УДК 519.61 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4
MSC 65F22

О регуляризации решения интегральных уравнений первого рода с помощью квадратурных формул*

А. В. Лебедева, В. М. Рябов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Лебедева А. В., Рябов В. М.* О регуляризации решения интегральных уравнений первого рода с помощью квадратурных формул // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 593–599. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.404

Рассматриваются плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и интегральные уравнения первого рода, относящиеся к классу некорректных задач. Сюда же относится задача обращения интегрального преобразования Лапласа, применяемого для решения широкого класса математических задач. Интегральные уравнения сводятся к СЛАУ со специальными матрицами. Для получения надежного решения используют методы регуляризации. Общей стратегией является использование стабилизатора Тихонова или его модификаций, либо представление искомого решения в виде ортогональной суммы двух векторов, один из которых определяется устойчиво, а для поиска второго необходима некая процедура стабилизации. В настоящей статье рассматриваются методы численного решения СЛАУ с положительно определенной симметричной матрицей или с матрицей осцилляционного типа с использованием регуляризации, приводящие к СЛАУ с уменьшенным числом обусловленности. Указан метод сведения задачи обращения интегрального преобразования Лапласа к СЛАУ с обобщенными матрицами Вандермонда осцилляционного типа, регуляризация которых снижает плохую обусловленность системы.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, интегральные уравнения первого рода, некорректные задачи, плохо обусловленные задачи, число обусловленности, метод регуляризации.

1. Общая схема регуляризации. В настоящей статье речь идет об уравнениях вида

$$Az \equiv \int_0^1 K(x,s)z(s)\,ds = u(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

к которым может быть сведена задача обращения интегрального преобразования Лапласа, применяемого для решения широкого класса математических задач. Эта задача относится к классу некорректных задач.

Общая теория решения некорректных и плохо обусловленных уравнений изложена в фундаментальных работах [1–3], вопросы реализации общей теории применительно к конкретным прикладным задачам изложены в книге [4] и многочисленных статьях.

*Статья подготовлена при поддержке гранта Санкт-Петербургского государственного университета, мероприятие 3 (Pure ID 75207094).

В книге [1] предложены методы регуляризации решения таких уравнений. По сути, процедура регуляризации состоит из двух шагов: сначала от уравнения (1) переходим к уравнению

$$A^*Az = A^*u,$$

которое всегда разрешимо, в отличие от исходного уравнения, а затем осуществляем сдвиг

$$(A^*A + \alpha L)z = A^*u, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

где L — некоторый симметричный положительно определенный оператор, содержащий в себе априорную информацию об искомом решении. Фактически переход от уравнения (1) к уравнению (2) происходит путем минимизации функционала вида

$$M_\alpha(A, u, z) = ||Au - z||^2_{L_2} + \alpha\Omega(z), \tag{3}$$

Ω — неотрицательный функционал, производная которого порождает оператор L.

Уравнение (2) есть интегро-дифференциальное уравнение относительно точки минимума функционала (3), и для его решения кроме квадратурных формул необходимо применять разностные методы для вычисления производных. В итоге мы придем к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно каркасов приближенных решений [5]. Эта СЛАУ, как и исходное уравнение, некорректна, и характеристика неустойчивости определяется ее числом обусловленности.

Для построения СЛАУ выбираем квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 g(s)\,ds \approx \sum_{k=1}^{n} A_k g(s_k)$$

и применяем ее для вычисления интеграла в исходном уравнении:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k K(x, s_k) z(s_k) = u(x).$$

Полагая здесь $x = s_j,\ j = 1, \ldots, n$, придем к СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n} A_k K(s_j, s_k) z(s_k) = u(s_j),\ j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

с неизвестными числами $z(s_k)$. Запишем систему (4) в матричном виде

$$CZ = U \tag{5}$$

и будем ее решать методом регуляризации, находя решение системы

$$(C^*C + \alpha E)Z = C^*U \tag{6}$$

с положительным параметром α.

Матрица и правая часть в уравнении (5) могут быть заданы приближениями к ним C_δ и U_δ такими, что

$$||\Delta C|| = ||C - C_\delta|| \leqslant \delta, \quad ||\Delta U|| = ||U - U_\delta|| \leqslant \delta.$$

Эти погрешности повлекут ошибку ΔZ определения вектора Z. В качестве векторной нормы используем евклидову норму, а в качестве матричной — подчиненную ей норму

$$||A|| = \sqrt{\rho(A^* A)}.$$

Введем относительные погрешности

$$\delta_C = \frac{||\Delta C||}{||C||}, \quad \delta_U = \frac{||\Delta U||}{||U||}, \quad \delta_Z = \frac{||\Delta Z||}{||Z||}.$$

Заметим, что эти погрешности присутствуют практически всегда, поскольку вычисления, как правило, проводятся с конечным числом значащих цифр.

Если матрица C невырождена, то существует единственное решение системы (5) и можно ввести в рассмотрение число обусловленности $\mu(C) = cond(C) = ||C|| \cdot ||C^{-1}||$. Важность этой характеристики задачи видна из следующего результата.

Теорема 1 (см. [6, с. 111]). *Для произвольных δ_U и достаточно малых δ_C справедлива оценка погрешности*

$$\delta_Z \leqslant \frac{\mu(C)}{1 - \mu(C)\delta_C}(\delta_C + \delta_U).$$

Следовательно, независимо от метода решения СЛАУ погрешность результата может оказаться примерно в $\mu(C)$ раз больше погрешности исходной информации.

В общем случае СЛАУ (5) может не иметь решения. Тогда целесообразно ввести в рассмотрение псевдорешения и нормальные решения уравнения (5).

Определение 1. *Псевдорешением* уравнения (5) называется любой элемент Z, минимизирующий величину $||CZ - U||$.

Определение 2. *Нормальным решением* уравнения (5) называется псевдорешение с наименьшей нормой.

Очевидно, нормальное решение существует и единственно; если уравнение (5) имеет единственное решение, то нормальное решение совпадает с ним.

Для нахождения нормального решения необходимы процедуры регуляризации, в которых параметры регуляризации выбираются в зависимости от точности исходной информации и обусловленности исходной задачи.

В методе Тихонова для СЛАУ (5) функционал (3) принимает вид

$$M_\alpha(C, U, Z) = ||CU - Z||^2 + \alpha||Z||^2,$$

и его минимизация приводит к уравнению Эйлера (6).

Теорема 2 (см. [1, с. 119]). *Пусть Z^o есть нормальное решение системы $CZ = U$ и вместо вектора U мы имеем вектор U_δ такой, что $||U - U_\delta|| \leqslant \delta$. Пусть далее $\beta_1(\delta)$ и $\beta_2(\delta)$ — какие-либо непрерывные и положительные на $[0, \delta_2]$ функции, монотонно стремящиеся к нулю при $\delta \to 0$ и такие, что*

$$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)} \leqslant \beta_2(\delta), \quad \beta_2(0) = 0.$$

Тогда для любой положительной на $[0, \delta_2]$ функции $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющей условию

$$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha(\delta) \leqslant \beta_2(\delta), \tag{7}$$

векторы $Z^{\alpha(\delta)}$, являющиеся решением уравнения Эйлера

$$(C^*C + \alpha(\delta)E)Z^{\alpha(\delta)} = C^*u,$$

сходятся к нормальному решению системы $CZ = U$ при $\delta \to 0$, т. е.

$$\lim_{\delta\to 0} ||Z^{\alpha(\delta)} - Z^o|| = 0.$$

Замечание. Если система (5) имеет единственное решение, то неравенство (7) можно заменить на такое:

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha(\delta) \leqslant \beta_2(\delta), \tag{8}$$

откуда, в частности, при $\beta_1(\delta) = \beta_2(\delta) = \delta$ из (8) находим $\alpha(\delta) = \delta$. Аналогично из (7) при $\beta_1(\delta) = \beta_2(\delta) = \sqrt{\delta}$ находим $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta}$.

Уравнение (6) разрешимо для всех $\alpha \geqslant 0$, но его число обусловленности практически возводится в квадрат по сравнению с исходным уравнением (5). Наша задача заключается в построении алгоритмов регуляризации уравнения (5), лишенных этого недостатка для некоторого класса матриц.

2. Регуляризация СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей. Для симметричной положительно определенной матрицы C существует единственный положительно определенный корень из нее, т. е. симметричная матрица B такая, что $B^2 = C$. В таком случае, как показано в работе [7], метод регуляризации Тихонова приводит к уравнению

$$(C + \alpha E)Z^\alpha = U. \tag{9}$$

Итак, метод регуляризации А. Н. Тихонова для уравнения (5) с симметричной положительно определенной матрицей вместо общего уравнения (6) может быть сведен к более простой системе (9) (фактически это метод регуляризации М. М. Лаврентьева). Основное преимущество такого подхода состоит в том, что число обусловленности СЛАУ при этом не возрастает.

3. Регуляризация СЛАУ в случае осцилляционных матриц. Рассмотрим класс осцилляционных матриц, все собственные значения которых положительны и попарно различны, а соответствующие собственные векторы обладают особыми свойствами колебаний [8]. Пусть C — осцилляционная матрица, а V — матрица ее собственных векторов, $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы C. Тогда $CV = V\Lambda$ или $C = V\Lambda V^{-1}$. Пусть $\Lambda_1 = [\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}]$. Положим $B = V\Lambda_1 V^{-1}$. Понятно, что $B^2 = V\Lambda_1 V^{-1} V\Lambda_1 V^{-1} = V\Lambda_1^2 V^{-1} = C$.

Умножая исходное уравнение $CZ = U$ слева на матрицу B^{-1}, получим

$$BZ = B^{-1}U.$$

Запишем минимизируемый функционал для этого уравнения:

$$M_\alpha(B, B^{-1}U, Z) = ||BZ - B^{-1}||^2 + \alpha||Z||^2, \quad \alpha > 0,$$

уравнение Эйлера для него примет вид

$$(B^*B + \alpha E)Z^\alpha = B^*(B^{-1}U). \tag{10}$$

Число обусловленности задачи (10) существенно меньше, чем у стандартной формы метода регуляризации (6). Отметим, что матрица B^*B^{-1} в правой части уравнения (10) невелика (в случае симметрии C она равна единичной матрице) и не сильно увеличивает погрешность вектора U.

4. Обращение преобразования Лапласа. Рассмотрим задачу обращения преобразования Лапласа, т. е. нахождение оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$ из уравнения

$$\int_0^\infty \exp(-pt)f(t)\,dt = F(p). \tag{11}$$

Методам обращения посвящены книги [9, 10]. Заметим, что в них не идет речи о некорректности задачи обращения.

Полагаем

$$p_k = a + rk, \quad b_k = F(p_k), \quad k = 1, \dots, m. \tag{12}$$

Сделаем замену $x = \exp(-rt)$ и введем функцию

$$h(x) = \frac{x^{a/r}}{r} f\left(-\frac{\ln(x)}{r}\right), \tag{13}$$

в результате вместо уравнения (11) получаем уравнения

$$\int_0^1 x^{k-1}h(x)\,dx = b_k, \quad k = 1, \dots, m. \tag{14}$$

Нахождение функции $h(x)$, удовлетворяющей условиям (14), можно рассматривать как частный случай полной проблемы моментов [11]. Такой подход был рассмотрен в работе [12].

Мы предлагаем другой путь решения этой проблемы: выберем некоторую квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 v(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^m A_k v(x_j)$$

и применим ее для вычисления интегралов, входящих в уравнения (14), в результате чего придем к СЛАУ

$$\sum_{j=1}^m A_j x_j^{k-1} h(x_j)\,dx = b_k, \quad k = 1, \dots, m. \tag{15}$$

Система (15) — это СЛАУ относительно неизвестных $A_j h(x_j)$ с матрицей Вандермонда $\left(x_j^{k-1}\right)_{j,k=1}^m$, относящейся к классу осцилляционных матриц [8]. Следовательно, для ее решения можно применять описанные выше методы регуляризации. Разумный выбор значений параметров a, r описан в работе [12].

Пример. Дано изображение $F(p) = 1/((p+1)^2+1)$, соответствующее оригиналу $f(t) = \exp(-t)\sin(t)$.

Была написана программа на языке Maple решения СЛАУ (15) при $m = 25$, и применена квадратурная формула Гаусса наивысшей алгебраической степени точности. Использованы значения параметров $a = 0, r = 1$, входящие в (12), и $Digits = 25$

(число десятичных знаков при вычислениях). Для входящего в соответствующую СЛАУ (6) параметра $\alpha = 0$ отклонение приближенного решения от точного по модулю превосходит единицу, а для $\alpha = 10^{-15}$ оно не превосходит величины $3{\cdot}10^{-3}$. Изменением параметров $Digits, \alpha$ и m можно добиться и более точных результатов.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* Москва, Наука (1979).
2. Лисковец О. А. *Вариационные методы решения неустойчивых задач.* Минск, Наука и техника (1981).
3. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* Москва, Наука (1978).
4. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск, Сибирское науч. изд-во (2009).
5. Даугавет И. К. *Теория приближенных методов. Линейные уравнения.* Санкт-Петербург, БХВ-Петербург (2006).
6. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* Москва, Наука (1984).
7. Лебедева А. В., Рябов В. М. О численном решении систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6 (64)**, вып. 4, 619–626 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.407
8. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* Москва, Наука (1967).
9. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion.* New York, Springer (2007).
10. Рябов В. М. *Численное обращение преобразования Лапласа.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2013).
11. Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, пер. с англ. Москва, Наука (1973).
12. Brianzi P., Frontini M. On the regularized inversion of Laplace transform. *Inverse problems* **7**, 355–368 (1991).

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2021 г.;
после доработки 16 июня 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Лебедева Анастасия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.v.lebedeva@spbu.ru
Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru

Regularization of the solution of integral equations of the first kind using quadrature formulas*

A. V. Lebedeva, V. M. Ryabov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Regularization of the solution of integral equations of the first kind using quadrature formulas. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 593–599.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.404 (In Russian)

Ill-conditioned systems of linear algebraic equations (SLAEs) and integral equations of the first kind belonging to the class of ill-posed problems are considered. This also includes the problem of inverting the integral Laplace transform, which is used to solve a wide class of

*This paper was prepared with the support by a grant from St. Petersburg State University, event 3 (Pure ID 75207094).

mathematical problems. Integral equations are reduced to SLAEs with special matrices. To obtain a reliable solution, regularization methods are used. The general strategy is to use the Tikhonov stabilizer or its modifications, or to represent the desired solution in the form of an orthogonal the sum of two vectors, one of which is determined stably, and to search for the second requires some kind of stabilization procedure. In this article methods for the numerical solution of SLAEs with positive a certain symmetric matrix or with an oscillatory type matrix using regularization, leading to a SLAE with a reduced condition number. A method of reducing the problem of inversion of the integral Laplace transform to a SLAE with generalized Vandermonde matrices of oscillation type, the regularization of which reduces the ill-conditioning of the system, is indicated.

Keywords: system of linear algebraic equations, integral equations of the first kind, ill-posed problems, ill-conditioned problems, condition number, regularization method.

References

1. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniia nekorrektnykh zadach*. Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian) [Engl. transl.: Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston (1977)].

2. Liskovets O. A. *Variational methods for solving unstable problems*. Minsk, Science and Technology Publ. (1981). (In Russian)

3. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. Moscow, Nauka Publ. (1978). (In Russian)

4. Kabanikhin S. I. *Inverse and incorrect tasks*. Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatelstvo Publ. (2009). (In Russian)

5. Daugavet I. K. *The theory of approximate methods. Linear equations*. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ. (2006). (In Russian)

6. Voevodin V. V., Kuznetsov Yu. A. *Matrices and computations*. Moscow, Nauka Publ. (1984). (In Russian)

7. Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Numerical Solution of Systems of Linear Algebraic Equations with Ill-Conditioned Matrices. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6 (64)**, iss. 4, 619–626 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.407 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **52**, iss. 4, 388–393 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063454119040058].

8. Gantmakher F. R. *Teoriia matrits*. Moscow, Nauka Publ. (1967). (In Russian) [Engl. transl.: Gantmakher F. R. *The Theory of Matrices*. New York, Chelsea Publ. Co. (1989)].

9. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. New York, Springer (2007).

10. Ryabov V. M. *Numerical inversion of the Laplace transform*. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press (2013). (In Russian)

11. Krein M. G., Nudelman A. A. *The Markov moment problem and extremal problems*. In Ser.: Translations of Mathematical Monographs, vol. 50. AMS (1977). [Russ. ed.: Krein M. G., Nudelman A. A. *Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi*. Moscow, Nauka Publ. (1976)].

12. Brianzi P., Frontini M. On the regularized inversion of Laplace transform. *Inverse problems* **7**, 355–368 (1991).

Received: April 29, 2021
Revised: June 16, 2021
Accepted: June 17, 2021

Authors' information:

Anastasia V. Lebedeva — a.v.lebedeva@spbu.ru
Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru