МАТЕМАТИКА

УДК 517.5
MSC 41A27, 41A44, 42A50

О константах в обратных теоремах для первой производной*

О. Л. Виноградов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Виноградов О. Л.* О константах в обратных теоремах для первой производной // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 559–571. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.401

Известные доказательства обратных теорем теории приближения тригонометрическими многочленами и целыми функциями экспоненциального типа основаны на идее С. Н. Бернштейна разложить функцию в ряд по функциям ее наилучшего приближения. В работе предлагается новый способ доказательства обратных теорем. Устанавливаются довольно простые тождества, из которых сразу следуют упомянутые обратные теоремы, причем с улучшенными константами. Этот метод применим к производным любого порядка, не обязательно целого, а также (с некоторыми изменениями) к оценкам некоторых других функционалов через наилучшие приближения. В данной работе рассматривается случай первой производной самой функции и ее тригонометрически сопряженной.

Ключевые слова: обратные теоремы, сопряженная функция.

1. Введение. ***1.1. Обозначения.*** В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — множества вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно. Если $p \in [1, +\infty)$, то X_p есть пространство $L_p(\mathbb{R})$ или пространство L_p 2π-периодических функций f с нормой $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p}$, где $E = \mathbb{R}$ или $[-\pi, \pi]$ соответственно; X_∞ есть снабженное равномерной нормой пространство $UCB(\mathbb{R})$ равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций или пространство C непрерывных 2π-периодических функций. Если из контекста не сле-

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00055).

дует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Эквивалентные функции отождествляются.

Символом $\widetilde{f}$ обозначается функция, тригонометрически сопряженная к f. Она может быть определена одной из формул [1, п. 79; 2, п. 3.11]:

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{x-t}{2} \, dt, \qquad \widetilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t} \, dt,$$
$$\widetilde{f}(x) = \frac{x-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(u) e^{ixu} \, du$$

(первые два интеграла понимаются в смысле главного значения, а третий — в $L_2(\mathbb{R})$; $\widehat{F}$ обозначает преобразование Фурье F). Первая формула применима в периодическом случае, вторая — если $f \in L_p(\mathbb{R})$ при $p < +\infty$, третья — если функция $F(t) = \frac{f(t)}{t-i}$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и, в частности, если $f \in X_p$ при некотором $p \in [2, +\infty]$. В перечисленных случаях результат может отличаться на постоянное слагаемое. Далее нам важна не сама сопряженная функция, а ее производные, и потому выбор постоянной не играет роли. Если задано семейство функций, то запись $\widetilde{f}_n$ означает то же, что $\widetilde{f_n}$.

Символами $X_p^{(r)}$ и $\widetilde{X}_p^{(r)}$ обозначаются множества функций f из X_p, таких что f (соответственно $\widetilde{f}$) дифференцируема $r-1$ раз, $f^{(r-1)}$ ($\widetilde{f}^{(r-1)}$) локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in X_p$ ($\widetilde{f}^{(r)} \in X_p$). При $p < +\infty$ эти классы стандартно обозначаются $W_p^{(r)}$ и $\widetilde{W}_p^{(r)}$.

Далее, $A_u(f)_p$ есть наилучшее приближение функции f целыми функциями степени не выше u в пространстве X_p, а $T_u f$ — соответствующая функция наилучшего приближения. В периодическом случае $A_u(f)$ совпадает с $E_{\lfloor u \rfloor}(f)$ ($\lfloor u \rfloor$ — целая часть числа u) — наилучшим приближением f тригонометрическими многочленами степени не выше u. Индекс p у обозначений нормы, наилучшего приближения и т. п. указывает на пространство X_p и иногда опускается.

Пусть также $e_y(x) = e^{ixy}$,

$$\Phi_n(x) = \int_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|y|}{n}\right) e^{ixy} \, dy = \frac{4 \sin^2 \frac{nx}{2}}{nx^2}, \quad \sigma_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \Phi_n(t) \, dt$$

— ядро Фейера и интеграл Фейера функции f соответственно.

1.2. Обзор результатов. Обратными теоремами конструктивной теории функций называют утверждения, в которых из возможности приблизить функцию с той или иной скоростью выводятся ее структурные свойства. В работе рассматриваются обратные теоремы следующего вида. Если $r \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$, $f \in X_p$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} A_k(f)_p < +\infty, \tag{1.1}$$

то $f \in X_p^{(r)}$ и

$$\|f^{(r)}\|_p \leqslant D_r \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+1)^r - k^r\big) A_k(f)_p. \tag{1.2}$$

Первое утверждение такого типа установил С. Н. Бернштейн для пространства C периодических функций [3]; общий случай и раннюю историю вопроса см. в [2, пп. 6.1.3 и 6.1.6]. Неравенство (1.2) может быть также записано в виде [4, теорема 2]

$$\|f^{(r)}\|_p \leqslant D_r \int_0^\infty A_u(f)_p \, du^r. \tag{1.3}$$

Ввиду убывания $A_u(f)_p$ по u интеграл в (1.3) не превосходит суммы в (1.2), а для 2π-периодических функций совпадает с ней. Конечность суммы и интеграла равносильны.

Из того же условия (1.1) вытекает включение $f \in \widetilde{X}_p^{(r)}$ и неравенство

$$\|\widetilde{f}^{(r)}\|_p \leqslant \widetilde{D}_r \int_0^\infty A_u(f)_p \, du^r. \tag{1.4}$$

Этот результат для периодических функций можно найти в [5] и [2, п. 6.7.2]. Для непериодических функций его можно вывести из результатов в [2, п. 5.9.4].

Конкретные оценки констант D_r в (1.2) и (1.3) получил М. Д. Стерлин [4, 6]: $1 \leqslant D_r \leqslant 3+2\sqrt{2}$; см. также [7, теорема 3.6.1]. Из доказательства теоремы 3.6.2 в [7] следует неравенство (1.4) с константой $\widetilde{\mathcal{K}}_1(3+2\sqrt{2})$ в периодическом случае. Здесь $\widetilde{\mathcal{K}}_1 = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}$.

Заметим еще, что в некоторых из указанных источников оценки норм производных $\|f^{(r)}\|$ и $\|\widetilde{f}^{(r)}\|$ буквально отсутствуют, однако они сразу получаются из оценок модулей непрерывности $\omega_r(f,h)$ и $\omega_r\big(\widetilde{f},h\big)$ предельным переходом при $h \to 0$. Стандартным приемом, а именно заменой функции f на $f - T_N f$, из (1.2)–(1.4) выводятся оценки наилучших приближений с теми же константами; см. следствие из теорем 1 и 2 настоящей работы.

Известные доказательства неравенств (1.2)–(1.4) основаны на исходной идее Бернштейна разложить функцию в ряд по многочленам ее наилучшего приближения. Исключение составляет статья [8], в которой некоторые прямые и обратные теоремы доказывались методом сравнения сверточных операторов. В настоящей работе предлагается иной, тоже использующий сверточные операторы, способ доказательства обратных теорем. Устанавливаются довольно простые тождества, из которых сразу следуют упомянутые обратные теоремы, причем с улучшенными константами. Этот метод применим к производным любого порядка, не обязательно целого. В данной работе мы ограничимся случаем $r=1$, поскольку константы при различных значениях параметров требуют отдельного исследования.

Основной результат работы (теорема 3) таков. Пусть $p \in [1,+\infty]$, $f \in X_p$ и $\int_0^\infty A_u(f)_p \, du < +\infty$. Тогда неравенства

$$\|f'\|_p \leqslant D_1 \int_0^\infty A_u(f)_p \, du, \quad \|\widetilde{f}'\|_p \leqslant \widetilde{D}_1 \int_0^\infty A_u(f)_p \, du$$

выполняются с константами $D_1 < 2.800851$,

$$\widetilde{D}_1 \leqslant \frac{4}{9 \ln \operatorname{tg} \frac{13\pi}{44}} \left(\frac{1}{2} + \frac{22}{\pi^2} \sum_{q=0}^\infty \frac{\left|\sin \frac{(2q+1)\pi}{11}\right|}{(2q+1)^2} \right) < 2.335138.$$

В пространстве $UCB(\mathbb{R})$ точные константы в обоих неравенствах не меньше 2.

2. Тождества для производных.

Лемма. *При всех* $r \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$ *пространства* $X_p^{(r)}$ *и* $\widetilde{X}_p^{(r)}$ *с нормами*

$$\|f\|_p + \|f^{(r)}\|_p \quad \text{и} \quad \|f\|_p + \|\widetilde{f}^{(r)}\|_p$$

полны.

Короткий способ доказательства вышеприведенной леммы связан с использованием обобщенных функций. Мы докажем ее более длинным способом, который не опирается на теорию обобщенных функций.

Доказательство. Утверждение для пространств $X_p^{(r)}$ общеизвестно. Докажем его для пространств $\widetilde{X}_p^{(r)}$. Достаточно доказать, что если $f_n \in \widetilde{X}_p^{(r)}$, $f_n \to f$ и $\widetilde{f}_n^{(r)} \to g$ в X_p, то $f \in \widetilde{X}_p^{(r)}$ и $\widetilde{f}^{(r)} = g$. При $p \in (1, +\infty)$ утверждение очевидно, поскольку оператор сопряжения непрерывен. Пусть $p = +\infty$. Тогда [1, п. 79]

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}(x)|^2}{x^2+1}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f_n(x) - f(x)|^2}{x^2+1}\, dx,$$

что стремится к нулю ввиду равномерной сходимости f_n к f. Поэтому некоторая подпоследовательность последовательности $\widetilde{f}_n$ стремится к $\widetilde{f}$ почти везде. При $p = 1$ такая подпоследовательность тоже найдется, так как оператор сопряжения имеет слабый тип $(1, 1)$ (см., например, [9, гл. 2, § 2]). Запишем формулу Тейлора

$$\widetilde{f}_n(x) = P_{r-1,n}(x) + \int_0^x \widetilde{f}_n^{(r)}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}\, dt,$$

где $P_{r-1,n}$ — алгебраический многочлен степени меньше r. Перейдя к пределу при почти всех x, получим

$$\widetilde{f}(x) = P_{r-1}(x) + \int_0^x g(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}\, dt$$

(по доказанному предел $P_{r-1,n}$ существует, а тогда это тоже многочлен степени меньше r). Таким образом, $\widetilde{f}^{(r)}$ существует и равна g. $\square$

Пусть Ψ — функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, $u > 0$. Положим

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyt} d\Psi(t)$$

и определим оператор $Q_{\psi,u}$ равенством

$$Q_{\psi,u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{t}{u}\right) d\Psi(t).$$

Множество таких функций ψ обозначается $\mathbf{B}(\mathbb{R})$. Операторы $Q_{\psi,u}$ будем рассматривать как операторы из X_p в X_p. Как известно, $\|Q_{\psi,u}\| \leqslant \frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi}$, где $\|d\Psi\|_1$ — вариация функции Ψ (или, что равносильно, порожденного ей борелевского заряда). В пространствах $UCB(\mathbb{R})$ и $L_1(\mathbb{R})$ это неравенство обращается в равенство. По поводу определения свертки см. [9, гл. 2, § 1].

Отметим один частный случай: если

$$\psi(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i(k+\alpha)\frac{\pi y}{\ell}},$$

то

$$Q_{\psi,u}f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k f\left(\frac{(k+\alpha)\pi}{\ell u}\right), \qquad \frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|.$$

В предположении суммируемости подынтегральной функции введем обозначение $B_\varphi = \int_0^\infty \frac{\varphi(v)}{v^2}\,dv$.

Теорема 1. *Пусть $p \in [1, +\infty]$, $f \in X_p$, функция φ задана на $\mathbb{R}$, четна, функция $v \mapsto v^{-2}\varphi(v)$ суммируема на $\mathbb{R}_+$, $B_\varphi \neq 0$, $\psi = \varphi \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$.*

1. Если

$$\int_0^\infty \|Q_{\psi,u}f\|_p\,du < +\infty, \tag{2.1}$$

то $f \in \widetilde{X}_p^{(1)}$ и

$$\widetilde{f}\,' = \frac{1}{B_\varphi}\int_0^\infty Q_{\psi,u}f\,du. \tag{2.2}$$

2. Пусть еще $\varphi = 0$ на $[-1, 1]$. Если

$$\int_0^\infty A_u(f)_p\,du < +\infty,$$

то верно заключение пункта 1 и

$$\|\widetilde{f}\,'\|_p \leqslant \frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi|B_\varphi|}\int_0^\infty A_u(f)_p\,du.$$

Доказательство. 1. Обозначим правую часть (2.2) через Πf. Имеем

$$Q_{\psi,u}e_y(x) = \psi\left(\frac{y}{u}\right)e_y(x) = \varphi\left(\frac{|y|}{u}\right)e_y(x).$$

Интегрируя по u и делая замену $\frac{|y|}{u} = v$, получаем

$$\int_0^\infty Q_{\psi,u}e_y(x)\,du = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{|y|}{u}\right)du\,e_y(x) = B_\varphi|y|e_y(x),$$

откуда

$$\Pi e_y = |y|e_y = \widetilde{e_y}\,'.$$

Интегрируя по y, получаем равенство (2.2) для функций вида $x \mapsto \int_{-n}^{n} e^{ixy}d\rho(y)$ (ρ — функция ограниченной вариации) и, в частности, для ядра Фейера Φ_n.

Докажем, что $\Pi\sigma_n f = (\widetilde{\sigma_n f})'$. Рассуждение будем вести для почти всех x. Запишем

$$\Pi\sigma_n f(x) = \frac{1}{B_\varphi}\int_0^\infty \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-z)\Phi_n\left(z - \frac{t}{u}\right)dz\,d\Psi(t)\,du.$$

Суммируемость подынтегральной функции по (z,t) очевидна, откуда имеем

$$\Pi\sigma_n f(x) = \frac{1}{B_\varphi}\int_0^\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-z)G(z,u)\,dz\,du, \tag{2.3}$$

где

$$G(z,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi_n\left(z-\frac{t}{u}\right)\,d\Psi(t) = Q_{\psi,u}\Phi_n(z).$$

По доказанной формуле (2.2) для ядра Фейера получаем

$$\frac{1}{2\pi B_\varphi}\int_{\mathbb{R}} f(x-z)\int_0^\infty G(z,u)\,du\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-z)\widetilde{\Phi}_n'(z)\,dz = (\widetilde{\sigma_n f})'(x).$$

Остается обосновать перестановку интегралов по z и u в (2.3):

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} f(x-z)G(z,u)\,dz\,du = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)\int_0^\infty G(z,u)\,du\,dz. \tag{2.4}$$

Для этого введем множитель сходимости. При всех $\alpha>0$ по теореме Фубини

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} f(x-z)G(z,u)\,dz\,e^{-\alpha u}\,du = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)\int_0^\infty G(z,u)e^{-\alpha u}\,du\,dz. \tag{2.5}$$

Действительно, $\int_{\mathbb{R}}|G(z,u)|\,dz \leqslant \|d\Psi\|_1$, а функция $z\mapsto f(x-z)g(z)$, где $f\in X_p$, $g\in L_1(\mathbb{R})$, суммируема на $\mathbb{R}$. Левая часть (2.5) непрерывна по α в нуле ввиду условия (2.1), поскольку

$$\|Q_{\psi,u}\sigma_n f\|_p = \|\sigma_n Q_{\psi,u} f\|_p \leqslant \|Q_{\psi,u} f\|_p.$$

Обоснуем предельный переход при $\alpha\to 0+$ в правой части (2.5). Запишем

$$\int_0^\infty G(z,u)e^{-\alpha u}\,du = \int_{-n}^{n}\left(1-\frac{|y|}{n}\right)e^{iyz}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{|y|}{u}\right)e^{-\alpha u}\,du\,dy =$$
$$= \int_{-n}^{n}\left(1-\frac{|y|}{n}\right)|y|e^{iyz}\int_0^\infty \frac{\varphi(v)}{v^2}e^{-\frac{\alpha|y|}{v}}\,dv\,dy = \int_0^\infty \frac{\varphi(v)}{v^2}P_{\frac{\alpha}{v}}\widetilde{\Phi}_n'(z)\,dv,$$

где P_s — интеграл Пуассона. Отсюда получаем

$$\left\|\int_0^\infty G(\cdot,u)e^{-\alpha u}\,du - \int_0^\infty G(\cdot,u)\,du\right\|_1 \leqslant \int_0^\infty \frac{|\varphi(v)|}{v^2}\left\|P_{\frac{\alpha}{v}}\widetilde{\Phi}_n' - \widetilde{\Phi}_n'\right\|_1\,dv,$$

что стремится к нулю по теореме Лебега о мажорированной сходимости, поскольку

$$\left\|P_{\frac{\alpha}{v}}\widetilde{\Phi}_n' - \widetilde{\Phi}_n'\right\|_1 \leqslant 2\left\|\widetilde{\Phi}_n'\right\|_1.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-z)\int_0^\infty G(z,u)e^{-\alpha u}\,du\,dz \underset{\alpha\to 0+}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x-z)\int_0^\infty G(z,u)\,du\,dz.$$

Равенство (2.4) доказано. Следовательно, $\Pi\sigma_n f = (\widetilde{\sigma_n f})'$.

С другой стороны,

$$\Pi\sigma_n f(x) = \frac{1}{B_\varphi}\int_0^\infty \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\Phi_n(x-z)\int_{\mathbb{R}} f\left(z-\frac{t}{u}\right)d\Psi(t)\,dz\,du =$$
$$= \frac{1}{B_\varphi}\int_0^\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Phi_n(x-z)Q_{\psi,u}f(z)\,dz\,du =$$
$$= \frac{1}{2\pi B_\varphi}\int_{\mathbb{R}}\Phi_n(x-z)\int_0^\infty Q_{\psi,u}f(z)\,du\,dz = \sigma_n\Pi f(x).$$

Оба раза порядок интегрирования можно поменять по теореме Фубини: суммируемость подынтегральных функций по (t,z) очевидна, а по (z,u) обеспечена условием (2.1).

По тому же условию (2.1) имеем $\Pi f \in X_p$. Следовательно, $\Pi\sigma_n f \to \Pi f$ в X_p. Таким образом, $(\widetilde{\sigma_n f})' \to \Pi f$ в X_p и, как хорошо известно, $\sigma_n f \to f$ в X_p. По лемме будет $f \in \widetilde{X}_p^{(1)}$ и $\widetilde{f}\,' = \Pi f$.

2. Поскольку $\varphi = 0$ на $[-1,1]$, оператор $Q_{\psi,u}$ обнуляется на целых функциях степени не выше u, откуда имеем

$$\|Q_{\psi,u}f\|_p = \|Q_{\psi,u}(f - T_u f)\|_p \leqslant \frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi}A_u(f)_p. \tag{2.6}$$

Следовательно, условие (2.1) выполнено. Оценка нормы следует из (2.2) и (2.6). $\square$

Теорема 2. *Пусть $p \in [1,+\infty]$, $f \in X_p$, функция φ задана на $\mathbb{R}$, нечетна, функция $v \mapsto v^{-2}\varphi(v)$ суммируема на $\mathbb{R}_+$, $B_\varphi \neq 0$, $\psi = i\varphi \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$.*

1. Если

$$\int_0^\infty \|Q_{\psi,u}f\|_p\,du < +\infty,$$

то $f \in X_p^{(1)}$ и

$$f' = \frac{1}{B_\varphi}\int_0^\infty Q_{\psi,u}f\,du. \tag{2.7}$$

2. Пусть еще $\varphi = 0$ на $[-1,1]$. Если

$$\int_0^\infty A_u(f)_p\,du < +\infty,$$

то верно заключение пункта 1 и

$$\|f'\|_p \leqslant \frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi|B_\varphi|}\int_0^\infty A_u(f)_p\,du.$$

Доказательство. Обозначим правую часть (2.7) через Πf. Имеем

$$Q_{\psi,u}e_y(x) = \psi\left(\frac{y}{u}\right)e_y(x) = i\varphi\left(\frac{y}{u}\right)e_y(x) = (i\operatorname{sign} y)\varphi\left(\frac{|y|}{u}\right)e_y(x).$$

Интегрируя по u и делая замену $\frac{|y|}{u} = v$, получаем

$$\int_0^\infty Q_{\psi,u}e_y(x)\,du = (i\operatorname{sign} y)\int_0^\infty \varphi\left(\frac{|y|}{u}\right)du\,e_y(x) = B_\varphi i y e_y(x),$$

откуда $\Pi e_y = e_y'$. Оставшаяся часть доказательства проводится, как в доказательстве теоремы 1. $\square$

Следствие. *В условиях теорем 1 и 2 при любом $N > 0$ будет*

$$A_N(f')_p \leqslant \frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi|B_\varphi|}\left(NA_N(f)_p + \int_N^\infty A_u(f)_p\,du\right),$$
$$A_N(\widetilde{f}\,')_p \leqslant \frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi|B_\varphi|}\left(NA_N(f)_p + \int_N^\infty A_u(f)_p\,du\right).$$

Для доказательства достаточно применить теоремы к функции $f - T_N f$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство пространства X_p, P — полунорма на $\mathfrak{M}$ и выполнены два условия: 1) пространство инвариантно относительно сдвига, т. е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$; 2) существует такая постоянная B, что $P(f) \leqslant B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$. Обозначим через $\mathfrak{M}^{(r)}$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(r)}$ множества функций f из $\mathfrak{M} \cap X_p^{(r)}$ ($\mathfrak{M} \cap \widetilde{X}_p^{(r)}$), для которых $f^{(r)}$ (соответственно $\widetilde{f}^{(r)}$) принадлежит $\mathfrak{M}$.

Замечание. Неравенства в теоремах 1 и 2 и в следствии остаются верными для функций из $\mathfrak{M}^{(r)}$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(r)}$, если в обеих частях неравенств норму в X_p заменить на полунорму P.

Для доказательства надо записать тождества (2.2) и (2.7) для средних Фейера, внести полунорму под знак интеграла (обоснование этой операции см. в [7] и [10]) и перейти к пределу.

Отметим, что обратные теоремы в подпространствах пространства C с полунормами указанного вида доказывались в [7].

3. Уточнение констант. Возникает задача минимизации величины $|B_\varphi^{-1}|\|d\Psi\|_1$ по всем функциям φ из условий теорем 1 и 2. Далее мы оценим константы сверху, выбрав конкретные функции φ.

3.1. Оценка константы $\widetilde{D}_1$ сверху. Для примера возьмем в качестве $Q_{\psi,u}$ отклонения операторов Валле Пуссена $V_{b,u}$ с параметром $b > 1$, то есть положим

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 1, \\ \frac{y-1}{b-1}, & 1 < y < b, \\ 1, & y \geqslant b. \end{cases}$$

Вычислим B_φ:

$$B_\varphi = \int_1^b \frac{y-1}{b-1}\frac{dy}{y^2} + \int_b^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{\ln b}{b-1}.$$

Тождество (2.2) принимает вид

$$\widetilde{f}\,' = \frac{b-1}{\ln b}\int_0^\infty (f - V_{b,u}f)\,du.$$

Оценим нормы операторов $Q_{\psi,u}$:

$$\|Q_{\psi,u}\| \leqslant 1 + I(b), \qquad I(b) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{|\cos x - \cos bx|}{(b-1)x^2}\,dx.$$

В пространствах $UCB(\mathbb{R})$ и $L_1(\mathbb{R})$ это неравенство обращается в равенство, а величина $I(b)$ есть норма оператора Валле Пуссена.

Теорема 1 дает оценку

$$\widetilde{D}_1 \leqslant \min_{b>1}\left(\frac{b-1}{\ln b}(1+I(b))\right)$$

(легко видеть, что минимум достигается). При $b=2$ интеграл вычисляется явно [11, гл. 2, § 3]:

$$I(2)=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}<1.435992.$$

Выбор $b=2$ дает оценку $\widetilde{D}_1<3.514393$. Г. И. Натансон [12] получил тесные двусторонние оценки $I(b)$ и, в частности, доказал, что

$$I(b)\leqslant 1+\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{b+1}{b-1}=I_1(b).$$

Численная минимизация дает $\min\limits_{b>1}\left(\frac{b-1}{\ln b}(1+I_1(b))\right)<3.230531$, минимум достигается при $b=1.313277\ldots$ Для сравнения результатов напомним, что ранее была известна оценка

$$\widetilde{D}_1\leqslant(3+2\sqrt{2})\widetilde{\mathcal{K}}_1<6.797366.$$

Укажем выбор функции φ, дающий меньшую константу. Пусть $\ell>1$, $\varphi(y)=0$ при $|y|\leqslant 1$, функция φ четна, имеет период 2ℓ и раскладывается в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$\varphi(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi y}{\ell}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{|k|}e^{\frac{ik\pi y}{\ell}},\quad a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(t)\cos\frac{k\pi t}{\ell}\,dt.$$

Тогда $\frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi}=\frac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$. Ввиду четности и периодичности функции φ имеем

$$B_\varphi=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\varphi(t)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(t+2\nu\ell)^2}\,dt=$$
$$=\int_0^{\ell}\varphi(t)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(t+2\nu\ell)^2}\,dt=\int_0^{\ell}\varphi(t)\,\frac{\pi^2}{4\ell^2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi t}{2\ell}\,dt.$$

Возьмем $c\in(1,\ell)$ и функцию

$$\varphi(y)=\begin{cases}0, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ \frac{y-1}{c-1}, & 1<y<c,\\ 1, & c\leqslant y\leqslant \ell.\end{cases}$$

Для нее получаем $a_0=2-\frac{c+1}{\ell}$,

$$a_k=\frac{2\ell}{(c-1)\pi^2k^2}\left(\cos\frac{ck\pi}{\ell}-\cos\frac{k\pi}{\ell}\right),\quad k\in\mathbb{N},$$
$$B_\varphi=\frac{1}{c-1}\ln\frac{\sin\frac{c\pi}{2\ell}}{\sin\frac{\pi}{2\ell}}.$$

Вычисления подсказывают, что наилучший выбор дает $\ell = c + 1$. Тогда $a_0 = 1$, $a_k = 0$ при четных $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2q+1} = \frac{(-1)^q 4\ell}{(c-1)\pi^2(2q+1)^2} \sin\frac{(c-1)(2q+1)\pi}{2\ell}, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$
$$B_\varphi = \frac{1}{\ell-2} \ln \operatorname{tg} \frac{(\ell-1)\pi}{2\ell}.$$

Остановимся на значениях $c = \frac{13}{9}$, $\ell = \frac{22}{9}$. Для них получаем

$$a_{2q+1} = (-1)^q \frac{22}{\pi^2(2q+1)^2} \sin\frac{(2q+1)\pi}{11}, \quad B_\varphi = \frac{9}{4} \ln \operatorname{tg} \frac{13\pi}{44},$$

$$\frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi B_\varphi} = \frac{4}{9 \ln \operatorname{tg} \frac{13\pi}{44}} \left(\frac{1}{2} + \frac{22}{\pi^2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left|\sin\frac{(2q+1)\pi}{11}\right|}{(2q+1)^2} \right) < 2.335138.$$

3.2. Оценка константы D_1 ***сверху.*** Пусть $\ell > 1$, $\varphi(y) = 0$ при $|y| \leqslant 1$, функция φ нечетна, имеет период 4ℓ и раскладывается в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin\frac{(k+1/2)\pi y}{\ell} = \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{i(k+1/2)\pi y}{\ell}},$$

где $c_k = b_k$ при $k \geqslant 0$, $c_k = -b_{-k-1}$ при $k < 0$,

$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(t) \sin\frac{(k+1/2)\pi t}{\ell}\, dt.$$

Тогда $\frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$. Обозначим $a^{\langle r\rangle} = |a|^r \operatorname{sign} a$. Ввиду симметрии и периодичности функции φ получаем

$$\begin{aligned} B_\varphi &= \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\langle 2\rangle}}\, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2\ell}^{2\ell} \varphi(t) \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t+4\nu\ell)^{\langle 2\rangle}}\, dt = \int_0^{2\ell} \varphi(t) \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t+4\nu\ell)^{\langle 2\rangle}}\, dt = \\ &= \int_0^\ell \varphi(t) \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(4\nu\ell+t)^{\langle 2\rangle}} + \frac{1}{((4\nu+2)\ell-t)^{\langle 2\rangle}} \right) dt. \end{aligned}$$

Возьмем $c \in (1, \ell)$ и зададим функцию φ на $[0, \ell]$ так:

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 1, \\ \sin\frac{\pi}{2}\frac{\ln y}{\ln c}, & 1 < y < c, \\ 1, & c \leqslant y \leqslant \ell. \end{cases}$$

При $c = 1.865$, $\ell = 3.77$ компьютерные вычисления дают $\frac{\|d\Psi\|_1}{2\pi B_\varphi} < 2.800851$. Напомним, что ранее была известна оценка $D_1 \leqslant 3 + 2\sqrt{2} < 5.828428$.

3.3. Оценки констант снизу. Получение нижних оценок констант в обратных теоремах затруднено тем, что нам очень редко известно все семейство наилучших приближений конкретной функции.

Рассмотрим функции

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-t}\cos xt\,dt, \qquad g(x) = \frac{x}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-t}\sin xt\,dt.$$

Функции f и g взаимно сопряжены с точностью до знака. Как доказал Бернштейн [13, формула 6bis],

$$A_u(f)_\infty = A_u(g)_\infty = \frac{e^{-u}}{2},$$

откуда

$$\int_0^\infty A_u(f)_\infty\,du = \int_0^\infty A_u(g)_\infty\,du = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\|g'\|_\infty = |g'(0)| = 1$. Отсюда следует оценка констант снизу числом 2 в обоих неравенствах (1.3) и (1.4).

Объединим полученные результаты.

Теорема 3. *Пусть $p \in [1, +\infty]$, $f \in X_p$ и $\int_0^\infty A_u(f)_p\,du < +\infty$. Тогда неравенства*

$$\|f'\|_p \leqslant D_1 \int_0^\infty A_u(f)_p\,du,$$

$$\|\widetilde{f}'\|_p \leqslant \widetilde{D}_1 \int_0^\infty A_u(f)_p\,du$$

выполняются с константами $D_1 < 2.800851$,

$$\widetilde{D}_1 \leqslant \frac{4}{9\ln\operatorname{tg}\frac{13\pi}{44}}\left(\frac{1}{2} + \frac{22}{\pi^2}\sum_{q=0}^\infty \frac{\left|\sin\frac{(2q+1)\pi}{11}\right|}{(2q+1)^2}\right) < 2.335138.$$

В пространстве $UCB(\mathbb{R})$ точные константы в обоих неравенствах не меньше 2.

Литература

1. Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* Москва, Наука (1965).

2. Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* Москва, ГИФМЛ (1960).

3. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. В: *Собр. соч.*: в 4 томах. Т. 1, 11–104. Москва, Изд-во АН СССР (1952).

4. Стерлин М. Д. К обратным экстремальным задачам конструктивной теории функций. *Докл. АН СССР* **229** (3), 550–553 (1976).

5. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Труды Моск. матем. об-ва* **5**, 483–522 (1956).

6. Стерлин М. Д. Оценки постоянных в обратных теоремах конструктивной теории функций. *Докл. АН СССР* **209** (6), 1296–1298 (1973).

7. Жук В. В. *Аппроксимация периодических функций.* Ленинград, Изд-во Ленинградского ун-та (1982).

8. Shapiro H. S. Some Tauberian theorems with applications to approximation theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (3), 500–504 (1968).

9. Стейн И. М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, пер. с англ. Москва, Мир (1973).

10. Виноградов О. Л. Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени. *Алгебра и анализ* **17** (4), 59–114 (2005).

11. Дзядык В. К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* Москва, Наука (1977).

12. Натансон Г. И. Об оценке констант Лебега сумм Валле Пуссена. В: *Геометрические вопросы теории функций и множеств*, 102–107. Калинин, Изд-во Калининского гос. ун-та (1986).

13. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. В: *Собр. соч.*: в 4 томах. Т. 2, 371–395. Москва, Изд-во АН СССР (1954).

Статья поступила в редакцию 7 мая 2021 г.;
после доработки 6 июня 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Виноградов Олег Леонидович — д-р физ.-мат. наук, доц., проф.; olvin@math.spbu.ru

On the constants in the inverse theorems for the first derivative*

O. L. Vinogradov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vinogradov O. L. On the constants in the inverse theorems for the first derivative. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 559–571. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.401 (In Russian)

The known proofs of the inverse theorems of the theory of approximation by trigonometric polynomials and by functions of exponential type are based on the idea of S. N. Bernstein to expand a function in a series containing its functions of best approximation. In this paper, a new method to establish the inverse theorems is introduced. We establish simple identities that immediately imply the inverse theorems mentioned and, moreover, with better constants. This method can be applied to derivatives of arbitrary order (not necessarily an integer one) and (with certain modifications) to estimates of some other functionals in terms of best approximations. In this paper, the case of the first derivative of a function itself and of its trigonometrically conjugate is considered.

Keywords: inverse theorems, conjugate function.

References

1. Akhiezer N. I. *Lectures on approximation theory.* Moscow, Nauka Publ. (1965). (In Russian)

2. Timan A. F. *Theory of approximation of functions of a real variable.* Moscow, GIFML Publ. (1960). (In Russian)

3. Bernstein S. N. On the best approximation of continuous functions by polynomials of given degree. In: *Collected Works*: in 4 vols. Vol. 1, 11–104. Moscow, Acad. Sci. USSR Publ. (1952). (In Russian)

4. Sterlin M. D. On inverse extremal problems of the constructive theory of functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **229** (3), 550–553 (1976). (In Russian)

5. Bari N. K., Stechkin S. B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Trudy Moskov. Mat. Obsh.* **5**, 483–522 (1956). (In Russian)

6. Sterlin M. D. Estimates of constants in inverse theorems of the constructive theory of functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **209** (6), 1296–1298 (1973). (In Russian)

*This work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 18-11-00055).

7. Zhuk V. V. *Approximation of periodic functions*. Leningrad, Leningrad Univ. Press (1982). (In Russian)

8. Shapiro H. S. Some Tauberian theorems with applications to approximation theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (3), 500–504 (1968).

9. Stein E. M. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton, Princeton Univ. Press (1970). [Russ. ed.: Stein E. M. *Singuliarnye integraly i differentsial'nye svoistva funktsii*. Moscow, Mir Publ. (1973)].

10. Vinogradov O. L. Sharp Jackson type inequalities for approximation of classes of convolutions by entire functions of finite degree. *Algebra i analiz* **17** (4), 59–114 (2005). (In Russian) [Engl. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **17** (4), 593–633 (2006)].

11. Dzyadyk V. K. *Introduction into the theory of uniform approximation of functions by polynomials*. Moscow: Nauka Publ. (1977). (In Russian)

12. Natanson G. I. On the estimate of Lebesgue constants of de la Vallee Poussin sums. In: *Geometric problems of the theory of functions and sets*, 102–107. Kalinin, Kalinin Univ. Press (1986). (In Russian)

13. Bernstein S. N. On the best approximation of continuous functions on the whole line by entire functions of given degree. In: *Collected Works*: in 4 vols. Vol. 2, 371–395. Moscow, Acad. Sci. USSR Publ. (1954). (In Russian)

Received: May 7, 2021
Revised: June 6, 2021
Accepted: June 17, 2021

Author's information:

Oleg L. Vinogradov — olvin@math.spbu.ru