Prikladnaya matematika i mekhanika* **64**, iss. 1, 56–72 (2000). (In Russian) [Engl. transl.: *Journal Applied Mathematics and Mechanics* **64**, iss. 1, 41–52 (2000)].

5. Tkhai V. N. A family of oscillations that connects equilibria. *2020 15^{th} International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference).* IEEE Xplore (2020).

6. Tkhai V. N. On the behavior of the period of symmetric periodic movements. *Prikladnaya matematika i mekhanika* **76**, вып. 4, 616–622 (2012). (In Russian)

7. Fuller F. B. An index of fixed point type for periodic orbits. *American Journal of Mathematics* **89** (1), 133–148 (1967).

8. Mlodzievskii B. K. On the permanent axes in the motion of a heavy rigid body near a fixed point. In: *Trudi otdeleniya fizicheskih nauk obshestva lubitelei estestvovaniya, antropologii i etnografii.* Vol. 7, iss. 1, 46–48 (1894). (In Russian)

Received: March 28, 2021
Revised: June 2, 2021
Accepted: June 17, 2021

Author's information:

Valentin N. Tkhai — tkhaivn@yandex.ru

ХРОНИКА

19 мая 2021 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН выступил канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. М. З. Досаев (НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва) с докладом на тему «Об особенностях скольжения табурета на упругих опорах по шероховатой плоскости».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассмотрено скольжение твердого тела на двух невесомых телескопических упругих опорах по шероховатой горизонтальной поверхности. Контакт опор с плоскостью описывается с помощью закона Кулона. Обсуждаются различные эффекты, связанные со взаимодействием трения с силами упругости. Найдено изолированное положение равновесия системы. Если начальный наклон тела не отвечает этому равновесию, то, по крайней мере, одна опора должна проскальзывать. Определены граничные значения коэффициента трения, меньше которых начинают скользить обе опоры. Численно исследован процесс перехода системы из заданного начального положения в положение равновесия.