УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4
MSC 65Y20, 60G60, 41A63, 41A65

Оценка сложности аппроксимации в среднем для тензорных степеней случайных процессов*

А. А. Кравченко[1], *А. А. Хартов*[2]

[1] Национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
[2] Смоленский государственный университет,
Российская Федерация, 214000, Смоленск, ул. Пржевальского, 4

Для цитирования: *Кравченко А. А., Хартов А. А.* Оценка сложности аппроксимации в среднем для тензорных степеней случайных процессов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 580–592. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.403

Рассматриваются случайные поля, являющиеся тензорными степенями некоторого случайного процесса второго порядка с непрерывной ковариационной функцией. Сложность аппроксимации в среднем для заданного случайного поля определяется как минимальное количество значений линейных функционалов, необходимых для его приближения с относительной средней квадратической ошибкой, не превышающей заданного порога. В настоящей работе оценивается рост сложности аппроксимации в среднем случайного поля при сколь угодно высокой его параметрической размерности и сколь угодно малом пороге ошибки. При достаточно слабых предположениях о спектре ковариационного оператора порождающего процесса найдено необходимое и достаточное условие того, что сложность аппроксимации в среднем случайного поля имеет оценку сверху специального вида. При этом показано, что этому условию удовлетворяет весьма важный и широкий класс случаев, а порядок указанной оценки сверху для сложности аппроксимации в среднем совпадает с порядком ее асимптотик, которые были ранее получены в работе Лифшица и Туляковой.

Ключевые слова: сложность аппроксимации в среднем, случайное поле, тензорная степень, высокая размерность, трактабильность.

1. Введение и постановка задачи. Пусть $X = \{X(t),\, t \in [0,1]\}$ — случайный процесс на некотором вероятностном пространстве. Пусть он имеет нулевое математическое ожидание и непрерывную ковариационную функцию $\mathcal{K}(t,s)$, $t,s \in [0,1]$. Мы рассматриваем d-параметрический аналог X, где $d \in \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел). Более точно, на некотором вероятностном пространстве рассматривается случайное поле $Y_d = \left\{Y_d(t),\, t \in [0,1]^d\right\}$, $d \in \mathbb{N}$, имеющее нулевое среднее и следующую ковариационную функцию:

$$\mathcal{K}_{Y_d}(t,s) := \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}(t_j, s_j),$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Немецкого научно-исследовательского сообщества (грант № 20-51-12004).

где $t = (t_1, \dots, t_d)$ и $s = (s_1, \dots, s_d)$ из $[0,1]^d$. Такое случайное поле Y_d называется *d-тензорной степенью* случайного процесса X.

Случайное поле Y_d рассматривается как элемент пространства $L_2([0,1]^d)$ со скалярным произведением $(\,\cdot,\,\cdot)_{2,d}$ и нормой $\|\cdot\|_{2,d}$. Мы изучаем *сложность аппроксимации в среднем* (*сложность аппроксимации* для краткости) для Y_d:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N} : \, e^{Y_d}(n) \leqslant \varepsilon \, e^{Y_d}(0)\bigr\}, \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ и

$$e^{Y_d}(n) := \inf\Bigl\{\bigl(\mathbb{E}\,\bigl\|Y_d - \widetilde{Y}_d^{(n)}\bigr\|_{2,d}^2\bigr)^{1/2} : \widetilde{Y}_d^{(n)} \in \mathcal{A}_n^{Y_d}\Bigr\}$$

есть наименьшая среднеквадратическая ошибка аппроксимации случайного поля Y_d по всем линейным аппроксимациям $\widetilde{Y}_d^{(n)}$ ранга $n \in \mathbb{N}$ из класса

$$\mathcal{A}_n^{Y_d} := \Bigl\{\sum_{m=1}^{n} (Y_d, \psi_m)_{2,d}\, \psi_m : \psi_m \in L_2([0,1]^d),\, m = 1, \dots, n\Bigr\}.$$

Мы работаем с *относительной ошибкой*, беря в учет «размер» поля Y_d:

$$e^{Y_d}(0) := \bigl(\mathbb{E}\,\|Y_d\|_{2,d}^2\bigr)^{1/2} < \infty.$$

Величина $n^{Y_d}(\varepsilon)$ может быть описана через собственные числа ковариационного оператора K^{Y_d} случайного поля Y_d. Пусть $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ обозначает последовательность собственных чисел, а $(\psi_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ — соответствующую последовательность собственных функций K^{Y_d}, т. е. $K^{Y_d}\psi_m^{Y_d}(t) = \lambda_m^{Y_d}\psi_m^{Y_d}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]^d$. Предполагается, что последовательность $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ монотонно не возрастает. Если оператор K^{Y_d} имеет конечный ранг $p \in \mathbb{N}$, то мы формально полагаем $\lambda_m^{Y_d} := 0$ и $\psi_m^{Y_d} \equiv 0$ для $m > p$. Пусть Λ^{Y_d} обозначает след оператора K^{Y_d}, т. е. $\Lambda^{Y_d} := \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{Y_d}$.

Хорошо известно (см. [1–3]), что для любого $n \in \mathbb{N}$ n-ранговое случайное поле

$$\widetilde{Y}_d^{(n)}(t) := \sum_{m=1}^{n} (Y_d, \psi_m^{Y_d})_{2,d}\, \psi_m^{Y_d}(t), \qquad t \in [0,1]^d, \tag{2}$$

является наилучшей линейной аппроксимацией для Y_d в указанном среднеквадратическом смысле. При этом формула (1) принимает вид

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \min\Bigl\{n \in \mathbb{N} : \, \mathbb{E}\,\bigl\|Y_d - \widetilde{Y}_d^{(n)}\bigr\|_{2,d}^2 \leqslant \varepsilon^2\, \mathbb{E}\,\|Y_d\|_{2,d}^2\Bigr\}.$$

Тогда с учетом (2) и того, что $\mathbb{E}\,(Y_d, \psi_m^{Y_d})_{2,d}^2 = (\psi_m^{Y_d}, K^{Y_d}\psi_m^{Y_d})_{2,d} = \lambda_m^{Y_d}$, $m \in \mathbb{N}$ (см. [4, с. 267–268]), мы получаем следующие представления сложности аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ в терминах $\lambda_m^{Y_d}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \min\Bigl\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{Y_d} \leqslant \varepsilon^2\, \Lambda^{Y_d}\Bigr\} = \min\Bigl\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{Y_d} \geqslant (1-\varepsilon^2)\Lambda^{Y_d}\Bigr\}.$$

Несложно заметить, что величина $n^{Y_d}(\varepsilon)$ инвариантна относительно масштабирования как самого процесса $X(t) \mapsto cX(t)$, $t \in [0,1]$, так и его параметра $X(t) \mapsto X(ct)$, $t \in [0,1]$, при $c > 0$.

Рассмотрим теперь последовательность $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$, она имеет следующее описание. Пусть $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ обозначает невозрастающую последовательность собственных чисел ковариационного оператора K^X случайного процесса X. Тогда, как известно, $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ есть последовательность чисел

$$\prod_{j=1}^{d} \lambda_{k_j}, \quad k_1, k_2, \ldots, k_d \in \mathbb{N},$$

упорядоченных по невозрастанию (см., например, [5]). Пусть Λ обозначает след ковариационного оператора K^X, т. е. $\Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$. Тогда $\Lambda^{Y_d} = \Lambda^d$. Таким образом, $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ полностью определяет последовательность $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ при любом $d \in \mathbb{N}$.

В соответствии с вышесказанным сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ полностью описывается последовательностью $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Однако такое описание следует признать не вполне явным при больших $d \in \mathbb{N}$. В связи с этим представляет интерес задача оценки роста $n^{Y_d}(\varepsilon)$ как функции двух переменных $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ через последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Существующие результаты в этом направлении были получены в статье Лифшица и Туляковой [6] в рамках асимптотических постановок: 1) при фиксированном $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \to 0$, 2) при фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$. Формулировки этих результатов мы приведем в следующем пункте. В данной статье мы рассматриваем задачу в иной постановке, а именно мы будем оценивать сверху $n^{Y_d}(\varepsilon)$ *при любых* $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$ и находить необходимые и достаточные условия на $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ для такой оценки. Подобным образом изучаются вопросы *трактабильности* многопараметрических задач аппроксимации для функций (случайных и неслучайных), зависящих от многих переменных (см. [5]). Однако, как нам известно, именно для тензорных степеней процессов задача в указанной постановке ранее не рассматривалась.

2. Результаты. Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\bar{\lambda}_k := \frac{\lambda_k}{\Lambda}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_m^{Y_d} := \frac{\lambda_m^{Y_d}}{\Lambda^{Y_d}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так, $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k = 1$ и $\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\lambda}_m^{Y_d} = 1$, а $n^{Y_d}(\varepsilon)$ получает представление

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\lambda}_m^{Y_d} \leqslant \varepsilon^2 \Big\}. \tag{3}$$

Введем величину

$$M(\gamma) := \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Заметим, что $M(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k = 1$, а при $\gamma > 0$ верно $1 \leqslant M(\gamma) \leqslant +\infty$. Однако мы будем предполагать, что при некотором $\tau \in (0,1]$ выполнено

$$M(\gamma) < +\infty \quad \text{для любого} \quad \gamma \in (0,\tau). \tag{4}$$

Следует отметить, что функция M фактически для всех хорошо известных случайных процессов удовлетворяет условию (4). При выполнении этого условия конечна следующая важная константа («энтропия») для последовательности $(\bar\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$E := \sum_{k\in\mathbb{N}:\,\bar\lambda_k>0} |\ln\bar\lambda_k|\,\bar\lambda_k, \tag{5}$$

которая впервые была введена в работе [6].

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть при некотором* $\tau\in(0,1]$ *выполнено* (4). *Тогда для существования константы* $C>0$ *такой, что*

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau}\,|\ln\varepsilon^2| + C\sqrt{d\,|\ln\varepsilon^2|} \quad \text{для любых} \quad d\in\mathbb{N},\ \varepsilon\in(0,1), \tag{6}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\varlimsup_{\delta\to0+} M(\tau-\delta)^\delta < \infty. \tag{7}$$

Следствие. *Пусть* $\lambda_k = O\big(k^{-\alpha}\big)$, $k\in\mathbb{N}$, *при некотором* $\alpha>1$. *Тогда существует константа* $C>0$ *такая, что*

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant Ed + \tfrac{1}{\alpha-1}\,|\ln\varepsilon^2| + C\sqrt{d\,|\ln\varepsilon^2|} \quad \text{для любых} \quad d\in\mathbb{N},\ \varepsilon\in(0,1). \tag{8}$$

Предположению следствия удовлетворяют винеровский процесс и его интегрированные версии (см. [7]), дробное броуновское движение (см. [8]), процесс Орнштейна — Уленбека (см. [9]) и многие другие.

Доказательства теоремы 1 и следствия приводятся в следующем пункте. Сейчас сравним оценки (6) и (8) с существующими результатами в асимптотических постановках.

В статье [6] Лифшицем и Туляковой была получена следующая асимптотика для $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при фиксированном $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\to0$.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_k\sim\beta k^{-\alpha}$, $k\to\infty$, *при некоторых* $\alpha>1$ *и* $\beta>0$. *Тогда*

$$\forall d\in\mathbb{N}\quad \ln n^{Y_d}(\varepsilon) = \tfrac{1}{\alpha-1}|\ln\varepsilon^2| + \tfrac{\alpha}{\alpha-1}(d-1)\ln|\ln\varepsilon^2| + A_{d,\alpha,\beta} + o(1),\quad \varepsilon\to0, \tag{9}$$

где величина $A_{d,\alpha,\beta}\in\mathbb{R}$ *зависит от* d, α *и* β, *но не зависит от* ε.

Видно, что главные ε-компоненты в оценке (8) и в асимптотике (9) совпадают при схожих предположениях на λ_k, $k\in\mathbb{N}$.

Также в статье [6] (см. также [10]) была получена асимптотика $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$ и фиксированном значении $\varepsilon\in(0,1)$.

Теорема 3. *Пусть* $\sum_{k\in\mathbb{N}:\bar\lambda_k>0}|\ln\bar\lambda_k|^2\,\bar\lambda_k<\infty$. *Тогда*

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \ln n^{Y_d}(\varepsilon) = Ed + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sigma\sqrt{d} + o(\sqrt{d}),\quad d\to\infty, \tag{10}$$

где $\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ *— это квантиль порядка* $1-\varepsilon^2$ *стандартного нормального закона, константа* E *определяется по формуле* (5), *и*

$$\sigma^2 := \sum_{k\in\mathbb{N}:\bar\lambda_k>0} |\ln\bar\lambda_k|^2\,\bar\lambda_k - E^2.$$

Понятно, что если имеет место (4), то условие данной теоремы будет выполнено. Сравнивая оценку (8) и асимптотику (10), видим, что главные d-компоненты в них совпадают. Более того, в них подобны и второстепенные члены, содержащие $\sqrt{d}$, так как $\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2) \sim \sqrt{2|\ln \varepsilon^2|}$, $\varepsilon \to 0$.

Все сделанные замечания указывают на хорошую точность оценки (8).

3. Доказательства. При доказательстве теоремы 1 мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Пусть при некотором* $\tau \in (0,1]$ *выполнено* (4). *Тогда для любых* $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $\gamma \in (0,\tau)$ *справедливо неравенство*

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant d \cdot \frac{\ln M(\gamma)}{\gamma} + |\ln \varepsilon^2| \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma}. \tag{11}$$

Доказательство леммы. Зафиксируем произвольно $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и $\gamma \in (0,\tau)$. Заметим, что

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\bar\lambda_m^{Y_d}\big)^{1-\gamma} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}\Big)^d = M(\gamma)^d < \infty. \tag{12}$$

Введем величину

$$\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon) := \bar\lambda^{Y_d}_{n^{Y_d}(\varepsilon)}. \tag{13}$$

С учетом (3) несложно видеть, что

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{n^{Y_d}(\varepsilon)} 1 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_m^{Y_d} \geqslant \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}} 1 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_m^{Y_d} \geqslant \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}} \left(\frac{\bar\lambda_m^{Y_d}}{\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}\right)^{1-\gamma}.$$

Тогда

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{\bar\lambda_m^{Y_d}}{\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}\right)^{1-\gamma} = \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)^{-1+\gamma} \sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\bar\lambda_m^{Y_d}\big)^{1-\gamma}. \tag{14}$$

Далее по определению $n^{Y_d}(\varepsilon)$ имеем

$$\varepsilon^2 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ m \geqslant n^{Y_d}(\varepsilon)}} \bar\lambda_m^{Y_d} \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_m^{Y_d} \leqslant \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}} \bar\lambda_m^{Y_d} \leqslant \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)^{\gamma} \cdot \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_m^{Y_d} \leqslant \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}} \big(\bar\lambda_m^{Y_d}\big)^{1-\gamma}.$$

Тогда

$$\varepsilon^2 \leqslant \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)^{\gamma} \sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\bar\lambda_m^{Y_d}\big)^{1-\gamma}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)^{-1} \leqslant \Big(\varepsilon^{-2} \cdot \sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\bar\lambda_m^{Y_d}\big)^{1-\gamma}\Big)^{1/\gamma},$$

которое вместе с (14) дает оценку

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\bar\lambda_m^{Y_d}\big)^{1-\gamma} \bigg(\varepsilon^{-2} \sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\bar\lambda_m^{Y_d}\big)^{1-\gamma}\bigg)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \bigg(\sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\bar\lambda_m^{Y_d}\big)^{1-\gamma}\bigg)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

С учетом (12) имеем

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}\bigg)^{\frac{d}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}\bigg)^{\frac{d}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}} = M(\gamma)^{\frac{d}{\gamma}} \cdot \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

Отсюда, логарифмируя, получаем нужное неравенство:

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant d \cdot \frac{\ln M(\gamma)}{\gamma} + |\ln \varepsilon^2| \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство (6). Тогда, в частности, при $d = 1$ имеем

$$\ln n^{Y_1}(\varepsilon) \leqslant E + \tfrac{1-\tau}{\tau}\,|\ln\varepsilon^2| + C\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Определим при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ величину $\bar\lambda^{Y_1}(\varepsilon)$ по формуле (13). Воспользуемся следующим неравенством из [10, с. 840]:

$$\big|\ln \bar\lambda^{Y_1}(\varepsilon_2)\big| \leqslant \ln n^{Y_1}(\varepsilon_1) - \ln(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2), \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1.$$

Положим $\varepsilon_1 := \varepsilon/\sqrt{2}$ и $\varepsilon_2 := \varepsilon$ при $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}\big|\ln \bar\lambda^{Y_1}(\varepsilon)\big| &\leqslant \ln n^{Y_1}\big(\varepsilon/\sqrt{2}\big) - \ln(\varepsilon^2 - \varepsilon^2/2) \leqslant \\ &\leqslant E + \tfrac{1-\tau}{\tau}\,|\ln(\varepsilon^2/2)| + C\sqrt{|\ln(\varepsilon^2/2)|} + |\ln(\varepsilon^2/2)| = \\ &= E + \tfrac{1}{\tau}(|\ln\varepsilon^2| + \ln 2) + C\sqrt{|\ln\varepsilon^2| + \ln 2}.\end{aligned}$$

Обозначим за x_ε правую часть последнего неравенства. Введем функцию распределения

$$F(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k \mathbb{1}(\bar\lambda_k \geqslant e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

В работе [10, с. 841] показано, что

$$\big|\ln \bar\lambda^{Y_1}(\varepsilon)\big| = F^{-1}(1-\varepsilon^2) = \inf\big\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant 1 - \varepsilon^2\big\}, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Тогда имеем $F^{-1}(1-\varepsilon^2) \leqslant x_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$. Отсюда $F(x_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon^2$, $\varepsilon \in (0,1)$, т. е.

$$1 - F(x_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{16}$$

Из равенства

$$x = E + \tfrac{1}{\tau}\,(|\ln\varepsilon^2| + \ln 2) + C\sqrt{|\ln\varepsilon^2| + \ln 2}$$

при любом $x \geqslant E$ можно выразить

$$\sqrt{|\ln \varepsilon^2| + \ln 2} = \frac{\tau}{2}\left(\sqrt{C^2 + \tfrac{4}{\tau}(x - E)} - C\right) = \sqrt{C_\tau^2 + \tau(x - E)} - C_\tau,$$

где $C_\tau := \tau C/4$. Отсюда имеем

$$|\ln \varepsilon^2| = \left(\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x - E)} - C_\tau\right)^2 - \ln 2.$$

Таким образом, с учетом (16) справедливо

$$1 - F(x) \leqslant \exp\left\{-\left(\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x - E)} - C_\tau\right)^2 + \ln 2\right\}, \quad x \geqslant E.$$

Возводя в квадрат выражение в скобках в экспоненте, в итоге получаем

$$1 - F(x) \leqslant 2e^{-2C_\tau^2} \exp\left\{-\tau(x - E) + 2C_\tau\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x - E)}\right\}, \quad x \geqslant E. \tag{17}$$

Далее рассмотрим $M(\tau - \delta)$ при $\delta \in (0, \tau)$. В соответствии с (15) справедливо представление

$$M(\tau - \delta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\tau+\delta} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \exp\left\{(\tau - \delta)|\ln \bar{\lambda}_k|\right\}\bar{\lambda}_k = \int_0^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}\, dF(x).$$

В силу того, что $M(\tau - \delta) < \infty$, имеем

$$\lim_{T\to\infty} \int_{x>T} e^{(\tau-\delta)x}\, dF(x) = 0.$$

Тогда из оценки

$$\int_{x>T} e^{(\tau-\delta)x}\, dF(x) \geqslant e^{(\tau-\delta)T} \int_{x>T} dF(x) = e^{(\tau-\delta)T}(1 - F(T)), \quad T > 0,$$

получаем

$$\lim_{T\to\infty} e^{(\tau-\delta)T}(1 - F(T)) = 0.$$

С учетом этого соотношения проинтегрируем $M(\tau - \delta)$ по частям:

$$M(\tau - \delta) = -\int_0^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}\, d(1 - F(x)) =$$

$$= -e^{(\tau-\delta)x}(1 - F(x))\Big|_0^{+\infty} + (\tau - \delta)\int_0^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1 - F(x))\, dx =$$

$$= 1 - F(0) + (\tau - \delta)\int_0^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1 - F(x))\, dx.$$

Далее оценим

$$M(\tau-\delta) = 1-F(0)+(\tau-\delta)\int\limits_0^E e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx+(\tau-\delta)\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 1-F(0)+(\tau-\delta)e^{(\tau-\delta)E}(1-F(0))E+(\tau-\delta)\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 1+\tau E\cdot e^{\tau E}+\tau\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx.$$

С помощью (17) и с учетом неравенства $0<\delta<\tau$ оценим последний интеграл:

$$\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \leqslant e^{\tau E}\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)(x-E)}(1-F(x))\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{\tau E-2C_\tau^2}\int\limits_E^{+\infty}\exp\Big\{-\delta(x-E)+2C_\tau\sqrt{C_\tau^2+\tau(x-E)}\Big\}\,dx =$$

$$= \tfrac{2}{\tau}\cdot e^{\tau E-2C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}(u-C_\tau^2)+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{2}{\tau}\cdot e^{\tau E-C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du.$$

Таким образом, имеем

$$M(\tau-\delta) \quad\leqslant\quad 1+\tau E\cdot e^{\tau E}+2e^{\tau E-C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du.$$

Далее оценим последний интеграл. Представим его в следующем виде:

$$\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du = J_1(\tau,\delta)+J_2(\tau,\delta),$$

где

$$J_1(\tau,\delta) := \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du, \quad J_2(\tau,\delta) := \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du.$$

Оценим первый интеграл:

$$J_1(\tau,\delta) = \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u\big(1-\tfrac{2\tau C_\tau}{\delta\sqrt{u}}\big)\Big\}\,du \leqslant \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\big\{-\tfrac{\delta}{2\tau}\,u\big\}\,du =$$
$$= \frac{2\tau}{\delta}\exp\big\{-\tfrac{8\tau C_\tau^2}{\delta}\big\} \leqslant \frac{2\tau}{\delta}\exp\big\{-8C_\tau^2\big\}.$$

Оценим второй интеграл:

$$J_2(\tau,\delta) \leqslant \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\Big\}\,du = \exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u\big\}\,du =$$
$$= \exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot\frac{\tau}{\delta}\cdot\Big(\exp\big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,C_\tau^2\big\}-\exp\big\{-\tfrac{16\tau}{\delta}\,C_\tau^2\big\}\Big) \leqslant \frac{\tau}{\delta}\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du = J_1(\tau,\delta)+J_2(\tau,\delta) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\tau}{\delta}\exp\big\{-8C_\tau^2\big\} + \frac{\tau}{\delta}\cdot\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\} \leqslant \frac{\tau}{\delta}\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot\Big(2\exp\big\{-16C_\tau^2\big\}+1\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3\tau}{\delta}\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}.$$

В итоге получаем

$$M(\tau-\delta) \leqslant c_{\tau,1} + \frac{c_{\tau,2}}{\delta}\cdot\exp\Big\{\frac{c_{\tau,3}}{\delta}\Big\},$$

где

$$c_{\tau,1} := 1+\tau E\cdot e^{\tau E}, \qquad c_{\tau,2} := 6\tau e^{\tau E - C_\tau^2}, \qquad c_{\tau,3} := \exp\big\{8\tau C_\tau^2\big\}.$$

Отсюда несложно видеть, что соотношение (7) выполнено.

Достаточность. Предположим, что выполнено условие (7). Зафиксируем произвольные $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$. Воспользуемся неравенством (11) леммы с

$$\gamma = \gamma_{d,\varepsilon} := \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}\,\tau}{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}} \in (0,\tau). \tag{18}$$

Имеем

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant d\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon})}{\gamma_{d,\varepsilon}} + |\ln\varepsilon^2|\cdot\frac{1-\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}} =$$
$$= Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau}|\ln\varepsilon^2| + d\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon})-E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}} + |\ln\varepsilon^2|\cdot\left(\frac{1}{\gamma_{d,\varepsilon}}-\frac{1}{\tau}\right) =$$
$$= Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau}|\ln\varepsilon^2| + \sqrt{d\,|\ln\varepsilon^2|}\cdot\big(R(d,\varepsilon)+r(d,\varepsilon)\big), \tag{19}$$

где

$$R(d,\varepsilon) := \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}}, \quad r(d,\varepsilon) := \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{d}}\cdot\left(\frac{1}{\gamma_{d,\varepsilon}} - \frac{1}{\tau}\right).$$

Сначала рассмотрим $r(d,\varepsilon)$. Сделаем подстановку (18):

$$r(d,\varepsilon) = \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{d}}\cdot\left(\frac{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}\,\tau} - \frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{d}\,\tau} - \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{d}\tau} = \frac{1}{\tau}.$$

Далее рассмотрим выражение для $R(d,\varepsilon)$. Представим его в следующем виде:

$$\begin{aligned} R(d,\varepsilon) &= \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}\cdot\gamma_{d,\varepsilon}\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} = \\ &= \frac{\sqrt{d}\,\tau}{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} = (\tau-\gamma_{d,\varepsilon})\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2}. \end{aligned}$$

Предположим, что $|\ln\varepsilon^2| > d$. Тогда

$$\gamma_{d,\varepsilon} = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{d}{|\ln\varepsilon^2|}}+1} > \frac{\tau}{2}.$$

В этом случае с учетом того, что $E \geqslant 0$, справедлива оценка

$$R(d,\varepsilon) \leqslant (\tau-\gamma_{d,\varepsilon})\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon})}{\tau^2/4} = 4(\tau-\gamma_{d,\varepsilon})\ln M\big(\tau-(\tau-\gamma_{d,\varepsilon})\big).$$

Несложно видеть, что предположение (7) влечет существование константы $B_{\tau,1}$ такой, что $R(d,\varepsilon) \leqslant B_{\tau,1}$ для любых d и ε, удовлетворяющих $|\ln\varepsilon^2| > d$.

Предположим, что $|\ln\varepsilon^2| \leqslant d$. Тогда $\gamma_{d,\varepsilon} \in (0,\tau/2]$. Рассмотрим функцию $L(\gamma) := \ln M(\gamma)$ при $\gamma \in (0,\tau/2]$. Заметим, что

$$L(\gamma) = L(0) + L'(0)\gamma + L''(\theta)\,\frac{\gamma^2}{2}$$

при каждом $\gamma \in (0,\tau/2]$ и некоторых $\theta \in (0,\gamma)$. Здесь

$$\begin{aligned} L(0) &= \ln\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar\lambda_k\Big) = \ln 1 = 0, \\ L'(0) &= \ln\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar\lambda_k^{1-\gamma}\Big)'\bigg|_{\gamma=0} = \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}}|\ln\bar\lambda_k|\bar\lambda_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar\lambda_k^{1-\gamma}}\bigg|_{\gamma=0} = E \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L''(\theta) &= \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}}|\ln\bar\lambda_k|\bar\lambda_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar\lambda_k^{1-\gamma}}\right)'\Bigg|_{\gamma=\theta} = \\ &= \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}}|\ln\bar\lambda_k|^2\bar\lambda_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar\lambda_k^{1-\gamma}} - \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}}|\ln\bar\lambda_k|\bar\lambda_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar\lambda_k^{1-\gamma}}\right)^2\right)\Bigg|_{\gamma=\theta} = \\ &= \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}}|\ln\bar\lambda_k|^2\bar\lambda_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar\lambda_k^{1-\theta}} - \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}}|\ln\bar\lambda_k|\bar\lambda_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar\lambda_k^{1-\theta}}\right)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $\gamma \in (0, \tau/2]$

$$L''(\theta) \leqslant \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar{\lambda}_k|^2 \bar{\lambda}_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\theta}} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar{\lambda}_k|^2\, \bar{\lambda}_k^{1-\frac{\tau}{2}}.$$

Обозначим за $B_{\tau,2}$ величину в правой части этого неравенства. Тогда имеем

$$L(\gamma) \leqslant E\gamma + B_{\tau,2}\,\frac{\gamma^2}{2}, \quad \gamma \in (0, \tau/2].$$

Отсюда, в частности, получаем оценку

$$\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} = \frac{L(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \leqslant \frac{B_{\tau,2}}{2}.$$

Возвращаемся к оценке $R(d,\varepsilon)$ при $|\ln\varepsilon^2| \leqslant d$:

$$R(d,\varepsilon) = (\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \leqslant \frac{\tau B_{\tau,2}}{2}.$$

Таким образом, для любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ имеем $R(d,\varepsilon) \leqslant \max\{B_{\tau,1}, B_{\tau,2}/2\}$. Тогда

$$R(d,\varepsilon) + r(d,\varepsilon) \leqslant \max\{B_{\tau,1}, B_{\tau,2}/2\} + \frac{1}{\tau}, \quad d \in \mathbb{N}, \varepsilon \in (0,1).$$

Обозначая через C правую часть этого неравенства, из оценки (19) получаем нужное неравенство (6). $\square$

Доказательство следствия. Действительно, при $\lambda_k = O\big(k^{-\alpha}\big)$, $k \in \mathbb{N}$, имеем $\bar{\lambda}_k \leqslant ck^{-\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, при некотором $c > 0$. Тогда условие (4) выполнено при $\tau = 1 - \frac{1}{\alpha}$. С таким τ рассмотрим $M(\tau - \delta)$ при $\delta > 0$:

$$M\big(1 - \tfrac{1}{\alpha} - \delta\big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (ck^{-\alpha})^{1/\alpha+\delta} = c^{1/\alpha+\delta} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\alpha\delta} \leqslant c^{1/\alpha+\delta}\big(1 + \tfrac{1}{\alpha\delta}\big).$$

Последнее неравенство вытекает из известных оценок Коши — Маклорена для суммы ряда через интеграл. Отсюда получаем

$$\varlimsup_{\delta\to 0+} M\big(1 - \tfrac{1}{\alpha} - \delta\big)^{\delta} \leqslant \varlimsup_{\delta\to 0+} c^{\delta/\alpha+\delta^2}\big(1 + \tfrac{1}{\alpha\delta}\big)^{\delta} = 1,$$

т. е. выполнено (7). Тогда имеет место асимптотика (6), где $\frac{1-\tau}{\tau} = \frac{1}{\alpha-1}$. $\square$

Авторы выражают большую благодарность неизвестным рецензентам за их комментарии и замечания, которые помогли улучшить эту статью.

Литература

1. Brown J. L. Mean square truncation error in series expansions of random functions. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **8** (1), 28–32 (1960).

2. Ritter K. *Average-case Analysis of Numerical Problems.* In Ser.: Lecture Notes in Math., no. 1733. Berlin, Springer (2000).

3. Wasilkowski G. W., Woźniakowski H. Average case optimal algorithms in Hilbert spaces. *J. Approx. Theory* **47**, 17–25 (1986).
4. Гихман И. И., Скороход А. В. *Теория случайных процессов.* Т. 1. Москва, Наука (1971).
5. Novak E., Woźniakowski H. *Tractability of Multivariate Problems. Vol. 1: Linear Information.* In Ser.: EMS Tracts. Math., vol. 6. Zűrich, EMS (2008).
6. Lifshits M. A., Tulyakova E. V. Curse of dimensionality in approximation of random fields. *Probab. Math. Stat.* **26** (1), 97–112 (2006).
7. Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H. Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes. *Probab. Math. Stat.* **32** (1), 131–165 (2012).
8. Karol A., Nazarov A., Nikitin Ya. Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (3), 1443–1474 (2008).
9. Corlay S., Pagés G. Functional quantization-based stratified sampling methods. *Monte Carlo Methods Appl.* **21** (1), 1–32 (2015).
10. Khartov A. A. Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements. *J. Complexity* **31**, 835–866 (2015).

Статья поступила в редакцию 7 марта 2021 г.;
после доработки 7 июня 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Кравченко Александр Андреевич — аспирант; sasha121196@mail.ru
Хартов Алексей Андреевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; alexeykhartov@gmail.com

An estimate of average case approximation complexity for tensor degrees of random processes*

A. A. Kravchenko[1], *A. A. Khartov*[2]

[1] National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, 49, Kronverksky pr., St. Petersburg, 197101, Russian Federation
[2] Smolensk State University, 4, ul. Przhevalskogo, Smolensk, 214000, Russian Federation

For citation: Kravchenko A. A., Khartov A. A. An estimate of average case approximation complexity for tensor degrees of random processes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 580–592.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.403 (In Russian)

We consider random fields that are tensor degrees of a random process of second order with continuous covariance function. The average case approximation complexity of a random field is defined as the minimal number of evaluations of linear functionals needed to approximate the field with relative 2-average error not exceeding a given threshold. In the present paper we estimate the growth of average case approximation complexity of random field for arbitrary high its parametric dimension and for arbitrary small error threshold. Under rather weak assumptions on the spectrum of covariance operator of the generating random process, we obtain necessary and sufficient condition that the average case approximation complexity has the upper estimate of a special form. We show that this condition covers a wide class of cases and the order of the estimate of the average case approximation complexity coincides with the order of its asymptotics, which were obtained earlier in the paper by Lifshits and Tulyakova.

Keywords: average case approximation complexity, random field, tensor degree, high dimension, tractability.

*The work of A. A. Khartov was supported by the joint Russian Foundation for Basic Research and German Research Foundation (grant no. 20-51-12004).

References

1. Brown J. L. Mean square truncation error in series expansions of random functions. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **8** (1), 28–32 (1960).

2. Ritter K. *Average-case Analysis of Numerical Problems.* In Ser.: Lecture Notes in Math., no. 1733. Berlin, Springer (2000).

3. Wasilkowski G. W., Woźniakowski H. Average case optimal algorithms in Hilbert spaces. *J. Approx. Theory* **47**, 17–25 (1986).

4. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *The Theory of Stochastic Processes.* Vol. 1. Moscow, Nauka Publ. (1971). (In Russian)

5. Novak E., Woźniakowski H. *Tractability of Multivariate Problems. Vol. 1: Linear Information.* In Ser.: EMS Tracts. Math., vol. 6. Zűrich, EMS (2008).

6. Lifshits M. A., Tulyakova E. V. Curse of dimensionality in approximation of random fields. *Probab. Math. Stat.* **26** (1), 97–112 (2006).

7. Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H. Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes. *Probab. Math. Stat.* **32** (1), 131–165 (2012).

8. Karol A., Nazarov A., Nikitin Ya. Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (3), 1443–1474 (2008).

9. Corlay S., Pagés G. Functional quantization-based stratified sampling methods. *Monte Carlo Methods Appl.* **21** (1), 1–32 (2015).

10. Khartov A. A. Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements. *J. Complexity* **31**, 835–866 (2015).

Received: March 7, 2021
Revised: June 7, 2021
Accepted: June 17, 2021

Authors' information:

Aleksandr A. Kravchenko — sasha121196@mail.ru
Alexey A. Khartov — alexeykhartov@gmail.com