2021 ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Т. 8 (66). Вып. 4
МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ

МЕХАНИКА

УДК 001.891.573:533.6.011
MSC 76L05, 76K05

О математическом моделировании гиперзвукового обтекания тонкого крыла переменной формы

В. И. Богатко, Е. А. Потехина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Богатко В. И., Потехина Е. А.* О математическом моделировании гиперзвукового обтекания тонкого крыла переменной формы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 639–645. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.409

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию пространственного обтекания тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком невязкого газа. Головная ударная волна считается присоединенной к передней кромке крыла. Использование метода тонкого ударного слоя для решения системы уравнений газовой динамики позволяет построить математическую модель рассматриваемого течения. Следует отметить также, что анализ граничных условий дает возможность определить структуру разложения искомых величин в ряд и строить приближенные аналитические решения. В этом случае при определении поправок первого приближения два уравнения интегрируются независимо от остальных. Применение преобразования Эйлера — Ампера позволяет построить решение, зависящее от двух произвольных функций и неизвестной формы фронта головной ударной волны. Для определения этих функций ранее была получена интегро-дифференциальная система уравнений. В настоящей работе предлагается один из вариантов полуобратного метода построения решения этой системы, при котором задается вид одной из произвольных функций. Такой подход позволяет дополнительно задать уравнение передней кромки крыла, а в случае, когда головная волна присоединена вдоль всей передней кромки, и наклон поверхности крыла на ней. Приведенный в работе вариант полуобратного метода для нестационарной пространственной задачи обтекания позволил получить частное решение, которое является модельным для различных режимов обтекания крыла. Получены формулы для определения формы фронта ударной волны, поверхности обтекаемого тела, расстояния между ударной волной и поверхностью тела, параметров течения на поверхности крыла.

Ключевые слова: математическое моделирование, гиперзвуковое обтекание тел, нестационарные течения, дифференциальные уравнения в частных производных, малый параметр.

1. Введение. При обтекании тел гиперзвуковым потоком газа образуется сильная головная ударная волна. Задача состоит в определении параметров течения в области между головной ударной волной и обтекаемым телом. Форма головной ударной волны также подлежит определению. Течение невязкого газа в ударном слое описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для построения приближенного аналитического решения задачи используется метод тонкого ударного слоя [1], основанный на малости отношения плотностей газа на фронте ударной волны. Этот малый параметр физически обоснован, а хорошее совпадение результатов расчетов, полученных с помощью этого метода, с результатами численных расчетов и экспериментальными данными (см., например, [1–3]) позволяет сделать вывод о возможности его применения для построения моделей течения газа в различных задачах газовой динамики с интенсивными ударными волнами. При этом могут рассматриваться как различные среды, в которых движется летательный аппарат, так и различные формы летательных аппаратов. Варианты использования метода тонкого ударного слоя для решения задач обтекания тонкого крыла в стационарном случае были рассмотрены в работах [4–7]. Авторами настоящей работы был предложен ряд частных решений, которые позволили для некоторых стационарных задач получить формулы для определения параметров течения на поверхности обтекаемого крыла [5, 6]. Пространственная нестационарная задача обтекания гиперзвуковым потоком тонкого крыла переменной формы в рамках этого метода исследовалась в [8]. В предположении, что головная ударная волна присоединена к передней кромке крыла, по крайней мере в одной точке, в первом приближении было построено решение упрощенной системы уравнений, зависящее от двух произвольных функций и неизвестной формы фронта головной ударной волны. Для определения этих функций была получена интегро-дифференциальная система уравнений, для решения которой был предложен полуобратный метод. В настоящей работе предлагается один из вариантов полуобратного метода построения решения этой системы, при котором задается вид одной из произвольных функций. При рассмотрении данного варианта обтекания тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком совершенного газа будем опираться на результаты работы [8].

2. Постановка задачи. Будем рассматривать обтекание тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком совершенного газа. Толщина, размах и хорда крыла имеют порядок $c = O(\varepsilon)$, $b = O(\sqrt{\varepsilon})$, $L = O(1)$ соответственно, где ε — малый параметр, характеризующий отношение плотностей газа перед фронтом головной ударной волны и непосредственно за ней. Систему координат (x, y, z) выберем так, чтобы поверхность крыла мало отличалась от плоскости (x, z), а вектор скорости $\overline{V}$ был параллелен плоскости (x, y). Начало координат поместим в носке крыла. Головная ударная волна считается присоединенной к передней кромке крыла.

Задача обтекания тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа в выбранной таким образом системе координат состоит в определении параметров течения (u, v, w — компоненты вектора скорости частиц газа, p — давление, τ — величина, обратная плотности) в ударном слое крыла и формы фронта головной ударной волны. Она решается в безразмерных переменных [8]: компоненты вектора скорости частиц газа

u, v, w отнесены к некоторой характерной скорости движения V_0; плотность ρ — к плотности ρ_0 перед фронтом головной ударной волны; давление p — к произведению $\rho_0 V_0^2$; координата x — к характерному размеру L; координата y — к $\varepsilon L \operatorname{tg}\alpha$; координата z — к $\sqrt{\varepsilon} L \operatorname{tg}\alpha$; время t — к величине $(V_0 \cos\alpha)/L$; α — угол атаки.

Решение системы нелинейных уравнений в частных производных, описывающих течение газа в ударном слое, с граничными условиями на фронте головной ударной волны и поверхности крыла, строится методом тонкого ударного слоя [8]. Система уравнений для определения поправок первого приближения расщепляется так, что два уравнения могут быть решены независимо от остальных, при этом одно из них может быть записано в дивергентном виде. Введение новой функции (по аналогии с функцией тока) сводит решение задачи к интегрированию нелинейного уравнения второго порядка в частных производных. Использование преобразования Эйлера—Ампера позволяет построить решение, зависящее от двух произвольных функций и неизвестной формы фронта головной ударной волны, для нахождения которых была записана [8] интегро-дифференциальная система уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \nu}{\partial t} + \dfrac{\partial \nu}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial \nu}{\partial z}\right) H(\nu, \mu, \lambda) = -1, \ \lambda = x - t, \ \mu = \nu x - z, \\ \nu = -\Phi_z, \\ \Phi(x, z, t) = F(x, z, t) - \displaystyle\int\limits_{q_b(x,z,t)}^{\nu(x,z,t)} H(s, s\,x - z, \lambda)\, ds, \end{cases} \tag{1}$$

где $y = F(x,\, z,\, t)$ и $y = \Phi(x,\, z,\, t)$ — уравнения поверхности крыла и формы фронта головной ударной волны соответственно, H — произвольная функция, введенная в [8], $\nu(x,\, z, t)$ и $q_b(x,\, z,\, t)$ — значения параметра q на поверхности головной ударной волны и поверхности крыла соответственно, $q = w$ — проекция скорости частицы газа на ось z; при этом $q = \mathrm{const}$ на линиях тока.

Величина q_b определится из уравнения

$$\frac{\partial q_b}{\partial t} + \frac{\partial q_b}{\partial x} + q_b \frac{\partial q_b}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

В работе [8] был предложен полуобратный метод решения интегро-дифференциальной системы уравнений (1), при котором вместо уравнения поверхности крыла $y = F(x,\, z)$ задается вид функции $H(\nu,\, \mu)$, где $\mu = \nu x - z$. По аналогии с [8] в настоящей работе зададим вид функции ν. При таком подходе значительно упрощается задача интегрирования системы (1) и, кроме того, остается достаточный произвол, позволяющий дополнительно задавать уравнение передней кромки крыла $x = x_0(z)$, а для режима обтекания с головной ударной волной, присоединенной вдоль всей передней кромки, и наклон $F_{x_0(z)}$ поверхности крыла на передней кромке.

3. Построение решения. Обратимся к первому уравнению системы (1). Введем новые переменные следующим образом: пусть $x = \tilde{x}$, $z = \tilde{z}$, $t = (x - \lambda)$, тогда уравнение примет вид

$$\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) H(\nu, \mu, \lambda) = -1. \tag{3}$$

Здесь в (3) и далее знак «тильда» опускаем.

Чтобы построить решение задачи обтекания тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком газа, вместо поверхности крыла зададим вид функции ν. Пусть

$$\nu \,=\, g_z(z,\lambda). \tag{4}$$

Теперь из (3), очевидно, получим

$$H = -\frac{1}{g_z(z,\lambda)g_{zz}(z,\lambda)}. \tag{5}$$

После того, как был задан вид функции ν, второе уравнение системы (1) легко интегрируется:

$$\Phi \,=\, g(z,\lambda) \,+\, \varphi(x,\lambda,t). \tag{6}$$

Если уравнение передней кромки крыла при $t=0$ имеет вид $x \,=\, x^\circ(z)$, то для присоединенной головной ударной волны из (6) получим

$$0 \,=\, \Phi^\circ \,=\, g(z,\lambda) \,+\, \varphi(x^\circ(z),\lambda,0).$$

Отсюда следует, что

$$g(z,\lambda) \,=\, -\,\varphi(x^\circ(z),\lambda,0).$$

Подставив это выражение в (6), для формы фронта головной ударной волны окончательно в исходных переменных получим

$$\Phi \,=\, \varphi(x,\lambda,t) \,+\, \varphi(x^\circ(z),\lambda^\circ,0), \tag{7}$$

где $\lambda^\circ \,=\, x^\circ(z)$. Функция φ задается произвольно.

Решение уравнения (2) может быть представлено параметрически:

$$\begin{cases} \quad q_b \,=\, \nu\,(\zeta) \,=\, g_\zeta(\zeta,\lambda^\circ(\zeta)),\\ z\,-\,\zeta \,=\, g_\zeta(\zeta,\lambda^\circ(\zeta))\,\big(x-x^\circ\,(\zeta)\big),\\ x\,-\,t \,=\, x^\circ\,(\zeta), \end{cases} \tag{8}$$

где ζ — аппликата точки пересечения рассматриваемой линии тока с передней кромкой крыла $x=x_0(z)$.

Теперь можно найти расстояние между ударной волной и поверхностью крыла.

$$\delta\,(x,\,z,\,t) \,=\, -\int_{q_b(x,\,z,\,t)}^{\nu(x,\,z,\,t)} H(s)\,ds = \int_\zeta^z \frac{d\sigma}{g'(\sigma,\,\lambda)}, \tag{9}$$

где $s=g'(\sigma,\,\lambda)$, $H(s) \,=\, -\left[\,g'(\sigma,\,\lambda)\cdot g''(\sigma,\,\lambda)\,\right]^{-1}$, $\nu\,(x,\,z,\,t) \,=\, g'(z,\,\lambda)$, $q_b(x,\,z,\,t) \,=\, g'(\zeta,x^\circ\,(\zeta))$.

Форма обтекаемой поверхности определится из формулы

$$F(x,\,z,\,t) = \Phi\,(x,\,z,\,t) - \delta\,(x,\,z,\,t). \tag{10}$$

4. Параметры газа за поверхностью разрыва. Построенное решение поставленной задачи позволяет определить параметры течения в ударном слое тонкого крыла переменной формы с ударной волной, присоединенной вдоль всей передней кромки крыла.

Следуя [8], получим

$$y = \Phi(x, z, t) + \int_q^\nu H(s)\, ds. \tag{11}$$

Отсюда для составляющей вектора скорости v будем иметь

$$v = Dy = y_t + y_x + q\, y_z = \varphi_t + \varphi_x - q\Big[g'(z,\lambda) + \frac{1}{g'(z,\lambda)} \Big]. \tag{12}$$

На поверхности крыла при $q = q_b$ получим

$$v_b = \varphi_t + \varphi_x - q_b\, \varphi_z(x^\circ(z), \lambda^\circ, 0) + D\Big(\int_{q_b}^\nu H(s)\, ds\Big). \tag{13}$$

Поправки к давлению и продольной компоненте вектора скорости определяются из следующих уравнений в переменных $(q,\, x,\, z,\, t)$:

$$Du = 0;\; y_q\, Dv = -p_q.$$

5. Заключение. Предложенное в работе решение можно рассматривать в качестве модельного для различных режимов обтекания крыла. Такие решения могут иметь как самостоятельное значение, так и использоваться при расчете конкретных задач в комбинации с численными методами для ускорения вычислительной процедуры. Кроме того, они могут быть использованы для контроля результатов численных расчетов. Учесть влияние реальных свойств газа на параметры потока достаточно хорошо можно введением эффективного показателя адиабаты [3, 9, 10]. Если газ за ударной волной находится в состоянии термодинамического равновесия, то его течение можно моделировать движением некоторого совершенного газа, показатель адиабаты которого определяется в зависимости от числа Маха и термодинамического состояния газа в ударном слое. При этом уравнение состояния можно взять в квазисовершенном виде. Предлагаемая математическая модель может дополнить численное моделирование и при исследовании неравновесных течений (см., например, [11]).

Литература

1. Черный Г. Г. *Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью.* Москва, Физматгиз (1959).

2. Hayes W. D., Probstein R. F. *Hypersonic flow theory.* New York, London, Academic Press (1959).

3. Лунев В. В. *Гиперзвуковая аэродинамика.* Москва, Машиностроение (1975).

4. Голубинский А. И., Голубкин В. Н. О пространственном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа. *Доклады АН СССР* **234** (5), 794–802 (1977).

5. Богатко В. И., Колтон Г. А., Потехина Е. А. Полуобратный метод решения пространственной задачи обтекания тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия* **2 (60)**, вып. 1, 98–105 (2015).

6. Bogatko V. I., Potekhina E. A., Kolton G. A. An approach to solution of spatial hypersonic flow past a thin wing problem. *International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading*, 1–3 (2015). https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015

7. Голубкин В. Н. К теории гиперзвукового обтекания тонкого треугольного крыла конечной стреловидности под большим углом атаки. *Прикладная математика и механика* **84** (4), 467–480 (2020). https://doi.org/10.31857/S0032823520040050

8. Богатко В. И., Гриб А. А., Колтон Г. А. Обтекание тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком газа. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*, (4), 94–101 (1979).

9. Bogatko V. I., Potekhina E. A. To the Problem of Modeling Gas Flows Behind the Strong Shock Wave Front Using an Effective Adiabatic Index. *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **53** (1), 77–81 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.111

10. Тарнавский Г. А., Шпак С. И. Способы расчета эффективного показателя адиабаты при компьютерном моделировании гиперзвуковых течений. *Сибирский журнал индустриальной математики* **4** (1), 177–196 (2001).

11. Кузнецов М. М. О неравновесном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа. *Труды Центрального аэрогидродинамического института*, вып. 2177, 77–95 (1983).

Статья поступила в редакцию 18 марта 2021 г.;
после доработки 16 июня 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Богатко Всеволод Иванович — канд. физ.-мат. наук, доц.; aerovib@gmail.com
Потехина Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; eap225@gmail.com

On mathematical modeling of a hypersonic flow past a thin wing with variable shape

V. I. Bogatko, E. A. Potekhina

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Bogatko V. I., Potekhina E. A. On mathematical modeling of a hypersonic flow past a thin wing with variable shape. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 639–645.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.409 (In Russian)

The present work is devoted to a further study of the spatial flowing of a thin wing of variable shape by a hypersonic flow of non-viscous gas. The head shock wave is considered to be attached to the leading edge of the wing. The use of the thin shock layer method for solving the system of gas dynamics equations makes it possible to build a mathematical model of the flow in question. It should also be noted that the analysis of boundary conditions makes it possible to determine the structure of the expansion of the quantities sought in a series and to construct approximate analytical solutions. In this case, in determining the first approximation corrections, two equations are integrated independently of the other equations. The application of the Euler — Ampere transform allows to construct a solution depending on two arbitrary functions and an unknown of the shock front. To determine these functions, previously it was obtained an integro-differential system of equations. This paper proposes one of the variants of the semi-inverse method for constructing the solution of this system, in which the form of one of arbitrary function is given. This approach allows you to additionally set the equation for the leading edge of the wing, and in the case when the head wave is attached along the entire leading edge and the inclination of the wing surface on it. The variant of the semi-inverse method presented in the work for the non-stationary spatial problem of the flow has made it possible to obtain a particular solution, which is a model for various flow regimes around the wing. Formulas are obtained to determine: the shape of the front of the shock wave, the shape of the surface of the streamlined body, the distance between the shock wave and the surface of the body, and the flow parameters on the wing surface.

Keywords: mathematical modeling, hypersonic flowing of bodies, unsteady flows, partial differential equations, small parameter.

References

1. Chernyi G. G. *Gas flows with a high supersonic velocity.* Moscow, Fizmatgiz Publ. (1959). (In Russian)

2. Hayes W. D., Probstein R. F. *Hypersonic flow theory.* New York, London, Academic Press (1959).

3. Lunev V. V. *Hypersonic aerodynamics.* Moscow, Mashinostroenie Publ. (1975). (In Russian)

4. Golubinskij A. I., Golubkin V. N. On the spatial flow of a thin wing by a hypersonic gas flow. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **234** (5), 794–802 (1977). (In Russian)

5. Bogatko V. I., Kolton G. A., Potekhina E. A. Semi-inverse method for solving the spatial problem of thin wing flow in a hypersonic gas flow. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2 (60)**, iss. 1, 98–105. (2015). (In Russian)

6. Bogatko V. I., Potekhina E. A., Kolton G. A. An approach to solution of spatial hypersonic flow past a thin wing problem. *International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading*, 1–3 (2015). https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015

7. Golubkin V. N. To the Theory of Hypersonic Flow over Thin Finite Sweep Delta Wing at High Incidence. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **84** (4), 467–480 (2020). https://doi.org/10.31857/S0032823520040050 (In Russian)

8. Bogatko V. I., Grib A. A., Kolton G. A. Hypersonic gas flow around a thin wing of variable shape. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, (4), 94–101 (1979). (In Russian)

9. Bogatko V. I., Potekhina E. A. To the Problem of Modeling Gas Flows Behind the Strong Shock Wave Front Using an Effective Adiabatic Index. *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **53** (1), 77–81 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.111

10. Tarnavsky G. A., Shpak S. I. Methods for calculating the effective adiabatic index in computer simulation of hypersonic flows. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki* **4** (1), 177–196 (2001). (In Russian)

11. Kuznetsov M. M. On nonequilibrium flow of a thin wing by a hypersonic gas flow. *Trudy Tsentral'nogo aerogidrodinamicheskogo instituta*, iss. 2177, 77–95 (1983). (In Russian)

Received: March 18, 2021
Revised: June 16, 2021
Accepted: June 17, 2021

Authors' information:

Vsevolod I. Bogatko — aerovib@gmail.com
Elena A. Potekhina — eap225@gmail.com