Марченко И.В.

Практикум по математическому программированию

Оглавление

Тема 1. Нелинейное программирование

§ 1.1. Постановка задачи нелинейного программирования

Задачей нелинейного программирования (задачей НП) называется задача нахождения максимума (минимума) нелинейной функции многих переменных, когда на переменные имеются (не имеются) ограничения типа равенств или неравенств.

В стандартной форме задачу нелинейного программирования (задачу НП) можно записать в следующем виде:

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.1.1}$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Если ввести обозначение

$$X = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n,$$

то задача НП $(1.1.1)$ примет более простой вид:

$$\max f(X) \tag{1.1.2}$$

при ограничениях

$$g_i(X) \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Множество $M = \{X \,|\, g_i(X) \ge 0, i = \overline{1,m}\} \subset R^n$ – будем называть *множеством допустимых решений ЗНП*. Понятно, что задачу $(1.1.2)$ можно переписать следующим образом:

$$\max_{X \in M} f(X).$$

- Допустимое решение $X^* \in M$ называется *оптимальным решением задачи НП*, если

$$\max_{X \in M} f(X) = f(X^*).$$

Заметим, что последняя запись означает, что

$$f(X^*) \ge f(X), \text{ для любого } X \in M,$$

т.е. $f(X^*)$ наибольшее значение функции f на множестве M.

- Число $f(X^*)$ будем называть *значением задачи НП.*

- В дальнейшем будем предполагать, что функции $f : R^n \to R^1$ и $g_i : R^n \to R^1$, $i = \overline{1,m}$ – дифференцируемы в области определения.

§ 1.2. Выпуклые множества. Выпуклые и вогнутые функции

При решении задачи НП важную роль играет свойство выпуклости множества допустимых решений.

Напомним, что множество $M \subset R^n$ называется *выпуклым*, если для любых точек X', $X'' \in M$ и любого $\mu \in [0,1]$ выполняется условие

$$\mu X' + (1-\mu) X'' \in M .$$

Содержательно это означает, что если $M \in R^n$ выпукло, то вместе с любыми двумя точками X', $X'' \in M$ оно должно содержать и все точки отрезка, соединяющего эти точки.

Пусть $M \in R^n$ выпуклое множество и $f : M \to R^1$ – вещественная функция, заданная на множестве M.

- Функция f называется *выпуклой,* если для любой пары точек X', $X'' \in M$ и $\mu \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\mu X' + (1-\mu) X''\right) \le \mu f(X') + (1-\mu) f(X'').$$

- Функция f называется *вогнутой,* если функция $-f$ является вогнутой, т.е. для любой пары точек X', $X'' \in M$ и $\mu \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\mu X' + (1-\mu) X''\right) \ge \mu f(X') + (1-\mu) f(X'').$$

Теорема 1.2.1. (О выпуклости множества допустимых решений).

Пусть $g_1(X) \ge 0, g_2(X) \ge 0, \ldots, g_m(X) \ge 0$ – ограничения задачи нелинейного программирования. Если функции $g_i(X), i = \overline{1,m}$ вогнуты, то множество допустимых решений является выпуклым.

Следствие 1.2.1.

Пусть $g_1(X) \le 0, g_2(X) \le 0, \ldots, g_m(X) \le 0$ – ограничения задачи нелинейного программирования. Если функции $g_i(X), i = \overline{1,m}$ выпуклы, то множество допустимых решений является выпуклым.

Следствие 1.2.2.

Пусть $g_i(X) = 0, i = \overline{1,m}$, или $g_i(X) \ge 0, i = \overline{1,m}$, или $g_i(X) \le 0$, $i = \overline{1,m}$ – ограничения задачи нелинейного программирования. Если все функции $g_i(X), i = \overline{1,m}$ – линейные, то множество допустимых решений является выпуклым.

§ 1.3. Безусловный и условный экстремум. Теорема Лагранжа

Безусловный экстремум. Если в задаче нелинейного программирования $(1.1.1)$ нет ограничений на переменные, т. е. $X \in R^n$, то такая задача называется *задачей безусловной оптимизации* и имеет вид

$$\max_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad (1.3.1)$$

или в векторной форме

$$\max_{X\in R^n} f(X).$$

Заметим, что в дальнейшем мы будем различать *случаи безусловной максимизации и безусловной минимизации.*

Теорема 1.3.1. (Необходимые условия оптимальности в задаче без ограничений). Если X^*– оптимальное решение задачи $(1.3.1)$, то все частные производные функции f в точке X^* равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,n}. \qquad (1.3.2)$$

Необходимое условие оптимальности вида $(1.3.2)$ часто называют *условием стационарной точки.*

Замечание 1.3.1. (Достаточность условий оптимальности)

- Для того чтобы стационарная точка $X^* = (x_1^*,\cdots,x_n^*)$ являлась оптимальным решением задачи безусловной максимизации, достаточно, чтобы функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ была вогнутой в R^n.
- Для того чтобы стационарная точка $X^* = (x_1^*,\cdots,x_n^*)$ являлась оптимальным решением задачи безусловной минимизации, достаточно, чтобы функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ была выпуклой в R^n.

Пример 1.3.1. Написать необходимые условия оптимальности и найти стационарные точки для функции

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

Решение.

Необходимое условие экстремума имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 6x_3 - 2x_1 = 0. \end{cases}$$

Единственным решением этой системы линейных уравнений является точка $X^* = (0,0,0)$.

Если функция имеет экстремум, то он достигается в точке $X^* = (0,0,0)$. В нашем случае функция $f(x_1, x_2, x_3)$ является выпуклой, этот факт нетрудно проверить, используя матрицу Гессе, которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

и является положительно определенной. Поэтому точка $X^* = (0,0,0)$ является оптимальным решением задачи минимизации.

Условная оптимизация. Пусть требуется найти

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.3.3)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Такая задача называется *задачей условной максимизации.*

Задача нахождения

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.3.4)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i = \overline{1,m}$$

называется *задачей условной минимизации.*

Задачей условной оптимизации называется задача $(1.3.3)$ или $(1.3.4)$. Для решения задачи условной оптимизации используется *метод множителей Лагранжа*. Основная идея метода заключается в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой специально построенной *функции Лагранжа*, функция Лагранжа для задачи $(1.3.3)$ или $(1.3.4)$ строится по следующему правилу:

$$L(X, \Lambda) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_m,) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Вектор $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ будем называть *вектором множителей Лагранжа*. Тогда вместо задачи условной оптимизации можно рассматривать задачу безусловной оптимизации:

$$\max_{X,\Lambda} L(X,\Lambda) = L(X^*,\Lambda^*). \qquad (1.3.5)$$

Можно показать, что точка $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ решения (X^*,Λ^*) задачи $(1.3.5)$ является решением задачи условной оптимизации.

Необходимое условие оптимальности.

Теорема 1.3.2. (Лагранжа).

Если $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ – оптимальное решение задачи условной оптимизации $(1.3.3)$ или $(1.3.4)$, то должны найтись множители Лагранжа $\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(X^*)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* \dfrac{\partial g_i(X^*)}{\partial x_j} = 0, \; j = \overline{1,n}; \\ g_i(X^*) = 0, \; i = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad (1.3.6)$$

Условия $(1.3.6)$ часто называют *условиями Лагранжа.*

Замечание 1.3.2. В теореме 1.3.2 векторы-градиенты функции $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,m}$ должны быть линейно независимы в точке $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, т. е. удовлетворять *условиям регулярности.*

Замечание 1.3.3. (Достаточность условий оптимальности).
Пусть $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)$ – решение системы $(1.3.6)$.

- Для того чтобы точка $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ являлась оптимальным решением задачи условной максимизации $(1.3.3)$, достаточно, чтобы функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была вогнутой, а все $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – линейные функции.
- Для того чтобы точка $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ являлась оптимальным решением задачи условной минимизации $(1.3.4)$, достаточно, чтобы функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была выпуклой, а все $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – линейные функции.

Пример 1.3.2. Написать необходимые условия оптимальности для задачи:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \min\left(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3\right),$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 - x_2 = 2.$$

Решение. Составляем функцию Лагранжа

$$L\left(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2\right)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$$
$$+\lambda_1\left(x_1+x_2+x_3-1\right)+\lambda_2\left(x_1-x_2-2\right).$$

Необходимое условие оптимальности Лагранжа примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial x_1}=2x_1-2x_2-2x_3+\lambda_1+\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial x_2}=4x_2-2x_1+\lambda_1-\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial x_3}=6x_3-2x_1+\lambda_1=0,\\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial \lambda_1}=x_1+x_2+x_3-1=0,\\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial \lambda_2}=x_1-x_2-2=0.\end{cases}$$

Нетрудно показать, что точка $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,x_3^*\right)$ из решения данной системы удовлетворяет и достаточным условиям.

§ 1.4. Теорема Куна – Таккера.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования вида

$$\max f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (1.4.1)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ge 0,\ i=\overline{1,m}. \qquad (1.4.2)$$

Такая задача называется *стандартной задачей нелинейного программирования максимизации.*

Если в задаче $(1.4.1)$ рассматривается задача минимизации, а ограничения $(1.4.2)$ имеют вид

$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le 0,\ i=\overline{1,m}, \qquad (1.4.3)$$

то такую задачу будем называть *стандартной задачей минимизации.*

Необходимые условия оптимальности.

Теорема 1.4.1. (Куна – Таккера).

Если $X^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ – оптимальное решение стандартной задачи максимизации нелинейного программирования, а функции $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,m}$ удовлетворяют условию регулярности в точке

$X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, то должны найтись такие множители Лагранжа $\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

a) условия допустимости

$$\lambda_1^* \geq 0, \lambda_2^* \geq 0, \cdots, \lambda_m^* \geq 0; g_i(X^*) \geq 0, i = \overline{1,m}; \quad (1.4.4)$$

b) условия оптимальности

$$\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(X^*)}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n}; \quad (1.4.5)$$

c) условия трансверсальности

$$\lambda_i^* g_i(X^*) = 0, i = \overline{1,m}. \quad (1.4.6)$$

Условия $(1.4.4)$–$(1.4.6)$ называются *условиями Куна – Таккера.*

Замечание 1.4.1. Ограничение $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *активным* в точке $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, если $g_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0$, т. е. в точке $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ выполняется как равенство. Тогда условия $(1.4.6)$ означают, что $g_i(X^*) = 0$, если ограничение i активное, и $\lambda_i^* = 0$, если ограничение i неактивное.

Замечание 1.4.2. В условиях Куна – Таккера для стандартной задачи минимизации НП условия допустимости $(1.4.4)$ запишутся так:

$$\lambda_1^* \geq 0, \lambda_2^* \geq 0, \cdots, \lambda_m^* \geq 0; g_i(X^*) \leq 0, i = \overline{1,m}.$$

Замечание 1.4.3. (Достаточность условий оптимальности). Пусть $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)$ – решение системы $(1.4.4)$–$(1.4.6)$.

- Для того чтобы точка $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ являлась оптимальным решением стандартной задачи нелинейного программирования максимизации, достаточно, чтобы функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,m}$ были вогнутыми.
- Для того чтобы точка $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ являлась оптимальным решением стандартной задачи нелинейного программирования минимизации, достаточно, чтобы функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,m}$ были выпуклыми.

Пример 1.4.1. Написать необходимые условия оптимальности и найти оптимальное решение стандартной задачи НП:

$$\max(-4x_1^2 - 4x_2^2 + 20x_1 + 4x_2 - 26),$$

при условиях

$$-x_1 - 2x_2 \geq -2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение.

Составим функцию Лагранжа

$$L\left(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2\right) = (-4x_1^2 - 4x_2^2 + 20x_1 + 4x_2 - 26) + \lambda_1\left(-x_1 - 2x_2 + 2\right) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2.$$

Необходимые условия оптимальности (условия Куна-Таккера) примут вид:

$$a)\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_3 \ge 0,$$

$$-x_1 - 2x_2 \ge -2,\ \ x_1, x_2 \ge 0,$$

$$b)\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -8x_1 + 20 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -8x_2 + 4 - 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0,$$

$$c)\ \lambda_1\left(-x_1 - 2x_2 + 2\right) = 0,$$

$$\lambda_2 x_1 = 0,$$

$$\lambda_3 x_2 = 0.$$

Графическое представление данной задачи (рис. 1.4.1) поможет в понимании аналитических выкладок. Изобразим множество допустимых решений и линии уровня функции $f\left(x_1,x_2\right)$.

Заметим, что

$$f\left(x_1,x_2\right) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 20x_1 + 4x_2 - 26 =$$

$$= -\left(2x_1 - 5\right)^2 - \left(2x_2 - 1\right)^2,$$

поэтому линии уровня функции $f\left(x_1,x_2\right)$– окружности с центром в точке $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$.

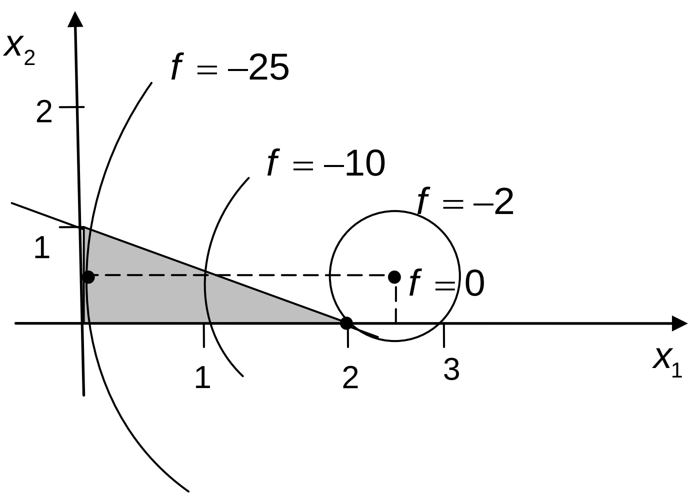


Рис. 1.1

Если решать задачу безусловной оптимизации, то оптимальным решением будет точка $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$, которая не удовлетворяет первому ограничению задачи.

Решение задачи с ограничениями должно достигаться в граничной точке множества допустимых решений, которое может быть получено поочередной активизацией k ограничений задачи, $k=1,2,3$.

Следует рассмотреть шесть случаев:

Случай 1: $x_1=0$.

Система имеет вид:

$$\begin{cases}20+\lambda_1+\lambda_2=0,\\ -8x_2+4-2\lambda_1+\lambda_3=0,\\ \lambda_1(-2x_2+2)=0,\\ x_1=0\\ \lambda_3x_2=0,\end{cases}$$

и имеет два решения, неудовлетворяющие условиям допустимости: $x_1=0, x_2=1/2, \lambda_1=0, \lambda_2=-20, \lambda_3=0$ и $x_1=0, x_2=1, \lambda_1=-2, \lambda_2=-18, \lambda_3=0$.

Случай 2: $x_2=0$.

Система имеет вид

$$\begin{cases}-8x_1+20-\lambda_1=0,\\ 4-2\lambda_1+\lambda_3=0,\\ x_2=0\\ \lambda_1(2-x_1)=0,\\ \lambda_2x_1=0,\end{cases}$$

и имеет два решения: недопустимое $x_1=5/2, x_2=0, \lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=-4$ и допустимое $x_1=2, x_2=0, \lambda_1=4, \lambda_2=0, \lambda_3=4$.

Случай 3: $x_1+2x_2=2$.

Система имеет вид:

$$\begin{cases}-8x_1+20+\lambda_1=0,\\ -8x_2+4-2\lambda_1=0,\\ x_1+2x_2=2\\ \lambda_2x_1=0,\\ \lambda_3x_2=0,\end{cases}$$

и имеет два недопустимых решения $x_1=11/5, x_2=-1/10$, $\lambda_1=-12/5$, $\lambda_2=0, \lambda_3=0$ и $x_1=5/2, x_2=1/2$, $\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=0$.

Случай 4: $x_1 = 0\,, x_2 = 0\,.$

Система имеет вид:

$$\begin{cases} 20 + \lambda_2 = 0, \\ 4 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 = 0, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

ее решение $x_1 = 0, x_2 = 0,\ \lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = -20\,, \lambda_3 = -4$ не является допустимым.

Случай 5: $x_2 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 2$.

Система имеет вид:

$$\begin{cases} -8x_1 + 20 + \lambda_1 = 0, \\ 4 - 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

ее решение $x_1 = 2, x_2 = 0,\ \lambda_1 = -4\,, \lambda_2 = 0\,, \lambda_3 = 4$ не является допустимым.

Случай 6: $x_1 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 2$.

Система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ 20 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ -8x_2 + 4 - 2\lambda_1 = 0, \\ \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

ее решение $x_1 = 0, x_2 = 1,\ \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -18\,, \lambda_3 = 0$ не является допустимым.

Единственный случай, когда система, порожденная условиями Куна – Таккера, имеет допустимое решение – случай 2. Тогда решение исходной задачи имеет вид: $x_2^* = 0$, $x_1^* = 2$, значение задачи НП равно $f\left(2{,}0\right) = -2$.

В соответствии с условиями достаточности, точка $X^* = (2{,}0)$ определяет оптимальное решение исходной задачи, поскольку функция $f\left(x_1, x_2\right)$ является вогнутой, а ограничения линейными.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования вида

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.4.7)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0, i = \overline{1, r},$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, i = \overline{r+1, m}.$$

Такая задача называется *задачей нелинейного программирования смешанного типа*.

Теорема 1.4.2.

Если $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ – оптимальное решение задачи нелинейного программирования смешанного типа $(1.4.7)$, а функции $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$ удовлетворяют условию регулярности, то должны найтись такие множители Лагранжа $\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &a)\ \lambda_i^* \ge 0,\ i = \overline{1, r}; \\ &\quad g_i(X^*) \ge 0, i = \overline{1, r}, \\ &\quad g_i(X^*) = 0, i = \overline{r+1, m}, \qquad (1.4.8) \\ &b)\ \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(X^*)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1, n}, \\ &c)\ \lambda_i^* g_i(X^*) = 0,\ i = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Замечание 1.4.2. (Достаточность условий Куна – Таккера).

Требования, которые устанавливают достаточность условий Куна – Таккера $(1.4.8)$, приведены в таблице:

Тип оптимизации	$f(X)$	$g_i(X)$	Тип ограничения	Ограничения на знак λ_i
Максимизация	вогнутая	вогнутая линейная	≥ 0, $i = \overline{1, r}$ $= 0$, $i = \overline{r+1, m}$	≥ 0 нет
Минимизация	выпуклая	вогнутая линейная	≥ 0, $i = \overline{1, r}$ $= 0$, $i = \overline{r+1, m}$	≤ 0 нет

§ 1.5. Задача НП с линейными ограничениями. Квадратичное программирование

Если в задаче НП $(1.4.5)$ ограничения $g_i(X), i=\overline{1,m}$ – линейные функции, то такая задача называется задачей нелинейного программирования с линейными ограничениям. В соответствии с требованиями замечания 1.4.2, для того чтобы задача максимизации с линейными ограничениями имела оптимальное решение, достаточно, чтобы функция $f(X)$ была вогнутой. Для того чтобы задача минимизации максимизации с линейными ограничениями имела оптимальное решение, достаточно, чтобы функция $f(X)$ была выпуклой.

Задачи *квадратичного программирования* – это специальный класс задач нелинейного программирования, в которых $f(X)$ – квадратичная функция, а все ограничения – линейные.

Математически задача квадратичного программирования формулируется следующим образом:

$$\max f(X)=\max\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}d_ix_i\right)$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ i=\overline{1,m}.$$

Функция $\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j$ является квадратичной формой, где $C=\{c_{ij}\}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$ – симметрическая матрица. Матрица C должна быть положительно определенной ($f(X)$– вогнутая функция) в задаче минимизации и отрицательно определенной ($f(X)$– выпуклая функция) в задаче максимизации. Линейные ограничения задачи гарантируют выпуклость области допустимых решений, поэтому необходимые условия Куна – Таккера являются также и достаточными (см. теорему 1.4.2).

§ 1.6. Задача об оптимальном портфеле ценных бумаг

Начало современной портфельной теории было положено работой Гарри Марковица «Portfolio selection» 1952 г. Результаты Марковица были развиты и дополнены работами Джеймса Тобина и Вильяма Шарпа. В 1990 г. Г. Марковиц, Д. Тобин и В. Шарп получили Нобелевскую премию по экономике за развитие современной портфельной теории.

Рассматривается задача инвестирования в n рискованных активов (акций), которые торгуются на фондовом рынке (фондовой бирже).

Будем считать, что инвестор предполагает владеть акциями время T после покупки. Доходность R_j актива j, $j = \overline{1,n}$ определяется величиной:

$$R_j \equiv R_{Tj} = \frac{C_{Tj} - C_{0j} + d_{Tj}}{C_{0j}},$$

где C_{0j} – цена покупки акций типа j; C_{Tj} – цена продажи акций типа j через время T; d_{Tj} – дивиденды на акцию типа j в период T.

Величина R_j представляет собой доход на единицу вложенных средств в акцию типа j. Заметим, что доходность R_j есть случайная величина (СВ). Поскольку акции торгуются на бирже, то можно оценить статистические характеристики доходности для всех типов акций.

Таким образом, можем составить следующую таблицу данных:

Типы акций	1	…	j	…	n
Доходность R	R_1	$\cdots$	R_j	$\cdots$	R_n
Ожидаемая доходность m	m_1	$\cdots$	m_j	$\cdots$	m_n
Дисперсия доходности $V = \sigma^2$	V_{11}	$\cdots$	V_{jj}	$\cdots$	V_{nn}
СКО доходности σ	σ_1	$\cdots$	σ_j	$\cdots$	σ_n

Здесь

$m_j = E\left\{R_j\right\}$ – *ожидаемая доходность* акций типа j;

$E\left\{R\right\}$ – математическое ожидание случайной величины R;

$V_{jj} = E\left\{(R_j - E\left\{R_j\right\})^2\right\} = E\left\{(R_j - m_j)^2\right\} = E\left\{R_j^2\right\} - m_j^2$ – *дисперсия доходности* акций типа j.

$\sigma_j = \sqrt{V_{jj}}$ – среднеквадратическое отклонение доходности акций типа j.

Предполагается, что можно оценить также V_{ij} – *ковариации доходности* акций типа i и акций типа j:

$$V_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j) = E\left\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\right\}, i \neq j, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$$

Заметим, что ожидаемые доходности ценных бумаг образуют вектор $M = (m_1, \cdots, m_n)$ – *вектор доходностей ценных бумаг*, а дисперсии и ковариации образуют квадратную матрицу $V = \left\{V_{ij}\right\}$ порядка n, называемую *ковариационной матрицей доходности ценных бумаг.*

Портфелем ценных бумаг (портфель ЦБ) *по Блэку* будем называть такой вектор $X = (x_1, \cdots, x_n)$, что $x_1 + \cdots + x_n = 1$, где $x_j \in R$ – доля вложений в актив j, $j = \overline{1,n}$. Заметим, что неотрицательное значение

($x_j \geq 0$) переменной j означает, что инвестор вкладывает в актив j собственные средства, отрицательное значение ($x_j < 0$) переменной j означает, что актив j приобретается в долг (разрешены кредитно-заемные операции).

Портфелем ценных бумаг (портфелем ЦБ) по Марковицу будем называть такой вектор $X = (x_1, \cdots, x_n)$, что $x_1 + \cdots + x_n = 1$, $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$ (кредитно-заемные операции запрещены).

Характеристики портфеля ценных бумаг

Каждый портфель ценных бумаг $X = (x_1, \cdots, x_n)$ имеет две характеристики: ожидаемую доходность (*доходность портфеля*) и дисперсию доходности (*риск портфеля*).

Ожидаемая доходность $m(X)$ портфеля $X = (x_1, \cdots, x_n)$ вычисляется по формуле:

$$m(x_1, \cdots, x_n) = m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n$$

или в векторном виде

$$m(X) = MX^T.$$

Математически $m(x_1, \cdots, x_n)$ представляет собой линейную однородную функцию относительно переменных $x_j, j = \overline{1,n}$.

Дисперсия доходности $V(X)$ портфеля $X = (x_1, \cdots, x_n)$ вычисляется по формуле:

$$V(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j$$

или в векторном виде

$$V(X) = XVX^T.$$

Математически дисперсия доходности $V(x_1, \cdots, x_n)$ представляет собой однородную квадратичную функцию (квадратичную форму) относительно переменных $x_j, j = \overline{1,n}$ с матрицей V (ковариационной матрицей доходностей ЦБ).

Замечание 1.6.1.

Из теории вероятностей известно, что дисперсия неотрицательна, т.е. $V(X) \geq 0$, при всех значениях X, а ковариационная матрица V положительно полуопределена, Поэтому, $V(X)$ – выпуклая функция.

Оптимальный портфель ЦБ.

Классическая задача нахождения оптимального портфеля ЦБ ставится следующим образом: найти допустимый портфель ЦБ, минимизирующий риск, при условии, что доходность портфеля ЦБ равна заданной величине.

Обозначим через m – заданную доходность портфеля ЦБ (параметр, задаваемый инвестором).

Математически задача нахождения *оптимального портфеля ЦБ* имеет следующий вид:

- *модель Блэка*

$$\min V(x_1,\cdots,x_n)=\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_{ij}x_ix_j \tag{1.6.1}$$

при ограничениях:

$$x_1+\cdots+x_n=1, \tag{1.6.2}$$

$$m_1x_1+\cdots+m_nx_n=m \tag{1.6.3}$$

или в векторном виде:

$$\min V(X)=\min XVX^T$$

при ограничениях

$$\begin{cases} UX^T=1, \\ MX^T=m \end{cases}$$

где $U=(1,\cdots,1)\in R^n$, $M=(m_1,\cdots,m_n)$, $X=(x_1,\cdots,x_n)$.

Ограничение $(1.6.2)$ называется *портфельным или бюджетным,* ограничение $(1.6.3)$называется *инвестиционным или ограничением на ожидаемую доходность;*

- *модель Марковица* отличается от модели Блэка наличием дополнительных ограничений на знак переменных $x_j\geq 0, j=\overline{1,n}$.

Замечание 1.6.1. Заметим, что обе модели различаются только наличием или отсутствуем условий неотрицательности переменных и представляют собой задачи нелинейного (квадратичного) программирования. Модель Блэка – задача условной оптимизации, модель Марковица – задача нелинейного программирования смешанного типа.

- Необходимые условия оптимальности для модели Блэка.

Составим функцию Лагранжа

$$L\left(x_1,\cdots,x_n;\lambda_1,\lambda_2\right)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_{ij}x_ix_j+\lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n}x_j-1\right)+\lambda_2\left(\sum_{j=1}^{n}m_jx_j-m\right).$$

Тогда необходимые условия оптимальности (условия Лагранжа) принимают вид:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n} V_{ij}x_i + \lambda_1 + \lambda_2 m_j = 0, \\ x_1 + \cdots + x_n = 1, \\ m_1x_1 + \cdots + m_nx_n = m. \end{cases}$$

- Необходимые условия оптимальности для модели Марковица. Составим функцию Лагранжа

$$L\left(x_1,\cdots,x_n;\lambda_1,\lambda_2;\mu_1,\ldots,\mu_n\right) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}x_ix_j +$$

$$+\lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1\right) + \lambda_2\left(\sum_{j=1}^{n} m_jx_j - m\right) + \sum_{j=1}^{n} \mu_jx_j.$$

Тогда необходимые условия оптимальности (условия Куна – Таккера) принимают вид:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n} V_{ij}x_i + \lambda_1 + \lambda_2 m_j + \mu_j = 0,\ j = \overline{1,n}. \\ x_1 + \cdots + x_n = 1, \\ m_1x_1 + \cdots + m_nx_n = m, \\ \mu_jx_j = 0,\ j = \overline{1,n}. \\ \mu_j \ge 0, x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Замечание 1.6.2. (Достаточность условий оптимальности).

Так как функция $V(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}x_ix_j$ является выпуклой, а ограничения задачи линейные, то необходимые условия оптимальности в модели Блэка и Марковица являются также достаточными.

Пример 1.6.1. У инвестора имеется три актива A, B и C с ожидаемыми доходностями 0.11, 0.15 и 0.08 соответственно. Ковариационная матрица V имеет следующий вид:

$$V = 10^{-5}\begin{bmatrix} 15 & 5 & -7 \\ 5 & 25 & -3 \\ -7 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ожидаемая доходность портфеля 0.12 (инвестиционный параметр). Напишем модели Блэка и Марковица для нахождения оптимального портфеля ЦБ, а также необходимые условия оптимальности в рассматриваемых моделях.

Решение.

- Модель Блэка

$$\min V(X) = \min\left(15x_1^2 + 25x_2^2 + 10x_3^2 + 10x_1x_2 - 14x_1x_3 - 6x_3x_2\right)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$0{,}11x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}08x_3 = 0{,}12.$$

Необходимые условия имеют вид:

$$\begin{cases} -30x_1 - 10x_2 - 14x_3 + \lambda_1 + 0{,}11\lambda_2 = 0, \\ -50x_2 - 10x_1 - 6x_3 + \lambda_1 + 0{,}15\lambda_2 = 0, \\ -20x_1 - 6x_2 - 14x_1 + \lambda_1 + 0{,}08\lambda_2 = 0, \\ \quad 0{,}11x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}08x_3 = 0{,}12, \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \quad 0{,}11x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}08x_3 = 0{,}12. \end{cases}$$

- Модель Марковица

$$\min V(X) = \min\left(15x_1^2 + 25x_2^2 + 10x_3^2 + 10x_1x_2 - 14x_1x_3 - 6x_3x_2\right)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$0{,}11x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}08x_3 = 0{,}12,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Необходимые условия имеют вид

$$\begin{cases} -30x_1 - 10x_2 - 14x_3 + \lambda_1 + 0{,}11\lambda_2 + \mu_1 = 0, \\ -50x_2 - 10x_1 - 6x_3 + \lambda_1 + 0{,}15\lambda_2 + \mu_2 = 0, \\ -20x_1 - 6x_2 - 14x_1 + \lambda_1 + 0{,}08\lambda_2 + \mu_3 = 0, \\ \quad 0{,}11x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}08x_3 = 0{,}12, \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \quad \mu_1 x_1 = 0,\ \mu_2 x_2 = 0,\ \mu_3 x_3 = 0, \\ \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0, \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

§ 1.7. Двухбумажный портфель ценных бумаг

Пусть в задаче $(1.5.1)-(1.5.4)$ $n=2$, т. е. портфель формируется из двух активов.

Тогда портфель ЦБ $X=(x_1,x_2)$ имеет вид:

$$x_1+x_2=1.$$

Если обозначить $x_1=t$, $x_2=1-t$, $t\in R^1$, характеристики портфеля будут иметь вид:

$$m(x_1(t),x_2(t))=m_1x_1+m_2x_2=m_1t+m_2(1-t);$$

$$V(x_1(t),x_2(t))=V_{11}x_1^2+2V_{12}x_1x_2+V_{11}x_2^2=\sigma_1^2t^2+2\rho\sigma_1\sigma_2t(1-t)+\sigma_2^2(1-t)^2,$$

где ρ – коэффициент корреляции доходностей.

Портфель минимального риска

Пусть целью инвестора является выбор портфеля с минимальным риском, тогда имеем задачу безусловного экстремума:

$$\min V(t)=\min\left\{\sigma_1^2t^2+2\rho\sigma_1\sigma_2t(1-t)+\sigma_2^2(1-t)^2\right\}.$$

Решая задачу, находим $t^*=\dfrac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}$.

Тогда оптимальный портфель $X^*=\left(x_1^*,x_2^*\right)$:

$$\begin{cases} x_1^*=t^*=\dfrac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}, \\ x_2^*=1-t^*=\dfrac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}. \end{cases}$$

Минимальный риск будет равен:

$$V\left(X^*\right)=\left(\frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}\right)^2\sigma_2^2+$$

$$+2\rho\sigma_1\sigma_2\left(\frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}\right)\left(\frac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}\right).$$

Частные случаи:

- Пусть $\rho=-1$. Тогда

$$x_1^*=\frac{\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+2\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2},\ x_2^*=\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2},$$

$$V\left(X^*\right)=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sigma_2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}-\frac{\sigma_2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2.$$

Вывод: риск оптимального портфеля равен нулю $V\left(X^*\right)=0$, т. е. если доходность первого актива снизится, то для портфеля в целом это будет компенсировано ростом доходности второго актива.

- Пусть $\rho=0$. Тогда

$$x_1^*=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},\ x_2^*=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},$$

$$V\left(X^*\right)=\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\sigma_2^2=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Вывод: риск оптимального портфеля $V\left(X^*\right)=\dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ будет меньше, чем риск каждого из отдельно взятых активов.

- Пусть $\rho=1$. Тогда

$$x_1^*=\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1},\ x_2^*=\frac{-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1},$$

$$V\left(X^*\right)=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)\left(\frac{-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sigma_2\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2}-\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}\right)^2.$$

Вывод: риск портфеля равен нулю $V\left(X^*\right)=0$, но при этом либо x_1^*, либо x_2^* отрицательно, т. е. актив берется в долг с обязательством последующего возврата.

§ 1.8. Простейшая модель управления запасами. Величина экономичного размера заказа

Проблема управления запасами связана с необходимостью потребления некоторого ресурса, а тем самым с необходимостью иметь запас хранимого ресурса, неоднократного размещения и получения заказов на ресурс заданных объемов. Стратегия управления запасами должна отвечать, по крайней мере, на следующие два вопроса:

- Какое количество хранимого запаса следует заказывать (размер заказа)?
- Когда заказывать (точка заказа)?

Ответ на первый вопрос (сколько заказывать?) определяет экономичный размер заказа, который получается в результате минимизации функции суммарных затрат вида:

$$\begin{bmatrix}\text{Суммарные}\\ \text{затраты}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Затраты на}\\ \text{приобретение}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Затраты}\\ \text{на оформление}\\ \text{заказа}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Затраты}\\ \text{на хранение}\\ \text{запаса}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Потери от}\\ \text{дефицита}\\ \text{запаса}\end{bmatrix}.$$

Все затраты должны быть выражены как функции искомого объема заказа и интервала времени между заказами.

- Затраты на приобретение определяются стоимостью единицы ресурса и, вообще говоря, зависят от объема заказа.
- Затраты на оформление заказа представляют собой постоянные расходы и не зависят от объема заказа.
- Затраты на хранение запаса включают в себя стоимость хранения и обслуживания хранимого ресурса.
- Потери от дефицита – это расходы, обусловленные отсутствием необходимого запаса ресурса. Они включают как потенциальные потери прибыли, так и убытки, связанные с потерей доверия клиентов.

Ответ на второй вопрос (когда заказывать?) зависит от типа системы управления запасами. Если система предусматривает периодический контроль состояния запаса, то момент наступления нового заказа совпадает с началом периода. Если же в системе предусмотрен непрерывный контроль состояния запаса, то новые заказы размещаются тогда, когда уровень запаса опускается до ранее определенного значения, называемого *точкой возобновления заказа*.

Модели управления запасами бывают следующих типов:

- статические детерминированные модели управления запасами;
- динамические детерминированные модели управления запасами;
- статические вероятностные модели управления запасами;
- динамические вероятностные модели управления запасами.

В указанном порядке классов моделей возрастает и сложность самих моделей управления запасами. Мы будем рассматривать только простейшие статические детерминированные модели управления запасами.

Простейшая статическая модель управления запасами

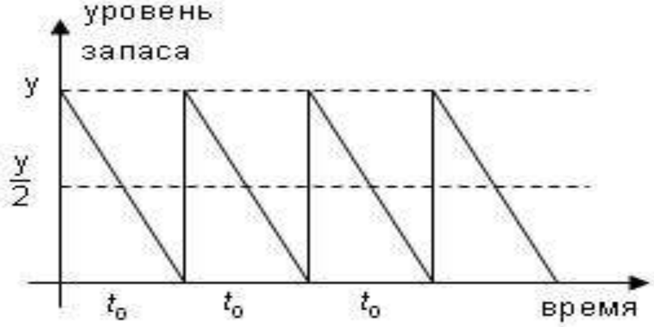
Предположения модели:

- интенсивность спроса на ресурс постоянна;
- возможно мгновенное пополнение запаса;
- дефицит отсутствует.

Введем обозначения:

- y – объем заказа (количество единиц ресурса);
- D – интенсивность спроса на ресурс (количество единиц потребляемого ресурса в единицу времени);
- t_0 – продолжительность цикла заказа (единицы времени);
- K – затраты на оформление, связанные с размещением заказа;
- h – затраты на хранение (удельные затраты на хранение в единицу времени);
- y^* – экономичный размер заказа.

Запас ресурса равномерно расходуется с постоянной интенсивностью D, продолжительность цикла заказа равна $t_0 = y/D$, средний уровень запаса на складе равен $\frac{y}{2}$:



Суммарные затраты в единицу времени TCU можно представить как функцию от переменной y:

$$TCU(y) = \frac{KD}{y} + h\frac{y}{2}, \quad y \geq 0,$$

где

$\frac{KD}{y}$ – затраты на оформление заказа в единицу времени;

$h\frac{y}{2}$ – затраты на хранение среднего запаса в единицу времени.

Тогда задача определения оптимального размера заказа ставится следующим образом:

$$TCU(y^*) = \min_{y \geq 0} TCU(y) = \min_{y \geq 0}\left(\frac{KD}{y} + h\frac{y}{2}\right).$$

Выписывая необходимое условие оптимальности для функции одной переменной $TCU(y)$, получаем

$$\frac{dTCU(y)}{dy} = -\frac{KD}{y^2} + \frac{h}{2} = 0,$$

следовательно,

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}. \qquad (1.8.1)$$

Необходимое условие является также и достаточным, так как функция $TCU(y)$ выпуклая при $y > 0$:

$$\frac{d^2TCU(y)}{dy^2} = \frac{2KD}{y^3} > 0.$$

Поэтому величина $y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$ определяет оптимальное решение задачи минимизации и называется (*экономичным размером заказа* или формулой Уилсона).

Стратегия управления запасами: заказывать $y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$ через промежутки времени, равные $t_0^* = \frac{y^*}{D} = \sqrt{\frac{2K}{Dh}}$. Общие минимальные затраты в единицу времени будут равны $TCU(y^*) = \sqrt{2KDh}$.

Учет срока выполнения заказа

Пусть $L \le t_0^*$ – время выполнения заказа. Тогда стратегия управления запасами: заказывать y^* как только уровень запаса опускается до величины LD.

Пусть теперь $L > t_0^*$. В этом случае определяется эффективный срок $L_Э$ выполнения заказа, который равен

$$L_Э = L - nt_0^*,$$

где n – наибольшее целое, не превышающее L / t_0^*. Стратегия управления запасами: заказывать y^*, как только уровень запаса опускается до $L_Э D$.

Пример 1.8.1. Ежедневный спрос на некоторый товар равен 100 единицам, затраты на оформление заказа 100$, затраты на хранение единицы товара в день 0,02$, срок выполнения заказа 12 дней. Определить оптимальный размер заказа и точку заказа.

Решение.

$D = 100, K = 100, h = 0{,}02, L = 12;$

$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0{,}02}} = 1000$ единиц – оптимальный размер заказа;

$t_0^* = \frac{y^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10$ дней – продолжительность цикл;

$TCU^* = \sqrt{2KDh} = 20\$$ – минимальные затраты в единицу времени;

$L_э = L - nt_0^* = 12 - 10 = 2$ дня – эффективный срок выполнения заказа;

$\overline{y} = L_э D = 200$ единиц – точка заказа.

§ 1.9. Модель с ограничениями на площадь складирования

В модели рассматривается задача управления запасами n различных ресурсов, которые хранятся на одном складе ограниченной вместимости. Характер изменения запаса каждого ресурса в отдельности удовлетворяет простейшей модели управления запасами. Отличие от ранее рассмотренных моделей заключается в том, что требуется учитывать ограниченное складское пространство.

Предположения модели:

- интенсивность спроса на каждый ресурс постоянна;
- возможно мгновенное пополнение запаса каждого ресурса;
- дефицит отсутствует.

Введем для каждого ресурса $i, i = \overline{1,n}$ следующие обозначения:

- D_i – интенсивность спроса на ресурс (количество единиц потребляемого ресурса в единицу времени);
- K_i – затраты на оформление, связанные с размещением заказа;
- h_i – затраты на хранение (удельные затраты на хранение в единицу времени);
- y_i – объем заказа (количество единиц ресурса);
- a_i – необходимое пространство для хранения единицы ресурса;
- A – максимальное складское пространство для хранения ресурсов всех видов;
- $TCU(y_1, \cdots, y_n)$ – суммарные затраты в единицу времени.

При отсутствии дефицита математическая модель задачи формулируется следующим образом:

$$\min TCU(y_1, \cdots, y_n) = \min \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right) \qquad (1.9.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \le A, \qquad (1.9.2)$$

$$y_i > 0, i = \overline{1,n}. \qquad (1.9.3)$$

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Вычисляются оптимальные размеры заказов без учета ограничений на складское пространство:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i}}, i = \overline{1,n}. \qquad (1.9.4)$$

Шаг 2. Осуществляется проверка, удовлетворяют ли найденные значения y_i^* ограничению по вместимости склада $(1.9.2)$. Если «да», то значения $y_i^*, i = \overline{1,n}$ являются оптимальными. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Ограничение по вместимости склада должно выполняться как равенство. Тогда математически наша задача становится задачей условной оптимизации, которая решается методом множителей Лагранжа.

На шаге 3 строим функцию Лагранжа для нашей задачи:

$$L(y_1,\cdots,y_n,\lambda) = TCU(y_1,\cdots,y_n) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2}\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right).$$

Поскольку функция $TCU(y_1,\cdots,y_n)$ является выпуклой, а ограничения линейные, оптимальные значения y_i^* и λ^* находятся из необходимых условий оптимальности (условий Лагранжа):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = -\dfrac{K_i D_i}{y_i} + \dfrac{h_i}{2} + \lambda a_i = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i + A = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i + 2\lambda^* a_i}}, i = \overline{1,n}.$$

При этом если $\lambda^* = 0$, то y_i^* дают решение задачи без ограничения.

Значение λ^* можно найти следующим приближенным способом. Поскольку в поставленной выше задаче $\lambda^* > 0$, необходимо последовательно увеличивать λ^* на достаточно малую величину, начиная с $\lambda^* = 0$, и использовать это значение для вычисления соответствующего значения y_i^* по формуле $(1.9.5)$. Искомое значение λ^* приводит к значениям $y_i^*, i = \overline{1,n}$, которые удовлетворяют ограничениям $(1.9.2)$ по вместимости склада в форме равенства.

Пример 1.9.1.

Модель с ограничениями на площадь складирования определется параметрами: $n = 3, A = 25$

Виды продукции	K_i	D_i	h_i	a_i
1	10	2	0,3	1
2	5	4	0,1	1
3	15	4	0,2	1

Найти оптимальные размеры заказов.

Решение.

Шаг 1. Вычисляются оптимальные размеры заказов без учета ограничений на складское пространство $y = (11{,}5;\, 20;\, 24{,}5)$.

Шаг 2. Найденные значения не удовлетворяют ограничению

$$\sum_{i=1}^{3} a_i y_i \le A, \text{ т. к. } \sum_{i=1}^{3} a_i y_i - A = 31.$$

Шаг 3. Чтобы найти размеры заказов, удовлетворяющие ограничению на емкость склада, будем постепенно увеличивать $\lambda = 0$ в формулах:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i + 2\lambda^* a_i}}, i = \overline{1,n}.$$

λ	y_1	y_2	y_3	$\sum_{i=1}^{3} a_i y_i - A$
0	11,5	20	24,5	31
0,05	10	14,1	17,3	16,4
0,1	9	11,5	14,9	10,4
0,15	8,2	10	13,4	6,6
0,2	7,6	8,9	12,2	3,7
0,25	7,1	8,2	11,3	1,6
0,3	6,7	7,6	10,6	-0,1

Оптимальным решением можно считать вектор

$$y^* = (6{,}7;\, 7{,}6;\, 10{,}6).$$

Решение типовых задач

Задача 1.1. Написать необходимые условия оптимальности для задачи без ограничений:

$$\max f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\max(-x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_1+2x_3+x_2x_3)\,.$$

Решение:

Необходимое условие экстремума имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_1}=-2x_1+1=0, \\ \dfrac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_2}=-2x_2+x_3=0, \\ \dfrac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_3}=-x_3+2+x_2=0. \end{cases}$$

Решением этой линейной системы уравнений является точка

$$x_1^*=\frac{1}{2},\, x_2^*=\frac{2}{3},\, x_2^*=\frac{4}{3}\,.$$

Задача 1. 2. Написать необходимые условия оптимальности для задачи условной оптимизации:

$$\max f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\max(2x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+x_1x_2-4x_1x_3)\,,$$

при ограничениях

$$x_1+x_2+x_3=2,$$
$$x_1+x_2=3.$$

Решение: Составляем функцию Лагранжа

$$L\left(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2\right)=2x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+x_1x_2-4x_1x_3+$$
$$+\lambda_1\left(x_1+x_2+x_3-2\right)+\lambda_2\left(x_1+x_2-3\right).$$

Обозначим $X=\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $\Lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2\right)$. Тогда необходимое условие экстремума для функции Лагранжа примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 - 4x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_2} = 8x_2 + x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_3} = 6x_3 - 4x_1 + \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Задача 1.3. Написать необходимые условия оптимальности для стандартной задачи нелинейного программирования:

$$\max f(x_1,x_2,x_3) = \max(2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - 4x_1x_3),$$

при условиях

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2,$$
$$x_1 + x_2 \geq 3.$$

Решение: Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2) =$$
$$= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - 4x_1x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 2) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 3).$$

Обозначим $X = (x_1,x_2,x_3)$, $\Lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$. Тогда необходимое условие экстремума примет вид:

$$\begin{cases} a)\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0, \\ b)\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 - 4x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \quad \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_2} = 8x_2 + x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \quad \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_3} = 6x_3 - 4x_1 + \lambda_1 = 0, \\ c)\ \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 2) = 0, \\ \quad \lambda_2(x_1 + x_2 - 3) = 0. \end{cases}$$

Задача 1.4. Написать необходимые условия оптимальности для задачи нелинейного программирования смешанного типа:

$$\max(2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - 4x_1x_3),$$

при условиях

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2,$$
$$x_1 - x_2 \leq 1,$$
$$x_2 + x_3 = 3.$$

Решение: Обозначим $X = (x_1, x_2, x_3)$, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Необходимое условие экстремума примет вид;

$$\begin{cases} a)\ \ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \in R, \\ \\ b)\ \ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 - 4x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \quad \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_2} = 8x_2 + x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \quad \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_3} = 6x_3 - 4x_1 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ c)\ \ \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 2) = 0, \\ \quad \lambda_2(x_1 - x_2 - 1) = 0, \\ \quad \lambda_3(x_2 + x_3 - 3) = 0. \end{cases}$$

Задача 1.5. Пусть $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$ – ожидаемые доходности трех видов ценных бумаг. Ковариационная матрица доходностей этих активов имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти портфель с минимальным риском и заданной доходностью $m = 2$.

Решение: Поскольку $\min f(x) = -\max(-f(x))$, математическую модель задачи нахождения оптимального портфеля минимального риска с заданной доходностью можно записать так:

$$\max\left(-V\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)=\max(-x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3),$$

при ограничениях

$$x_1+x_2+x_3=1,$$
$$x_1+2x_2+3x_3=2.$$

Составляем функцию Лагранжа

$$L\left(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2\right)=-x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-$$
$$-2x_2x_3+\lambda_1\left(x_1+x_2+x_3-1\right)+\lambda_2\left(x_1+2x_2+3x_3-2\right).$$

Необходимое условие экстремума примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial x_1}=-2x_1+2x_2+2x_3+\lambda_1+\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial x_2}=-4x_2+2x_1-2x_3+\lambda_1+2\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial x_3}=-6x_3+2x_1-2x_2+\lambda_1+3\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial \lambda_1}=x_1+x_2+x_3-1=0,\\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial \lambda_2}=x_1+2x_2+3x_3-2=0.\end{cases}$$

Данная система является линейной, ее решение может быть получено методом Гаусса:

$$x_1^*=\frac{2}{5},\ x_2^*=\frac{2}{5},\ x_3^*=\frac{1}{5}.$$

Задача 1.6. Компания хранит на складе продукцию, которая потребляется с интенсивностью 50 единиц в день. За размещение заказа компания каждый раз платит 20 долларов. Стоимость хранения единицы продукции на складе обходится в 0,35 долларов в неделю.

- Определить оптимальную стратегию управления запасами, если время выполнения заказа от момента ее размещения до реальной поставки равно 1 неделе.
- Определить оптимальное количество заказов в течение года (будем считать, что продолжительность года 365 дней).

Решение:

Исходные данные:

$$D=50\ \text{ед./день},\ K=20\$,\ h=\frac{0{,}35}{7}=0{,}05,\ L=7\text{дней};$$

$y^* = \sqrt{\dfrac{2KD}{h}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 20 \cdot 50}{0{,}05}} = 200$ единиц – оптимальный размер заказа;

$t_0^* = \dfrac{y^*}{D} = \dfrac{200}{50} = 4$ дня – продолжительность цикла;

$TCU^* = \sqrt{2KDh} = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot 50 \cdot 0{,}05} = 10$ \$ – минимальные затраты в день;

$L_э = L - nt_0^* = 7 - 4 = 3$ дня – эффективный срок выполнения заказа,

$\overline{y} = L_э D = 3 \cdot 50 = 150$ единиц – точка заказа.

Оптимальная стратегия управления запасами: заказ 200 единиц продукции каждые 4 дня, заказ следует размещать, когда уровень запаса продукции на складе будет равен 150 единицам.

Оптимальное количество заказов в течение года равно $\dfrac{365}{4} \approx 91$.

Задача 1.7. Модель с ограничениями на площадь складирования определяется параметрами: $n = 3$, $A = 36$,

Виды продукции	K_i	D_i	h_i	a_i
1	10	3	0,6	1
2	10	4	0,2	1
3	15	4	0,3	1

Определите оптимальный размер заказа.

Решение: Найдем оптимальные размеры заказа без ограничения на площадь складирования:

$$y_1^* = \sqrt{\frac{2K_1D_1}{h_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 3}{0{,}6}} = 10,$$

$$y_2^* = \sqrt{\frac{2K_2D_2}{h_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 4}{0{,}2}} = 20,$$

$$y_3^* = \sqrt{\frac{2K_3D_3}{h_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 4}{0{,}3}} = 20.$$

Ограничение $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \le A$ не выполняется (10+20+20>36), поэтому используем формулу $y_i = \sqrt{\dfrac{2K_iD_i}{h_i + 2\lambda_i a_i}}$, $\lambda_i \ge 0$ для нахождения оптимального решения с ограничением:

λ	y_1	y_2	y_3	$\sum_{i=1}^{3} a_i y_i - A$
0	10	20	20	14
0,05	9,26	16,33	17,32	6,9
0,1	8,66	14,14	15,49	2,29
0,13	8,35	13,19	14,64	0,18
0,15	8,16	12,65	14,14	-1,0

Оптимальным решением можно считать вектор

$$y^* = (8{,}16; 12{,}65; 14{,}14)$$

Задача 1.8. («Нахождение оптимального портфеля ценных бумаг» с помощью надстройки MS Excel «Поиск решения»).

Компания Stockco может делать инвестиции в 3 вида акций. По имеющимся данным (относящимся к прошлому) были сделаны оценки средних значений (математических ожиданий) и стандартных отклонений (дисперсий) годовой доходности на единицу вложения, которые приведены в табл. 1. Корреляция между годовой доходностью акций приведена в табл. 2. Компании необходимо составить портфель, который имел бы минимальную дисперсию, при этом ожидаемая доходность должна быть не меньше 0,12.

Таблица 1. Оценки средних значений и стандартных отклонений

Акция	Среднее m_i	Стандартное Отклонение σ_i
1	0,14	0,20
2	0,11	0,15
3	0,10	0,08

Таблица 2. Оценка корреляции годовых доходности акций

Комбинация акций	Корреляция
Акции 1 и 2	0,6
Акции 1 и 3	0,4
Акции 2 и 3	0,7

Решение:

Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\min V(X) = \min(v_{11}x_1^2 + v_{22}x_2^2 + v_{33}x_3^3 + 2v_{12}x_1x_2 + 2v_{13}x_1x_3 + 2v_{13}x_1x_3)$$

при ограничениях

на объем инвестиций:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

на ожидаемую доходность:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 \ge m,$$

на знак:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Построение табличной модели (рис.1.2)

- **Исходные данные.** Введем данные из таблиц 1 и 2 в ячейки диапазона B5:D6 и B10:D12 .
- **Инвестированные доли.** Введем произвольные значения в диапазон B16:D16, эти значения представляют собой доли денежных ресурсов Stockco, инвестированные в различные виды акций (x_1, x_2, x_3).
- **Общий объем инвестированных ресурсов.** В ячейке E16 подсчитаем общий объем инвестированных ресурсов по формуле:

=СУММ(B16:D16).

Ведем значение 1 в ячейку G16, показывающее, что все 100% денежных ресурсов должны быть инвестированы.

- **Ожидаемая годовая доходность.** Ожидаемый годовой доход вычислим в ячейке B20 по формуле:

=СУММПРОИЗВ(B16:D16,B5:D5).

В ячейку D20 введем требуемое значение годовой доходности, равное 0,12.

- **Дисперсия доходности.** Поскольку $v_{ii} = \sigma_i^2$, $v_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, $i, j = \overline{1,3}$, то дисперсию портфеля можно записать в следующем виде:

$$V(X) = (\sigma_1x_1)^2 + (\sigma_2x_2)^2 + (\sigma_3x_3)^2 + 2\rho_{12}(\sigma_1x_1)(\sigma_2x_2) +$$
$$+2\rho_{13}(\sigma_1x_1)(\sigma_3x_3) + 2\rho_{23}(\sigma_2x_2)(\sigma_3x_3).$$

Для нахождения дисперсии доходности портфеля вычислим для каждой акции следующие величины: $\sigma_i x_i, i = 1,2,3$.

Технически это выглядит так: введем в ячейку B23 формулу для акции 1

=B6*B16

и скопируем эту формулу в диапазон C23:D23, соответствующий оставшимся двум акциям.

Теперь, используя ячейки B23:D23, вычислим дисперсию годовой доходности портфеля в ячейке B26 по формуле:

=СУММПРОИЗВ(B23:D23,B23:D23)+2*B23*C23*C10+
+2*B23*D23*D10+2*C23*D23*D11.

Здесь выражение

=СУММПРОИЗВ(B23:D23,B23:D23)

соответствует первому слагаемому в формуле оценки дисперсии доходности $V(X)$, а оставшиеся выражения – второму слагаемому в той же формуле.

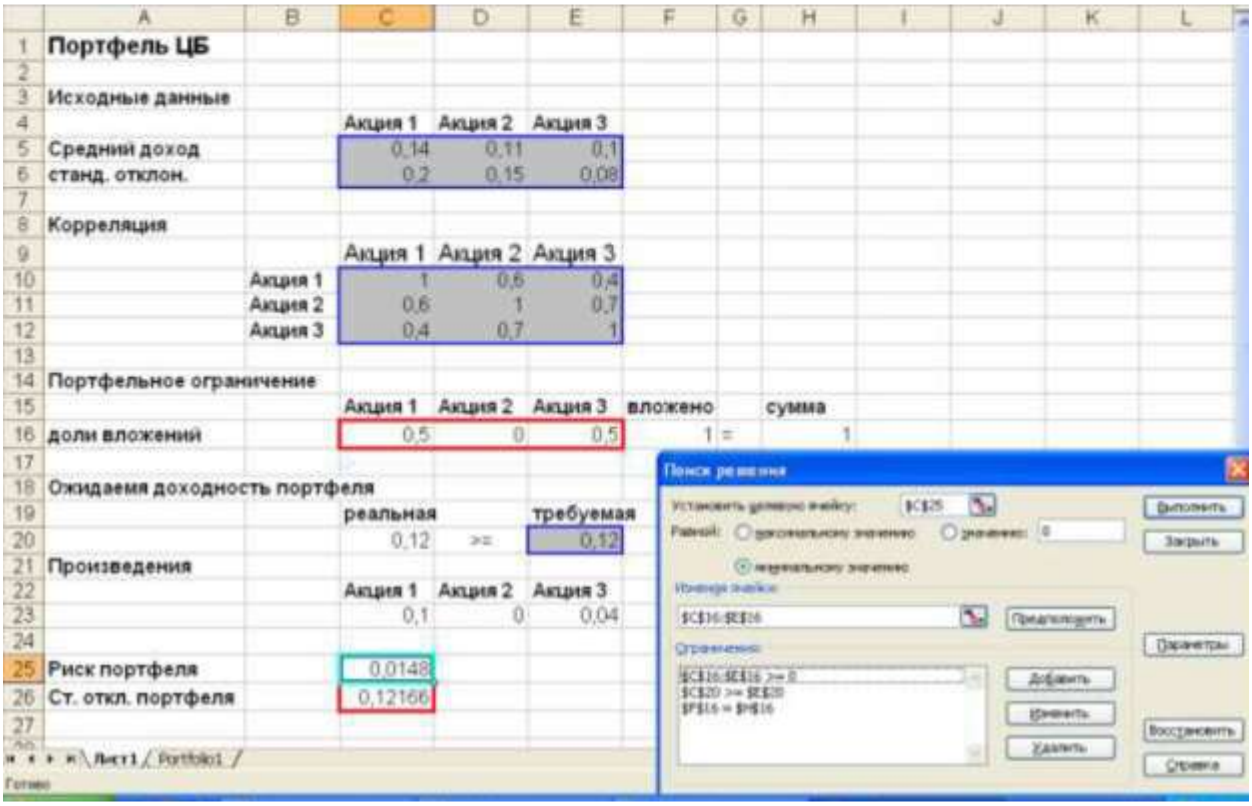


Рис. 1.2. Оптимальная таблица.

Поиск оптимального решения

- **Целевые ячейки.** Выберем ячейку B25 (дисперсию портфеля) в качестве целевой ячейки для задачи минимизации.
- **Изменяемые ячейки.** Выберем диапазон B16:D16 (переменные) в качестве изменяемых ячеек. Добавим в качестве ограничения условие их неотрицательности.
- **Ограничение на ожидаемую доходность.** Добавим ограничение B20>=D20. Это обеспечит нам ожидаемую доходность портфеля не менее 0,12.
- **Ограничения на величину инвестиции.** Добавим ограничение E16=G16. Это означает, что все доступные денежные ресурсы должны быть инвестированы.

Оптимизация.

После выбора в диалоговом окне опции **“Выполнить”**, получаем оптимальное решение (см. рис. 1.1).

В оптимальном решении дисперсия портфеля равна 0,0148 (стандартное отклонение равно 0,1217). В оптимальном портфеле Stockco половина средств должна быть инвестирована в акции 1 и половина – в акции 3.

Заметим, что дисперсия портфеля является выпуклой функцией от инвестиций в различные виды акций, все ограничения линейные. Это обеспечивает достаточность условий оптимальности, поэтому мы можем быть уверены, что процедура «Поиск решения» нашла оптимальное решение.

Задания для самостоятельного решения

1.1. Годовая доходность 3 типов активов (Т-облигации, акции, золото) в течение 1968 –1988 гг. приведены в таблице. Так, например, $1, инвестированный в облигации в начале 1978 г., составит $1,07 в конце 1978 г. В распоряжении Вашей компании имеется $1 000 для инвестирования. Необходимо составить инвестиционный портфель из указанных выше возможных активов, имеющий ожидаемую годовую доходность не менее 0,10 с минимальной дисперсией годовой доходности на вложенный доллар.

Годовые доходности за период 1968-1988 гг.

	Акции	Золото	Облигации
1968	0,11	0,11	0,05
1969	-0,09	0,08	0,07
1970	0,04	-0,14	0,07
1971	0,14	0,14	0,04
1972	0,19	0,44	0,04
1973	-0,15	0,66	0,07
1974	-0,27	0,64	0,08
1975	0,37	0,00	0,06
1976	0,24	-0,22	0,05
1977	-0,07	0,18	0,05
1978	0,07	0,31	0,07
1979	0,19	0,59	0,10
1980	0,33	0,99	0,11
1981	-0,05	-0,25	0,15
1982	0,22	0,04	0,11
1983	0,23	-0,11	0,09
1984	0,06	-0,15	0,10
1985	0,32	-0,12	0,08
1986	0,19	0,16	0,06
1987	0,05	0,22	0,05
1988	0,17	-0,02	0,06

Определить, сколько следует инвестировать в каждый вид активов.

1.2. Предположим, компания имеет возможность осуществлять 3 различные инвестиции (соответственно Инвестиция 1, Инвестиция 2, Инвестиция 3). Годовая доходность каждой из этих трех инвестиций имеет следующие характеристики: среднее значение, соответственно, 0,12, 0,15 и 0,20; стандартное отклонение, соответственно, 0,20, 0,30 и 0,40.

Корреляция между инвестициями дана в таблице:

Комбинации	Корреляция
Инвестиция 1 и 2	0,65
Инвестиция 1 и 3	0,75
Инвестиция 2 и 3	0,41

В распоряжении компании имеется инвестиционный бюджет, равный $10 000, причем требуется не более половины денежных средств вкладывать в каждый вид инвестиций.

Необходимо составить оптимальный портфель при условии, что ожидаемый годовой доход должен быть не менее 0,14.

1.3. В распоряжении Вашей компании имеется $1 000, которые решено инвестировать в акции трех различных видов. Математическое ожидание годовой доходности вложения в акции вида 1 составляет 0,14, в акции вида 2 – 0,11, в акции вида 3 – 0,10. Дисперсия годовой доходности вложения $1 составляет: для акций вида 1 – 0,20, для акций вида 2 – 0,08, для акций вида 3 – 0,18. Корреляции доходностей приведены в таблице:

Необходимо составить портфель инвестиций, который имел бы минимальную дисперсию и годовую доходность не менее 0,12.

Корреляции доходностей:

Комбинации	Корреляция
Акция 1 и 2	0,8
Акция 1 и 3	0,7
Акция 2 и 3	0,9

В задачах 1.4 – 1.12 необходимо составить инвестиционный портфель с минимальным риском, имеющий ожидаемую годовую доходность не менее m, годовая доходность трех типов инвестиций за предыдущие 15 лет приведена в таблицах. В распоряжении компании имеется капитал в 100 000 долларов для инвестирования.

1.4. $m = 0{,}12$

1	2	3
0,01	0,75	0,66
-0,05	0,23	0,18
-0,21	-0,56	0,62
-0,01	0,15	0,01
0,01	-0,6	-0,05
0,11	-0,24	0,21
-0,25	0,32	0.04
0,34	1	0,53
0,11	0,03	0,3
-0,14	0,45	0,2
0,53	0,3	0,67
0,3	0,01	-0,18
0,02	-0,05	0,22
0,65	0,21	-0,01
-0,18	-0,01	-1

1.5. $m = 0{,}12$

1	2	3
0,11	0,75	-0,6
-0,25	0,23	-0,24
0,34	-0,56	0,32
0,11	0,15	1
-0,14	0,63	-0,05
0,53	-0,18	0,22
0,3	0,62	0,04
0,2	0,01	0,53
0,66	0,03	0,3
-0,17	0,03	0,45
0,01	0,45	0,3
0,05	0,3	0,2
0,21	0,01	0,66
-0,01	-0,05	-0,18
0,01	0,21	0,22

1.6. $m = 0{,}15$

1	2	3
0,11	0,53	0,75
-0,14	0,3	0,23
0,53	0,45	-0,56
0,3	0,3	0,15
0,2	-0,6	0,63
0,66	-0,24	-0,18
-0,17	0,32	0,62
0,01	1	0,01
0,05	-0,05	0,03
0,21	0,22	0,03
-0,01	0,04	0,45
0,01	0,66	0,3
0.34	-0,18	0,01
0,11	0,22	-0,05
-0,14	0,3	0,21

1.7. $m = 0{,}12$

1	2	3
-0,21	0,66	0,75
-0,01	0,18	0,23
0,01	0,62	-0,56
0,11	0,01	0,15
-0,25	-0,05	-0,6
0,34	0,21	-0,24
0,01	0.04	0,32
-0,05	0,53	1
0,3	0,3	0,03
0,02	0,2	0,45
0,65	0,67	0,3
-0,18	-0,18	0.01
0,11	0,22	-0,05
-0,14	-0,01	0,21
0,53	-1	-0,01

1.8. $m = 0{,}15$

1	2	3
0,11	0,53	-0,6
-0,25	0,3	-0,24
0.34	0,45	0,32
0,11	0,3	1
-0,14	0,2	-0,05
0,53	0,66	0,22
0,3	-0,18	0,04
0,2	0,22	0,75
0,66	0,03	0,23
-0,17	0,03	-0,56
0,01	0,45	0,15
0,05	0,3	0,63
0,21	0,01	-0,18
-0,01	-0,05	0,62
0,01	0,21	0,01

1.9. $m = 0{,}12$

1	2	3
0,32	-0,6	0,75
1	-0,24	0,23
-0,05	0,32	-0,56
0,22	1	0,15
0,04	-0,05	0,63
0,66	0,22	-0,18
-0,18	0,3	0,62
0,22	0,2	0,53
0,03	0,66	0,3
0,03	-0,18	0,45
0,45	0,11	0,3
0,3	-0,25	-0,6
0,01	0.34	-0,24
-0,05	0,11	0,45
0,21	-0,14	0,3

1.10. $m = 0{,}12$

1	2	3
0,03	0,66	0.04
0,45	0,18	0,53
0,3	0,62	0,3
0,01	0,01	0,2
-0,05	-0,05	-0,6
0,21	0,21	-0,24
-0,01	0,75	0,32
-0,05	0,23	1
0,3	-0,56	-0,21
0,02	0,15	-0,01
0,65	0,67	0,01
-0,18	-0,18	0,11

1.11. $m = 0{,}1$

1	2	3
0,03	0,53	-0,6
0,45	0,3	-0,24
0,3	0,45	0,32
0,01	0,3	1
-0,05	0,2	-0,05
0,21	0,66	0,22
0,3	-0,18	0,04
0,2	0,22	0,75
0,66	0,03	0,23
-0,17	0,11	-0,56
0,01	-0,25	0,15
0,05	0.34	0,63

1.12. $m = 0{,}14$

1	2	3
0,32	-0,25	0,75
1	0,34	0,23
-0,05	0,11	-0,56
0,22	-0,14	0,15
0,04	0,3	0,63
0,66	0,45	-0,18
-0,18	0,3	0,62
0,22	-0,6	0,53
0,03	-0,24	-0,6
0,03	0,45	-0,24
0,45	0,3	0,32
0,3	0,2	1

0,11	0,22	-0,25	0,21	0,11	-0,18	0,01	0,66	-0,05
-0,14	-0,01	0,34	-0,01	-0,14	0,62	-0,05	-0,18	0,22
0,53	-1	0,01	0,01	0,21	0,01	0,21	0,11	0,3

1.13. Дефицит не допускается, а время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно 30 дням. Требуется определить оптимальную стратегию управления запасами и соответствующие дневные затраты, если $K = \$50$, $h = \$0,05$, $D = 30$ единиц в день.

1.14. Дефицит не допускается, а время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно 30 дням. Требуется определить оптимальную стратегию управления запасами и соответствующие дневные затраты, если $K = \$100$, $h = \$0,01$, $D = 40$ единиц в день.

1.15. Дефицит не допускается, а время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно 30 дней. Требуется определить оптимальную стратегию управления запасами и соответствующие дневные затраты, если $K = \$100$, $h = \$0.04$, $D = 20$ единиц в день.

1.16. Компания хранит на складе продукцию, которая потребляется с интенсивностью 50 единиц в день. За размещение заказа компания каждый раз платит 20 долларов. Стоимость хранения единицы продукции на складе обходится в 35 центов в неделю. Определите оптимальное количество заказов в течение года, считая, что продолжительность года составляет 365 дней.

1.17. Компания желает определить экономический объем заказа для каждого из четырех видов продукции таким образом, чтобы суммарное количество заказов в год было не более 150.

Продукция i	K_i, доллары	D_i, ед. в день	h_i, доллары
1	100	10	0,1
2	50	20	0,2
3	90	5	0,2
4	20	10	0,1

Тема 2. Многокритериальная оптимизация

§ 2.1. Проблема оптимальности в многокритериальных задачах

Ранее мы рассматривали задачи, в которых была единственная цель (критерий) и тем самым единственная целевая функция. Теперь предположим, что качество решения оценивается по многим критериям. Тогда выбор наилучшего решения является нетривиальной задачей, появляется новая проблема: что следует понимать под оптимальным решением? Дело в том, что объективно неизвестно, какое решение лучше, если критериев много и они, возможно, «конфликтующие». В частности, непонятно, какое решение лучше, если фирма одновременно стремится максимизировать прибыль и минимизировать затраты. Поэтому нужно искать компромиссное решение, учитывающее важность каждой целевой функции.

Таким образом, мы приходим к понятию *эффективного* (*оптимального по Парето*) решения. Свойством эффективности (в крайнем случае, слабой эффективности) должно обладать любое решение, претендующее на то, чтобы его назвали оптимальным. Однако при таком подходе остается проблема выбора единственного решения, поскольку парето-оптимальных решений, как правило, много (часто бесконечно много).

Проблему выбора решения из парето-оптимальных можно решить, например, используя метод *целевого программирования*. При таком подходе удается построить одно решение, являющееся парето-оптимальным. Следует отметить, что целевое программирование – это не единственный метод нахождения одного парето-оптимального решения. В частности, имеется специальная *теория арбитражных схем*, решающая данную проблему.

В случае *линейной многокритериальной задачи* имеет смысл говорить об *экстремальных эффективных* (парето-оптимальных) решениях. Таких решений конечное число, что существенно упрощает решение проблемы выбора.

§ 2.2. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Оптимальность по Парето

Пусть X обозначает множество допустимых решений в некоторой задаче, $x \in X$ – допустимое решение. Предположим, что каждое решение $x \in X$ оценивается по n критериям ($n \geq 2$).

Имеется чрезвычайно полезная конструкция для решения многокритериальных задач – понятие *оптимального по Парето или эффективного решения.*

Пусть $H_i(x)$, $x \in X$ – вещественная функция, значениями которой являются оценки решения $x \in X$ по критерию $i, i = \overline{1,n}$.

Тогда вектор $H(x) = (H_1(x),\cdots,H_i(x),\cdots,H_n(x)), x \in X$ – набор оценок решения $x \in X$ по всем критериям. Предположим, что степень предпочтительности решения $x \in X$ возрастает с возрастанием компонент вектора H, т. е. чем больше значение $H_i(x)$, тем лучше решение x по критерию $i, i = \overline{1,n}$.

Решение $x^* \in X$ называется *парето-оптимальным (оптимальным по Парето, эффективным),* если не существует другого решения $x \in X$, для которого

$$H_i(x) \geq H_i(x^*), i = \overline{1,n},$$

$$\exists i_0 : H_{i_0}(x) > H_{i_0}(x^*).$$

Иными словами, если $x^* \in X$ – *парето-оптимальное решение,* то не существует другого решения $x \in X$, которое превосходит x^* хотя бы по одному критерию, а по остальным критериям не хуже.

Пример 8.2.1. В качестве иллюстрации принципа оптимальности Парето приведем пример сравнительного анализа пяти марок автомобилей по 20 критериям:

Параметр	Daewoo Nexia	Kia Rio	Opel Corsa	Skoda Fabia	VW Pointer
Дизайн	75	105	130	120	105
Внешность	40	55	65	60	50
Интерьер	35	50	65	60	55
Эргономика	100	120	125	125	130
Место водителя	40	55	60	75	55
Обзорность	60	65	65	50	75
Динамика	205	220	210	210	205
Разгонная динамика	65	70	55	55	55
Тормозная динамика	75	75	75	70	80
Управляемость	65	75	80	85	70
Ездовой комфорт	140	165	155	155	145
Плавность хода	55	65	60	60	60
Акустический комфорт	45	55	50	50	40
Микроклимат	40	45	45	45	45
Комфорт салона	90	145	140	130	100
Пассажирские места	45	45	55	45	30

Модель Daewoo Nexia по всем критериям не лучше модели Kia Rio. Оставшиеся четыре модели нельзя сравнить между собой, поскольку по ряду критериев лучше одни модели, а по другим – другие. Выбор любого из этих типов автомобилей (кроме Daewoo Nexia) является оптимальным по Парето решением.

Множество всех эффективных (парето-оптимальных) решений называется *эффективным множеством*.

Замечание 2.2.1.

- *Достоинством концепции эффективного решения является то, что эффективные решения существуют в практически значимых классах задач.*
- Недостаток понятия парето-оптимального решения состоит в том, что оно, как правило, не позволяет найти единственного решения проблемы, можно получить лишь множество эффективных решений.

Пример 2.2.2. Пусть $n = 2$, X – множество возможных решений, множество $H(X) = \{H = (H_1, H_2) \mid H_1 = H_1(x), H_2 = H_2(x), x \in X\}$ будем называть множеством возможных оценок. Множество $H(X)$ представляет собой некоторую область на координатной плоскости (H_1, H_2).

Пусть множество возможных оценок изображено на рис. 2.1 область OABCDEF) . Тогда множество парето-оптимальных оценок совпадает с частью «северо-восточной» границы множества $H(X)$ (кривые BC и EF представляют собой *эффективную границу* множества возможных оценок $H(X)$).

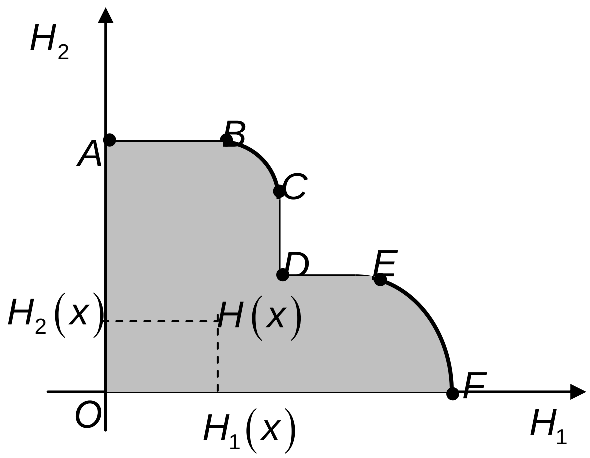


Рис. 2.1

Теорема 2.2.1. Для того чтобы решение $x \in X$ являлось оптимальным по Парето в задаче МКО, необходимо и достаточно, чтобы оно было решением следующей задачи

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i(x),$$

где параметры λ_i, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяют условиям $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in (0,1)$.

§ 2.3. Арбитражные решения

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации (задача МКО). Пусть множество возможных оценок $H(X) = \{H(x), x \in X\}$ является выпуклым и компактным в R^n.

Пусть $x_0 \in X$ - некоторое допустимое решение, которое будем интерпретировать как «консервативное», подлежащее улучшению при решении данной многокритериальной задачи. Значение векторного критерия в точке $x_0 \in X$, т. е.

$$H(x_0) \equiv (H_1(x_0), \cdots, H_i(x_0), \cdots, H_n(x_0)),\ x \in X$$

будем называть точкой «*статус-кво*». Точка «статус-кво» интерпретируется как набор оценок некоторого допустимого решения, выбранного из каких либо соображений в качестве начального приближения к оптимальному.

Арбитражной схемой в задаче МО называется правило φ, которое каждому множеству возможных оценок $H(X)$ и каждой точке «статус-кво» $H(x_0)$ ставит в соответствие единственную пару $\left(H^*, x^*\right) = \varphi\left(H(X), H(x_0)\right)$, где $x^* \in X, H^* = H\left(x^*\right)$ (x^* интерпретируется как оптимальное решение).

Решение, полученное в соответствии с выбранной арбитражной схемой, называется *арбитражным решением*.

Мы рассмотрим две наиболее распространенные арбитражные схемы: *метод главного критерия и арбитражную схему Нэша.*

Метод главного критерия.

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации с векторным критерием $H(x), x \in X$ и некоторую точку «статус-кво»: $H(x_0) \equiv (H_1(x_0), \cdots, H_i(x_0), \cdots, H_n(x_0)),\ x \in X$. Выберем некоторый критерий в качестве главного, пусть это будет критерий с номером 1.

Рассмотрим математическую задачу:

$$\max_{x \in X} H_1(x)$$

при условиях:

$$H_i(x) \ge H_i(x_0), i = \overline{2,n}.$$

Вектор $x^* \in X$, который решает данную задачу, называется *оптимальным решением по методу главного критерия* (главный критерий 1) при точке «статус-кво» $H(x_0)$.

Пример 2.3.1. В двухкритериальной задаче (рис. 2.2) оптимальным по методу главного критерия (критерий 1) будет решение, имеющее оценку H^*, если в качестве главного выбрать второй критерий, то оптимальным будет решение с оценкой H^{**}.

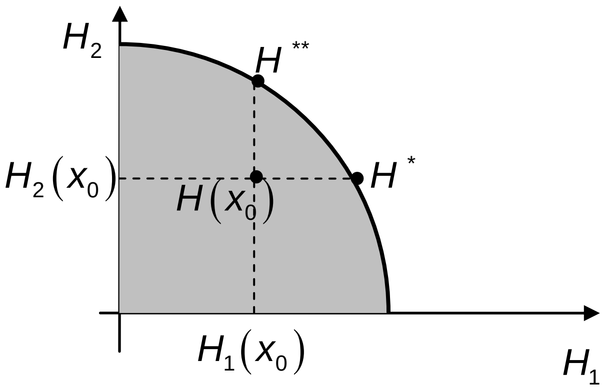


Рис. 2.2

Арбитражная схема Нэша

Рассмотрим задачу МКО: $H(x) \equiv (H_1(x), \cdots, H_i(x), \cdots, H_n(x)), \quad x \in X$ и некоторую точку «статус-кво»:

$$H(x_0) = (H_1(x_0), \cdots, H_i(x_0), \cdots, H_n(x_0)), \; x \in X .$$

Введем в рассмотрение функцию (*функцию Нэша* или *произведение Нэша*):

$$H^N(x) = \prod_{i=1}^{n} (H_i(x) - H_i(x_0)) .$$

Рассмотрим математическую задачу:

$$\max_{x \in X} H^N(x)$$

при условиях:

$$H_i(x) \ge H_i(x_0), \; i = \overline{1,n}.$$

Вектор $x^* \in X$, который решает данную задачу, называется *арбитражным решением Нэша* при точке «статус-кво» $H(x_0)$, $H^N(x^*)$ – *оценка для арбитражного решения Нэша* $x^* \in X$. (На рис. 2.3 изображено множество возможных оценок и линия уровня функции Нэша $H^N(x) = \text{const}$).

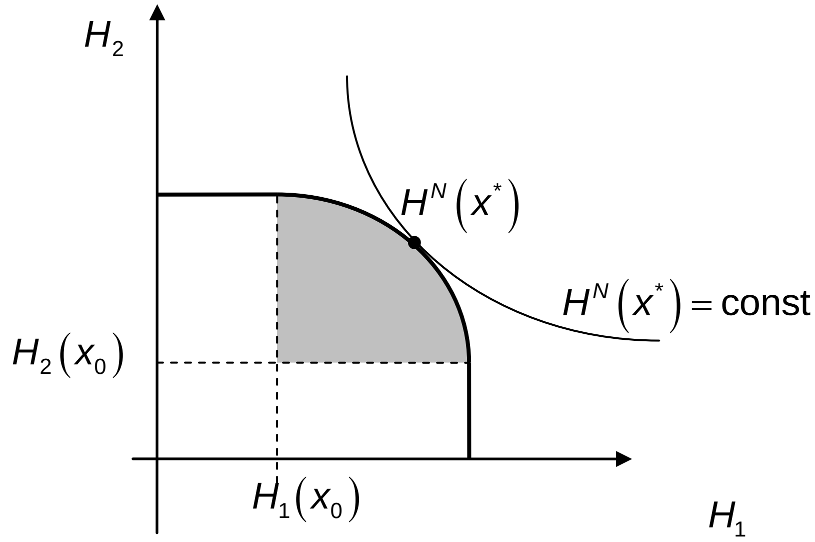


Рис. 2.3.

§ 2.4. Целевое программирование

В основе метода целевого программирования для решения многокритериальных задач лежит упорядочение критериев (целей) по степени важности. Исходная задача решается путем последовательного решения ряда задач с одной целевой функцией таким образом, что решение задачи с менее важной целью не может ухудшить оптимального значения целевой функции с более высоким приоритетом. В результате мы получаем удовлетворительное решение для рассматриваемой проблемы.

Целевое программирование, как правило, применяется к линейным моделям. Основное его отличие от задачи ЛП заключается в том, что многие цели формализуются не как целевые функции, а как ограничения в другой более общей модели. С этой целью вводятся предполагаемые количественные значения целевых функций и так называемые, переменные отклонения которые характеризуют степень достижения поставленных целей для данного решения.

Пример 2.4.1. Фирма Faze Linear производит компоненты для аудиосистем: звуковые усилители (ЗУ) и усилители мощности (УМ). Для сборки каждого усилителя мощности требуется один транзистор, суточный запас которых ограничен 40 единицами. При этом для сборки одного ЗУ требуется 1,2 часа, а для одного УМ 4 часа. Суточные возможности по сборке ограничены 240 часами. После сборки каждый усилитель проходит контрольное тестирование. Для контрольного тестирования одного ЗУ требуется 0,5 часа, а для УМ – 1 час. Фирма обладает оборудованием, которое позволяет проводить тестирование в течение 81 часа. Удельная прибыль от продажи оставляет 200$ и 500$ соответственно.

Менеджеры Faze Linear стремятся к достижению двух целей:

- цель 1 – получить прибыль, равную $40000;

- цель 2 – ограничить (минимизировать) общее время тестирования готовых изделий.

Решение.

Если решать задачу максимизации прибыли фирмы, то задача линейного программирования выглядит так:

Максимизировать прибыль

$$\max(200x_1 + 500x_2)$$

при ограничениях

$$x_2 \le 40 \text{ – запас транзисторов;}$$

$$1{,}2x_1 + 4x_2 \le 240 \text{ – время сборки;}$$

$$0{,}5x_1 + 1x_2 \le 81 \text{ – время тестирования;}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Оптимальное решение задачи ЛП: производить 28,5 штук УМ и 105 штук ЗУ, при этом общая прибыль плана составляет $35 250.

Теперь рассмотрим цель 1 и введем две переменные отклонения:

d_1^- – «*недостаточная*» переменная, которая показывает на сколько объем прибыли меньше величины $40000,

d_1^+ – «*избыточная*» переменная, которая показывает, на сколько объем прибыли превосходит величину $40000.

Переменная d_1^- отвечает за степень достижения первой цели, если $d_1^- = 0$, то цель достигнута. Если $\min d_1^-$ – величина положительная, то цель недостижима.

Тогда можно записать целевое *(мягкое)* ограничение

$$200x_1 + 500x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40000,$$

$$d_1^- \ge 0, d_1^+ \ge 0.$$

Предполагая, что 81 час – это стандартное время тестирования, мы можем сформулировать второе целевое ограничение, введя новые переменные отклонения:

d_2^- – «недостаточная» переменная, которая показывает, на сколько время тестирования меньше 81 часа;

d_2^+ – «избыточная» переменная, которая показывает, на сколько время тестирования превосходит 81 час.

Переменная d_2^+ отвечает за степень достижения второй цели, если $d_2^+ = 0$, то цель достигнута. Если $\min d_2^+$ – величина положительная, то цель недостижима.

Тогда можно записать второе целевое *(мягкое)* ограничение

$$0{,}5x_1 + 1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 81,$$

$$d_2^- \ge 0, d_2^+ \ge 0.$$

Гибкость выбора значений для «недостаточных» и «избыточных» переменных позволяет целевому программированию достичь компромиссного решения.

Существует несколько методов целевого программирования, мы рассмотрим метод *весовых коэффициентов* и метод *приоритетов.*

Метод весовых коэффициентов.

В методе *весовых коэффициентов* единственная целевая функция формализуется как взвешенная сумма исходных частных целевых функций. В рассматриваемой нами задаче, если цель 1 приоритетнее цели 2, взвешенная функция будет иметь вид

$$\min(P_1 d_1^- + P_2 d_2^+),$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&x_2 \le 40,\\
&1{,}2x_1 + 4x_2 \le 240,\\
&x_1, x_2 \ge 0,\\
&200x_1 + 500x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40000,\\
&0{,}5x_1 + 1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 81,\\
&d_1^- \ge 0, d_1^+ \ge 0, d_2^- \ge 0, d_2^+ \ge 0.
\end{aligned}$$

Здесь $P_1 > P_2 \ge 0$ – веса критериев в *агрегированном (взвешенном)* критерии.

Недостатком этого метода является субъективность задания весовых коэффициентов, однако разработаны методы, понижающие значение субъективного фактора при их выборе.

Метод приоритетов.

В *методе приоритетов* n частных целевых функций ранжируются в порядке важности, затем поочередно решаются задачи с одной целевой функцией, начиная с задачи, имеющей наивысший приоритет, и заканчивая задачей, имеющей минимальный приоритет. В процессе решения последовательных задач решение задачи с целевой функцией, имеющей более низкий приоритет, не может ухудшить полученные ранее решения задач, имеющих более высокий приоритет.

В простейшем случае решение задачи может быть найдено графически.

Пример 2.4.2. Используя метод приоритетов, решим графически задачу фирмы Faze Linear (рис. 2.4.1).

- Шаг 0. Строится множество допустимых решений задачи, оно определяется системой *жестких* ограничений, которая в задаче имеет вид:

$$x_2 \le 40,$$
$$1{,}2x_1 + 4x_2 \le 240,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

- Шаг 1. На этом шаге решается задача нахождения минимума отклонения от цели 1 на множестве допустимых решений:

$$\min d_1^-$$

при ограничениях

$$x_2 \le 40,$$
$$1{,}2x_1 + 4x_2 \le 240,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$
$$200x_1 + 500x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40000,$$
$$0{,}5x_1 + 1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 81,$$
$$d_1^- \ge 0, d_1^+ \ge 0, d_2^- \ge 0, d_2^+ \ge 0.$$

В результате решения задачи имеем (рис. 8.4.1) $\min d_1^- = 0$ и минимальное отклонение от цели 1 достигается в точке $F(200{,}0)$.

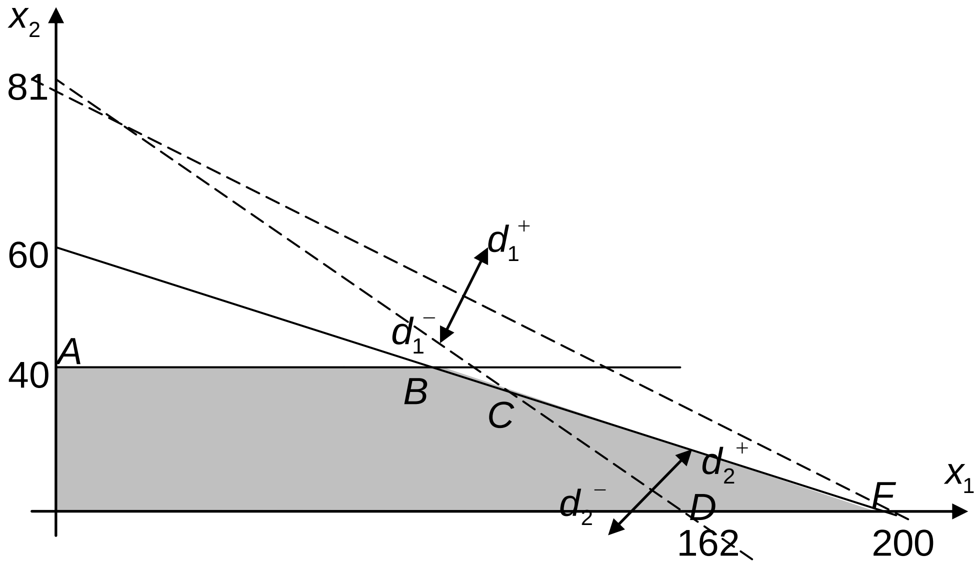


Рис. 2.4.

- Шаг 2. На этом шаге решаем задачу нахождения минимума отклонения от цели 2, при условии, что сохраняется отклонение от цели 1, достигнутое на шаге 1:

$$\min d_2^+$$

при ограничениях

$$d_1^- = 0,$$
$$x_2 \le 40,$$
$$1{,}2x_1 + 4x_2 \le 240,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

$$200x_1 + 500x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40000,$$
$$0{,}5x_1 + 1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 81,$$
$$d_1^- \ge 0, d_1^+ \ge 0, d_2^- \ge 0, d_2^+ \ge 0.$$

Окончательно имеем решение: $\min d_1^- = 0$ и оно достигается в точке $F(200{,}0)$. Цель 1 достигается, а цель 2 – нет, отклонение от цели 2: $\min d_2^+ = 100 - 81 = 19$ часов.

Замечание 2.4.1. Если изменить приоритеты целей и считать главной целью минимизацию времени тестирования, то оптимальным решением будет точка C(105; 28,5).

Отклонение от цели 1 будет равно $\min d_2^+ = 0$, отклонение от цели 2 будет равно $\min d_1^- = \$40000 - \$35250 = \$4750$.

§2.5. Многокритериальное линейное программирование

Многокритериальное линейное программирование основано на построении всего множества парето-оптимальных решений и его графическом представлении. Такой подход можно применить задачам с малым числом критериев $(n = 2)$ или задачам с двумя переменными. В первом случае находится эффективная граница множества возможных оценок, во втором – эффективная граница множества возможных решений. После построения эффективной границы (кривой) проблема сводится к выбору одного из недоминируемых решений. Следует отметить, что в случае линейной задачи имеет смысл выбирать только из эффективных экстремальных решений, поэтому в линейном случае сама проблема выбора существенно упрощается.

Пример 2.5.1. Рассмотрим задачу из примера 2.4.1., изменив цель. Предположим, что нам надо оптимизировать решение по двум критериям (максимизировать краткосрочную прибыль H_1 и максимизировать долгосрочную прибыль H_2), т. е. имеем задачу:

$$\max H_1(x_1, x_2) = \max(300x_1 + 500x_2),$$
$$\max H_2(x_1, x_2) = \max(x_1 + 4x_2)$$

при ограничениях

$$x_2 \le 40,$$
$$1{,}2x_1 + 4x_2 \le 240,$$
$$0{,}5x_1 + 1x_2 \le 81,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение.

Изобразим графически множество допустимых решений задачи (рис. 2.5.1).

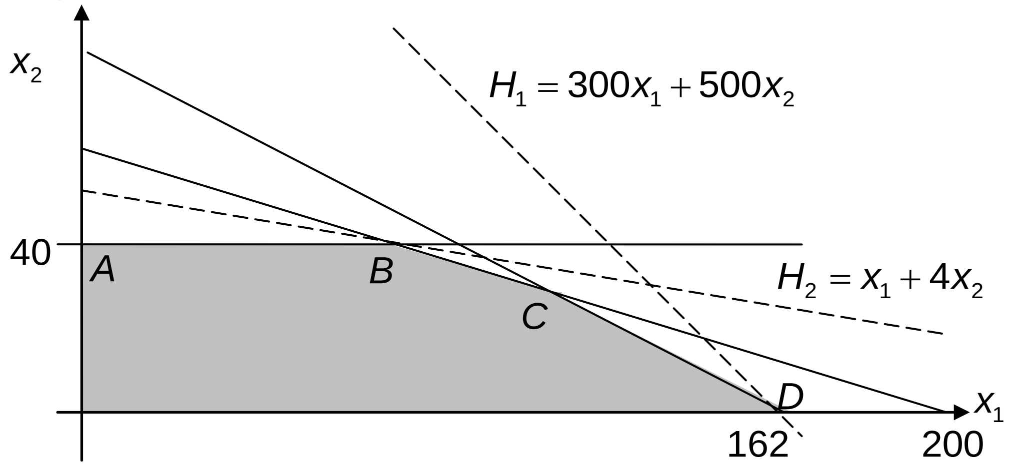


Рис. 2.5

Точка D – оптимальное решение задачи по первому критерию, точка B – оптимальное решение по второму критерию. Множество эффективных (парето-оптимальных) точек представляет собой линию, состоящую из отрезков BC и CD. Недоминируемыми экстремальными решениями являются точки B,C и D, значения целевых функций в этих точках приведены в таблице:

Экстремальная точка	Целевая функция H_1	Целевая функция H_2
B (66,7;40)	40000	226,7
C (105;28,5)	45750	219
D (162;0)	48 600	162

Принимая решение относительно оптимального плана производства, менеджерам следует ограничить свой выбор одной из экстремальных точек.

Решение типовых задач

Задача 2.1. ***(Задача о размещении рекламы)***

Рекламному агентству необходимо разместить на телевидении рекламу автомобильной компании «Priceler». В соответствии с пожеланиями компании данная реклама должна быть просмотрена:

- не менее чем 40 мил мужчин, чей уровень дохода достаточно велик (HIM) (цель 1);
- не менее чем 35 млн женщин, чей уровень дохода тоже велик (HIW) (цель 2);
- не менее чем 60 млн зрителей среднего достатка (LIP) (цель 3).

Рекламное агентство может предложить показ рекламного ролика во время трансляции футбольного матча или во время сериала. Суммарные расходы на рекламу не должны превысить $600 000.

В таблице приведены данные о стоимости показа одного рекламного ролика и численности аудитории потенциальных зрителей (в млн человек):

Время показа	HIM	LIP	HIW	Стоимость
Футбольный матч	7	10	5	$100 000
Сериал	3	5	4	$60 000

Автомобильная компания «Priceler» желает составить такой план показа рекламных роликов, чтобы три основные цели были выполнены.

Решение: Составим математическую модель ЛП, для этого обозначим:

x_1 – количество показов рекламы во время футбольного матча;

x_2 – количество показов рекламы во время сериала.

Тогда ограничения на численность аудитории будут иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&7x_1 + 3x_2 \ge 40,\\
&10x_1 + 5x_2 \ge 60,\\
&5x_1 + 4x_2 \ge 35,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Пояснения к электронной таблице

__**Шаг 0**__ (лист «Допустимое решение»).

Попытаемся найти допустимое решение, удовлетворяющее ограничениям (рис. 2.6).

- **Входные данные.** В ячейки B5:C7 вводим число потенциальных зрителей (млн чел.) одного рекламного ролика в каждой группе для разного типа рекламы. В ячейки B9:C9 вводим стоимость показа одного ролика для разного времени показа. В ячейках D20:D22 вводим количество зрителей, которое хотелось бы охватить в соответствии с указанными целями. В ячейке D16 указываем ограничения на бюджет.
- **Число показов рекламных роликов.** Введем начальные значения числа показов в ячейках B13:C13. Например, $x_1 = 0, x_2 = 0$.

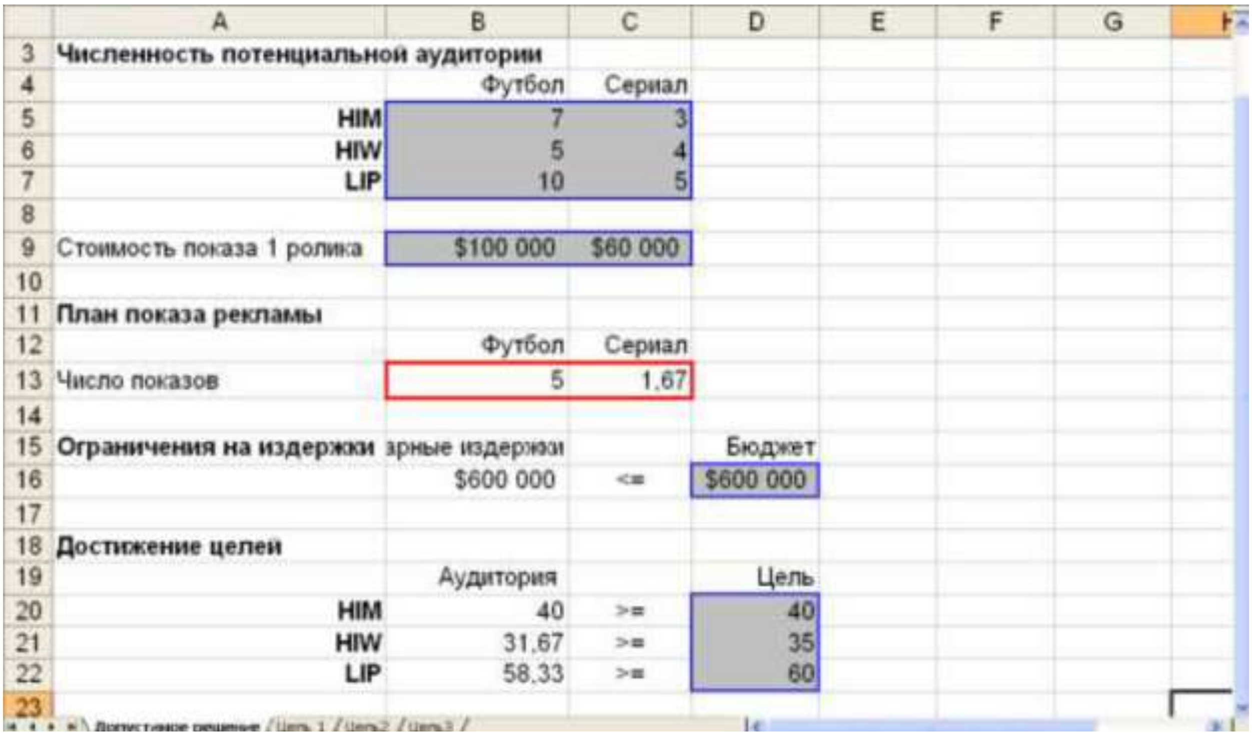


Рис. 2.6

- **Число просмотревших рекламные ролики.** В ячейки B20:B22 определим численность аудитории, просмотревшей ролики (в млн. чел.) по каждой группе в соответствии с левой частью ограничений $(8.1)-(8.4)$. Используем стандартную функцию СУММПРОИЗВ.
- **Общая стоимость.** В ячейке B16 вычислим рекламные издержки.

Попытаемся найти любое **допустимое** решение поставленной задачи.

Поиск решения (рис. 2.6).

1. Графа **Целевая ячейка** остается свободной, поскольку мы не ищем оптимального решения задачи, а лишь пытаемся найти некоторое допустимое решение.
2. В графе **Изменяя ячейки** вводим B13:C13.
3. **Ограничения** накладываем на следующие ячейки:

a) Общая численность аудитории, просмотревшей рекламный ролик (ячейки B20:B22), должна быть не меньше, чем обозначено в Целях (ячейки D20:D22).

b) Рекламные издержки (ячейка B16) не должны превысить бюджет (ячейка D16).

c) Изменяемые ячейки B13:C13 не должны быть отрицательными.

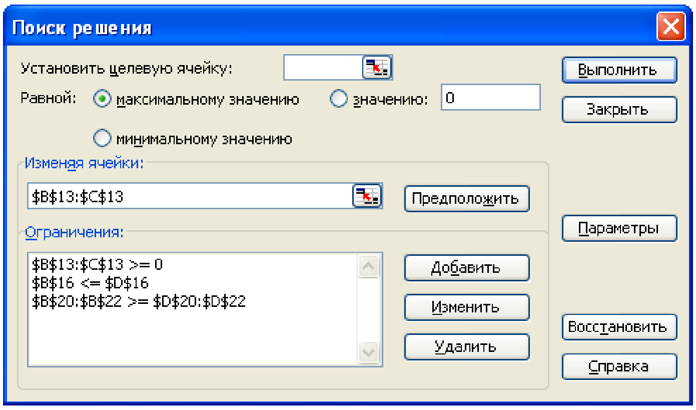


Рис. 2.7.

В результате работы программы **Поиск решения** мы получаем некоторое решение (ячейки B13:C13), но вместе с тем имеется сообщение о том, что допустимого решения, удовлетворяющего всем сформулированным ограничениям, получить не удается (рис. 2.8).

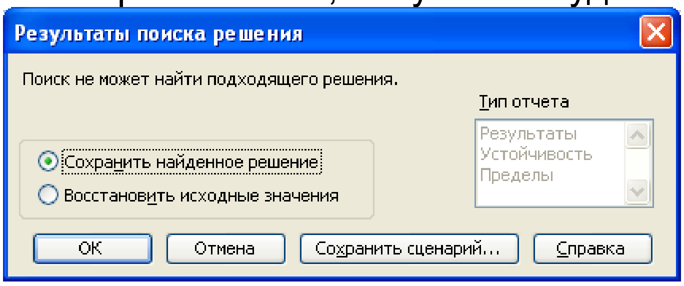


Рис. 2.8.

<u>Шаг 1</u> (лист «Цель 1»).

На шаге 1 решаем задачу минимизации отклонения («недостатка») от цели 1, которая имеет вид:

$$\min d_1^-$$

при ограничениях

$$7x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40,$$

$$10x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60,$$

$$5x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 35,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,\ d_i^-, d_i^+ \geq 0,\ i = 1,2,3.$$

Внесем ряд изменений в электронную таблицу (рис. 2.9):

- Содержимое ячеек, в которых указаны цели (D20:D22), переместим в ячейки G20:G22. В ячейки C20:C22 введем произвольные начальные значения численности аудитории «с недостатком», а в ячейках D20:D22 – «с избытком»
- В ячейках E20:E22 вычислим значение следующей величины (отклонение от каждой из целей):

цели + «недостаток» – «избыток»

- Изменяемыми становятся ячейки C20:D22, при этом, добавляя условие равенства содержимого ячеек E20:E22 и G20:G22, мы обеспечиваем автоматический контроль величины отклонения от цели. Поскольку мы хотим, чтобы реклама был просмотрена *не менее* чем определенным числом людей, будем минимизировать численность аудитории «недостатка».

- Перепишем содержимое ячеек C20:C22 в ячейки B25:B27 и решим поставленную задачу минимизации.

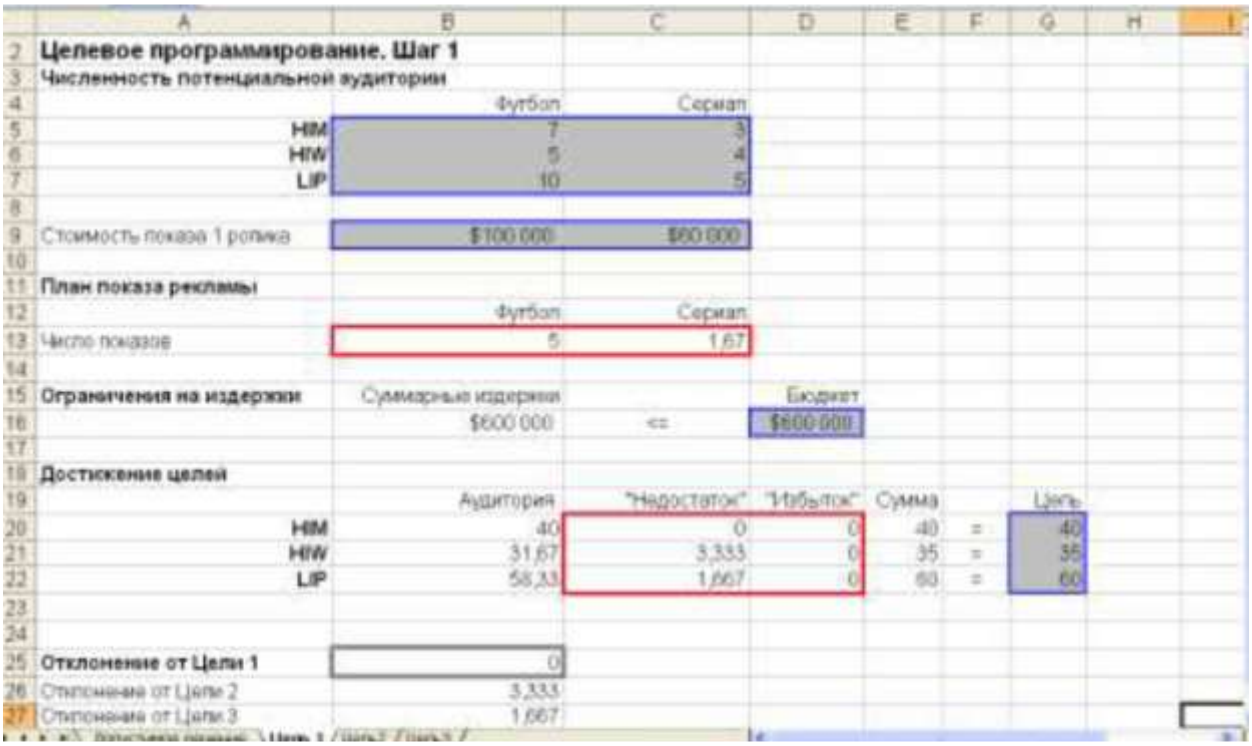


Рис. 2.9.

Поиск решения (рис. 2.10).

1. В графе **Целевая ячейка** указываем B25 для минимизации, поскольку на первом шаге мы хотим достичь первой (главной) цели.
2. В графе **Изменяя ячейки** добавляем C20:D22.
3. Добавим к **Ограничениям** следующее условие: E20:E22=G20:G22, которое обеспечивает выполнение ограничений задачи.

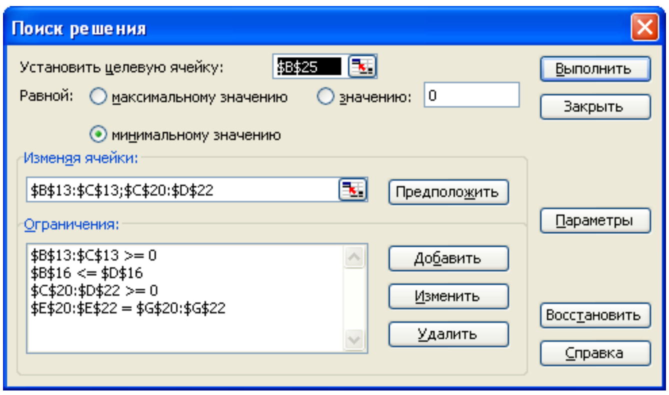


Рис.2.10.

В результате работы программы **Поиск решения** мы получаем решение, которое удовлетворяет первой цели (значение в ячейке B25 равно 0), при этом вторая и третья цели остаются невыполненными.

<u>Шаг 2</u> (лист «Цель 2»).

На шаге 2 решаем следующую задачу линейного программирования: попытаемся достичь выполнения второй цели, т. е. минимизировать «недостаток» аудитории второй категории (HIW).

$$\min d_2^-$$

при ограничениях

$$d_1^- = 0,$$
$$7x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40,$$
$$10x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60,$$
$$5x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 35,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,\ d_i^-, d_i^+ \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Для этого внесем изменение в последнюю электронную таблицу. Это изменение состоит в том, что создается колонка, в которой запишется условие сохранения цели, достигнутой на предыдущем шаге (ячейки D25:D27). Введем в ячейку D25 значение 0.

Поиск решения (рис. 2.11).

1. В графе **Целевая ячейка** указываем B26 для минимизации, поскольку на втором шаге мы хотим достичь второй по рангу цели.
2. Добавим к **Ограничениям** условие B25=D25, которое не позволит отклониться от первой (уже достигнутой) цели.

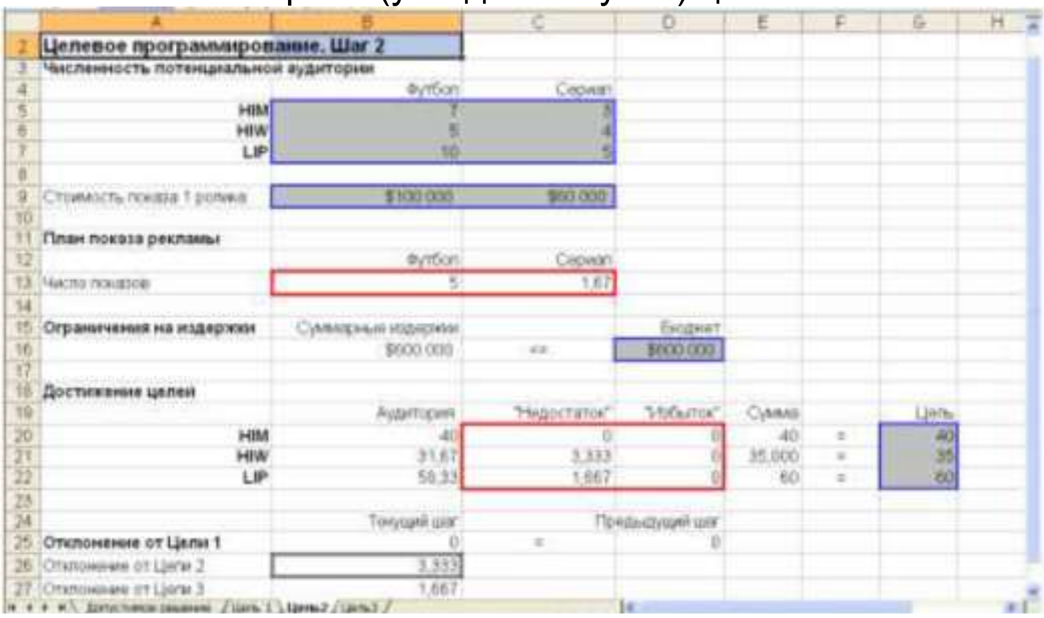


Рис.2.11

В результате работы программы **Поиск решения** мы получаем решение, которое удовлетворяет первой цели (значение в ячейке B25 равно 0) и приближает, насколько это возможно (в пределах 3,333 млн чел.), к достижению второй цели, которая тем не менее не удовлетворяется полностью.

<u>Шаг 3</u> (лист « Цель 3») **.**

На третьем шаге мы хотим приблизиться к удовлетворению третьей по рангу цели, т. е. решим задачу:

$$\min d_3^-$$

при ограничениях

$$d_1^- = 0,$$

$$d_2^- = 3.33,$$

$$7x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40,$$

$$10x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60,$$

$$5x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 35,$$

Для этого вносим в электронную таблицу следующие изменения: записываем отклонение от второй цели (3,333) в ячейку D26 и добавляем условие сохранения этого значения при поиске решения.

Поиск решения (рис. 2.12).

1. В графе **Целевая ячейка** указываем B27 для минимизации.
2. Добавим к **Ограничениям** условие: B26=D26.

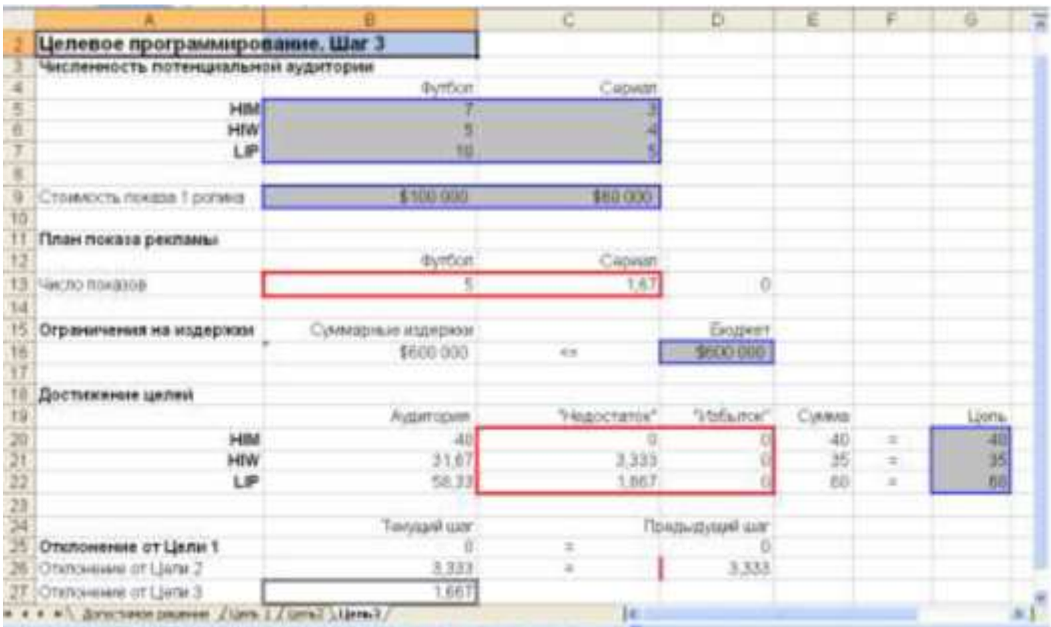


Рис. 2.12.

В результате работы программы **Поиск решения** мы получаем решение, которое все также удовлетворяет первой цели (значение в ячейке B25 равно 0), приближает к достижению второй и третьей цели, но тем не менее последняя цель не удовлетворяется полностью.

Таким образом, решением задачи целевого программирования является вектор $x=(5;1{,}67)$, обеспечивающий только выполнение цели 1. Минимальное отклонение по целям 2 и 3 составляет соответственно 3,33 и 1,67 млн человек.

Задача 2.2. ***(Задача о загрязнении окружающей среды)***

Химическая компания Chemco планирует выпуск трех видов продукции. В таблице приведены затраты на производство единицы продукции каждого вида, а также прибыль от единицы продукции и загрязнение окружающей среды.

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
Прибыль	\$10	\$9	\$8
Временные затраты	4 ч	3 ч	2 ч
Затраты ресурса	3 ед.	2 ед.	3 ед.
Загрязнение	10 ед.	6 ед.	3 ед.

В ходе производства планируется использовать 1300 часов рабочего времени и 1000 единиц ресурса.

В производственной деятельности фирма Chemco ставит две цели:

- максимизировать прибыль;
- минимизировать загрязнение окружающей среды.

Решение:

Данная задача представляет собой задачу многокритериальной оптимизации (два критерия), математическая модель которой имеет вид:

$$\max z_1 = \max(10x_1 + 9x_2 + 8x_3),$$

$$\min z_2 = \min(10x_1 + 6x_2 + 3x_3)$$

при ограничениях

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1300,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1000,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$

где x_1 – количество единиц продукта 1;

x_2 – количество единиц продукта 2;

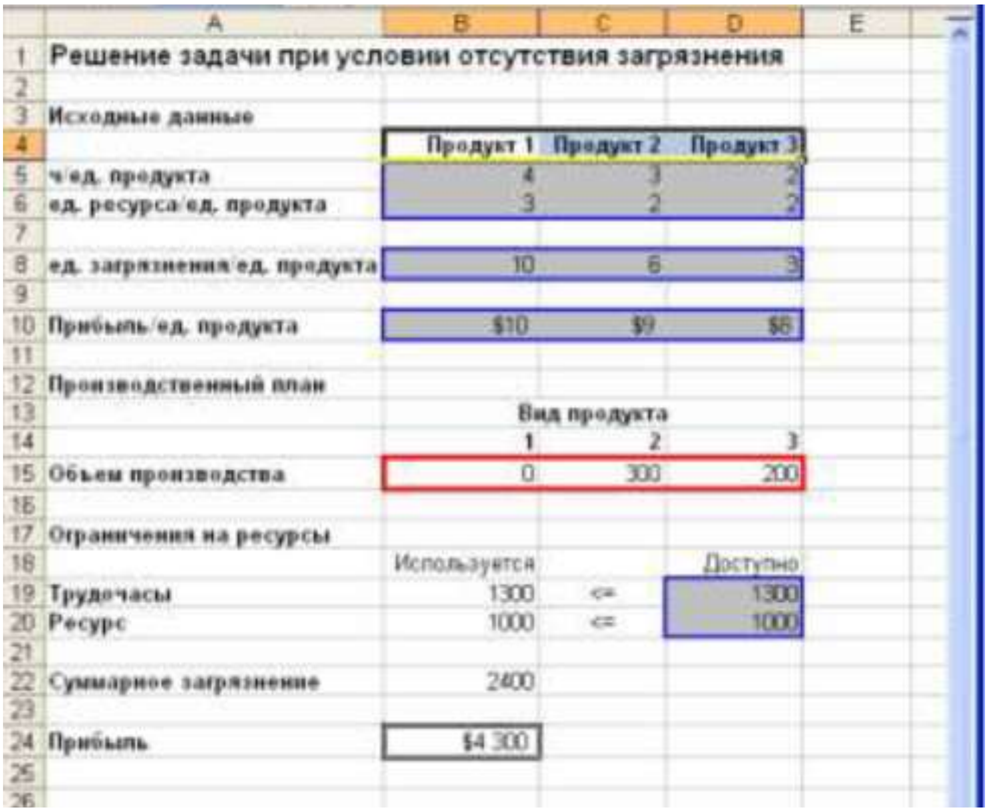
x_3 – количество единиц продукта 3.

Цели являются конфликтующими, достичь выполнения обеих невозможно. Найдем все парето-оптимальные решения и построим эффективную кривую в пространстве оценок. Для этой цели решим ряд задач линейного программирования, в которых будем максимизировать прибыль z_1 для различных уровней загрязнения.

Пояснения к электронной таблице (рис. 2.13)

1. Исходные данные. В ячейки B5:D6 вводим временные затраты и расход ресурса для выпуска единицы продукции, а в ячейки B10:D10 вводим прибыль от продажи единицы продукции каждого типа. Загрязнение, вызванное производством каждого типа продукции, вводим в ячейках B8:D8. В ячейки D19:D20 указываем предельные допустимые значения временных и материальных ресурсов.

2. Производство единиц продукции. Введем некоторые произвольные начальные значения единиц производимой продукции (производственный план) в ячейки B15:D15.



	A	B	C	D
1	Решение задачи при условии отсутствия загрязнения			
2				
3	Исходные данные			
4		Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
5	ч/ед. продукта	4	3	2
6	ед. ресурса/ед. продукта	3	2	2
7				
8	ед. загрязнения/ед. продукта	10	6	3
9				
10	Прибыль/ед. продукта	$10	$9	$6
11				
12	Производственный план			
13			Вид продукта	
14		1	2	3
15	Объем производства	0	300	200
16				
17	Ограничения на ресурсы			
18		Используется		Доступно
19	Трудочасы	1300	<=	1300
20	Ресурс	1000	<=	1000
21				
22	Суммарное загрязнение	2400		
23				
24	Прибыль	$4 300		

Рис.2.13.

3. Общие производственные затраты. В ячейках B19:B20 вычислим общие временные затраты (ячейка B19) и затраты ресурса (ячейка B20) для производства указанного числа единиц продукции (ячейки B15:D15).

4. Загрязнение. В ячейке B22 вычислим общее загрязнение окружающей среды, происходящее при указанном объеме производства. В ячейке B24 вычислим общую прибыль при данном производственном плане.

Поиск решения (рис. 2.14).

1. В графе **Целевая ячейка** указываем B24 (прибыль) для максимизации.
2. В графе **Изменяя ячейки** вводим B15:D15.
3. **Ограничениями** являются следующие условия:

B19:B20<= D19:D20,

что обеспечивает использование ресурсов в допустимых пределах.

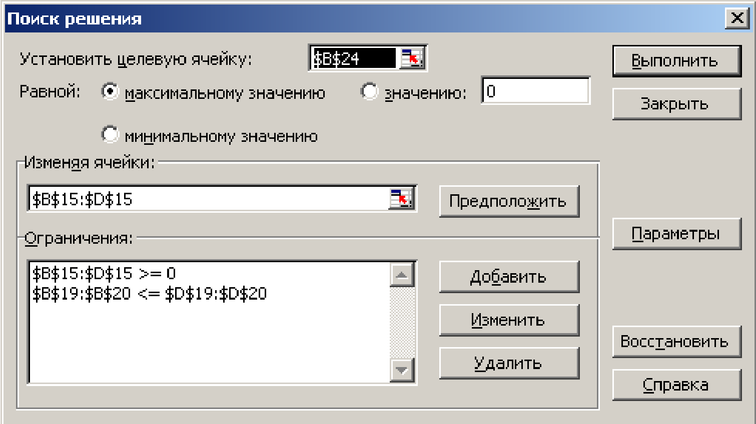


Рис.2.14.

В результате работы программы **Поиск решения** мы получаем решение, которое обеспечивает $4300 прибыли при следующем производственном плане: $x_1 = 0, x_2 = 300, x_2 = 200$. Реализация этого плана производства приведет к образованию загрязнения в размере 2400 ед. (см. ячейку B22 рис.2.15). Таким образом, получена первая пара значений целевых функций: $z_1 = 4300, z_2 = 2400$.

Исследуем, как изменение уровня загрязнения влияет на значение максимальной прибыли (лист 2). Для поиска пар точек (z_1, z_2) (рис. 8.10) выберем уровень загрязнения, который будет «лучше», чем получен при решении первой задачи ЛП, например, 2100 ед. Добавим к ограничениям дополнительное условие: потребуем, чтобы уровень загрязнения (ячейка B24) не превосходил выбранного (ячейка D24). Для этого внесем следующее изменение в электронную таблицу: добавим две строки (22 и 23) для того, чтобы следить за уровнем загрязнения, а в ячейку D24 запишем выбранное предельное значение этого уровня – 2100 ед.

При использовании **Поиска решения** добавляем условие:

B24<=D24,

и получаем новую точку: (4200, 2100). Далее, меняя уровень загрязнения, получим набор точек, которые фиксируем в таблице «Точки эффективной кривой».

Используя полученную таблицу, строим эффективную кривую с помощью **Мастера диаграмм**. (При построении кривой на оси OX откладываем величину прибыли z_1, а на оси OY – уровень загрязнения z_2).

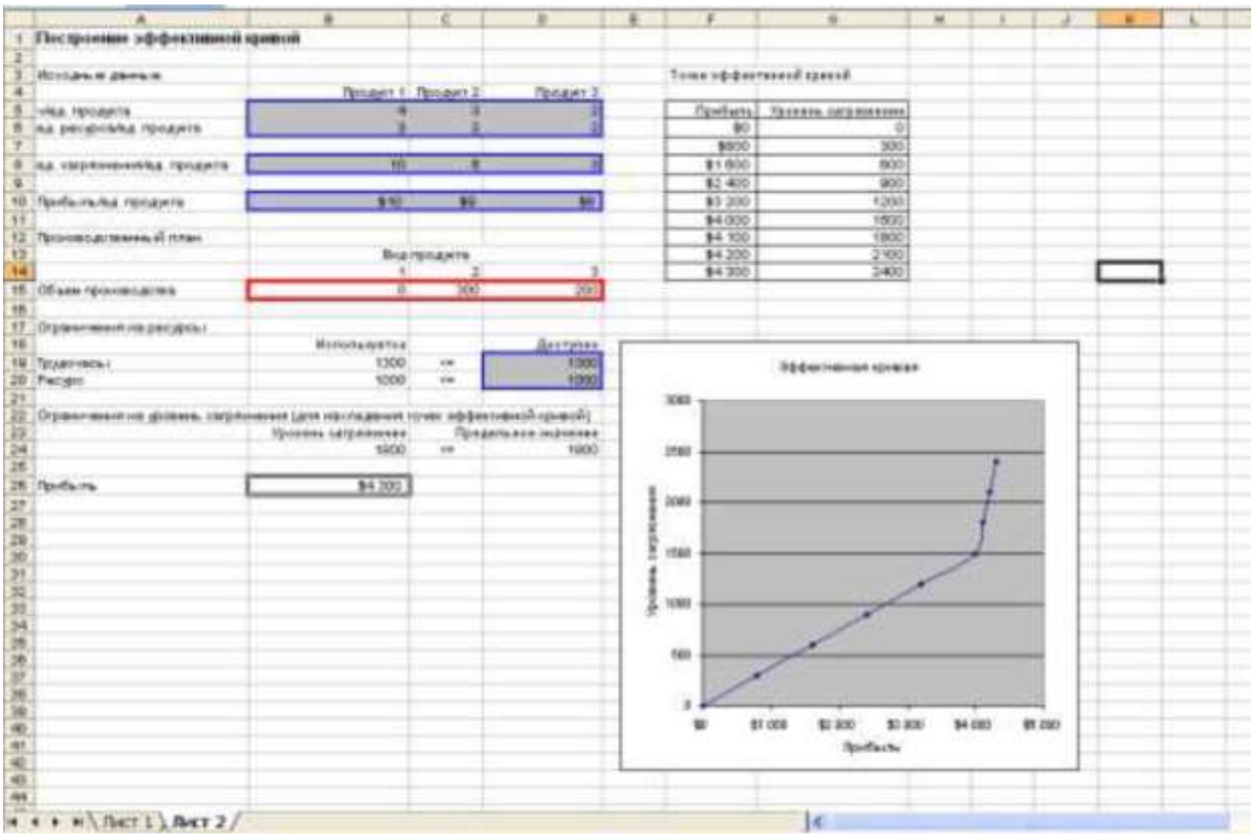


Рис. 2.15.

Задания для самостоятельного решения

2.1. Компании Gotham City необходимо составить график работы санитарных машин по двум районам города на год. Работа одной машины стоит $5000 в год. Одна машина должна быть закреплена за одним или двумя районами. Пусть x_1, x_2 – число машин, закрепленных за районами 1 и 2 соответственно.

Для того, чтобы ответить на вызов из района 1 санитарной машине требуется в среднем $(40-3x_1)$ минут, а для ответа на вызов из района $-(50-4x_1)$ минут.

Компания Gotham City имеет три цели (в порядке уменьшения предпочтения):

Цель 1: затраты на обслуживание санитарных машин не должны превышать $100000 в год.

Цель 2: среднее время ответа на вызов в районе 1 не должно превышать 5 мин.

Цель 3: среднее время ответа на вызов в районе 2 не должно превышать 5 мин.

Используя целевое программирование, определить, сколько машин должно быть закреплено за каждым районом.

Как изменится решение задачи, если изменить порядок предпочтения целей следующим образом: главной целью является Цель 2, затем – 3 и 1?

2.2. Компания Fruit, производящая компьютеры, собирается произвести очередную ежегодную закупку компьютерных чипов. Компания закупает чипы (наборами по 100 штук) у трех производителей. Качество предлагаемых чипов делится на три группы: «excellent», «good» и «mediocre». В течение предстоящего года компании необходимо 5000 чипов «excellent», 3000 чипов «good» и 1000 «mediocre».

Данные о производителях и товаре приведены в таблице:

Производитель	Число чипов в наборе из 100 штук			Стоимость набора (100 шт.)
1	60	20	20	$400
2	50	35	15	$300
3	40	20	40	$250

Суммарные расходы на закупку чипов компанией Fruit за год не должны превышать $28000. Используя целевое программирование, определите также план закупок. Пусть при этом главной целью является условие непревышения бюджета, за которой по порядку следуют цели, состоящие в приобретении указанного количества «excellent», «good» и «mediocre» чипов.

2.3. Компания Hiland Appliance должна установить план закупки цветных телевизоров и видеомагнитофонов. Стоимость одного телевизора – $300, а видеомагнитофона – $200. При хранении на складе телевизор занимает 3 кв. метра, а видеомагнитофон – 1 кв. метр. Продажа одного телевизора приносит компании прибыль в $150, а прибыль от продажи видеомагнитофона составляет $100. Цели компании Hiland в порядке уменьшения предпочтения:

Цель 1: на покупку должно быть потрачено не более $20000.

Цель 2: суммарная прибыль от продаж должна составить не менее $11000.

Цель 3: общая площадь, которую занимают телевизоры и видеомагнитофоны на складе, не должна превышать 200 кв. метров.

Используя целевое программирование, определите план закупки для компании Hiland.

2.4. Для производства колбасы компании Deancorp требуется говядина, свинина, баранина и вода. Стоимость одного килограмма каждого ингредиента, а также содержание белков и жиров в одном килограмме продукта приведены в таблице:

	Говядина	Свинина	Баранина	Вода
Жиры (в кг.)	0,05	0,24	0,11	0
Белки (в кг.)	0,20	0,26	0,08	0
Стоимость (в центах)	12	9	8	0

Deancorp собирается произвести 100 килограммов колбасы. Цели компании (в порядке уменьшения предпочтения):

Цель 1: колбаса должна содержать, по крайней мере, 16% белков.

Цель 2: колбаса должна содержать не более 8% жиров.

Цель 3: стоимость 1 килограмма колбасы не должна превышать 8 центов.

Используя целевое программирование, определить подходящий состав колбасы.

2.5. Компания Plantco производит три вида продукции. На Plantco работают трое рабочих. Компания должна определить, какой вид продукции следует производить каждому из рабочих. Число единиц продукта, которое мог бы производить каждый рабочий, занимаясь производством одного вида продукции в течение целого дня, приведено в таблице:

Рабочий	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
1	20	12	10
2	12	15	9
3	6	5	10

Компания Plantco также заинтересована в том, чтобы обеспечить своим рабочим наиболее комфортные условия труда. «Степень комфортности», испытываемой рабочими при производстве каждого типа продукции приведена в таблице:

Рабочий	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
1	6	8	10
2	6	5	9
3	9	10	8

Эти данные можно рассматривать как «моральное удовлетворение» каждого рабочего от производства продукции определенного типа. Постройте кривую эффективности между двумя целями компании: максимизацией общего количества производимых в день единиц продукции и суммарным «моральным удовлетворением» рабочих.

2.6. В колледже преподают четыре преподавателя. В течение одного семестра 200 студентов слушают следующие курсы: маркетинг, финансы, производство и статистика. Каждый преподаватель может обучать 200 студентов в течение одного семестра. Уровень преподавания курса оценивается с помощью баллов (по 10-бальной системе). Данные об «эффективности» преподавания курсов каждым преподавателем приведены в таблице:

		Маркетинг	Финансы	Производство	Статистика
Преподаватели	1	7	5	8	2
	2	7	8	9	4
	3	3	5	7	9
	4	5	5	6	7

По распоряжению декана средний уровень преподавания курса не должен быть ниже 6 баллов. Отклонения от данного требования по каждому из курсов имеют одинаковую степень важности. Составьте график занятости преподавателей колледжа на семестр.

2.7. Птицефабрика ежедневно приобретает 3 тонны специальных кормов. Кормовая смесь состоит из известняка, зерна и соевой муки и должна удовлетворять требованиям рационального питания: содержание кальция – от 0,8 до 1,2%, белка – не менее 22%, клетчатки – не более 5%. В таблице приведен состав ингредиентов (в кг на кг), составляющих кормовую смесь.

Ингредиенты	Кальций	Белок	Клетчатка
Известняк	0,38	0	0
Зерно	0,001	0,09	0,02
Соевая мука	0,002	0,5	0,08

Сформулировать и решить модель целевого программирования.

2.8. Завод продает четыре типа изделий, для производства которых используются токарный и сверлильный станки. Каждый из этих станков может работать 5 часов в рабочий день. В следующей таблице показано, сколько минут рабочего времени необходимо на изготовление изделия каждого типа.

Изделие	Токарный станок	Сверлильный станок
1	5	3
2	6	2
3	4	6
4	7	4

Завод пытается сбалансировать время использования станков таким образом, чтобы разность между полными временами работы станков не превышала 30 минут. Спрос на изделия каждого типа составляет не менее 10 единиц. Кроме того, количество изделий первого типа не может превышать количество изделий второго типа. Сформулируйте и решите задачу целевого программирования.

2.9. Производство двух изделий требует двух последовательных операций. В следующей таблице показано время (в минутах) выполнения каждой операции при изготовлении изделий.

Операция	Изделие 1	Изделие 2
1	5	3
2	6	2

Ежедневная квота на производство первого и второго изделий составляет соответственно 80 и 60 единиц. На выполнение каждой операции отводится по 8 часов в рабочий день. Сверхурочные работы нежелательны, хотя при необходимости, чтобы выполнить производственный план, их можно применить. Сформулируйте и решите задачу целевого программирования.

2.10. Фабрика игрушек производит тележки, для которых необходимо четыре колеса и два сидения. На фабрике работа организована в три смены, причем в течение одной рабочей смены производится несколько партий колес и сидений. В следующей таблице показаны объемы партий изделий в зависимости от рабочей смены.

Смена	Колеса	Сидения
1	500	300
2	600	280
3	640	360

Фабрика планирует определить, какое количество партий изделий необходимо изготовить каждую смену, чтобы свести к минимуму дисбаланс между произведенными колесами и сидениями (колес должно быть в два раза больше чем сидений). В первую смену можно произвести 4 или 5 партий изделий, во вторую от 10 до 20 партий, а в третью от 3 до 5. Сформулируйте и решите задачу целевого программирования.

2.11. Руководство супермаркета планирует провести несколько специальных мероприятий для привлечения потенциальных покупателей. В частности, эстрадный концерт и выставку искусств. Менеджеры супермаркета условно разбивают население на три возрастные категории (тинэйджеры, группа среднего возраста и старшая возрастная группа). Стоимость одного концерта и одной выставки составляет 1500 и 3000 долларов соответственно. Общий годовой бюджет этих мероприятий не должен превышать 15000 долларов.

Менеджеры оценивают посещаемость своих мероприятий следующим образом:

Мероприятие	Тинэйджеры	Средняя группа	Старшая группа
Концерт	200	100	0
Выставка	0	400	350

Руководство супермаркета желает, чтобы их мероприятия посетило не менее 1000 подростков, 1200 людей среднего возраста и не менее 800 покупателей старшего возраста. Сформулируйте и решите модель целевого программирования.

2.12. Кондитерская фабрика планирует выпуск трех видов продукции. В таблице приведены затраты на производство 1 тонны продукта каждого вида, а также прибыль от единицы продукции и количество потребления сахара.

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
Прибыль	$500	$350	$200
Время	4 час	3 час	3 час
Сахар	7 ед.	6 ед.	8 ед.

В ходе производства предполагается использовать 1500 часов рабочего времени и 1000 ед. сахара. В производственной деятельности фабрика ставит две цели: максимизация прибыли, минимизация расхода сахара. Построить эффективную кривую.

2.13. Работодатель хочет нанять четырех работников для выполнения четырех работ. Производительности работников на соответствующих работах и их требования по оплате приведены в таблицах:

Производительность (количество деталей в час)

Работник	Работа 1	Работа 2	Работа 3	Работа 4
1	5	6	7	8
2	2	10	8	5
3	13	9	10	12
4	9	11	14	9

Требования к оплате (долларов в час)

Работник	Работа 1	Работа 2	Работа 3	Работа 4
1	10	9	12	9
2	5	6	10	8
3	11	15	8	10
4	10	10	12	9

Целью работодателя является максимизация суммарной производительности и минимизация суммарных затрат по оплате труда. Построить эффективную кривую.

Тема 3. Элементы теории принятия решений.

§ 3.1. Основные элементы задачи принятия решений.

Любой процесс принятия решения включает следующие элементы.

- *Цель.* Необходимость принятия решения определяется целью или несколькими целями, которые должны быть достигнуты.
- *Лицо, принимающее решение,* должно иметь возможность влиять на исход решения, нести ответственность за последствия принятого решения.
- *Альтернативные решения* – различные варианты достижения целей.
- *Внешнюю среду* – совокупность внешних факторов, влияющих на исход решения.
- *Исходы решений* – возможные варианты результатов принятия решений.

В зависимости от *условий влияния внешней среды* и информированности лица, принимающего решение, имеется следующая классификация *задач принятия решений* (ЗПР)*:*

- *в условиях определенности:* все параметры модели известны точно или могут быть оценены с необходимой точностью, внешняя среда не учитывается;
- *в условиях риска:* учитывается внешняя среда, параметры модели считаются случайными величинами с известными законами распределения. Такая задача часто возникает, когда внешние факторы статистически наблюдаются;
- *в условиях неопределенности:* внешние факторы учитываются, но распределение вероятностей отсутствует;
- *в условиях конфликта:* внешние факторы учитываются, но являются результатом рационального действия других участников процесса принятия решения.

Замечание 3.1.1. В задачах принятия решения в условиях риска и неопределенности учитывается внешняя среда (природа), состояния которой считаются случайными, поэтому задачи такого типа иногда называются *играми с природой*.

В зависимости от *информированности лица*, принимающего решение, о параметрах модели задачи принятия решений делятся на классы:

- *хорошо структурированные задачи*: проблемные ситуации, для которых можно написать одну корректную математическую модель;
- *удовлетворительно структурированные задачи*: проблемные ситуации, для которых можно написать одну или несколько корректных математических моделях, но существует проблема выбора оптимального решения;
- *плохо структурированные задачи:* проблемные ситуации, для которых нельзя написать одну корректную математическую модель, вследствие учета неопределенностей, а поэтому в модель нужно вводить субъективное представление о влиянии внешней среды на исход решения.

§ 3.2. Задача принятия решений в условиях риска

Введем следующие обозначения:

d_i , $i = \overline{1,m}$ – возможные варианты решения;

s_j, $j = \overline{1,n}$ – возможные состояния внешней среды;

$p(s_j)$ – вероятность реализации состояния s_j, $j = \overline{1,n}$;

$h(d_i, s_j)$ – полезность принятого решения d_i при реализации состояния s_j.

Исходные данные *задачи принятия решения в условиях риска* можно представить в виде таблицы (матрицы полезности) и вероятностей реализации состояний:

	Состояния среды			
Решения	s_1	s_2	$\cdots$	s_n
d_1	$h(d_1,s_1)$	$h(d_1,s_2)$	$\cdots$	$h(d_1,s_n)$
d_2	$h(d_2,s_1)$	$h(d_2,s_2)$	$\cdots$	$h(d_2,s_n)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
d_m	$h(d_m,s_1)$	$h(d_m,s_2)$	$\cdots$	$h(d_m,s_n)$
Вероятности	$p(s_1)$	$p(s_2)$	$\cdots$	$p(s_n)$

Каждое возможное решение d_i, $i = \overline{1,m}$ может быть оценено с точки зрения его ожидаемой полезности $H(d_i)$, которая находится как математическое ожидание по формуле:

$$H(d_i) = \sum_{i=1}^{n} h(d_i, s_j) p(s_j) \ .$$

Критерий ожидаемого значения. Задачу принятия решения в условиях риска можно поставить как задачу *максимизации* ожидаемой полезности принятого решения

$$\max_{d_i,\, i=\overline{1,m}} H(d_i) = H\left(d^*\right),$$

либо как задачу *минимизации* ожидаемых затрат

$$\min_{d_i,\, i=\overline{1,m}} H(d_i) = H\left(d^*\right).$$

Решение d^* называется *оптимальным решением ЗПР в условиях риска* по критерию ожидаемого значения.

Замечание 2.2.1. Ожидаемую полезность (затраты) решения $H(d_i)$ часто обозначают $EMV\left(d_j\right)$ – *expected monetary value* (*ожидаемое значение выигрыша*).

Замечание 3.2.2. Оптимальное решение ЗПР в условиях риска, найденное с помощью критерия ожидаемого значения, *называется оптимальной стратегией Байеса.*

В ЗПР в условиях риска можно применять и другие критерии, например *критерий дисперсии полезности принятого решения.*

Обозначим $D(d_i) = \sum_{j=1}^{n}\left(h(d_i,s_j) - H(d_i)\right)^2 p\left(s_j\right)$ – дисперсия полезности решения d_i. Тогда задачу принятия решения в условиях риска можно поставить как задачу *минимизации* дисперсии полезности решения d_i:

$$\min_{d_i,\, i=\overline{1,m}} D(d_i) = D(d_*).$$

Решение d_* называется *оптимальным решением ЗПР в условиях риска* по критерию дисперсии полезности решения.

Пример 3.2.1.

Рассмотрим следующую ЗПР. Имеется 100 урн, в каждой по 10 шаров. При этом урны бывают двух типов: в урне типа I находится 5 черных и 5 белых шаров, а в урне типа II – 8 черных и 2 белых шара. Известно, что урн типа I – 70 штук, а урн типа II – 30 штук. Играющий подходит к случайно выбранной урне и должен сказать, какого она типа или отказаться от игры. Если он называет тип I и она действительно этого типа, то он выигрывает \$500, если она типа II, то он проигрывает \$200. Если играющий называет тип II и урна действительно этого типа, то он выигрывает \$1000, если же она типа I, то он проигрывает \$150. Какое решение должен принять игрок?

Решение.

Множество вариантов решения имеет вид: d_1 – назвать урну типа I; d_2 – назвать урну типа II; d_3 – отказаться от игры.

Множество состояний среды: s_1 – урна типа I, s_2 – урна типа II.

Тогда таблица выигрышей (полезностей) имеет вид:

Решения	Состояния среды s_1	s_2
d_1	\$500	-\$200
d_2	-\$150	\$1000
d_3	\$0	\$0
Вероятности	0,7	0,3

Вычислим ожидаемые полезности каждого решения:

$$H(d_1) = 500 \cdot 0{,}7 + (-200) \cdot 0{,}3 = 290,$$

$$H(d_2) = -150 \cdot 0{,}7 + 1000 \cdot 0{,}3 = 195,$$

$$H(d_3) = 0.$$

Используя критерий ожидаемой полезности, игрок должен назвать урну типа I $\left(d^* = d_1\right)$, т. к.

$$H(d_1) = \max_{d_i} H(d_i) = 290.$$

Если использовать критерий дисперсии полезности, то оптимальным решением будет отказ от игры $\left(d^* = d_3\right)$, т. к.

$$D(d_3) = \min_{d_i} D(d_i) = 0.$$

§ 3.3. Метод дерева решений

Дерево решений, с одной стороны, представляет собой способ изображения процесса принятия решения. С другой стороны – это способ нахождения оптимального решения, когда сам процесс принятия решения достаточно сложен.

Дерево решений представляет собой *ориентированный граф*, исходящий из одной вершины (*основание дерева*), соответствующей исходной точке процесса принятия решения. Этот граф (дерево решений) состоит из 3 типов узлов:

- *узлы принятия решения* (на графе изображаются квадратами);
- *случайные узлы* (на графе изображаются кружками);
- *терминальные узлы* (на графе изображаются треугольниками).

Из терминальных узлов (концевых вершин дерева) не выходят никакие ребра. Этим узлам соответствуют количественные оценки варианта решения (полезности). Из остальных узлов обязательно выходят ребра. Все ребра дерева решений ориентированы в направлении принятия решения. Основание дерева может быть как узлом принятия решений, так и случайной вершиной.

Из узлов принятия решений исходят ребра, соответствующие возможным альтернативам решения в данной вершине.

Из случайных вершин исходят вероятностные ребра (соответствующие исходам случайных событий). На этих ребрах указываются вероятности исходов случайного события.

Метод нахождения оптимального решения с использованием дерева решений состоит из 3 этапов: построение дерева решений, его оценка и нахождение оптимального решения.

Этапы выполняются в приведенном порядке:

1. Строится дерево решений в направлении принятия решения. При этом на граф наносятся все известные числовые характеристики (полезности исходов, вероятности случайных событий).

2. Оценивается дерево решений последовательно по шагам в обратном направлении, т.е. начиная с терминальных вершин. При оценивании дерева решений последовательно вычисляются математические ожидания случайных событий (если вершина случайная) или оценки лучших альтернатив (если вершина соответствует принятию решения). Данные оценки приписываются соответствующей вершине дерева. Процесс оценивания заканчивается, когда оценка приписана основанию дерева.

3. Последний этап – это определение оптимального решения. Для нахождения оптимального решения дерево еще раз просматривается в прямом направлении.

Таким образом, процесс нахождения оптимального решения заключается в *тройной прогонке* дерева решений.

Пример 3.3.1. Задачу 3.2.1 можно решить с использованием дерева решений. Процесс принятия решения изображен на рис. 3.3.1.

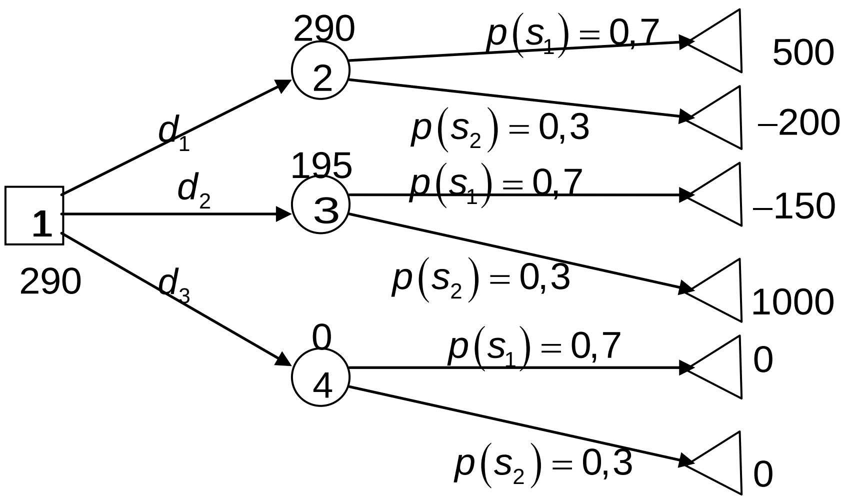


Рис. 3.3.1

§ 3.4. Задача принятия решений в условиях неопределенности.

Принятие решения в условиях неопределенности, как и в условиях риска, учитывает влияние внешней среды, но отличие состоит в том, что в условиях неопределенности вероятностное распределение, соответствующее состояниям внешней среды, неизвестно и не может быть оценено.

Недостаток информации о вероятностном распределении обусловил необходимость использования различных субъективных *критериев принятия решений* в условиях неопределенности:

- *критерий Вальда* (*«осторожного наблюдателя», максиминный, принцип «гарантированного результата»*).

Критерий оптимизирует полезность в предположении, что среда находится в самом невыгодном состоянии. По этому критерию выбирается стратегия, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем состоянии среды:

$$\max_{d_i}\min_{s_j} H(d_i,s_j) = \min_{s_j} H(d_0,s_j),$$

d_0*– максиминная стратегия* (*стратегия «осторожного наблюдателя»*), величина $\max_{s_j} H(d_0,s_j)$ определяет гарантированную полезность исхода принятого решения;

- *максимаксный критерий (критерий «здорового оптимиста»*).

Лицо, принимающее решение, считает, что среда наилучшим образом влияет на любое решение, поэтому выбирается наилучшая альтернатива из наилучших:

$$\max_{d_i}\max_{s_j} H(d_i,s_j) = \max_{s_j} H(d_1,s_j),$$

d_1*– максимаксная стратегия* (*стратегия « здорового оптимиста»*), величина $\max_{s_j} H(d_1,s_j)$ определяет максимально возможную полезность исхода принятого решения;

- *критерий Гурвица.*

Этот критерий охватывает ряд различных подходов к принятию решения от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного (консервативного). При использовании этого критерия предполагается, что внешняя среда может находиться либо в наилучшем состоянии с вероятностью α, либо в наихудшем с вероятностью $1-\alpha$. Тогда ожидаемая полезность исхода d_i при заданном уровне α будет равна:

$$H_\alpha(d_i) = \alpha \max_{s_j} h(d_i,s_j) + (1-\alpha)\min_{s_j} h(d_i,s_j),$$

лучшим решением будет решение, максимизирующее ожидаемую полезность

$$H_\alpha(d_\alpha) = \max_{d_j} H_\alpha(d_j).$$

Решение d_α называется *оптимальным по критерию Гурвица* при уровне субъективной вероятности α.

Величину $\alpha \in [0,1]$ можно интерпретировать, как *показатель оптимизма* или *субъективную вероятность*, например:

если $\alpha = 1$, то критерий оптимистичный (*«здорового оптимиста»)*,

если $\alpha = 0$, то критерий пессимистичный (*«осторожного наблюдателя*»),

если $\alpha = 0{,}5$, у лица, принимающего решение, отсутствует выраженная склонность к оптимизму или пессимизму;

- *критерий Лапласа.*

Поскольку распределение вероятностей неизвестно, предполагается, что внешний фактор – случайная величина с равномерным распределением, т. е.:

$$p(s_1) = p(s_2) = \dots = p(s_n) = \frac{1}{n}.$$

Тогда ожидаемая полезность равна

$$H_L(d_i) = (1/n)\sum_{j=1}^{n} H(d_i, s_j),$$

$$H_L(d_L) = \max_{d_i} H_L(d_j),$$

d_L *– оптимальное решение по критерию Лапласа*;

- *критерий Сэвиджа.*

При помощи этого критерия можно «смягчить» консерватизм максиминного критерия путем замены матрицы полезности матрицей Сэвиджа, которая строится следующим образом:

1) выбирается наилучшее решение при любом состоянии среды

$$h(s_j) = \max_{d_i} h(d_i, s_j);$$

2) находится «сожаление» (матрица Сэвиджа) – элементы матрицы представляют собой величины, равные изменению полезности результата при данном состоянии среды относительно наилучшего возможного решения

$$H^c(d_i, s_j) = H(d_i, s_j) - h(s_j);$$

3) к матрице Сэвиджа применяется максиминный критерий

4) $\max\limits_{d_i} \min\limits_{s_i} H^c(d_i, s_j) = \min\limits_{s_i} H^c(d_c, s_j)$,

d_c *– оптимальное решение по критерию Сэвиджа*.

Этот критерий минимизирует возможные потери при условии, что состояние среды наихудшим образом отличается от предполагаемого.

Пример 9.4.1. Некоторая фирма решает построить отель в одном из курортных мест. Необходимо определить наиболее целесообразное количество комнат в этом отеле. Для решения проблемы составляют смету расходов по строительству отеля с различным числом комнат d_i, а также рассчитывают прибыль $h\left(d_i, s_j\right)$ в зависимости от количества мест, которые будут сняты (s_j). Расчетные данные приведены в таблице.

Таблица доходов (матрица полезности) $h\left(d_i, s_j\right)$ от строительства:

	$s_1 = 0$	$s_2 = 10$	$s_3 = 20$	$s_4 = 30$	$s_5 = 40$	$s_6 = 50$
$d_1 = 20$	-121	62	245	245	245	245
$d_2 = 30$	-168	14	198	380	380	380
$d_3 = 40$	-216	-33	150	332	515	515
$d_4 = 50$	-264	-81	101	284	468	650

Решение.

- *критерий Вальда («осторожного наблюдателя»):*

$$\max_i \min_j h\left(d_i, s_j\right) = -121, d_0 = 20.$$

Вывод: поскольку прибыль отрицательная, строить отель не следует.

- *максимаксный критерий («здорового оптимиста»):*

$$\max_i \max_j h\left(d_i, s_j\right) = 650, d_1 = 50.$$

Вывод: отель следует строить на максимальное количество комнат.

- *критерий Лапласа:*

$$\max_i (1/6) \sum_{j=1}^{6} h\left(d_i, s_j\right) = \max\left\{153, 198, 210, 193\right\} = 210, d_L = 40.$$

Вывод: если считать вероятности всех состояний равными, то отель следует строить на 40 комнат.

- *критерий Гурвица:*

$$\alpha \in [0,1] - \text{ субъективная вероятность,}$$

$$H_\alpha\left(d_i\right) = \alpha \max_{s_j} h\left(d_i, s_j\right) + (1-\alpha) \min_{s_j} h\left(d_i, s_j\right).$$

При различных значениях параметра α, получаем различные решения по критерию Гурвица

Решения	Вероятности α 0,1	0,2	0,5	0,9
$d_1 = 20$	-84	-47	62	206
$d_2 = 30$	-114	-59	108	325
$d_3 = 40$	-143	-70	150	442
$d_4 = 50$	-172	-81	193	560
Оптимальное решение d_α	20	20	50	50

Вывод: если у лица, принимающего решение, преобладает пессимистичное представление о влиянии внешней среды (например, $\alpha = 0{,}1$ или $\alpha = 0{,}2$), то строить отель нельзя, т.к. ожидаемая полезность при оптимальном решении отрицательна, если $\alpha = 0{,}5$ (нет склонности к оптимизму или пессимизму) или $\alpha = 0{,}9$ (оптимистичное представление о влиянии внешней среды), то строить отель нужно на максимальное количество комнат ($d_4 = 50$).

- *критерий Сэвиджа:*

матрица Сэвиджа

	$s_1 = 0$	$s_2 = 10$	$s_3 = 20$	$s_4 = 30$	$s_5 = 40$	$s_6 = 50$
$d_1 = 20$	0	0	0	-135	-270	-405
$d_2 = 30$	-47	-48	-47	0	-135	-270
$d_3 = 40$	-95	-95	-95	-48	0	-135
$d_4 = 50$	-143	-143	-144	-96	-47	0

$$\max_i \min_j h^c\left(s_i, d_j\right) = \max\{-405, -270, -135, -144\} = -135, d_c = 40.$$

Вывод: исходя из критерия Сэвиджа, следует выбирать решение d_3 (строить отель на 40 комнат), этот выбор минимизирует возможное «сожаление».

Решение типовых задач

Задача 3.1.

Матрица затрат имеет следующий вид:

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	5	10	18	25
d_2	8	7	12	23
d_3	21	18	12	21
d_4	30	22	19	15

Найти оптимальное решение с точки зрения критериев:

- минимаксного;
- Лапласа;
- Гурвица;
- Сэвиджа.

Решение:

- Минимаксный критерий.

Найдем максимум в каждой строке матрицы затрат и выберем из них минимальное значение.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строки	
d_1	5	10	18	25	25	
d_2	8	7	12	23	23	
d_3	21	18	12	21	21	$\leftarrow$минимакс
d_4	12	22	19	15	22	

Решением, оптимальным по минимаксному критерию, является решение d_3.

- Критерий Лапласа.

Будем считать, что вероятности состояний одинаковы

$$p(s_1) = p(s_2) = p(s_3) = p(s_4) = \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$H(d_1) = (5 + 10 + 18 + 25)/4 = 14{,}5\,,$$

$$H(d_2) = (8 + 7 + 12 + 23)/4 = 12{,}5\,,$$

$$H(d_3) = (21 + 18 + 12 + 21)/4 = 18\,,$$

$$H(d_4) = (30 + 22 + 19 + 15)/4 = 21{,}5\,.$$

Выбираем $\min_i H(d_i) = H(d_2)$, оптимальным решением по Критерию Лапласа является решение d_1 с минимальными ожидаемыми затратами $H(d_1) = 14{,}5$.

- Критерий Сэвиджа.

Выберем лучшее решение при каждом состоянии внешней среды, для этого найдем

$$\min_i H(d_i, s_j) = h(s_j):$$

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	5	10	18	25
d_2	8	7	12	23
d_3	21	18	12	21
d_4	12	22	19	15

$h(s_j)$	5	7	12	15

Вычтем $h(s_j)$ из соответствующего столбца матрицы затрат. Таким образом, получим матрицу Сэвиджа. Чтобы найти оптимальное решение, применим к матрице Сэвиджа минимаксный критерий:

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строки	
d_1	0	3	6	10	10	
d_2	3	0	0	8	8	$\leftarrow$ минимакс
d_3	16	11	0	6	16	
d_4	7	14	7	0	14	

Решением, оптимальным по критерию Сэвиджа, является решение d_2.

- Критерий Гурвица.

Результаты вычислений по критерию Гурвица представим в виде таблицы:

Решение	$\min\limits_{s_j} H(d_i,s_j)$	$\max\limits_{s_j} H(d_i,s_j)$	$\alpha \max\limits_{s_j} H(d_i,s_j) + (1-\alpha)\min\limits_{s_j} H(d_i,s_j)$
d_1	5	25	$25\alpha + 5(1-\alpha) = 20\alpha + 5$
d_2	7	23	$23\alpha + 7(1-\alpha) = 16\alpha + 7$
d_3	12	21	$21\alpha + 12(1-\alpha) = 9\alpha + 12$
d_4	12	22	$22\alpha + 12(1-\alpha) = 10\alpha + 12$

Используя различные значения для $\alpha \in (0,1)$, получаем оптимальные решения:

Решение	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,8$
d_1	9	15	21
d_2	10,2	15	19,8
d_3	13,8	16,5	19,2
d_4	14	17	20

Если $\alpha = 0,2$ и $\alpha = 0,5$, оптимальным решением является альтернатива d_4, при $\alpha = 0,8$ оптимальным является решение d_1.

Задача 3.2. *(Конкурс на государственный заказ)*

Фирма Precision Inc, производящая научные приборы, приглашена для участия в конкурсе на государственный заказ. Заказ состоит в поставке определенного количества приборов в течение года. Конкурс тайный (так что никакие компании не знают предложений конкурентов), выигрывает заявка с наименьшей суммой. Фирма оценила свои возможности и установила, что подготовка заявки будет стоить $5 000, стоимость выполнения контракта будет составлять $95 000. По опыту участия в конкурсах на подобные заказы в прошлом известны вероятности подачи различных заявок, которые приведены в табл. 1. Кроме того, фирма уверена, что с 30% вероятностью вообще не будет конкурирующих заявок. Какое решение следует принять компании?

Заявка конкурентов	Вероятность
Меньше чем $115 000	0,2
От $115 000 до $120 000	0,4
От $120 000 до $125 000	0,3
Больше чем $125 000	0,1

Решение:

Перечислим основные элементы задачи принятия решения.

Во-первых, у фирмы есть 2 альтернативных решения: подавать заявку или не подавать. Если фирма решить подавать заявку, то она должна определить ее размер, т. е. предложить свою цену. Принимая во внимание стоимость подготовки заявки и стоимость поставки, очевидно, что заявка должна быть не меньше чем на $100 000 – в противном случае фирма не получит никакой прибыли, даже если выиграет конкурс. С другой стороны, как видно из табл. 1, в своем выборе фирма должна ограничиться суммами $ 115 000, $120 000, $125 000.

Следующий элемент задачи принятия решения – исходы и их вероятности. В наших предположениях фирма точно знает, сколько стоит подготовка заявки и стоимость поставки инструментов в случае получения контракта. Неопределенным остается размер заявки (т. е. стоимость, указанная в заявке), она, очевидно, зависит от наличия конкурентов и возможностей. Мы предполагаем, что фирма уже участвовала в подобных конкурсах в прошлом, так что может оценить поведение конкурентов на основе этих данных. Результатом такой оценки является распределение вероятностей, приведенное в табл. 1, и тот факт, что вероятность отсутствия конкурирующих заявок оценивается в 30%.

Последним элементом является анализ стоимостей, который переводит решения и исходы в значение прибыли, полученной фирмой. Подобная модель анализа составляет основу принятия решения, но, очевидно, достаточна сложна в реальной ситуации. Если фирма решает не участвовать в конкурсе, то получает $0 – нет ни прибыли, ни потерь. Если участвует, но не выигрывает конкурс, то теряет $5 000, стоимость подготовки заявки. Если фирма указывает в заявке В долларов и выигрывает контракт, то прибыль составляет − $100 000, так как $5 000 стоит подготовка заявки и $95 000 – стоимость поставки инструментов. Например, если фирма подаст заявку в $115 000 и выиграет конкурс (т. е. стоимость, указанная в заявке фирмы Precision, окажется наименьшей), то прибыль фирмы составит $15 000.

Данные об исходах и величинах прибыли удобно представить в виде платежной таблицы.

		Минимальная заявка конкурентов (в тыс. $)				
		Нет заявки	до 115	от 115 до 120	от 120 до 125	более 125
Заявка фирмы	Нет заявки	0	0	0	0	0
	115	15	-5	15	15	15
	120	20	-5	-5	20	20
	125	25	-5	-5	-5	25
	Вероятность	0,3	0,7*0,2	0,7*0,4	0,7*0,3	0,7*0,1

В этой таблице для каждого возможного решения и исхода записано значение прибыли (положительное число) или потери (отрицательное число). В последней строке содержатся вероятности исходов, так, например, вероятность того, что минимальная заявка конкурентов будет меньше чем $115 000, равна 0,7 (вероятность хотя бы одной конкурирующей заявки), умноженной на 0,2 (вероятность того, что минимальная заявка конкурентов меньше, чем $115 000, при условии, что есть, по крайней мере, одна конкурирующая заявка).

Эту таблицу можно упростить: в том случае, если фирма Precision делает заявку, то единственно важным для нее является следующее: меньше заявки конкурентов ее заявки или больше. Другими словами, выигрывает ли фирма конкурс при сделанной заявке или нет. Таким образом, платежную таблицу можно записать в следующем виде.

		Прибыль		Вероятность победы Precision
		Precision выигрывает	Precision проигрывает	
Заявка фирмы (в тыс. $)	Нет заявки	0	0	0
	115	15	-5	0,86
	120	20	-5	0,58
	125	25	-5	0,37

Так, например, если Precision сделает заявку в $120 000, то фирма выиграет в том случае, если вообще не будет конкурирующих заявок (с вероятностью 0,3) или минимальная конкурирующая заявка будет больше чем $120 000 (вероятность этого равна 0,7*(0,3+0,1)). В этом случае полная вероятность того, что Precision победит в конкурсе, равна 0,3+0,28=0,58.

Для выбора наилучшего альтернативного решения вычислим математическое ожидание прибыли (EMV – expected monetary value),

В таблице приведены значения ожидаемой прибыли для нашей задачи:

Альтернативы (решения)	Ожидаемая прибыль (в $)
Нет заявки	0*1=0
Заявка $115 000	15 000*0,86+(-5000)*0,14=12 200
Заявка $120 000	20 000*0,58+(-5000)*0,42=9 500
Заявка $125 000	25 000*0,37+(-5000)*0,63=6 100

Таким образом, по критерию ожидаемой прибыли фирма должна сделать заявку в $115 000, т. к. это дает ей наибольшее значение ожидаемой прибыли.

Задания для самостоятельного решения

3.1. Сети супермаркетов требуется 24 000 люминесцентных ламп для продажи. Эти лампы поставляют два поставщика. Поставщик *A* предлагает их по $4 за лампу и заменяет бракованную за $4. Поставщик *B* предлагает по $4,15 за лампу и осуществляет замену за $1. Распределение вероятностей процента брака для обоих поставщиков приведено в таблице (это распределение было оценено по прошлым данным о поставках).

Процент брака, %	Поставщик *A*	Поставщик *B*
3	0,10	0,05
4	0,20	0,10
5	0,40	0,60
6	0,30	0,25

Из таблицы следует, в частности, что с вероятностью 0,4 у поставщика *A* будут бракованными 5% объема поставок или 1200 из 24000 ламп. Супермаркеты планируют продавать эти лампы по $4,40 и бесплатно осуществлять их замену.

Необходимо определить поставщика из условия максимизации ожидаемой прибыли супермаркетов.

3.2. Каждый год сотрудникам университета предлагается выбрать одну из трех программ медицинского страхования. Условия этих программ следующие:

<u>Программа 1.</u> Ежемесячная стоимость $24. Застрахованный самостоятельно оплачивает все счета общей суммой до $500 в год, после этого страховка оплачивает 90% суммы счетов, сверх этих $500.

Программа 2. Аналогична программе 1, но стоимость страховки в месяц $1 и самостоятельно оплачиваются счета, составляющие в сумме до $1 000 в год.

Программа 3. Ежемесячная стоимость $30. Застрахованный оплачивает 30% всех счетов, остальные 70% оплачивает страховка.

Распределение вероятностей годовых затрат на медицинское обслуживание приведено в таблице:

Затраты, $	Вероятность
200	0,30
600	0,50
1 000	0,15
5 000	0,03
15 000	0,02

Требуется определить, какая из программ страхования наиболее выгодна для сотрудников.

3.3. Компания Acme рассматривает возможность выпуска на общенациональный рынок нового продукта. В этой ситуации есть много неопределенностей относительно того, будут ли продажи нового продукта достаточно успешными или нет. Компания предполагает, что было бы предусмотрительно представить новый продукт сначала на региональный рынок. Более того, компания должна сначала решить: проводить ли предварительно маркетинговое исследование рынка. Стоимость подобного исследования рынка по оценкам компании составляет $50 000. Если сначала будет проведено исследование рынка, компания должна дождаться его результатов до выпуска продукта на рынок. Основываясь на полученных результатах, компания сможет решить, стоит ли выпускать продукт на общенациональный рынок. С другой стороны, если компания решит не проводить исследование рынка, окончательное решение – выпускать ли продукт на общенациональный рынок – может быть принято без какой-либо задержки. Компания считает, что успешные продажи на общенациональном рынке принесут $1 200 000, а неудачные продажи будут стоить компании $500 000. По оценкам компании вероятность успешных продаж на общенациональном рынке без проведения каких-либо маркетинговых исследований равна 0,5. Вероятности получения различных прогнозов и соответствующих продаж приведены в таблицах.

Вероятности прогноза маркетингового исследования рынка:

Успешные продажи (благоприятный прогноз)	0,6
Неудачные продажи (неблагоприятный прогноз)	0,4

Вероятности продаж на общенациональном рынке в случае благоприятного прогноза маркетинговых исследований:

Успешные продажи	0,7
Неудачные продажи	0,3

Вероятности продаж на общенациональном рынке в случае неблагоприятного прогноза маркетинговых исследований:

Успешные продажи	0,2
Неудачные продажи	0,8

Необходимо найти наилучшую стратегию поведения компании.

3.4. Компания Oilco должна решить, бурить ли скважину на участке шельфа или нет. Стоимость бурения скважины составляет 100 000 долларов. Если нефть будет обнаружена, то ее стоимость составит 600 000 долларов. На настоящий момент компания уверена, что вероятность наличия нефти на участке составляет 0,45. Компания может заказать геологическое бурение на участке за 10 000 долларов. Прогноз результатов исследования наличия нефти на основе такого бурения с вероятностью 0,5 ожидается благоприятным и с той же вероятностью 0,5 – неблагоприятным. В случае получения благоприятного прогноза вероятность наличия нефти на участке повышается до 0,8. В случае неблагоприятного прогноза вероятность наличия нефти на участке составит лишь 10%. Необходимо определить оптимальную стратегию поведения компании.

3.5. Компания Nitro разработала новый тип удобрений. Если компания начнет производство этих удобрений, и они будут продаваться успешно, то прибыль составит $50 000. Если же продажи будут низкими (неудачными), то потери компании составят $35 000. По опыту предыдущих продаж удобрений вероятность успешных продаж составляет 60%. Можно провести дополнительное тестирование эффективности новых удобрений. Стоимость такого исследования составляет $5 000. В случае получения благоприятных результатов тестирования (подтверждающих высокую эффективность удобрений), вероятность успешных продаж возрастает до 80%. Если же результаты тестирования будут неблагоприятные (покажут всего лишь удовлетворительную эффективность), то вероятность успешных продаж уменьшается до 30%. Вероятность получения благоприятных результатов тестирования равна 60% и, соответственно, вероятность получения неблагоприятных результатов – 40%. Необходимо определить оптимальную стратегию поведения компании.

3.6. Эрика собирается лететь в Лондон 5 августа и возвратиться обратно 20 августа. Сейчас (1 июля) она может купить билет в одну сторону за $350 или билет туда и обратно за $660. Она может дождаться 1 августа, когда билет в одну сторону будет стоить $370, а билет туда и обратно – $730. В период между 1 июля и 1 августа есть вероятность того, что ее сестра, работающая в авиакомпании, может получить для нее бесплатный билет в одну сторону. Эта вероятность равна 30%. Если Эрика купит предварительно (1 июля) билет туда и обратно, а ее сестра получит для нее бесплатный билет в одну сторону, то Эрика может обменять в авиакомпании свой билет туда и обратно на обратный билет. В этом случае стоимость обратного билета будет равна $330 плюс $50 комиссионных за обмен билета. Используя дерево решений, необходимо определить, каким образом Эрика может минимизировать ожидаемую стоимость полета в Лондон и обратно.

3.7. Фирме, занимающейся печатью фотографий, необходимо определить стоимость печати пленок с 24 кадрами. Имеются следующие возможности:

- установить стоимость печати всей пленки в $5,25;
- установить стоимость печати 1 кадра (по выбору клиента) в $0,24.

По опыту работы известно, что обычно клиенты отказываются от печати 0, 1, 2, 3 или 4 кадров соответственно с вероятностями 0,6; 0,15; 0,1; 0,08 и 0,07. Используя дерево решений, определить ценовую политику, доставляющую максимум ожидаемой прибыли фирмы. Если предположить, что стоимость печати пленки равна С долларов, зависит ли ответ от значения С?

3.8. Компании, производящей конфеты, необходимо в течение последующих 6 месяцев 10 тонн сахара. У компании есть 2 альтернативы. Во-первых, она может покупать сахар по мере потребности по текущим на момент покупки ценам в течение этих 6 месяцев, а во-вторых, может прямо сейчас заключить фьючерсный контракт на поставку сахара. Этот контракт гарантирует поставку сахара в течение 6 месяцев, но по ценам, фиксированным на настоящий момент. Есть 2 типа таких фьючерсных контрактов: на 5 тонн и на 10 тонн. Таким образом, у компании есть следующие возможности:

- купить один контракт на поставку 10 тонн;
- купить один контракт на поставку 5 тонн, а остальные 5 тонн покупать в течение 6 месяцев по текущим ценам;
- покупать все 10 тонн в течение 6 месяцев по текущим ценам.

Фиксированная цена сахара, поставляемого по фьючерсному контракту в течение 6 месяцев, составляет $0,188 за килограмм. Стоимость самого фьючерсного контракта на 5 тонн равна $65, а на 10 тонн – $110 (поэтому компании невыгодно покупать 2 контракта на 5 тонн вместо 1 контракта на 10 тонн). Компания предполагает, что цены на сахар (за килограмм) в течение следующих 6 месяцев будут равны $0,172; $0,183; $0,191; $0,2 и $0,21 соответственно, с вероятностями 0,04; 0,28; 0,38; 0,18 и 0,12. Какое решение следует принять компании для того, чтобы минимизировать ожидаемые затраты на закупку необходимого количества сахара?

3.9. Фирма рассматривает вопрос о приобретении одной из двух копировальных машин (копиров). Обе машины полностью отвечают потребностям фирмы на следующие 10 лет. Копир 1 стоит $2000. Имеется соглашение на техническое обслуживание, по которому ежегодная плата за обслуживание составляет $150. По этому договору все неполадки устраняются без дополнительной оплаты. Копир 2 стоит $3000, его техническое обслуживание не оговаривается. По оценкам фирмы есть 40% вероятность того, что ежегодная стоимость обслуживания копира 2 будет составлять $0, 40% вероятность того, что стоимость обслуживания составит $100; и 20% вероятность того, что стоимость обслуживания составит $200.

Перед покупкой копира 2 фирма может дополнительно его протестировать. Если тест покажет высокое качество, то имеется 60% вероятность того, что стоимость ежегодного обслуживания будет отсутствовать и 40% вероятность того, что стоимость ежегодного обслуживания составит $100. Если результат теста будет всего лишь удовлетворительным, то с вероятностью 20% ежегодная стоимость обслуживания будет $0, с вероятностью 40% – $100 и с вероятностью 40% – $200. Ожидается, что результат теста будет удовлетворительным с вероятностью 50%. Стоимость дополнительного тестирования равна $40. Какое решение следует принять фирме?

3.10. Пит намеревается заключить пари на результат матча между командой А и командой В. Он предполагает, что обе команды имеют равные шансы на выигрыш. Если он выиграет пари, то его выигрыш будет равен $10 000, если проиграет, то проигрыш составит $11 000. Перед заключением пари Пит может заплатить Бобу $1000 за предсказание результата матча. Боб обычно предсказывает в 60% случаев, что выигрывает команда А, а в 40% случаев – что выигрывает команда В. Когда Боб предсказывает, что выиграет команда А, то ее шансы (вероятность) выиграть равны 70%, а когда Боб предсказывает, что выиграет команда В, то ее шансы (вероятность) победить составляют только 20%. Необходимо определить, как Пит может максимизировать свою ожидаемую прибыль.

3.11. Фермер может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятности того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равны соответственно 0,25, 0,30 и 0,45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст $30 000 чистого дохода, а урожай соевых бобов – $10 0000 дохода. Если цены останутся неизменными, фермер лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, то урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в $35 000 и $5000 соответственно. Фермер предварительно может заказать прогноз цен на будущий урожай за 2000 долларов: результаты прогноза могут оказаться благоприятными или не-благоприятными (с вероятностями 60 и 40 %, соответственно). При благоприятном прогнозе вероятности изменения цен составят 0,5, 0,3 и 0,2, а при неблагоприятном 0,2, 0,30 и 0,5. Какую культуру следует выращивать фермеру и следует ли заказывать прогноз?

3.12. Фирма планирует производство новой продукции быстрого питания в национальном масштабе. Отдел исследований и разработок убежден в большом успехе новой продукции и предлагает внедрить ее немедленно без рекламной кампании. Отдел маркетинга ситуацию оценивает иначе и предлагает провести рекламную кампанию, которая обойдется в 100 000 долларов и в случае успеха принесет 950 000 долларов годового дохода. В случае неуспеха, вероятность которого 30%, годовой доход оценивается в 200 000 долларов. Если рекламная кампания не проводится вовсе, годовой доход оценивается в 400 000 долларов, при условии, что покупателям понравится новая продукция (вероятность 0,8), и 200 000 долларов с вероятностью 0,2, если покупатели останутся равнодушными к новой продукции. Как должна поступить фирма в связи с производством новой продукции?

3.13. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий.

А. Построить большой завод стоимостью 650 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере 300 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью 0,7 и низкий спрос (ежегодные убытки 85 тысяч долларов) с вероятностью 0,3.

Б. Построить маленький завод стоимость 360 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере 120 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью 0,7 и низкий спрос (ежегодные убытки 60 тысяч долларов) с вероятностью 0,3.

В. Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью 0,9 и 0,1 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на 0,8 и 0,2 соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Определить наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах. Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

3.14. Главному инженеру компании надо решить, монтировать или нет новую производственную линию. Если новая линия будет работать безотказно, компания получит прибыль 200 млн. рублей. Если же она откажет, компания может потерять 150 млн. рублей. По оценкам главного инженера, существует 60% шансов, что новая производственная линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, а затем уже решать, монтировать или нет производственную линию. Эксперимент обойдется в 10 млн. рублей. Главный инженер считает, что существует 50% шансов, что экспериментальная установка будет работать. Если экспериментальная установка будет работать, то 90% шансов зато, что смонтированная производственная линия также будет работать. Если же экспериментальная установка не будет работать, то только 20% шансов за то, что производственная линия заработает. Следует ли строить экспериментальную установку? Следует ли монтировать производственную линию? Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

3.15. Руководство некоторой компании решает, создавать ли для выпуска новой продукции крупное производство, малое предприятие или продать патент другой фирме. Размер выигрыша, который компания может получить, зависит от благоприятного или неблагоприятного состояния рынка

Номер	**Действия компании**	**Выигрыш, руб**	
		благоприятный	**неблагоприятый**
1	Крупное предприятие	200 000	-180 000
2	Малое предприятия	100 000	-20 000
3	Продажа патента	10 000	10 000

Вероятность благоприятного и неблагоприятного состояний экономической среды равна 0,5. Найти оптимальное решение по критерию ожидаемой полезности.

В задачах 3.16-3.23 найти оптимальное решение, используя различные критерии.

3.16.

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	12	10	18	25
d_2	8	16	12	23
d_3	20	18	12	16
d_4	28	22	14	15

3.17.

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	10	16	8	24
d_2	8	16	12	22
d_3	20	8	12	16
d_4	8	22	14	14

3.18.

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	14	10	16	6
d_2	8	16	14	20
d_3	2	18	24	16
d_4	28	22	4	15

3.19.

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	4	16	16	26
d_2	18	6	24	20
d_3	12	8	24	26
d_4	8	22	14	20

3.20.

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	20	12	18	24
d_2	8	16	16	24
d_3	12	18	12	16
d_4	26	20	14	14

3.21.

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	18	16	8	24
d_2	16	16	12	22
d_3	12	8	12	16
d_4	14	22	14	14

3.22.

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	14	10	16	6
d_2	8	16	14	20
d_3	12	8	12	16
d_4	28	22	4	15

3.23.

	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	4	16	16	6
d_2	18	6	14	20
d_3	12	8	12	16
d_4	8	22	4	15

Литература

1. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.

2. Зайченко Ю.П. Исследование операций. 2-изд. Киев: Изд-во «Вища школа», 1979.

3. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. М.: Изд-во БЕК, 1998.

4. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.

5. Мертенс А. Инвестиции. Киев: Киевское акционерное агентство, 1997.

6. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 г.

7. Кузютин Д.В. Арбитражные решения в задачах выбора: Методические указания. СПб.: Изд-во СПбГУ. 1995.

8. Petrosjan L.A., Zenkevich N.A. Game Theory. Singapure, London. World Scientific Pupl., 1996.

9. Cook T. & Russel R.A. Introduction to Management Science. Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall, Inc. 1989.

10. Winston W.L. Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1991.

11. Winston W.L. Operations Research: Applications and Algorithms Boston (Mass.): PWS-KENT Publ., 1990.