Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный университет
Институт «Высшая школа менеджмента»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ УСЛОВНОЙ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТИ

Выпускная квалификационная работа студентки 4 курса бакалаврской программы, профиль – Финансовый менеджмент

БЕРЕСТИНОЙ Карины Альбертовны

____

(Подпись)

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент
БЕРЕЗИНЕЦ Ирина Владимировна

____

(Подпись)

Санкт-Петербург
2016

ЗАЯВЛЕНИЕ О САМОСТОЯТЕЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ ВЫПОЛНЕНИЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Я, Берестина Карина Альбертовна, студентка 4 курса направления 080200 «Менеджмент» (профиль подготовки – Финансовый менеджмент), заявляю, что в моей выпускной квалификационной работе на тему «Моделирование оптимального портфеля с использованием многомерной модели условной гетероскедастичности», представленной в службу обеспечения программ бакалавриата для последующей передачи в государственную аттестационную комиссию для публичной защиты, не содержится элементов плагиата. Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее курсовых и выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Мне известно содержание п. 9.7.1 Правил обучения по основным образовательным программам высшего и среднего профессионального образования в СПбГУ о том, что «ВКР выполняется индивидуально каждым студентом под руководством назначенного ему научного руководителя», и п. 51 Устава федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет» о том, что «студент подлежит отчислению из Санкт-Петербургского университета за представление курсовой или выпускной квалификационной работы, выполненной другим лицом (лицами)».

___________________ (Подпись студента)

___________________ (Дата)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена моделированию оптимального инвестиционного портфеля с применением многомерной модели условной гетероскедастичности (GARCH).

Под инвестиционным портфелем в данной работе подразумевается совокупность ценных бумаг, принадлежащих инвестору: акции, облигации, инвестиционные паи и другие. Любой инвестор, осуществляющий финансовые инвестиции в определенный момент сталкивается с задачей формирования инвестиционного портфеля, то есть определения конкретных ценных бумаг для вложения средств, а также пропорций инвестируемого капитала между выбранными активами [Шарп, 2003, с. 13].

Предложенная Гарри Марковицем модель построения оптимального портфеля дала возможность находить сочетание активов, которое обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности. В качестве ожидаемой доходности актива Г. Марковиц предложил использовать выборочную оценку математического ожидания доходности, а в качестве меры риска – выборочную оценку дисперсии доходности актива.

Модель Г. Марковица для построения оптимального портфеля стала распространенным теоретическим инструментом для формирования портфеля ценных бумаг. Благодаря развитию вычислительной техники, задача Г. Марковица по построению оптимального портфеля ценных бумаг может быть решена достаточно быстро. Некоторые институциональные инвесторы, например «Sberbank CIB»[1], даже предлагают своим клиентам самостоятельно сформировать такой портфель с помощью специального приложения, доступного в Интернете.

Несмотря на то, что модель Г. Марковица была предложена более 60 лет назад, она до сих пор используется инвесторами. Опрос 229 европейских управляющих портфельными инвестициями, под управлением каждого из которых находилось от €5 миллиардов до €100 миллиардов, показал, что половина опрошенных использует модель построения оптимального портфеля Марковица при принятии решения о формировании инвестиционного портфеля [Amenc, Goltz, Lioui, 2011, p. 48].

Однако, работы [King, 1994; Koch, 1991; Kaplanis, 1988; Bennet, 1988] показали, что математические ожидания, дисперсии и ковариации доходностей активов в некоторых случаях меняются с течением времени. Их выборочная оценка не учитывает возможность автокорреляции временных рядов доходности.

[1] URL: https://www.sberbank-cib.ru/products/gm/it/instruments/markowitz.wbp

В связи с вышеуказанными проблемами, встала необходимость в моделировании ожидаемых доходностей, дисперсий и ковариаций доходностей, чтобы можно было предсказать их будущее значение. В частности, для моделирования дисперсий и ковариаций доходностей временных рядов, которые характеризуются эффектом «кластеризации волатильности», был предложен класс многомерных моделей условной гетероскедастичности (GARCH), позволяющих сделать достаточно точный прогноз этих характеристик. Несмотря на то, что использование прогнозов, сделанных с помощью вышеуказанного класса моделей для оптимизации инвестиционного портфеля было изучено в работах [Pojarliev, Polasek, 2001; Gupta, Donleavy, 2006; Cha, Jithendranathan, 2009; Хабров В.В., 2012; Miralles-Marcelo, Miralles-Quirós, 2013] и других, вопрос остается малоизученным, в особенности в русскоязычной научной литературе.

Согласно [Amenc, Goltz, Lioui, 2011], большинство опрощенных управляющих инвестициями для прогноза риска портфеля используют выборочные оценки дисперсий и ковариаций активов [Amenc, Goltz, Lioui, 2011, p. 43]. Авторы приходят к выводу о том, что возможно именно использование такого традиционного подхода к измерению и прогнозированию риска и доходности портфеля и пренебрежение новыми методами финансового моделирования способствовали развитию финансового кризиса 2008-2009 годов. Таким образом, привлечение внимания управляющих инвестициями к результатам новых исследований в сфере финансового моделирования важно для улучшения соотношения доходности и риска инвестиций, которые они совершают.

Вышесказанное стало причиной выбора темы исследования. Цель работы заключается в том, чтобы установить, можно ли за счет использования многомерной модели условной гетероскедастичности (GARCH) улучшить точность прогноза волатильности портфеля и, тем самым, уменьшить риск формируемого оптимального портфеля.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Определить понятие инвестиционного портфеля, изучить подходы к его формированию и управлению;
2. Выделить достоинства и недостатки модели построения оптимального портфеля Г. Марковица, рассмотреть способ ее улучшения за счет использования условных числовых характеристик;
3. Построить оптимальные по Марковицу портфели с помощью многомерной модели условной гетероскедастичности и с помощью выборочной оценки волатильности;

4. Проанализировать полученные результаты, сделать выводы и дать практические рекомендации по выбору инструментов моделирования волатильности портфеля.

Структура работы соответствует логике выполнения поставленных задач: работа состоит из введения, двух основных глав, заключения, списка литературы и приложений.

В первой главе выпускной квалификационной работы освещены теоретические основы формирования оптимального портфеля: определено понятие инвестиционного портфеля, дана классификация стратегий по его управлению и определено понятие формирования инвестиционного портфеля. Кроме того, рассмотрена модель формирования оптимального портфеля Гарри Марковица, проанализированы ее достоинства и недостатки. Приведено теоретическое обоснование использования условных числовых характеристик при построении оптимального по Марковицу портфеля, в том числе смоделированных с помощью многомерной модели GARCH.

Во второй главе приведено описание и результаты эмпирического исследования по применению многомерной GARCH модели для построения оптимальных по Марковицу инвестиционных портфелей. Портфели были построены для инвесторов с разными предпочтениями относительно минимальной ожидаемой доходности, и был построен портфель точки глобального минимума дисперсии. Здесь же приведено описание и результат построения оптимального инвестиционного портфеля с помощью выборочных числовых характеристик. Полученные результаты были проанализированы, на основе их анализа сделаны выводы и приведены практические рекомендации по выбору инструментов моделирования волатильности портфеля.

Для оптимизации был выбран портфель, состоящих из пяти индексов: MSCI USA, MSCI Japan, MSCI China, MSCI Germany, ММВБ.

Для сбора информации использовались следующие источники:

1) База данных Thomson Reuters Eikon;
2) База данных Thomson Reuters Datastream.

Для оценки параметров многомерной GARCH модели, а также выборочных числовых характеристик временных рядов был использован эконометрический пакет “EViews 8”. Решение задачи оптимизации инвестиционного портфеля производилась с помощью надстройки «Поиск решения» программы Microsoft Excel.

В результате исследования было установлено, что оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием многомерной модели GARCH, в среднем приносят большую доходность, чем портфели, оптимизированные с использованием выборочных оценок безусловных числовых характеристик. Оптимальные портфели, построенные с использованием многомерной модели GARCH, в большинстве имеют меньшую волатильность, чем портфели, оптимизированные с использованием выборочных числовых характеристик. Исключение составляет портфель с наиболее высоким заданным уровнем ожидаемой доходности: в данном случае выборочное стандартное отклонение оптимального портфеля, меньше, чем у оптимального портфеля, который был построен с использованием многомерной модели GARCH.

Данные факты могут служить подтверждением того, что действительно, при построении оптимального портфеля по модели Марковица в подобных условиях, использование условных числовых характеристик, которые, в частности, могут быть смоделированы при помощи многомерной модели GARCH, позволяет уменьшить риск формируемого портфеля, по сравнению с портфелями, сформированными с использованием безусловных числовых характеристик. Однако, следует отметить, что этот вывод применим только в том случае, если во временных рядах доходностей активов, включаемых в портфель, замечен эффект «кластеризации волатильности».

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

В первой главе настоящей работы освещены теоретические основы формирования оптимального портфеля.

Данная глава построена следующим образом: в первом параграфе определено понятие инвестиционного портфеля, дана классификация стратегий по его управлению и определено понятие формирования инвестиционного портфеля. В следующем параграфе рассмотрены модели формирования оптимального инвестиционного портфеля. В заключительном параграфе рассмотрено применение многомерной модели GARCH для решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля.

1.1. Понятие формирования инвестиционного портфеля и классификация стратегий по его управлению

В широком смысле инвестирование средств представляет собой расставание с деньгами сегодня для получения большей их суммы в будущем. При этом различают два вида инвестиций: 1) реальные – инвестиции, которые представляют собой вложения средств в материально осязаемые активы, например, землю; 2) финансовые – покупка контрактов, записанных на бумаге, например, таких как акций или облигаций [Шарп, 2003, с. 1]. Стоит отметить, что в дальнейшем в данной работе под понятием «инвестиции» будут подразумеваться именно финансовые инвестиции.

В зависимости от трактовки понятия «инвестиции» понятие «инвестиционного портфеля» также может быть сформулировано по-разному. В широком смысле инвестиционный портфель представляет собой совокупность всех активов (акции, облигации, паи в бизнесе, дом или квартира, пенсия, страховые полисы и т.д.) инвестора [Боди, Мертон, 2007, с. 233]. В более узком смысле под инвестиционным портфелем подразумевается совокупность ценных бумаг, принадлежащих инвестору: акции, облигации, инвестиционные паи и другие. Поскольку в данной работе рассматриваются именно финансовые инвестиции, будет использовано именно последнее понятие инвестиционного портфеля.

Формирование инвестиционного портфеля является одним из этапов процесса управления инвестициями, который включает в себя следующие стадии [Fabozzi, Markowitz, 2011, p. 3]:

1. Определение целей инвестирования;

2. Определение инвестиционной политики;
3. Выбор стратегии по управлению инвестициями;
4. Формирование инвестиционного портфеля;
5. Оценка эффективности инвестиций.

Под формированием инвестиционного портфеля подразумевается определение конкретных ценных бумаг для вложения средств, а также пропорций инвестируемого капитала между выбранными активами [Шарп, 2003, с. 13]. Важно понимать, что поскольку формирование портфеля является четвертым этапом процесса управления инвестициями, при выполнении этой задачи учитываются результаты первых трех этапов: определенные цели инвестирования, инвестиционная политика и стратегия по управлению инвестициями.

Установка целей инвестирования происходит с учетом особенностей инвестора: его тип, цели вложения средств, их количество. Принято рассматривать два вида инвесторов: индивидуальных и институциональных. Индивидуальные инвесторы – индивиды или отделы организаций, самостоятельно вкладывающие личные средства в ценные бумаги с целью привлечения прибыли [Fabozzi, Markowitz, 2011, p. 4]. Однако, поскольку большинство индивидов не имеют достаточно специальных знаний, времени и других ресурсов для управления инвестициями, инвестиционная деятельность производится с помощью профессиональных финансистов – брокеров и управляющих портфелем [Боди, Мертон, 2007, с. 236].

Институциональные инвесторы – юридическое лицо, которое является держателем денежных средств, вверенных ему в управление, и вкладывает их в ценные бумаги с целью извлечения прибыли. К институциональным инвесторам относят пенсионные фонды, инвестиционные банки, страховые компании, паевые фонды [Fabozzi, Markowitz, 2011, p. 4]. Поскольку денежная масса, которой управляют данные организации, в разы большой той, которой располагают индивидуальные инвесторы, институциональные инвесторы имеют возможность вложить средства в большее количество объектов инвестирования. К тому же, по российскому законодательству, институциональные инвесторы являются «квалифицированными инвесторами» согласно п. 2 статьи 51.2 Федерального закона от 22.04.1996 N 39-ФЗ (ред. от 30.12.2015) "О рынке ценных бумаг". Согласно п. 4 статьи 30.2 вышеуказанного Федерального закона квалифицированные инвесторы имеют право приобретать некоторые ценные бумаги, которые законодательно ограничены в обороте и не могут быть приобретены неквалифицированными инвесторами, ввиду их рискованности.

Таким образом, институциональные инвесторы имеют преимущества по сравнению с индивидуальными инвесторами, даже если последние прибегают к помощи профессиональных финансистов. Именно поэтому многие индивиды и нефинансовые организации предпочитают доверять свои средства управлению институциональными инвесторами, например, вкладывая деньги в банки или паевые фонды.

Поскольку институциональные инвесторы несут некую ответственность перед индивидами и компаниям, передавшими свои средства в управление, закрепление целей инвестирования в первую очередь качается именно этот тип инвесторов. Разделяют два вида целей для институциональных инвесторов [Fabozzi, Markowitz, 2011, p. 4]:

1. С учетом обязательств: инвестиции должны сгенерировать определенную сумму денежных средств через определенное время. Инвестору важно и количество средств, и время.
2. Без учета обязательств: определенных требований к величине денежного потока и/или времени его поступления нет.

После определения инвестиционных целей, инвестор должен установить инвестиционную политику. Этот процесс прежде всего заключается в определении классы ценных бумаг, в которые инвестор предпочтет вложить средства. Традиционно выделяют следующие классы: акции, корпоративные облигации, государственные облигации, денежные эквиваленты в виде краткосрочных низко рисковых облигаций и недвижимость. Также на этом этапе устанавливаются ограничения по вложению средств в те или иные активы. Например, некоторые инвесторы ограничивают вложения в акции иностранных компаний, считая их более рискованными [Cha, Jithendranathan, 2009, p. 175]. К тому же ограничения могут быть продиктованы законом как в случае со страховыми компаниями, чьи вложения регулируются Законом РФ от 31.12.97 "Об организации страхового дела в Российской Федерации", Законом РФ "Об инвестиционной деятельности в Российской Федерации, осуществляемой в форме капитальных вложений», и правилами размещения страховщиками страховых резервов.

Определив инвестиционную политику, инвестор должен выбрать стратегию управления инвестициями. Стратегии управления инвестиционным портфелем многочисленны. Традиционно выделяют два противоположных вида стратегий по управлению инвестиционным портфелем: пассивный и активный. Пассивное управление не предполагает других дальнейших действий по изменению долей средств, вложенных в актив, или же в составе самих активов. Пассивные стратегии в свою очередь разделяются на два вида: «покупай и держи» («buy and hold») и индексную. Стратегия «покупай и держи» состоит в том, что инвестор выбирает ценные бумаги и горизонт инвестирования, покупает выбранные активы, распределяя средства согласно выбранным им критериям, и ничего не меняет до конца периода инвестирования. Главными решениями в данном случае являются: выбор ценных бумаг, выбор критерия распределения средств между активами и выбор временного горизонта [Fabozzi, Markowitz, 2011, p. 245].

Индексная стратегия управления портфелем подразумевает, что управляющий портфелем действует с предположением, что финансовые рынки относительно эффективны [Шарп, 2003, с. 851]. Поэтому инвестор распределяет средства в портфеле таким образом, чтобы он повторял структуру индекса выбранного рынка. Стоит отметить, что под «рынком» в данном случае стоит понимать класс выбранных активов: акции компаний, входящих в S&P 500, или же акции компаний малой капитализации [Sharpe, 1999, p.7]. Таким образом, менеджер рассчитывает получить такую же прибыль от инвестиций, как и в среднем по рынку.

Активное управление инвестициями предполагает, что инвестор не верит в эффективность финансового рынка и считает, что существуют переоцененные и недооцененные акции. Другими словами, активные управляющие инвестициями имеют свои собственные прогнозы риска и прибыльности инвестиций, которые отличаются от общего мнения [Шарп, 2003, с.851]. Управляющий портфелем, следующий активной стратегии, постоянно пересматривает как состав ценных бумаг, включенных в портфель, так и доли средств, вложенных в них. Целью активного управления портфелем является получения прибыли от инвестиций большей, чем от простой диверсификации вложений, как в пассивном управлении [Fabozzi, Markowitz, 2011, p. 6]. Для соблюдения этой цели часто выбирается бенчмарк – финансовый показатель, с которым сравнивается портфель. В большом количестве случаев бенчмарком становится фондовый индекс рынка, бумаги которого составляют портфель активного управления. Если портфель получает большую прибыль, чем соответствующий бенчмарк, считается, что управляющий портфелем правильно выполнил свою работу.

Превосходство той или иной стратегии управления вызывает споры в научном и деловом сообществе. Исследование [Elton, Gruber, 1996] показало, что активно управляемые паевые инвестиционные фонды приносили большую прибыль вкладчикам, чем пассивно управляемые фонды, повторяющие структуру индекса S&P500, что соответствует результатам некоторых других схожих исследований. В то же время исследования [Bogle, 2002; Malkiel, 1995; Carhart, 1997] показали, что активно управляемые портфели не приносят большей прибыли, если учесть затраты, приходящиеся на осуществление такой стратегии по управлению портфелем. Затраты могут включать в себя транзакционные издержки при активной торговле ценными бумагами, большую заработную плату управляющим активным фондом, по сравнению с управляющими пассивно, а также большие налоги для некоторых из активно управляемых фондов [Bogle, 2002, p. 35].

Подобная неопределенность вынуждает институциональных инвесторов нанимать как активных, так и пассивных управляющих [Шарп, 2003, с. 855]. Также некоторые стратегии по управлению портфелем сочетают в себе активные и пассивные элементы [Fabozzi, Markowitz, 2011, p. 245]. Так, например, управляющий портфелем может не менять состав ценных бумаг, включенных в портфель, однако менять доли средств, вложенных в них, в соответствии с той или иной стратегией.

Таким образом, после выбора стратегии управления портфелем инвестор переходит непосредственно к формированию портфеля. Цели инвестирования, инвестиционная политика и стратегия управления портфелем повлияют на выбор ценных бумаг, включаемых в портфель, а также на требования по прибыли формируемого портфеля. В данной работе внимание будет уделено именно пассивным и активным стратегиям, предполагающим пересмотр структуры портфеля. Данный выбор обусловлен тем, что для данного типа стратегий, решение распределению средств внутри портфеля имеет большее значение, так как в дальнейшем его изменить будет нельзя. Целью составления портфеля является нахождение сочетания активов, которое обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска, либо обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности [Шарп, Александер, Бэйли, 2003, с. 195]. Для решения данной задачи математическим путем инвестор должен определить понятия ожидаемой доходности, риска, а также найти способ выразить их в числовой форме.

1.2. Модель построения оптимального портфеля Г. Марковица: достоинства и недостатки

Прибыльность инвестиционного портфеля измеряется его доходностью, вычисляемой по формуле (1):

$$r_{p,t} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \qquad (1)$$

где r_p – доходность портфеля на момент времени t, P_t и P_{t-1} – ценность бумаг, входящих в инвестиционный портфель на момент времени t и t-1 соответственно.

Риск портфеля в свою очередь может измеряться по-разному. Модели оптимизации формирования инвестиционного портфеля различаются в зависимости от того, какая мера риска выбрана для данных инвестиций. Далее будет рассмотрена модель оптимизации портфеля Гарри Марковица, будут выделены ее достоинства и недостатки.

Модель оптимизации инвестиционного портфеля Гарри Марковица основана на идеях, изложенных им в статье [Markowitz, 1952]. В этой работе Г. Марковиц привлек внимание к распространенной в том время практике диверсификации инвестиционного портфеля и доказал, каким образом инвесторы могут уменьшить риск портфеля, инвестируя одновременно в активы, цены на которые меняются по-разному [Брейли, Майерс, 2008, с. 176]. Г. Марковиц также стал первым, кто предложил математическую постановку оптимизации портфеля.

Ученый предложил рассматривать доходность актива как случайную величину, следующую тому или иному закону распределения. Основываясь на этом видении, ожидаемая доходность актива определяется как математическое ожидание данной случайной величины, а риск актива как ее дисперсия или стандартное отклонение. Портфелем n ценных бумаг в таком случае является вектор $W=(w_1, \ldots, w_n)$,

$$w_1+\ldots+w_n = 1,$$

$$w_n \geq 0, i=\overline{1,n}.$$

Стоит отметить, что если инвестор желает занимать короткие позиции по каким-либо активам, ограничение $w_i \geq 0$, $i=\overline{1,n}$ не налагается. Под короткими позициями в данном случае понимается обещание инвестором продажи активов, которых он на данный момент не имеет, в расчете на покупку данных активов по более низкой цене и, соответственно, получении прибыли при продаже. Однако, в своих работах Г.Марковиц рассматривал именно портфели инвесторов, которые не занимают короткие позиции, указывая, что в противном случае, по данной модели все средства были вложены в один актив, имеющим наибольшую ожидаемую доходность [Markowitz, 1952, p. 78].

Таким образом, ожидаемая доходность инвестиционного портфеля представляет собой средневзвешенное значение ожидаемых доходностей отдельных активов, весами в котором являются доли от общего объема инвестированных средств, вложенных в конкретный актив. Стоит отметить, что сумма долей средств, вложенных в активы, должна равняться 1. Ожидаемая доходность портфеля рассчитывается по формуле (2):

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i, \tag{2}$$

где μ_p – ожидаемая доходность портфеля, w_i – доля средств, вложенных в актив i, μ_i - ожидаемая доходность актива i.

Дисперсия доходности инвестиционного портфеля вычисляется по формуле (3):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov_{ij}, \quad (3)$$

где:

w_i – доля средств, вложенных в актив i,

σ_i – стандартное отклонение доходности актива i,

Cov_{ij} – ковариация между доходностями активов i и j, $i \neq j$.

Эту же формулу можно переписать в виде (4):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j, \quad (4)$$

где:

w_i – доля средств, вложенных в актив i,

σ_i – стандартное отклонение доходности актива i,

ρ_{ij} – коэффициент корреляции между доходностями активов i и j, $i \neq j$.

Как известно, значение коэффициента корреляции варьируется от -1 до 1. Если коэффициент корреляции принимает значение, равное 1, доходности активов взаимосвязаны линейно и изменяются в одном направлении. Если же значение равняется -1, это также говорит о линейной взаимосвязи, однако в данном случае изменения будут происходить в диаметрально противоположных направлениях: если доходность одного актива данной пары будет выше ожидаемой, то доходность другого актива будет ниже ожидаемой.

Согласно формуле (4), очевидно, что наличие пар активов, имеющих отрицательный коэффициент корреляции снижает риск портфеля, что доказывает о необходимости диверсификации портфеля – инвестирования в более, чем один актив для уменьшения риска. С другой стороны, положительная корреляция активов может увеличить риск диверсифицированного портфеля по сравнению с не диверсифицированным. Поскольку на рынке доходности активов чаще коррелированы положительно, а не отрицательно, тот факт может поставить под сомнение необходимость диверсификации [Боди, Мертон, 2007, с. 246]. Однако, Г. Марковиц в своей работе показал, что в подавляющем большинстве случаев портфели, являющиеся «эффективными» для инвесторов, диверсифицированы [Markowitz, 1952, p. 89].

Помимо доказательства состоятельности принципа диверсификации и формализации понятий ожидаемой доходности и риска портфеля, Г. Марковиц предложил модель, анализ среднего отклонения (Mean-variance analysis), позволяющую составить оптимальный для инвестора портфель при соблюдении следующих предположений.

Во-первых, данная модель основана на модели инвестирования в течение одного периода. Это означает, что в начале периода инвестор принимает решение об инвестировании в тот или иной инструмент, с целью максимизировать ожидаемую доходность портфеля на конец это периода. Также инвестор не меняет структуру портфеля в течение этого периода [Kaplan, 2012, p. 269].

Во-вторых, Г. Марковиц также предположил, что ожидаемая полезность инвестора будет являться функцией от доходности и риска портфеля, что позволяет максимизировать ее, оптимизируя соотношение ожидаемой доходности-риска [Kaplan, 2012, p. 269]. Таким образом к задаче оптимизации построения портфеля можно применить правило «среднего-дисперсии». Согласно нему, субъект выберет ту альтернативу, которая имеет наибольшее значение некой функции Y(E[x],V[x]), где E[x] – ожидаемый результат, а V[x] – дисперсия результатов. Данное правило эквивалентно принципу Неймана-Моргенштерна – универсальному принципу принятия решений на основе функции полезности лица, принимающего решение – при условии, что субъект несклонен к риску и функция его полезности квадратична [Дамодаран, 2010, С.104]. Последнее условие, к сожалению, редко выполняется в реальном мире. Однако, стоит отметить, что в ситуациях (играх), результаты которых распределены по нормальному закону, правило «среднего-дисперсии» соответствует принципу Неймана-Моргенштерна и подходит всем индивидам [Дамодаран, 2010, С.106]. При предположении, что доходности финансовых активов распределены по нормальному закону, что достаточно правдоподобно, эффективный по Марковицу портфель является оптимальным. Однако, такие портфели чаще принято называть «оптимальными по Марковицу».

При вышеприведенных условиях, инвестор выберет оптимальный портфель из множества портфелей, каждый из которых либо обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска, либо обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности [Шарп, Александер, Бэйли, 2003, с. 195]. Таким образом, математическая задача построения эффективного портфеля, минимизирующего риск, выглядит следующим образом:

$$\min(\sigma_p^2) = \min(\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov_{ij})$$

при ограничениях:

$$\mu_p \geq \mu_p^*,$$
$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$
$$w_i \geq 0 \, , i = \overline{1, n},$$

где μ_p^* - заданная доходность портфеля.

Математическая задача построения эффективного портфеля, максимизирующего ожидаемую доходность, выглядит следующим образом:

$$\max(\mu_p) = \max(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i)$$

при ограничениях:

$$\sigma_p^2 \geq \sigma_p^{2*},$$
$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$
$$w_i \geq 0 \, , i = \overline{1, n},$$

где σ_p^{2*} - заданное стандартное отклонение доходности портфеля.

Стоит отметить, что в работе [Markowitz, 1952] автор рассматривал только задачу минимизации волатильности портфеля при заданном уровне ожидаемой доходности. Часто под «оптимальным по Марковицу» портфелем понимают именно портфель, построенный с целью минимизации риска [Дудов, 2008, с. 31].

При наличии множества активов, все возможные портфели, состоящие из всевозможных их комбинаций, будут лежать в некой замкнутой области на графике «ожидаемая доходность-стандартное отклонение». Данная область получила название «зонтик Марковица» (закрашенная область на Рис. 1). Все эффективные по Марковицу портфели лежат на верхней границе данной области, получившей название «эффективной границы». Это означает, что все инвесторы, которые хотят оптимизировать свой инвестиционный портфель руководствуясь правилами, описанными Марковицем, будут выбирать портфель среди тех, которые лежат на эффективной границе.

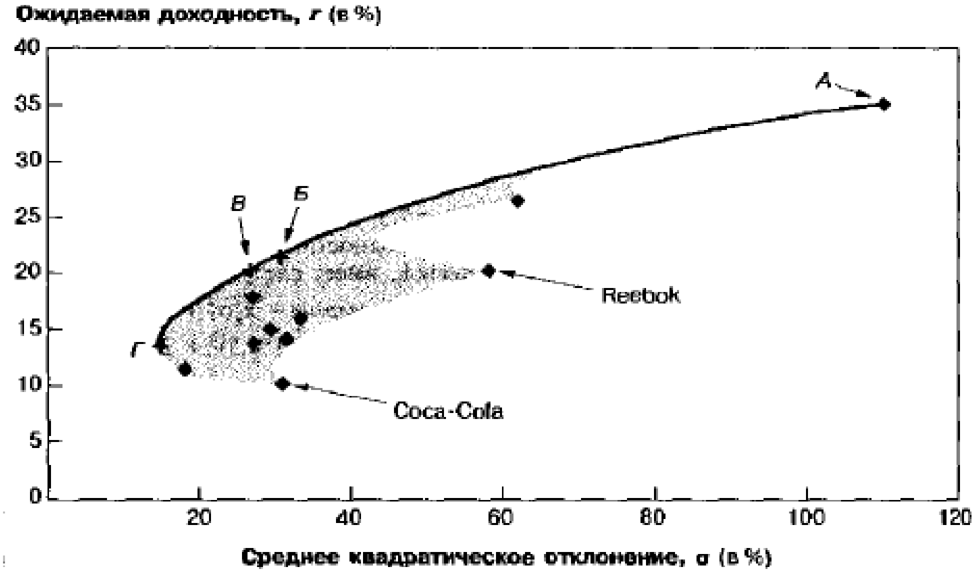

Рис. 1 *Изображение «зонтика Марковица» и эффективной границы для 10 активов*

Источник: [Брейли, Майерс, 2008, с. 178]

После построения эффективной границы, инвестору предстоит выбрать портфель в соответствии с индивидуальными предпочтениями: максимизируя доходность при заданном риске или минимизируя риск при заданной доходности. Также модель Г. Марковица предполагает наличие «точки минимального риска» (точка Г на Рис. 1), в которая характеризует портфель с минимально возможным стандартным отклонением для заданного набора активов [Боди, Мертон, 2007, с. 241]. Задача нахождения портфеля в «точке минимального риска» формулируется следующим образом:

$$\min(\sigma_p^2) = \min(\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov_{ij})$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i \geq 0\,, i = \overline{1, n}.$$

Стоит отметить, что в своих работах Г. Марковиц рассматривал инвестиционные портфели, в состав которых входили только акции. Однако, его модель оптимизации может также применяться и к портфелям, состоящим из различных видов активов: акций, облигаций, портфелям, недвижимости, золота и т.д. [Kaplan, 2012, p. 268].

Идеи Г. Марковица были в дальнейшем развиты Уильямом Шарпом, Джоном

Линтнером и Джеком Трейнором в 1960-ых годах, предложивших модель оценки долгосрочных активов (CAPM). Данная модель позволяет оценить ставки доходности активов, торгующихся на рынке, исходя из безрисковой ставки, рыночной премии за риск и подверженности актива рыночному риску (β актива) (5).

$$r = r_f + \beta(r_m - r_f), \tag{5}$$

где r – ставка доходности актива, β – коэффициент корреляции доходности актива с рыночной, r_m – доходность рыночного портфеля.

Однако эта модель также предоставляет обоснование того, что теоретически, существует один оптимальный портфель рискованных активов для всех инвесторов. Данное утверждение будет сформулировано ниже.

Основополагающая идея CAPM состоит в том, что в состоянии равновесия доход от сделок на финансовом рынке вознаграждает людей за их рискованные инвестиции. Однако рынок вознаграждает только тех, кто владеет эффективными портфелями бумаг, поскольку данные инвесторы избегают «лишнего» риска, присущего неэффективным рискованным портфелям [Боди, Мертон, 2007, с. 250].

Модель основывается на идее того, что инвестор может разделить свои инвестиции между любым портфелем рискованных инвестиций и безрисковым активом (часть средств брать в кредит/отдавать в долг по безрисковой ставке). Таким образом, он увеличивает доходность инвестиций, одновременно снижая их риск. При решении, задачи оптимизации портфеля по Марковицу, ожидаемая доходность инвестиционного портфеля, состоящего из безрискового актива и портфеля рискованных инвестиций, будет линейно зависеть от риска последнего при любых весах w_i, вследствие того, что стандартное отклонение доходности безрискового актива равняется 0. Оптимальное сочетание рискованных активов – касательный портфель – обнаруживается в точке пересечения прямой, которая начинается в точке, представляющей безрисковый актив (на вертикальной оси), и границы эффективности рискованных активов [Боди, Мертон, 2007, с. 245].

Модель CAPM опирается на следующие предположения об эффективности рынка [Боди, Мертон, 2007, с. 251]:

1. Инвесторы имеют одинаковые представления об ожидаемой доходности, стандартных отклонениях и коэффициентах корреляции рискованных активов, вследствие чего доли данных средств в портфеле любого несклонного к риску

инвестора одинаковы.

2. Инвесторам присуще оптимальное поведение. Поэтому если рынок находится в состоянии равновесия, курсы ценных бумаг устанавливаются таким образом, что если все инвесторы владеют оптимальными рискованными портфелями, то спрос на эти бумаги будет равен их предложению.

Из этих предположений можно следующий вывод. В состоянии рыночного равновесия, рискованные активы в портфеле каждого из инвесторов будут находиться в той же пропорции, что имеет место для всего рыночного портфеля, т.е. портфеля, состоящего из всех имеющихся ценных бумаг, пропорции инвестирования в которые совпадают с их долей в общей рыночной капитализации [Боди, Мертон, 2007, с. 251]. Таким образом, по модели CAPM рыночный портфель представляет собой оптимальный портфель рискованных активов, различные сочетания которого с безрисковым активом позволят достичь каждому инвестору наилучшего соотношения «риск-доходность», исходя из его предпочтений.

Данная теория формирования инвестиционного портфеля является обоснованием для «индексного» управления инвестиционным портфелем [Боди, Мертон, 2007, с. 250]. Развитие теории CAPM является одним из самых важных приложений модели построения оптимального портфеля Г. Марковица. За их «новаторскую работу в области финансовой теории» М. Мертон, У. Шарп и Г. Марковиц получили Нобелевскую премию по экономике в 1990 году[2].

Модель построения оптимального портфеля Г. Марковица сыграла большую роль в развитии теории построения и управления портфелем ценных бумаг и обладает многими достоинствами.

Во-первых, для построения портфеля нужно знать лишь выборочные математические ожидания доходностей и их ковариационную матрицу. Во-вторых, задача построения оптимального портфеля по модели Г. Марковица является задачей квадратической оптимизации при линейных ограничениях, для решения которой существует большое количество инструментов (в том числе в составе программы Microsoft Excel). В-третьих, задача Г. Марковица предполагает наличие явного аналитического решения, что позволяет анализировать поведение решения при изменении параметров

[2] Markowitz H. Nobel Prize Lecture: Foundations of Portfolio Theory [Electronic resource] // Сайт Nobel Foundation. − Nobel Foundation, [2016]. − Режим доступа: http://www.nobelprize.org/ − Загл. с экрана. (01.05.2016).

задачи [Evstigneev, Hens, Schenk-Hoppé, 2015, p. 14].

Также благодаря появлению модели Г. Марковица были подтверждены выгоды диверсификации инвестиций. Несмотря на то, что принцип «не клади все яйца в одну корзину» был известен с давних времен, Г. Марковиц математически его обосновал, применяя статистические понятия ковариации и корреляции к финансовым активам [Fabozzi, Gupta, Markowitz, 2002, p.8]. Ученый показал, что включение высоко коррелированных между собой активов ведет к увеличению дисперсии портфеля и, следовательно, его риска. К тому же, благодаря модели Г. Марковица и развившейся на ее основе модели CAPM индексные инвестиционные фонды стали необыкновенно распространенными [Fabozzi, Gupta, Markowitz, 2002, p.8].

Как говорилось во введении, многие управляющие инвестиционными портфелями обращаются к модели Г. Марковица при построении инвестиционных портфелей [Amenc, Goltz, Lioui, 2011, p. 48].

Несмотря на несомненный вклад в развитие практик по формированию инвестиционных портфелей, модель Г. Марковица также часто подвергается критике.

Существует мнение о том, что использование дисперсии и/или стандартного отклонения в качестве меры риска инвестора не всегда корректно. Использование данных мер риска подразумевает, что инвестор под «риском» понимает прежде всего неопределенность, то есть возможность как позитивных, так и негативных изменений доходности его вложений от ожидаемой. Однако, часто под «риском» инвесторы подразумевают «опасность», вероятность потерь, то есть только негативных отклонений доходности вложений от ожидаемой.

Для решения данной проблемы сам Г. Марковиц допустил возможность рассмотрения полудисперсии в качестве меры риска[3]. Полудисперсия является аналогом дисперсии, но для ее вычисления используются только те возможные доходности, которые лежат ниже ожидаемой доходности [Шарп, 2003, с. 181].

Также была предложена такая мера риска, как VaRα (Value at risk), показывающая минимальную доходность, которую субъект получит с вероятностью α, которую обычно берут равной 90%, 95% или 99% [Krokhmal, Palmquist, Uryasev, 2002, p. 43]. Расчет VaRα

[3] Markowitz H. Nobel Prize Lecture: Foundations of Portfolio Theory [Electronic resource] // Сайт Nobel Foundation. − Nobel Foundation, [2016]. − Режим доступа: http://www.nobelprize.org/ − Загл. с экрана. (01.05.2016).

можно произвести несколькими способами. Зная параметры распределения результатов, можно посчитать VaRα, как квантиль порядка 1-α вероятностного распределения случайной величины доходностей актива. Не зная параметров распределения результатов, можно использовать исторические значения доходности или же, при их отсутствии, провести их имитацию методом Монте-Карло, затем ранжировать от наименьшего к большему и число, являющееся наибольшим среди 1-α% первых результатов и будет VaRα. Однако, использование VaR как меры риска при решении задачи построения оптимального портфеля Г. Марковица затруднено, поскольку данная мера не обладает свойством субаддитивности (VaR(X+Y)<VaR(X)+VaR(Y)). Иными словами, может оказаться так, что VaR, а, следовательно, и риск портфеля, состоящего из двух активов, будет больше, чем сумма отдельных VaR этих двух активов, что противоречит намерениям инвестора, который пытается уменьшить риск, создавая портфель [Krokhmal, Palmquist, Uryasev, 2002, p. 43].

Данная проблема решается с помощью использования CVaRα (conditional value at risk – условная рисковая ценность), определяющаяся как математическое ожидание результатов, оказавшихся хуже, чем VaRα. Формально, эту величину можно выразить как CVaRα=E[X|X<VaRα] [Krokhmal, Palmquist, Uryasev, 2002, p. 44].

Несмотря на такое обилие альтернативных мер риска, дисперсия до сих пор остается одной из наиболее распространенных, особенно при решении задачи построения оптимального портфеля. Это объясняется тем, что нахождение решения данной задачи при условии использования дисперсии в качестве меры риска требует меньших вычислений и не требует наличия глубоких знаний в области математики [Estrada, 2008, p.58]. К тому же, дисперсия является единственной мерой риска, имеющие под собой строгие микроэкономические обоснования; альтернативные же меры риска основаны в большей мере на здравом смысле [Окулов, 2015, с.34]. Вследствие чего, в данной работе мерой риска инвестора будет считаться дисперсия, несмотря на некоторые преимущества, которые имеют альтернативные меры риска.

Другим недостатком оптимизации инвестиционного портфеля по Марковицу является использование выборочных оценок ожидаемой доходности и дисперсии активов [Michaud, 1989, p. 33]. Определить настоящее значение данных параметров практически невозможно, поскольку законы распределения доходностей активов чаще всего не известны, вследствие чего инвестор вынужден использовать их оценки. Г. Марковиц предложил использовать выборочные математические ожидания и дисперсии. Выборочные оценки основываются на прошлых данных, однако с их помощью сложно предсказать изменение параметра в будущем, что может привести к ошибке и, как следствие, к неэффективно сформированному портфелю.

Данная проблема обостряется тем, что значения долей активов в оптимальном по Марковицу портфеле очень чувствительны к изменениям в оценках ожидаемой доходности [Best, Grauer, 1991, p. 340]. При небольшом изменении значения ожидаемой доходности одного актива, веса активов в оптимальном портфеле меняются значительно. Исходя из модели оптимизации портфеля Г. Марковица, считается, что инвестор распределит средства, создав оптимальный портфель, и не будет его менять до конца периода. Однако, если ожидаемая доходность какого-либо актива меняется со временем, данная стратегия не принесет желаемого результата.

Также существуют исследования, показывающие, что ошибки в оценках ожидаемой доходности портфеля в большей степени изменяют структуру оптимального портфеля и ведут к большим убыткам в денежном эквиваленте, чем ошибки в оценке волатильности и ковариации [Chopra, Ziemba, 1993, p. 6]. Для выявления этого свойства авторы рассмотрели портфель, включающий в себя 10 случайно выбранных акций компаний, входящих в индекс Dow Jones Industrial. Авторы сделали предположение о том, что выборочные оценки математических ожиданий доходностей и ковариационной матрицы равняются настоящим значениям данных характеристик. Далее они сравнивали доходность оптимальных портфелей, построенных на основе данных «настоящих» математических ожиданий доходностей и ковариационной матрицы, с теми, для построения которых намеренно использовались ошибочные значения этих величин. Авторы приходят к выводу, что в связи с чувствительностью оптимального портфеля именно к ошибкам в оценках ожидаемых доходностей, портфели глобального минимума дисперсии, могут оказаться более прибыльными, несмотря на более низкий риск, поскольку для их построения не используются оценки математических ожиданий доходностей.

Однако, согласно некоторым исследованиям, ошибки в оценке дисперсии также могут настолько снизить доходность оптимального по Марковицу портфеля, что даже «наивная 1/N диверсификация» (стратегия, предполагающая вложение 1/N средств в каждый из N активов, включенных в портфель) обеспечивает инвестору лучшее соотношение риска к доходности [DeMiguel, Garlappi, Uppal, 2009, p. 1947]. Стоит отметить, что авторы данной статьи сравнивали месячную доходность наивно диверсифицированного портфеля и портфеля глобального минимума дисперсии, построенного на основе выборочной ковариационной матрицы. Авторы предполагали, что инвестор, сформировав оптимальный портфель не будет пересматривать его структуру, то есть будет следовать пассивной стратегии управления портфелем. В то же время, в работе [Kirby, Ostdiek, 2012] сравниваются доходность наивно диверсифицированного портфеля и портфеля глобального минимума дисперсии, которым управляют активно. Иными словами, владелец последнего каждый день рассчитывает выборочную ковариационную матрицу, включая постепенно новые данные, и пересматривает структуру своего портфеля на основе этих новых данных. Согласно [Kirby, Ostdiek, 2012] такой портфель обеспечивает большую доходность и меньший риск, чем наивно диверсифицированный портфель. Данный вывод позволяет сделать предположение о том, что сочетание оптимизации портфеля по модели Г. Марковица и активного управления может быть полезным для инвестора.

Таким образом, наибольшая часть критики модели оптимизации Г. Марковица относится к методам оценки характеристик распределения доходностей активов, а также отсутствие учета временного аспекта. Однако данные проблемы можно решить, используя более точные инструменты моделирования ожидаемой доходности и волатильности портфелей. Одним из таких инструментов является многомерная GARCH модель.

1.3. Условные числовые характеристики и их использование для построения оптимального портфеля по модели Г. Марковица

Модель оптимизации инвестиционного портфеля Г. Марковица предполагает использование оценок безусловных математических ожиданий доходности активов, безусловных стандартных отклонений и ковариаций, основанных на исторических данных по следующим формулам:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{1001}\sum_{t=1}^{1001} r_{i_t} \tag{6}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{1000}\sum_{t=1}^{1000}\left(r_{i_t} - \hat{\mu}_i\right)^2, \tag{7}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \frac{1}{1001}\sum_{t=1}^{1001}(r_{i_t} - \hat{\mu}_i)(r_{j_t} - \hat{\mu}_j), \tag{8}$$

где $\hat{\mu}_i$ – оценка математического ожидания доходностей актива i, r_{it} – значение доходности на момент t активов i, $\hat{\sigma}_i^2$ – оценка дисперсии доходности актива i, $\hat{\sigma}_{ij}^2$ – оценка ковариации активов i и j.

Данный подход предполагает, что характеристики активов неизменны в течение периода инвестирования и что после решения задачи оптимизации и нахождения долей вложения средств, можно соблюдать пассивную стратегию управления «купи и держи».

Однако многие исследования показывают, что данные параметры, в особенности дисперсия и ковариация в действительности изменяются со временем при условии новой информации, появляющейся на рынке, как на национальных рынках [King, 1994, Koch, 1991], так и на международных [Kaplanis, 1988, Bennet, 1988]. Таким образом, речь идет о том, что нужно рассматривать условное распределение доходности актива, при условии всей информации, присутствующей на рынке. Соответственно, характеристики распределения в данном случае также будут условными.

Как упоминалось ранее, исследования показывают, что ошибки в оценке ожидаемой доходности имеют больший эффект на характеристики сформированного портфеля. Поэтому многие инвесторы предпочитают обращаться к прогнозам волатильности, а ожидаемую доходность считать либо равной нулю, либо константой. Таким образом, можно сказать, что инвесторы решают задачу по минимизации риска портфеля для заданной ожидаемой доходности с помощью моделей прогнозирования волатильности портфеля.

Если же дисперсия и ковариация изменяются, встает вопрос о том, каким образом смоделировать эти характеристики, а также спрогнозировать их для принятия оптимального решения по распределению средств между активами.

В 1986 году ученые Т. Боллерслев и Тейлор независимо друг от друга разработали модель обобщенной условной гетероскедастичности (GARCH) для условной дисперсии ошибок (u_t) линейных моделей временных рядов, которая являлась модификацией модели условной гетероскедастичности (ARCH), предложенной в 1982 году Р. Энглом. Данный тип моделей предполагает, что дисперсия σ^2 инноваций, которые распределены по нормальному закону с параметрами $N(0, \sigma^2)$, не является постоянной, т.е. обладает гетероскедастичностью. Это предположение о непостоянстве дисперсий ошибок является разумным для финансовых рынков [Brooks, 2011, p. 386]. Также многие финансовые временные ряды характеризуются «кластеризацией волатильности», то есть наличием периодов, где значения волатильности принимают большие или меньшие значения. Этот феномен можно заметить, когда большие изменения цены или доходности актива следуют за большими изменениями, а небольшие изменения – за небольшими [Brooks, 2011, p. 387]. Наличие такой особенности обосновывает интерес и практическую полезность моделей условной гетероскедастичности.

Условная дисперсия в модели GARCH описывается формулой (9) [Bollerslev, 1986, p. 309]:

$$u_t|\psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-1}^2, \quad (9)$$

$$p \geq 0, q > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q,$$

$$\beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p,$$

где u_t – инновации модели некого временного ряда y_t, ψ_{t-1} – вся информация, известная на момент t-1, σ_t^2 – условная дисперсия инновации u_t (при условии наличия информации ψ_{t-1}).

Несмотря на то, что данная модель позволяет моделировать условную дисперсию ошибки модели некого временного ряда y_t можно доказать, что $V[y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2},...] = V[u_t \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \dots]$, то есть условная дисперсия временного ряда y_t равна условной дисперсии ошибки [Brooks, 2011, p. 412]. Таким образом, модель GARCH можно использовать для моделирования и предсказания условной дисперсии временных рядов, в том числе временных рядов доходностей.

Однако вышеописанная модель позволяет смоделировать условную дисперсию отдельно взятого временно ряда без учета других. Это имеет два недостатка. Во-первых, между временными рядами могут присутствовать «переливы волатильности», то есть изменение волатильности одного временного ряда может вызвать изменение волатильности другого.

Во-вторых, что особенно важно для данной работы, для решения такой финансовой задачи, как формирование инвестиционного портфеля, лицо, принимающее решение, рассматривает случайный вектор доходностей нескольких активов. Условное распределение случайного вектора характеризуется вектором из условных математических ожиданий компонент вектора и условной ковариационной матрицей, компонентами которой являются как условные дисперсии, так и условные ковариации. Одномерные модели GARCH позволяют смоделировать лишь условные дисперсии, но не условные ковариации. Последние, в свою очередь, также могут характеризоваться автокорреляцией. Задачу моделирования условной ковариационной матрицы помогают решить многомерные модели GARCH, рассматривающие уже случайный вектор доходностей, а не отдельные временные ряды. За счет этого они позволяют моделирование и прогнозирование как дисперсий, так и ковариаций [Brooks, 2011, p. 432].

Существует несколько разновидностей многомерных моделей GARCH. Рассмотрим две основные: VECH и BEKK.

Модель VECH была представлена в работе [Bollerslev, Engle, Wooldridge, 1988] и имеет следующий вид (10):

$$y_t = b + \epsilon_t,$$
$$\mathrm{vech}\,(\Sigma_t) = C + \sum_{i=1}^{q} A_i\,\mathrm{vech}(\epsilon_{t-i}\epsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} B_i\ \mathrm{vech}(\Sigma_{t-j}), \tag{10}$$
$$\epsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t),$$

где vech (·) - матричный оператор, который берет верхне-треугольную часть матрицы и складывает ее элементы в вектор-столбец, y_t – Nx1 вектор (например, доходностей), b – Nx1 вектор констант, ϵ_t – Nx1 вектор инноваций, C – ½N(N + 1)x1 вектор, A_i, i=1, ... , q, и B_j, j=1,…p, – матрицы размером ½N(N + 1) x ½N(N + 1), Σ_t – условная ковариационная матрица.

На примере вектора y_t, имеющего N=2 составляющих, Σ_t представляет из себя (11):

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,\,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{2,\,t}^2 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $\sigma_{1,\,t}^2, \sigma_{2,\,t}^2$ – условные дисперсии активов 1 и 2 соответственно, $\sigma_{21,t}$ и $\sigma_{12,t}$ – условные ковариации активов 1 и 2.

Стоит отметить, что в общем виде для случайных векторов X и Y, имеющих совместное нормальное распределение с математическими ожиданиями μ_x и μ_y, ковариационными матрицами V_x и V_y и ковариационной матрицей C_{xy}, случайный вектор Y при заданном значении случайного вектора X имеет условное нормальное распределение со следующей условной ковариационной матрицей (12):

$$V(Y|X = x) = V_Y - C_{YX} V_X^{-1} C_{XY}\ . \tag{12}$$

В рассматриваемой многомерной модели GARCH в качестве вектора Y представлен вектор y_t, а в качестве вектора X – y_{t-1} (вектор предыдущих значений y). Таким образом, учитывается, что условная ковариационная матрица зависит от значений y, которые были ранее.

Недостатком VECH является то, что данная модель не гарантирует, что матрица Σ_t будет положительно определенной. Данное условие является однако ключевым, принимая во внимание, что составляющими матрицы являются условные дисперсии и ковариации, которые не могут принимать отрицательных значений. Для решения данной проблемы была предложена модель BEKK [Engle, Kroner, 1995, p. 133] (13):

$$\Sigma_t = M'M + \sum_{i=1}^{q} A_i'\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}'A_i + \sum_{i=1}^{p} B'\Sigma_{t-i}B, \quad \epsilon_t|\,\Omega_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t), \tag{13}$$

где Σ_t - условная ковариационная матриц, M – верхняя треугольная матрица параметров, A и B – квадратные матрицы параметров размерности (NxN), ε_t – вектор инноваций размерности (Nx1), q – порядок ARCH-членов ε_t, p – порядок GARCH-членов ε_t, Ω_{t-1} – информация, доступная на момент t-1.

Модель BEKK также позволяет уменьшить количество параметров для оценки, что делает ее более удобной для использования, чем модель VECH.

Параметры многомерных GARCH моделей оцениваются методом максимального правдоподобия (MLE), путем максимизации функции правдоподобия (14) [Brooks, 2011, p. 435]:

$$l(\theta) = -\frac{TN}{2}log2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(log|\Sigma_t| + \epsilon_t'\Sigma_t^{-1}\epsilon_t), \tag{14}$$

где θ обозначает неизвестные параметры, которые нужно оценить, N – количество активов (количество временных рядов в системе), T – количество наблюдений.

В работе [Andersen, Bollerslev, 1998] ученые показали, что модели класса ARCH и GARCH в действительности дают точные прогнозы волатильности доходностей активов. Это позволяет использовать данные модели для прогнозирования и дальнейшего использования полученных прогнозов для решения таких финансовых задач, как построение оптимального портфеля.

Действительно, многие исследователи обращаются к многомерным GARCH моделям для прогнозирования волатильности портфеля и использования данных прогнозов для построения оптимального по Марковицу портфеля. Отличие состоит в том, что в качестве меры риска портфеля используется не безусловная дисперсия или стандартное отклонение, а условная дисперсия, вычисленная с помощью прогноза условной ковариационной матрицы.

Стоит отметить, что использование условных дисперсий подразумевает то, что доли средств, распределенные между активами, должны пересматриваться регулярно, поскольку их дисперсия и ковариация меняются. Поскольку модель типа GARCH позволяет сделать прогноз лишь на один шаг вперед, частота пересмотра долей в портфеле (ребалансировка) совпадает с размерностью данных. Иначе говоря, если моделируется волатильность дневной доходности, ребалансировка должна происходить каждый день, если месячной – каждый месяц, и т.д. Таким образом, стратегия по управления портфелем сменяется с пассивной «купи и держи» на активную – пересматриваются доли активов в портфеле на предмет обеспечения минимального риска, но список самих активов не пересматривается.

Важно понимать, что для использования моделей типа GARCH временные ряды доходностей должны обладать гетероскедастичностью условной дисперсии, что встречается часто, однако не всегда, поэтому требуется дополнительный тест на наличие гетероскедастичности. Часто такой эффект встречается у временных рядов доходностей акций, а также фондовых индексов.

В статье [Pojarliev, Polasek, 2001] модель BEKK GARCH для построения глобального минимума дисперсии (GMV) из трех индексов MSCI Pacific, MSCI Europe, MSCI North America. Использовались дневные данные о доходности, ребалансировка соответственно также была ежедневной. Также был построен оптимальный портфель с использованием выборочной ковариационной матрицы. Для сравнения результатов оптимизации, для каждого портфеля были оценены доходности на вневыборочных данных, то есть было проверено какую в действительности доходность принес бы оптимальный портфель. Далее на основе полученных результатов были рассчитаны выборочные оценки характеристик портфеля: средняя доходность, стандартное отклонение, а также коэффициент Шарпа (соотношение разницы доходности портфеля и безрисковой доходности и стандартного отклонения портфеля). При сравнении этих показателей, авторы сделали вывод о том, что портфель, оптимизированный с помощью многомерной GARCH модели имеет меньшее стандартное отклонение и больший коэффициент Шарпа. Поскольку целью оптимизации было минимизировать риск портфеля, можно сказать, что многомерная GARCH модель послужила лучшим инструментом для прогнозирования волатильности портфеля и, соответственно, для решения задачи оптимизации.

Такие работы как [Gupta, Donleavy, 2006] и [Cha, Jithendranathan, 2009] показывают, что оптимизация портфеля, включающего в себя индексы развивающихся и развитых стран, с помощью прогнозирования волатильности портфеля с использованием многомерной GARCH модели, позволяет получить портфель, который имеет большую доходность и меньший риск по сравнению с портфелем, который повторяет фондовый индекс родной для инвестора страны (США и Австралии соответственно). Главным выводом является то, что международная диверсификация и активная стратегия управления приносит лучшие результаты, чем пассивная стратегия воссоздания индекса.

Применение многомерной модели GARCH для прогнозирования условной ковариационной матрицы доходностей и использования ее для построения оптимального по Марковицу портфеля было рассмотрено в статье [Хабров В.В., 2012]. Автор рассматривал портфель, состоящий из тех же индексов, что и портфель в работе [Pojarliev, Polasek, 2001]. Различие работ состоит в том, что В.В. Хабров рассматривает задачу построения оптимального по Марковицу портфеля с заданным уровнем минимальной ожидаемой доходности, а не портфеля глобального минимума дисперсии. Автором были построены оптимальные портфели, обеспечивающие разные уровни минимальной ожидаемой доходности (100 целевых уровней). Для вычисления условных математических ожиданий доходностей индексов В.В. Хабров предположил, что случайный вектор доходностей рассмотренных им индексов задаются моделью VAR (векторной авторегрессии), описывающейся следующим образом (15):

$$r_t = d + \Pi_1 r_{t-1} + \dots + \Pi_k r_{t-k} + \epsilon_t, \tag{15}$$

где $r_t = (r_{t,1}, r_{t,2}, \dots, r_{t,N})$ – случайный вектор доходностей N активов, d – вектор констант размерности Nx1, Π_j, j=1,…,k – матрицы коэффициентов размерности NxN, связывающие текущие значения доходностей активов с их лагированными значениями, ϵ_t – вектор ошибок.

Автор работы также приходит к выводу, что оптимальные портфели, построенные с использованием условных числовых характеристик, приносят бóльшую доходность и имеют меньшую дисперсию, чем те портфели, которые были построены с использованием выборочных характеристик.

Выводы

Формирование оптимального инвестиционного портфеля, то есть нахождение сочетания активов, которое обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска, либо обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности, является одним из наиболее важных решений инвестора. В зависимости от выбранной стратегии управления портфелем инвестор решает эту задачу один раз за период инвестирования (пассивное управление) или же несколько раз в течение этого периода (активное управление).

Модель формирования оптимального портфеля Гарри Марковица несомненно внесла значительный вклад в развитие практик по формированию инвестиционных портфелей, а также является инструментом, к которому обращаются управляющие инвестиционными портфелями. Это можно объяснить наличием у нее явных достоинств.

Однако, модель Г. Марковица также часто подвергается критике. Во-первых, критикуется использование дисперсии доходности в качестве меры риска для инвестора, поскольку данная мера отражает как положительные, так и отрицательные изменения, в то время как многие инвесторы определяют риск как «возможность потерь». Данный недостаток исправляется с помощью использования альтернативных мер риска, таких как полудисперсия, VaR и CVaR, при решении задачи по построению оптимального портфеля. Однако, теоретических доказательств того, что использование альтернативных мер риска для построения портфеля действительно позволяет максимизировать ожидаемую полезность от вложений в него средств для инвестора, не существует.

Также недостатком модели называют использование выборочных оценок безусловных характеристик доходностей, поскольку данный подход не позволяет рассмотреть вектор доходностей в динамике, возможность автокорреляции доходностей и наличие эффекта «кластеризации волатильности».

Для решения данной проблемы учеными было предложено использование условных математических ожиданий и ковариационных матриц при решении задачи построения оптимального по Марковицу портфеля. Для моделирования условной ковариационной матрицы распространенным стало использование многомерных моделей GARCH, позволяющих учесть динамические связи между временными рядами доходностей активов, включенных в портфель. Эмпирические исследования [Pojarliev, Polasek, 2001; Gupta, Donleavy, 2006; Cha, Jithendranathan, 2009; Хабров В.В., 2012] показывают, что применение многомерной модели GARCH для прогнозирования условной ковариационной матрицы и использование последней для решения задачи построения оптимального по Марковицу портфеля приводит к тому, что сформированный портфель приносит большую доходность и имеет меньшую дисперсию, чем портфель, построенный с использованием выборочных оценок.

Однако, во всех вышеупомянутых работах сравниваются только портфели глобального минимума дисперсии, построенные с использованием либо условных, либо безусловных числовых характеристик [Pojarliev, Polasek, 2001; Gupta, Donleavy, 2006; Cha, Jithendranathan, 2009], или же только оптимальные по Марковицу портфели, обеспечивающие заданный минимальный уровень ожидаемой доходности. В данной выпускной квалификационной работе, во Главе 2, будут рассмотрены и сравнены оба вида оптимальных портфелей.

ГЛАВА II. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Во второй главе рассмотрено построение оптимального инвестиционного портфеля по модели Г. Марковица. В рамках данной работы были построены оптимальные по Марковицу портфели с использованием безусловных числовых характеристик и с использованием условных числовых характеристик. Для оценивания условных числовых характеристик использовалась многомерная GARCH модель. Полученные результаты были проанализированы, на основе их анализа сделаны выводы и приведены практические рекомендации по выбору инструментов моделирования волатильности портфеля.

2.1. Построение оптимального портфеля по модели Г. Марковица

В данной работе рассматривается инвестиционный портфель, включающий в себя как акции российских компаний, так и зарубежных. Данный выбор обусловлен предположением о том, что российский инвестор предпочтет вкладывать средства и на развивающихся рынках, и на развитых, с целью улучшения качества диверсификации портфеля [Шарп, 2003, с. 946].

Инвестирование в акции зарубежных компаний в России можно произвести следующими способами:

1. Совершив покупку акций американских компаний на Санкт-Петербургской бирже, заключив договор с брокером, имеющим доступ к торгам на данной площадке;
2. Совершив покупку иностранных акций на зарубежных биржах, обратившись к услугам иностранных брокеров, имеющим доступ к иностранным торговым площадкам, на которых обращаются выбранные бумаги;
3. Совершив покупку паев в паевом инвестиционном фонде (ПИФе), инвестирующем средства за рубежом;
4. Совершив покупку ценных бумаг иностранных биржевых инвестиционных фондов (ETF, Exchange Traded Funds) на Московской бирже, заключив договор с брокером, имеющим доступ к данной площадке. Стоимость ценных бумаг ETF соответствует динамике базового актива, лежащего в основе фонда, которым часто является индекс акций[4].

[4] Фонды ETF на Московской Бирже [Электронный ресурс] // Сайт Московской Биржи. – Московская Биржа, [2011-2016]. – Режим доступа: http://moex.com/s221. – Загл. с экрана. (15.04.2016)

В данной работе будет рассмотрен последний вариант осуществления инвестиций в акции зарубежных компаний. Выбор обусловлен тем, что покупка ценных бумаг ETF дает возможность диверсификации. В сущности, каждый фонд ETF является портфелем ценных бумаг компаний, входящих в индекс, структуру которого фонд имитирует. Количество компаний может варьироваться от 10 до 100 и более. Такой портфель является хорошо диверсифицированным. Таким образом, инвестор, приобретая ценные бумаги ETF, становится владельцем части этого диверсифицированного портфеля. Приобретая ценные бумаги нескольких ETF, диверсификация становится еще шире. Как говорилось ранее, диверсификация вложений уменьшает риск для инвестора.

При этом, транзакционные издержки от покупки ценных бумаг малы по сравнению с покупкой отдельных акций, поскольку инвестор приобретает меньшее количество ценных бумаг. Если инвестор хочет повторить структуру какого-либо индекса, самостоятельно покупая акции входящих в него компаний, он будет вынужден платить комиссию брокеру по каждой сделке. В то время как при покупке ценных бумаг ETF происходит одна сделка, следовательно, комиссионные выплаты брокеру будут ниже. Таким образом, затраты инвестора снижаются, что является положительным аспектом.

К тому же, данный вариант инвестирования не предполагает обращения к услугам иностранных брокеров. Этот факт служит еще одним аргументом в пользу покупки ценных бумаг ETF, поскольку взаимодействие с зарубежными брокерами предполагает хорошее понимание принципов и нюансов работы иностранных торговых площадок, знание иностранного языка, а также более высокие первоначальные инвестиции[5].

Преимущество покупки ценных бумаг ETF по сравнению с покупкой паев в ПИФе, производящем инвестиции в зарубежные ценные бумаги, состоит в том, что стоимость ценной бумаги ETF обусловлена только ценностью базового актива, лежащего в основе фонда, и в гораздо меньшей степени зависит от квалификации управляющей компании[6] [Harper, 2006, p. 120; Agapova, 2011, p.332]. Этот факт позволяет с большей точностью моделировать и прогнозировать доходность портфеля, состоящего из ценных бумаг ETF, опираясь на исторические данные о доходности их базовых активов (чаще всего фондовых

[5] Коваль Л. Обойдемся без Уолл-стрит [Электронный ресурс] // Ведомости. – 2014. – 12 декабря. – М.: АО Бизнес Ньюс Медиа, 2014. – Режим доступа: http://www.vedomosti.ru/finance/articles/2014/12/12/obojdemsya-bez-uoll-strit. – Загл. с экрана. (15.04.2016)

[6] Similarities between ETFs and Mutual Funds [Electronic resource] // Сайт iShares. – BlackRock, Inc. [2016]. − Режим доступа: https://www.ishares.com/us/about-etfs/what-is-an-etf/comparing-etfs-and-mutual-funds − Загл. с экрана. (15.04.2016).

индексов акций).

Для построения инвестиционного портфеля были выбраны следующие фондовые индексы: MSCI USA, MSCI Japan, MSCI China, MSCI Germany, ММВБ (Таблица 1). Выбор именно этих индексов обусловлен тем, что на Московской бирже обращаются ETF, полностью повторяющие их структуру[7]. Таким образом, российский инвестор может приобрести ETF на данные индексы, не обращаясь к услугам иностранных брокеров, преимущества чего описаны выше. К тому же, инвестиции в фондовые индексы США, Японии, Германии, Китая и России позволяют инвестору диверсифицировать его портфель, путем вложения средств в развитые и развивающиеся экономики.

Таблица 1 Информация об индексах, включенных в портфель

Название индекса	Информация об индексе
MSCI USA	Ценовой, взвешенный по рыночной капитализации (free-float) композитный индекс американского фондового рынка. В состав индекса входят 626 акций американских компаний большой и средней капитализации. Компании, общая рыночная капитализация компаний, входящих в индекс MSCI USA, представляет собой примерно 85% рыночной капитализации (с учетом free-float) американского фондового рынка.
MSCI Japan	Ценовой, взвешенный по рыночной капитализации (free-float) композитный индекс японского фондового рынка. В состав индекса входят 318 акций компаний Японии большой и средней капитализации. Компании, общая рыночная капитализация компаний, входящих в индекс MSCI Japan, представляет собой примерно 85% рыночной капитализации (с учетом free-float) японского фондового рынка.
MSCI China	Ценовой, взвешенный по рыночной капитализации (free-float) композитный индекс. В состав индекса входят 155 акций китайских эмитентов (из материковой части и Гонг-Конга) большой и средней капитализации, торгующиеся на фондовых биржах Китая, США и Сингапура.
MSCI Germany	Ценовой, взвешенный по рыночной капитализации (free-float) композитный индекс немецкого фондового рынка. В состав индекса входят 55 акций немецких компаний большой и средней капитализации.

[7] Фонды ETF на Московской Бирже [Электронный ресурс] // Сайт Московской Биржи. – Московская Биржа, [2011-2016]. – Режим доступа: http://moex.com/s221. – Загл. с экрана. (15.04.2016)

ММВБ	Ценовой, взвешенный по рыночной капитализации (free-float) композитный индекс российского фондового рынка. В состав входят 50 наиболее ликвидных акций крупнейших и динамично развивающихся российских эмитентов.

Поскольку котировки ценных бумаг ETF на Московской бирже выражаются в рублях на основании стоимости ценной бумаги фонда ETF в долларах США, для расчета доходностей вышеупомянутых индексов были использованы рублевые значения. Они были получены путем перевода значений индекса на определенную дату в долларах США по курсу рубля к доллару США на ту же дату. В качестве курс обмена был использован курс рубля к доллару США, рассчитанный компанией World Markets Company совместно с агентством Thomson Reuters (WM/Reuters exchange rate)[8]. Выбор данного источника определен тем, что данный обмен курс более приближен к рыночному, по сравнению с официальным обменным курсом, предоставляемым Центральным Банком РФ, следовательно, позволяет более точно оценить доходность инвестиций для инвестора.

Для решения задачи построения оптимального портфеля по модели Марковица, описанной в Главе 1, (на основе безусловных числовых характеристик) был использован следующий алгоритм:

1. На первом шаге был получен ряд исторических данных о доходностях;
2. Затем были найдены выборочные числовые характеристики: оценки безусловного математического ожидания и ковариационной матрицы выбранных индексов;
3. На третьем шаге был построен оптимальный портфель.

Ниже более подробно описаны перечисленные шаги и представлены результаты каждого из них.

Шаг 1. Получение ряда исторических данных о доходностях

В данном исследовании используются логарифмические дневные доходности вышеуказанных показателей, рассчитанные по формуле (16):

$$\mathrm{r_t} = \ln\left(\frac{\mathrm{P_t}}{\mathrm{P_{t-1}}}\right), \qquad (16)$$

[8] Источник: база данных Thomson Reuters Datastream

где r_t – дневная логарифмическая доходность индекса, P_t – рублевое значение индекса в день t, P_{t-1} – рублевое значение индекса в день t-1.

Использовались данные за период с 2 сентября 2011 года по 6 июля 2015 года (1001 наблюдение). На этой выборке производится оценка вектора математического ожидания, ковариационной матрицы выбранных активов. Данные получены из базы данных Thomson Reuters Eikon, курс для перевода в рубли, как сказано выше, из базы данных Thomson Reuters Datastream. Графики дневных доходностей рассматриваемых индексов представлены ниже на Рис. 2 – 6.

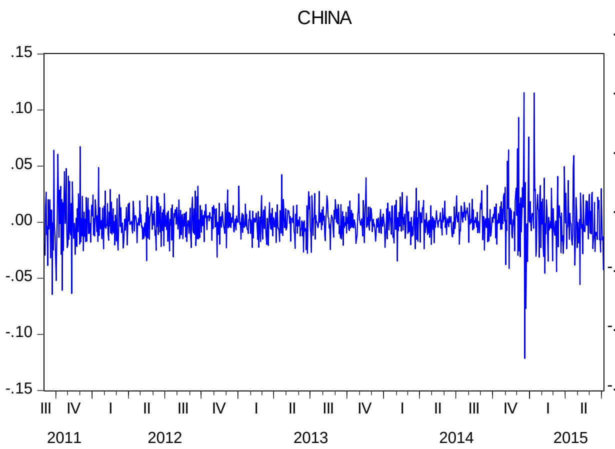

Рис. 2 *График дневных логарифмических доходностей индекса MSCI China в период 02.09.2011-06.07.2015*

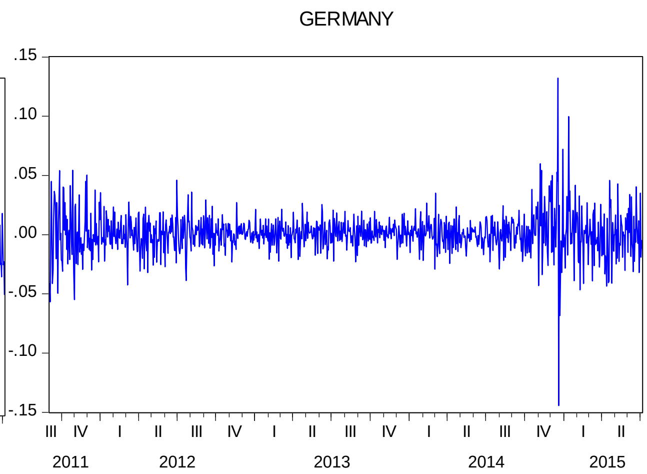

Рис. 3 *График дневных логарифмических доходностей индекса MSCI Germany в период 02.09.2011-06.07.2015*

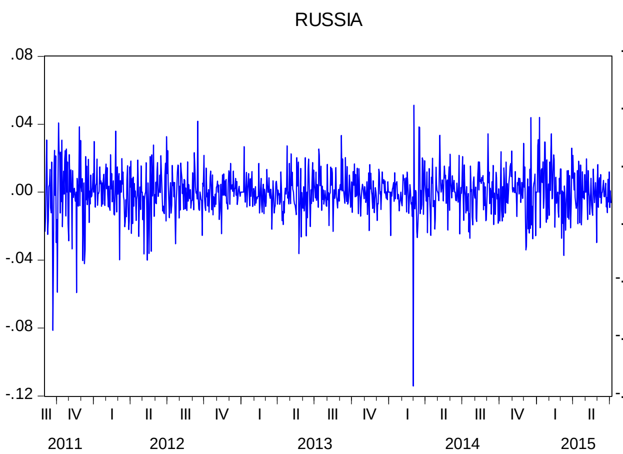

Рис. 4 *График дневных логарифмических доходностей индекса ММВБ в период 02.09.2011-06.07.2015*

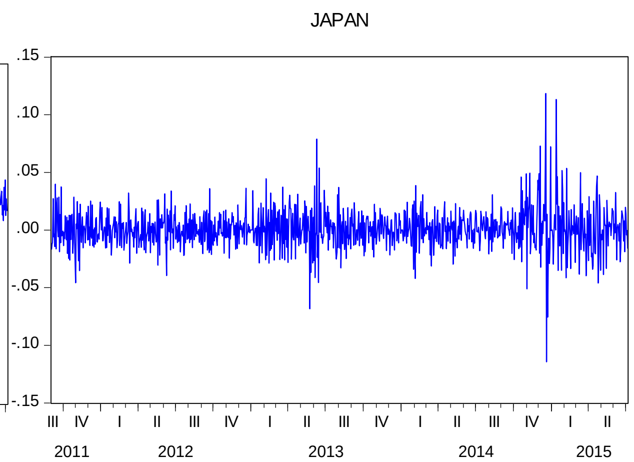

Рис. 5 *График дневных логарифмических доходностей индекса MSCI Japan в период 02.09.2011-06.07.2015*

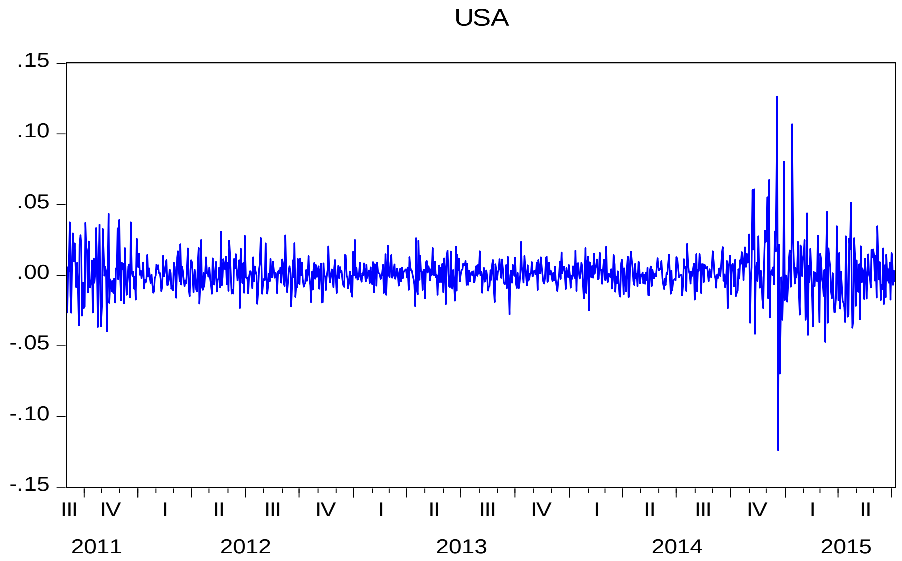

Рис. 6 *График дневных логарифмических доходностей индекса MSCI USA в период 02.09.2011-06.07.2015*

Шаг 2. Оценка вектора математического ожидания, ковариационной матрицы доходностей выбранных активов

Оценка безусловных математического ожидания, дисперсии и ковариации доходностей выбранных индексов производилась по формулам:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{1001} \sum_{t=1}^{1001} r_{i_t},$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \left(r_{i_t} - \hat{\mu}_i\right)^2,$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \frac{1}{1001} \sum_{t=1}^{1001} (r_{i_t} - \hat{\mu}_i)(r_{j_t} - \hat{\mu}_j),$$

где $\hat{\mu}_i$ – оценка математического ожидания доходностей актива i, r_{it} – значение доходности на момент t активов i, $\hat{\sigma}_i^2$ – оценка дисперсии доходности актива i, $\hat{\sigma}_{ij}^2$ – оценка ковариации активов i и j.

Полученные значения выборочных числовых характеристик приведены ниже:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} 0{,}0008 \\ 0{,}0009 \\ 0{,}0009 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0012 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{COV} = \begin{pmatrix} 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0001 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \end{pmatrix}$$

Выборочные коэффициенты корреляции представлены в Таблице 2. Отметим, что они все статистически значимы (заданный уровень значимости 1%).

Таблица 2 Выборочные коэффициенты корреляции

	MSCI China (1)	MSCI Germany (2)	MSCI Japan (3)	ММВБ (4)	MSCI USA (5)
MSCI China (1)	1	0,586	0,682	0,273	0,630
MSCI Germany (2)	0,586	1	0,536	0,414	0,771
MSCI Japan (3)	0,682	0,536	1	0,163	0,601
ММВБ (4)	0,273	0,414	0,163	1	0,241
MSCI USA (5)	0,630	0,771	0,601	0,241	1

Шаг 3. Построение оптимального портфеля

В данной работе было рассмотрено решение задачи Марковица по построению оптимального портфеля ценных бумаг. Портфели, являющиеся оптимальными по Марковицу, называются «эффективными портфелями ценных бумаг» или же «оптимальными по Марковицу портфелями». Поскольку в данной работе рассматривается построение именно таких портфелей, отныне и далее, в целях удобства, под термином «оптимальный портфель» подразумевается «портфель, оптимальный по Марковицу».

Как говорилось ранее, портфелем ценных бумаг в рассматриваемой задаче является вектор $W=(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$,

$$w_1+w_2+w_3+w_4+w_5 = 1,$$

$$w_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$$

Ожидаемая доходность портфеля и дисперсия доходности портфеля, рассматриваемого в данной работе, вычисляются по формулам:

$$\hat{\mu}_p = W\hat{\mu} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}0008 \\ 0{,}0009 \\ 0{,}0009 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0012 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_p^2 = W^T COV W =$$

$$= (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5) \begin{pmatrix} 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0001 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}$$

Математическая задача нахождения оптимального портфеля выглядит следующим образом:

$$\min \hat{\sigma}_p^2 =$$

$$\min((w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5) \begin{pmatrix} 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0001 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix})$$

при ограничениях:

$$\hat{\mu}_p \geq \mu^*,$$

$$\sum_{i=1}^{5} w_i = 1,$$

$$w_i \geq 0 \,, i = \overline{1{,}5},$$

где $\hat{\mu}_p$ – выборочное математическое ожидание доходности портфеля, μ^*– заданный уровень ожидаемой доходности портфеля, w_i – доли инвестирования средств в индекс i.

Заданные уровни ожидаемой дневной доходности портфеля указаны в Таблице 3. Эти значения определялись исходя из следующего принципа. Поскольку рассматриваемый портфель включает в себя индексы как развитых, так и развивающихся стран, можно предположить, что бенчмарком для такого портфеля будет являться индекс MSCI World – фондовый индекс, который отражает ситуацию на мировом фондовом рынке. Такой же подход был использован в работе [Pojarliev, Polasek, 2011]. Выборочное математическое ожидание рублевой дневной доходности данного индекса, оцененное на рассматриваемом периоде (02.09.2011-06.07.2015), равняется 0,08%. Данное значение было использовано как заданный уровень ожидаемой доходности (μ_3^*). Остальные значения ожидаемой доходности были получены путем увеличения и уменьшения μ_3^* на 0,01% и 0,02%. Таким образом, были учтены возможные различия в предпочтениях инвесторов. Поскольку рассматриваемый портфель не повторяет структуру индекса MSCI World, инвестор может ожидать как большую, так и меньшую доходность от данного портфеля, в зависимости от его восприятия.

Таблица 3 Заданные уровни значений ожидаемой доходности портфеля

	μ_1^*	μ_2^*	μ_3^*	μ_4^*	μ_5^*
Уровень ожидаемой дневной доходности портфеля, %	0,06%	0,07%	0,08%	0,09%	0,10%

Таким образом, были построены оптимальные портфели для 5 инвесторов с различными предпочтениями относительно ожидаемой доходности портфеля.

Кроме того, был построен портфель, без ограничений на ожидаемую доходность из условия минимума риска портфеля. Математическая задача нахождения такого оптимального портфеля выглядит следующим образом:

$$\min \hat{\sigma}_p^2$$

$$= \min((\mathrm{w}_1 \quad \mathrm{w}_2 \quad \mathrm{w}_3 \quad \mathrm{w}_4 \quad \mathrm{w}_5)\begin{pmatrix} 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0001 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0002 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{w}_1 \\ \mathrm{w}_2 \\ \mathrm{w}_3 \\ \mathrm{w}_4 \\ \mathrm{w}_5 \end{pmatrix}$$

при ограничениях:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{5} \mathrm{w}_\mathrm{i} = 1,$$

$$\mathrm{w}_\mathrm{i} \geq 0\,, \mathrm{i} = \overline{1{,}5},$$

где w_i – доли инвестирования средств в индекс i.

Решении сформулированных задач поиска оптимальных портфелей осуществлялось с помощью надстройки «Поиск решений» программы Microsoft Excel, причем, был выбран «Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ» в силу нелинейности функции, предназначенной для минимизации.

Структура оптимальных портфелей построенных с использованием оценок безусловных числовых характеристик, представлены в Таблице 4.

Таблица 4 Оптимальные портфели, построенные с использованием оценок безусловных числовых характеристик

Ограничения	$w^*_{\text{MSCI China}}$	$w^*_{\text{MSCI Germany}}$	$w^*_{\text{MSCI Japan}}$	$w^*_{\text{ММВБ}}$	$w^*_{\text{MSCI USA}}$
$\hat{\mu}_p \geq 0{,}06\%$	0	0	0,160	0,476	0,364
$\hat{\mu}_p \geq 0{,}07\%$	0	0	0,150	0,392	0,458
$\hat{\mu}_p \geq 0{,}08\%$	0	0	0,141	0,307	0,552
$\hat{\mu}_p \geq 0{,}09\%$	0	0	0,131	0,223	0,646
$\hat{\mu}_p \geq 0{,}10\%$	0	0	0,122	0,138	0,740
Нет: портфель точки глобального минимума дисперсии	0	0	0,166	0,533	0,301

Следует отметить, что ни в один из составленных портфелей не были включены индексы MSCI China и MSCI Germany. Это можно объяснить тем, что данные индексы имеют наибольший риск, измеренный при помощи выборочной дисперсии. Поскольку задачей являлось построить портфель с минимальной дисперсией, эти индексы были исключены.

При этом подходе были сформированы оптимальные портфели по классической модели Г. Марковица, поэтому доли активов в портфеле не меняются до конца периода инвестирования и данный шаг является заключительным для инвестора.

2.2. Построение оптимального портфеля по модели Г. Марковица с использованием многомерной GARCH модели

Как отмечалось в Главе 1, использование безусловных числовых характеристик не для построения динамического оптимального портфеля по модели Марковица не всегда правомерно. В частности, в том случае, когда временные ряды доходностей активов, включенных в портфель, характеризуются «кластеризацией волатильности». В случае наличия этого эффекта требуются другие вероятностные методы при построении оптимальных портфелей.

Изучив графики дневных доходностей выбранных индексов (Рис. 2-6) можно заметить, что данные временные ряды имеют периоды высокой и низкой волатильности. Вышесказанное дает возможность предположить, что в рассматриваемых временных рядах имеет место условная гетероскедастичность. Поэтому для построения оптимальных портфелей, включающих данные индексы, целесообразно использовать условные числовые характеристики, а не безусловные.

Для моделирования условной дисперсии будем использовать модели типа GARCH. Однако, одномерные GARCH модели не дают возможность учесть автокорреляцию и динамику в ковариациях, условных на доступной к текущему моменту времени информации, они позволяют смоделировать условную дисперсию отдельно взятого временно ряда без учета других. Поскольку в данной работе решается задача построения оптимального портфеля, моделирование условных ковариаций важно. Эту проблему помогают решить многомерные модели GARCH, рассматривающие уже случайный вектор, а не отдельные временные ряды. Это объясняет использование многомерной модели GARCH для построения оптимальных по Марковицу портфелей в данной работе.

Отметим, что в основополагающих теоретических статьях по моделям условной гетероскедастичности [Engle, 2001; Engle, Sheppard, 2001] авторы тестировали применение модели на основе временных рядов доходностей именно фондовых индексов (Dow Jones Industrial Average, S&P 500, NASDAQ Composite и другие), а не отдельных акций. Поэтому можно предположить, что применение многомерной модели условной гетероскедастичности для моделирования условной волатильности именно временных рядов доходностей индексов будет являться адекватным инструментом.

Для решения задачи построения оптимального портфеля, с помощью многомерной GARCH модели был использован следующий алгоритм:

1. На первом шаге был получен ряд исторических данных о доходностях;
2. Затем был проведен анализ временных рядов на стационарность и наличие ARCH-эффекта;
3. На третьем шаге была проведена оценка параметров многомерной GARCH модели для условной ковариационной матрицы вектора доходностей;
4. Далее был построен прогноз вектора условных математических ожиданий

дневных доходностей и условной ковариационной матрицы на момент t+1;

5. На пятом шаге был построен оптимальный портфель.

Шаг 1. Получить ряд исторических данных о доходностях

Были использованы логарифмические дневные доходности рассматриваемых инструментов на промежутке со 2 сентября 2011 года по 6 июля 2015 года (1001 наблюдение). Эти данные были использованы для первичной оценки параметров многомерной модели GARCH. Источники данных аналогичны тем, что указаны в параграфе 2.1 данной главы.

Шаг 2. Проанализировать временные ряды, проверить на стационарность, наличие ARCH-эффекта

Описательные статистики временных рядов дневных логарифмических доходностей выбранных индексов представлены в Таблице 5.

Таблица 5 Описательные статистики дневных доходностей индексов

	MSCI China	MSCI Germany	MSCI Japan	ММВБ	MSCI USA
Выборочное математическое ожидание	0,0008	0,0009	0,0009	0,0000	0,0012
Максимальное значение	0,1155	0,1321	0,1184	0,0512	0,1266
Минимальное значение	-0,1214	-0,1444	-0,1144	-0,1142	-0,1239
Выборочное с.к.о.	0,0177	0,0169	0,0177	0,0136	0,0150
Коэффициент асимметрии	0,4753	0,1333	0,4459	-0,8548	0,6697
Коэффициент эксцесса	10,6317	13,8159	9,277	10,0401	16,9842
Длина ряда	1001	1001	1001	1001	1001

Как было отмечено ранее, индексы Китая и Японии имеют наибольшие значения выборочного стандартного отклонения. В случае с Китаем это может быть связано с тем, что это развивающаяся страна и, следовательно, вложения в акции компаний данной страны являются более рискованными. Японию же принято относить к развитым странам, акции которых отличаются более низким риском. Однако относительно высокую волатильность индекса MSCI Japan можно объяснить шоком в экономике, вызванным цунами в 2011 году[9].

Следует отметить, что коэффициенты асимметрии дневных доходностей всех индексов отличаются от нуля, также как и коэффициента эксцесса. Для каждого временного ряда была произведена проверка гипотезы о нормальном распределении ряда с помощью статистического теста Харке-Бера. Для всех рассматриваемых временных рядов данная гипотеза была отклонена.

Для всех временных рядов, рассмотренных в работах [Pojarliev, Polasek, 2001; Gupta, Donleavy, 2006; Cha, Jithendranathan, 2009], гипотеза о нормальном распределении ряда также была проверена с помощью теста Харке-Бера и была отклонена (Таблица 6).

Таблица 6 Результаты теста Харке-Бера

	MSCI China	MSCI Germany	MSCI Japan	ММВБ	MSCI USA
Значение статистики Харке-Бера	2469,368	4886,998	1678,164	2191,267	8239,452
P-value для статистики Харке-Бера	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Для того, чтобы прогнозирование числовых характеристик рассматриваемых временных рядов было возможно, нужно убедиться в том, что данные временные ряды стационарны. Визуальный анализ графиков дневных доходностей рассматриваемых индексов (Рис. 2-6), что значения дневных доходностей всех индексов колеблются около 0 в «коридоре» от -0,05 до 0,05. Как говорилось выше, это дает возможность сделать предположение о том, что данные временные ряды стационарны. Проведенный анализ значений выборочных оценок значений автокорреляционных функций (АКФ) и частных автокорреляционных функций (ЧАКФ) рассматриваемых временных рядов показал, что они статистически не отличаются от нуля для лагов 1-36, за некоторыми исключениями, которые можно списать на погрешности. Этот анализ также дал возможность предположить, что временные ряды дневных доходностей рассматриваемых индексов стационарны. Также для проверки стационарности рассматриваемых временных рядов был проведен тест на наличие единичного корня Филипса-Перрона. По результатам данного

[9] OECD Economic Surveys Japan 2015 [Electronic resource] // Сайт OECD. – Organisation for Economic Co-operation and Development, [2016]. – Режим доступа: http://www.oecd.org/. – Загл. с экрана. (03.05.2016)

теста можно сказать, что все временные ряды доходностей являются стационарными на уровне значимости 1%.

Учитывая, что все рассматриваемые временные ряды стационарны, можно утверждать о том, что их безусловные дисперсии постоянны. Но, как отмечалось выше, велика вероятность того, что их условные дисперсии непостоянны, то есть гетероскедастичны. По-другому можно сказать, что данные временные ряды возможно характеризуются наличием ARCH-эффекта.

Для подтверждения наличия данного эффекта нужно определить, какой моделью задается каждый временной ряд, а затем протестировать каждую модель на наличие условной гетероскедастичности инноваций. Было сделано предположение, что временной ряд дневной доходности каждого рассматриваемого индекса задается моделью:

$$\mathrm{r_t} = \mathrm{c} + \mathrm{u_t},$$

где r_t – дневная доходность индекса в день t, c – константа, u_t – инновации.

В данной работе данный тест был проведен с помощью эконометрического пакета EViews 8. Алгоритм проведения теста описан в Приложении 1.

После проведения вышеописанного теста для всех рассматриваемых временных рядов были сделаны выводы о наличии ARCH-эффекта для всех временных рядов (уровень значимости был принят равным 1%). Это дает возможность применять многомерную GARCH модель к данных временным рядам.

Шаг 3. Оценить параметры многомерной GARCH модели для условной ковариационной матрицы вектора доходностей

Как говорилось ранее, в данной работе рассмотрен именно вектор дневных доходностей индексов MSCI China, MSCI Germany, MSCI Japan, ММВБ и MSCI USA. Было сделано предположение, что рассматриваемый случайный вектор задается следующей моделью (17):

$$r_t = \begin{pmatrix} \mathrm{r_{1,t}} \\ \mathrm{r_{2,t}} \\ \mathrm{r_{3,t}} \\ \mathrm{r_{4,t}} \\ \mathrm{r_{5,t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{c_1} \\ \mathrm{c_2} \\ \mathrm{c_3} \\ \mathrm{c_4} \\ \mathrm{c_5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{u_{1,t}} \\ \mathrm{u_{2,t}} \\ \mathrm{u_{3,t}} \\ \mathrm{u_{4,t}} \\ \mathrm{u_{5,t}} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\epsilon_t|\Omega_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t), \epsilon_t = \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \\ u_{3,t} \\ u_{4,t} \\ u_{5,t} \end{pmatrix}$$

где r_t – случайный вектор дневных доходностей, $r_{1,t}$, $r_{2,t}$, $r_{3,t}$, $r_{4,t}$ и $r_{5,t}$ – дневные доходности индексов MSCI China, MSCI Germany, MSCI Japan, ММВБ и MSCI USA соответственно, $c_{1,...,5}$ – константы, ε_t – случайный вектор инноваций размерности (5x1), с математическим ожиданием, равным нулю, и условной ковариационной матрицей Σ_t, где Ω_{t-1} – информация, доступная на момент t-1.

Как было показано в параграфе 1.3, условная ковариационная матрица случайного вектора доходностей r_t равняется условной ковариационной матрице случайного вектора инноваций ε_t. Таким образом, смоделированную условную ковариационную матрицу случайного вектора инноваций можно использовать в качестве условной ковариационной матрицы случайного вектора доходностей r_t и, следовательно, использовать для решения задачи построения оптимального портфеля.

В данной работе для моделирования условной ковариационной матрицы дневных доходностей индексов MSCI China, MSCI Germany, MSCI Japan, ММВБ и MSCI USA была выбрана многомерная модель BEKK GARCH. Согласно данной модели условная ковариационная матрица в момент времени t определяется из следующего соотношения (18):

$$\Sigma_t = M'M + \sum_{i=1}^{q} A_i'\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}'A_i + \sum_{i=1}^{p} B'\Sigma_{t-i}B, \quad \epsilon_t|\,\Omega_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t), \tag{18}$$

где Σ_t - условная ковариационная матриц, M – верхняя треугольная матрица параметров, A и B – квадратные матрицы параметров размерности (NxN), ε_t – вектор инноваций размерности (Nx1), q – порядок ARCH-членов ε_t, p – порядок GARCH-членов ε_t, Ω_{t-1} – информация, доступная на момент t-1.

Преимущества модели BEKK GARCH над более ранними версиями многомерных моделей GARCH описаны в параграфе 1.3 Главы 1.

В данной работе была рассмотрена диагональная модель BEKK GARCH (1,1), где матрицы параметров A и B предполагаются диагональными. Данное ограничение существенно снижает количество параметров для оценки, что может положительно сказаться на качестве модели. Отметим, что для выбора значения p и q для модели BEKK использовался информационный критерий Акаике. Модель BEKK (1,1) была выбрана, поскольку имела наименьшее значение этого критерия. Значения критерия Акаике для моделей BEKK GARCH (1,1) и BEKK GARCH (1,2) представлены в Приложении 2.

Рассматриваемую в данной работе модель условной ковариационной матрицы можно представить в следующем виде:

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} m_{11} & & & & \\ m_{12} & m_{22} & & & \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & & \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ & & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ & & & m_{44} & m_{45} \\ & & & & m_{55} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix} \epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} \end{pmatrix} \Sigma_{t-1} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1} = \begin{pmatrix} u_{1,t-1}^2 & u_{1,t-1}u_{2,t-1} & u_{1,t-1}u_{3,t-1} & u_{1,t-1}u_{4,t-1} & u_{1,t-1}u_{5,t-1} \\ u_{2,t-1}u_{1,t-1} & u_{2,t-1}^2 & u_{2,t-1}u_{3,t-1} & u_{2,t-1}u_{4,t-1} & u_{2,t-1}u_{5,t-1} \\ u_{3,t-1}u_{1,t-1} & u_{3,t-1}u_{2,t-1} & u_{3,t-1}^2 & u_{3,t-1}u_{4,t-1} & u_{3,t-1}u_{5,t-1} \\ u_{4,t-1}u_{1,t-1} & u_{4,t-1}u_{2,t-1} & u_{4,t-1}u_{3,t-1} & u_{4,t-1}^2 & u_{4,t-1}u_{5,t-1} \\ u_{5,t-1}u_{1,t-1} & u_{5,t-1}u_{2,t-1} & u_{5,t-1}u_{3,t-1} & u_{5,t-1}u_{4,t-1} & u_{5,t-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } \Sigma_{t-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 & \sigma_{12,t-1} & \sigma_{13,t-1} & \sigma_{14,t-1} & \sigma_{15,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} & \sigma_{2,t-1}^2 & \sigma_{23,t-1} & \sigma_{24,t-1} & \sigma_{25,t-1} \\ \sigma_{31,t-1} & \sigma_{32,t-1} & \sigma_{3,t-1}^2 & \sigma_{34,t-1} & \sigma_{35,t-1} \\ \sigma_{41,t-1} & \sigma_{42,t-1} & \sigma_{43,t-1} & \sigma_{4,t-1}^2 & \sigma_{45,t-1} \\ \sigma_{51,t-1} & \sigma_{52,t-1} & \sigma_{53,t-1} & \sigma_{54,t-1} & \sigma_{5,t-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Оценка параметров модели BEKK GARCH производилась методом максимального правдоподобия с помощью эконометрического пакета EViews 8. Совместно с оценкой параметров модели для условной ковариационной матрицы происходит оценка параметров $c_{1,\ldots,5}$ из модели (16). Алгоритм оценки параметров представлен в Приложении 3.

Оценки параметров случайного вектора доходности r_t представлены в Таблице 7. Оценки параметров модели BEKK GARCH (1,1) для условной ковариационной матрицы представлены в Таблице 8.

Таблица 7 Оценки значений параметров случайного вектора доходностей r_t

Параметр	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
Оценка значения параметра	0,0007***	0,0010*	0,0009**	0,0002***	0,0011*

Символами (*), (**) и (***) отмечены статистические значимые оценки параметров регрессионных моделей при уровнях значимости в 1%, 5% и 10% соответственно.

Таблица 8 Оценки значений параметров модели BEKK GARCH (1,1) для условной ковариационной матрицы

Параметр	Оценка значения	Параметр	Оценка значения	Параметр	Оценка значения	Параметр	Оценка значения	Параметр	Оценка значения
m_{11}	0,000*	m_{22}	0,000*	m_{34}	0,000*	a_1	0,223*	b_1	0,960*
m_{12}	0,000*	m_{23}	0,000*	m_{35}	0,000*	a_2	0,238*	b_2	0,954*
m_{13}	0,000*	m_{24}	0,000*	m_{44}	0,000*	a_3	0,246*	b_3	0,951*
m_{14}	0,000*	m_{25}	0,000*	m_{45}	0,000*	a_4	0,061*	b_4	0,989*
m_{15}	0,000*	m_{33}	0,000*	m_{55}	0,000*	a_5	0,230*	b_5	0,958*

Символами (*), (**) и (***) отмечены статистические значимые оценки параметров регрессионных моделей при уровнях значимости в 1%, 5% и 10% соответственно.

Все полученные оценки параметров как для модели случайного вектора доходностей, так и для модели условной ковариационной статистически значимы.

После оценивания параметров модели, проведен тест Льюнга-Бокса для определения наличия серийной автокорреляции стандартизированных остатков оцененных моделей дневных доходностей, которые вычисляются по формуле (19):

$$e_{i,t} = \hat{u}_{i,t}/\sigma_{ii,t}^{1/2}, \tag{19}$$

где $e_{i,t}$ – стандартизированные остатки модели дневной доходности индекса i на момент времени t, $\hat{u}_{i,t}$ – остаток модели дневной доходности индекса i на момент времени t, $\sigma_{ii,t}^{1/2}$ – квадратный корень элемента на диагонали оцененной условной ковариационной матрицы, соответствующей индексу i, i=1,…,5.

Отсутствие автокорреляции остатков дает возможность говорить о том, что модель корректно специфицирована и может быть использована для прогнозирования значений. В данной работе выбор стандартизированных остатков обусловлен тем, что были оценены как параметры модели случайного вектора дневных доходностей, так и параметры модели условной ковариационной матрицы. К тому же, именно тест Льюнга-Бокса для определения наличия серийной автокорреляции стандартизированных остатков является наиболее часто используемым для проверки правильности спецификации многомерных моделей GARCH [Tse, Tsui, 1999, p. 690].

Основной гипотезой является отсутствие автокорреляции стандартизированных остатков для всех лагов вплоть до максимального. В данной работе использовалось значение 20 для максимального лага по аналогии с работой [Miralles-Marcelo, Miralles-Quirós, Miralles-Quirós, 2013].

По результату проведенного теста был сделан вывод о том, что автокорреляция стандартизированных остатков отсутствует для всех лагов вплоть до лага 20 при заданном уровне значимости равном 10%. Результат теста представлен в Таблице 9.

Таблица 9 Результат теста Льюнга-Бокса для определения наличия серийной автокорреляции стандартизированных остатков для максимального лага равного 20

Показатель	Максимальный лаг	Значение Q-статистики	p-value	Количество степеней свободы
Значение	20	457,275	0,085	500

Статистически значимые параметры и отсутствие серийной автокорреляции стандартизированных остатков позволяет использовать данные модели для прогнозирования значений дневных доходностей и условной ковариационной матрицы.

Шаг 4. Прогнозирование условных математических ожиданий дневных доходностей и условной ковариационной матрицы на момент t+1

Вектор $\hat{\mu}_{t+1}$ условных математических ожиданий дневных доходностей при условии наличия информации, доступной на момент t, рассматриваемых индексов является вектором констант $c_{1,\dots5}$, оцененных на предыдущем шаге.

$$\hat{\mu}_{t+1} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{1,t+1} \\ \hat{\mu}_{2,t+1} \\ \hat{\mu}_{3,t+1} \\ \hat{\mu}_{4,t+1} \\ \hat{\mu}_{5,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0007 \\ 0{,}0010 \\ 0{,}0009 \\ 0{,}0002 \\ 0{,}0011 \end{pmatrix}$$

Прогнозирование условной ковариационной матрицы на момент t+1 производится по следующей формуле (20):

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = M'M + A'\Sigma_t A + B'\epsilon_t\epsilon_t' B, \qquad (20)$$

где Σ_{t+1} – условная ковариационная матрица временных рядов доходностей в момент времени t+1 при условии наличия информации, доступной в момент t, M – верхняя треугольная матрица параметров, оцененная на шаге 4, A и B – диагональные 5x5 матрицы параметров, оцененные на шаге 4, ε_t – вектор ошибок оценки доходностей 5x1.

В данной работе прогнозирование условной ковариационной матрицы на момент t+1 также производилось с помощью пакета EViews 8.

Прогноз значений условной ковариационной матрицы Σ_{t+1} на 07.07.2015 представлена в Таблице 10.

Таблица 10 Прогноз условной ковариационной матрицы дневных доходностей рассматриваемых индексов на 07.07.2015

	MSCI China	MSCI Germany	MSCI Japan	ММВБ	MSCI USA
MSCI China	0,0003	0,0002	0,0002	0,0000	0,0002
MSCI Germany	0,0002	0,0003	0,0002	0,0000	0,0002
MSCI Japan	0,0002	0,0002	0,0003	0,0000	0,0002
ММВБ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000
MSCI USA	0,0002	0,0002	0,0002	0,0000	0,0002

Отметим, что представленные значения лишь незначительно отличаются от выборочной оценки безусловной ковариационной матрицы.

Шаг 5. Построение оптимального портфеля

В данной работе была рассмотрена задача построения оптимального инвестиционного портфеля Марковица. Как говорилось ранее, портфелем ценных бумаг в данном случае является такой вектор $W=(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, что $w_1+w_2+w_3+w_4+w_5 = 1$, w_i

≥ 0, $i=\overline{1,5}$.

Однако в данном случае рассматриваются прогнозируемые условные числовые характеристики портфеля. Условная ожидаемая доходность $\hat{\mu}_{p,t+1}$и условная дисперсия $\hat{\sigma}^2_{p,t+1}$ доходности портфеля на момент t+1, рассматриваемого в данной работе, вычисляются по формулам с помощью:

$$\hat{\mu}_{p,t+1} = W\hat{\mu}_{p,t+1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}0007 \\ 0{,}001 \\ 0{,}0009 \\ 0{,}0002 \\ 0{,}0011 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2_{p,t+1} = W^T COVW =$$

$$= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}$$

Математическая задача нахождения оптимального портфеля выглядит следующим образом:

$$\min \hat{\sigma}^2_{p,t+1} =$$

$$\min\left(\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}\right)$$

при ограничениях:

$$\hat{\mu}_{p,t+1} \geq \mu^*,$$

$$\sum_{i=1}^{5} w_i = 1,$$

$$w_i \geq 0\,, i = \overline{1,5},$$

где $\hat{\mu}_{p,t+1}$ – условное математическое ожидание доходности портфеля в момент t+1, μ^*– заданный уровень условной ожидаемой доходности портфеля, w_i – доли инвестирования средств в индекс i.

Построенный портфель будет иметь минимальную условную дисперсию на следующий день, при этом принося доходность не ниже заданной.

Заданные уровни значений ожидаемой доходности портфеля совпадают с представленными в Таблице 3 для возможности сравнения характеристик оптимальных портфелей. Таким образом, были построены оптимальные портфели для 5 инвесторов с различными предпочтениями относительно ожидаемой доходности портфеля.

Также был построен портфель точки глобального минимума дисперсии. Математическая задача нахождения такого оптимального портфеля выглядит следующим образом:

$$\min \widehat{\sigma}^2_{p,t+1}$$

$$= \min((w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5) \begin{pmatrix} 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0002 & 0{,}0000 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{5} w_i = 1,$$

$$w_i \geq 0\ , i = \overline{1{,}5},$$

где w_i – доли инвестирования средств в индекс i.

Построенный портфель будет иметь минимально возможную условную дисперсию на следующий день.

Нахождение оптимального портфеля осуществлялось с помощью надстройки «Поиск решений» программы Microsoft Excel. В качестве метода решения был выбран «Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ» в силу нелинейности функции, предназначенной для минимизации.

Найденные оптимальные портфели портфелях, построенных с использованием оценок условных числовых характеристик, представлены в Таблице 11. Для сравнения представлены вычисленные доли индексов в оптимальных портфелях, построенных с использованием оценок безусловных числовых характеристик.

Таблица 11 Оптимальные портфели, построенные с использованием оценок условных и безусловных числовых характеристик

Ограничения	**w*MSCI China (усл)**	w*MSCI China (безусл)	**w*MSCI Germany (усл)**	w*MSCI Germany (безусл)	**w*MSCI Japan (усл)**	w*MSCI Japan (безусл)	**w*ММВБ (усл)**	w*ММВБ (безусл)	**w*MSCI USA (усл)**	w*MSCI USA (безусл)
$\hat{\mu}_{p,t+1}$≥0,06%	**0 (0)**	0	**0 (0)**	0	**0,154**	0,160	**0,451**	0,476	**0,395**	0,369
$\hat{\mu}_{p,t+1}$≥0,07%	**0 (0)**	0	**0 (0)**	0	**0,138**	0,150	**0,355**	0,392	**0,507**	0,458
$\hat{\mu}_{p,t+1}$≥0,08%	**0 (0)**	0	**0 (0)**	0	**0,122**	0,141	**0,260**	0,307	**0,618**	0,552
$\hat{\mu}_{p,t+1}$≥0,09%	**0 (0)**	0	**0 (0)**	0	**0,106**	0,131	**0,164**	0,223	**0,730**	0,646
$\hat{\mu}_{p,t+1}$≥0,10%	**0 (0)**	0	**0 (0)**	0	**0,090**	0,122	**0,068**	0,138	**0,842**	0,740
Нет: портфель точки глобального минимума дисперсии	**0 (0)**	0	**0 (0)**	0	**0,156**	0,166	**0,463**	0,533	**0,381**	0,301

Различия в оптимальных портфелях, построенных с использованием оценок безусловных числовых характеристик и построенных с использованием условных числовых характеристик, не являются кардинальными: ни в один из оптимальных портфелей не включены индексы MSCI China и MSCI Germany, так как их условная волатильность является высокой относительно других индексов, также, как и их безусловная волатильность. Однако структура оптимальных портфелей, построенных с использованием условных числовых характеристик, должна быть пересмотрена на следующий день, поскольку условные числовые характеристики дневных доходностей рассматриваемых индексов изменятся.

2.3. Анализ результатов, выводы и практические рекомендации

Анализ результатов

Для того чтобы установить, действительно ли использование условных числовых характеристик, смоделированных с помощью многомерной модели GARCH, при построении оптимального портфеля по модели Марковица позволяет уменьшить риск формируемого портфеля, по сравнению с портфелями, сформированными с использованием безусловных числовых характеристик, был проведен анализ фактических доходностей построенных портфелей.

Фактические доходности были рассчитаны по формуле (21):

$$r_{t_{port}} = \sum_{i=1}^{5} w *_{i_t} r_{i_t}, \qquad (21)$$

где $r_{t_{port}}$ – фактическая доходность оптимального портфеля в день t, $w *_{i_t}$- доля индекса i в оптимальном портфеле на день t, r_{i_t} – фактическая доходность индекса i в день t.

Фактические доходности оптимальных портфелей были рассчитаны для периода в три месяца: 07.07.2015-07.10.2015 (67 торговых дней). Данный период отличается от периода, на котором были оценены безусловные математические ожидания и ковариационная матрица, а также параметры моделей для случайного вектора доходностей и условной ковариационной матрицы. Поясним, для чего это сделано.

Можно сказать, что полученные оценки безусловных математических ожиданий и ковариационной матрицы дневных доходностей рассматриваемых индексов являются «прогнозами» данных характеристик для периода, следующего за периодом оценки, – внутривыборочным (In-sample). Мы предполагаем, что эти характеристики постоянны и в любой день из периода, следующего внутривыборочным периодом, равны оцененным значениям. Для того, чтобы это проверить, был рассмотрен некоторый ограниченный период, следующий за внутривыборочным периодом. Назовем его вневыборочным (Out-of-sample) (см. Рис.7). Поскольку безусловные числовые характеристики предполагаются неизменными, оптимальные портфели строятся на начало вневыборочного периода (определяются доли индексов в оптимальных портфелях) и далее они не меняются до конца периода. Анализ реальных доходностей построенных оптимальных портфелей, которые были получены во вневыборочном периоде, позволяет понять, действительно ли прогноз числовых характеристик был точным и позволил уменьшить волатильность доходности портфеля.

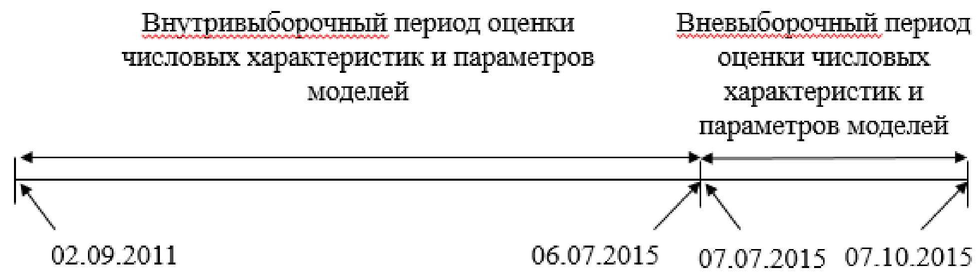

Рис. *7 Обозначение внутривыборочного и вневыборочного периодов*

Оцененные в параграфе 2.2. условные математические ожидания и условная ковариационная матрица дневных доходностей рассматриваемых индексов также являются «прогнозами», однако лишь для дня, следующего сразу по окончанию внутривыборочного периода (07.07.2015). Оценки данных показателей для дня 08.07.2015 уже будут другими, поскольку должна быть принята к учету информация, появившаяся 07.07.2015. Таким образом, для всего вневыборочного периода нужно получить 67 оценок условных математических ожиданий и условных ковариационных матриц дневных доходностей рассматриваемых индексов. Для этого следует переоценивать параметры модели случайного вектора дневных доходностей и параметры модели BEKK GARCH (1,1) на выборке, включающей последние доступные значения доходностей. В данной работе эта процедура была проведена 67 раз. При этом оценка параметров моделей все также происходила на выборке из 1001 значения, однако выборка «двигалась» на один день, захватывая новые значения из вневыборочного периода.

Поскольку оценки условных числовых характеристик изменяются, нужно пересматривать оптимальные портфели, то есть заново рассчитывать такие доли индексов, чтобы портфель считался оптимальным, учитывая данные изменения. Согласно данному определению, каждый день инвестор должен строить новый оптимальный портфель. Однако, такое определение портфеля было принято для возможности математической постановки задачи. В реальности инвестор скорее будет считать, что он держит портфель индексов, структуру которого нужно менять каждый день для того, чтобы обеспечить его оптимальность (осуществляется активная стратегия управления портфелем). В дальнейшем обсуждении будем придерживаться такого же взгляда на понятие портфеля.

Таким образом, оптимальные портфели, построенные с использованием условных числовых характеристик, каждый день будут иметь разную структуру (разные доли w_{i_t} для разных t), несмотря на то, что предпочтения инвестора относительно уровня ожидаемой доходности остаются неизменными. Так же, как и оценка параметров моделей, пересмотр долей индексов в оптимальных по Марковицу портфелях производился 67 раз, то есть для каждого дня из периода Out-of-sample. Для этого проводилась процедура, описанная в параграфе 2.2. На Рис. 8-13 представлены графики долей индексов в оптимальных портфелях.

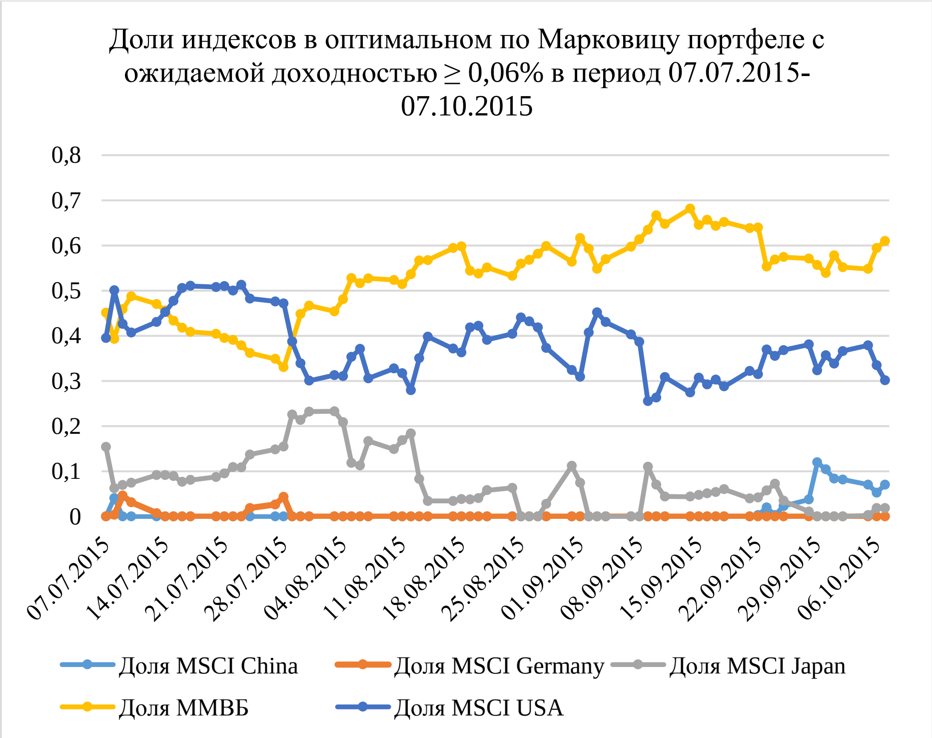

Рис. 8 *График долей индексов в оптимальном по Марковицу портфеле с ожидаемой доходностью ≥ 0,06% в период 07.07.2015-07.10.2015*

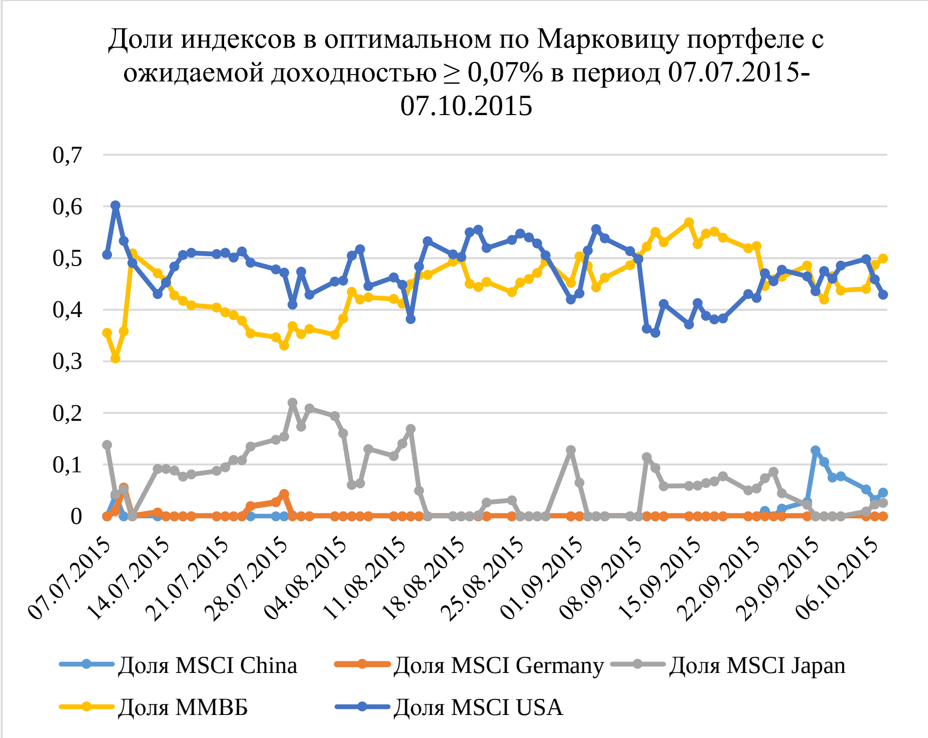

Рис. 9 *График долей индексов в оптимальном по Марковицу портфеле с ожидаемой доходностью ≥ 0,07% в период 07.07.2015-07.10.2015*

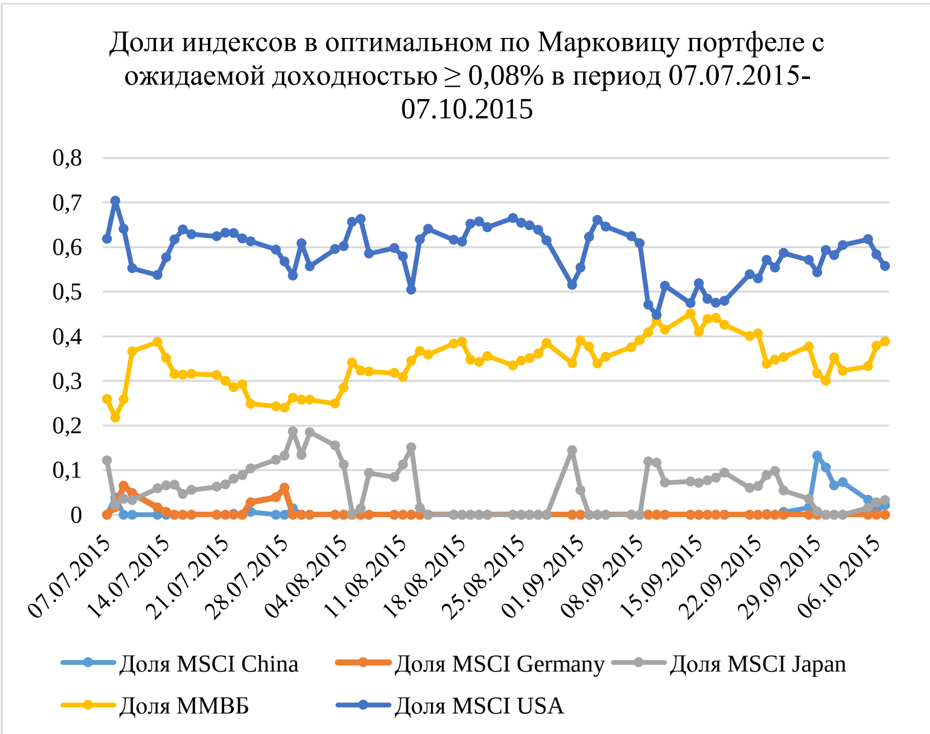

Рис. 10 *График долей индексов в оптимальном по Марковицу портфеле с ожидаемой доходностью ≥ 0,08% в период 07.07.2015-07.10.2015*

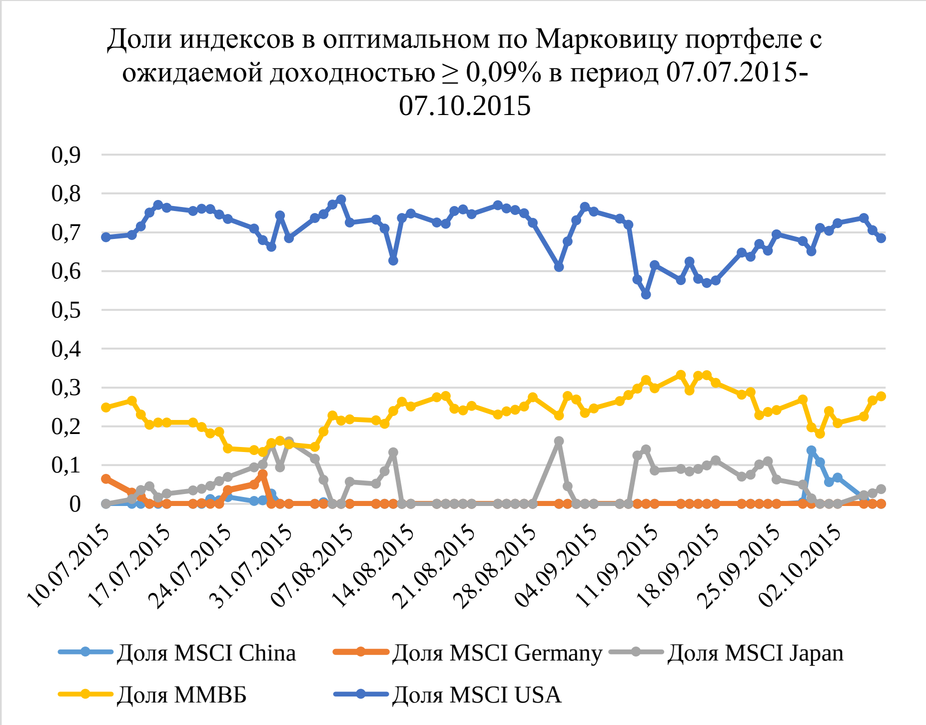

Рис. 11 *График долей индексов в оптимальном по Марковицу портфеле с ожидаемой доходностью ≥ 0,09% в период 07.07.2015-07.10.2015*

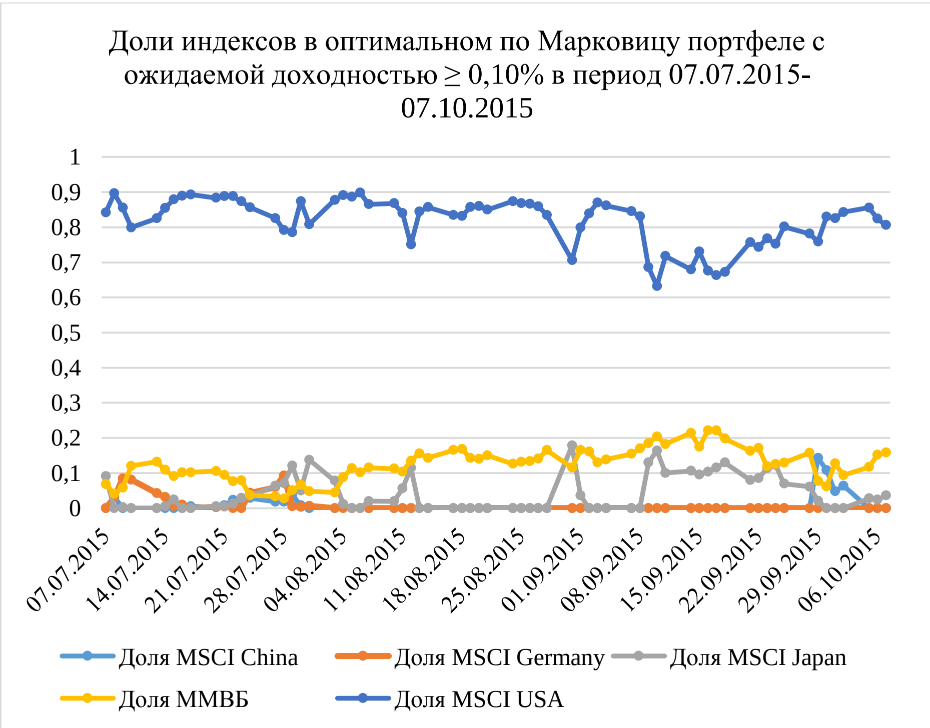

Рис. 12 *График долей индексов в оптимальном по Марковицу портфеле с ожидаемой доходностью ≥ 0,10% в период 07.07.2015-07.10.2015*

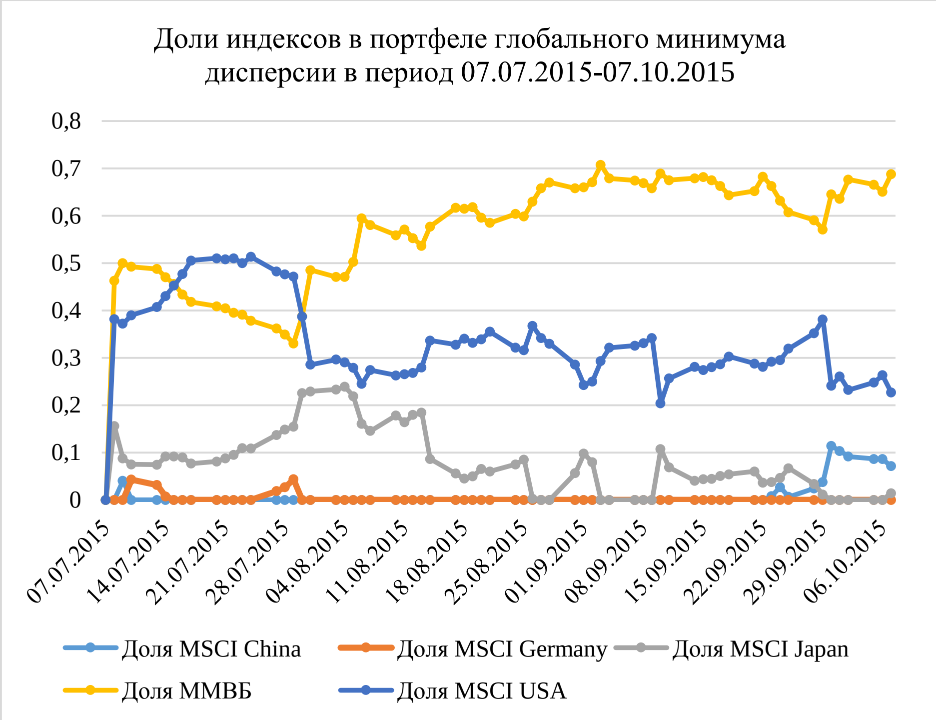

Рис. 13 *График долей индексов в портфеле глобального минимума дисперсии в период 07.07.2015-07.10.2015*

В Приложении 4 представлены графики реальных доходностей оптимальных по Марковицу портфелей, оптимизированных с разными условиями, описанными выше.

Проанализировав данные графики, можно прийти к выводу, что в случаях, когда при оптимизации задавался минимальный уровень ожидаемой доходности портфеля, оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием условных числовых характеристик, приносят примерно такой же уровень доходности, который приносят оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием безусловных числовых характеристик. Однако, когда минимальный уровень ожидаемой доходности портфеля не задается, то есть строится портфель глобального минимума дисперсии, разница в доходностях портфелей, построенных с использованием разных числовых характеристик, более заметна.

Анализ графиков реальных доходностей оптимальных портфелей не дал возможности сделать выводы относительно того, действительно ли использование условных числовых характеристик, смоделированных с помощью многомерной модели GARCH, при построении оптимального по Марковицу портфеля позволяет уменьшить риск формируемого портфеля. Поэтому для полученных результатов реальных доходностей портфелей были рассчитаны выборочные оценки математического ожидания и стандартного отклонения, они представлены в Таблице 12 и Рис. 14.

Таблица 12 Выборочные характеристики оптимальных портфелей, построенных с использованием безусловных числовых характеристик

Ограничения	$\hat{\mu}_p \geq 0{,}06\%$	$\hat{\mu}_p \geq 0{,}07\%$	$\hat{\mu}_p \geq 0{,}08\%$	$\hat{\mu}_p \geq 0{,}09\%$	$\hat{\mu}_p \geq 0{,}10\%$	Портфель глобального минимума дисперсии
Выборочное мат. ожидание, %	0,11%	0,12%	0,13%	0,14%	0,16%	0,10%
Выборочное с.к.о., %	1,17%	1,24%	1,31%	1,40%	1,49%	1,14%

Таблица 13 Выборочные характеристики оптимальных портфелей, построенных с использованием условных числовых характеристик

Ограничения	$\hat{\mu}_{p,t+1} \geq 0{,}06\%$	$\hat{\mu}_{p,t+1} \geq 0{,}07\%$	$\hat{\mu}_{p,t+1} \geq 0{,}08\%$	$\hat{\mu}_{p,t+1} \geq 0{,}09\%$	$\hat{\mu}_{p,t+1} \geq 0{,}10\%$	Портфель глобального минимума дисперсии
Выборочное мат. ожидание, %	0,14%	0,14%	0,15%	0,16%	0,18%	0,14%
Выборочное с.к.о., %	1,12%	1,19%	1,29%	1,40%	1,53%	1,11%

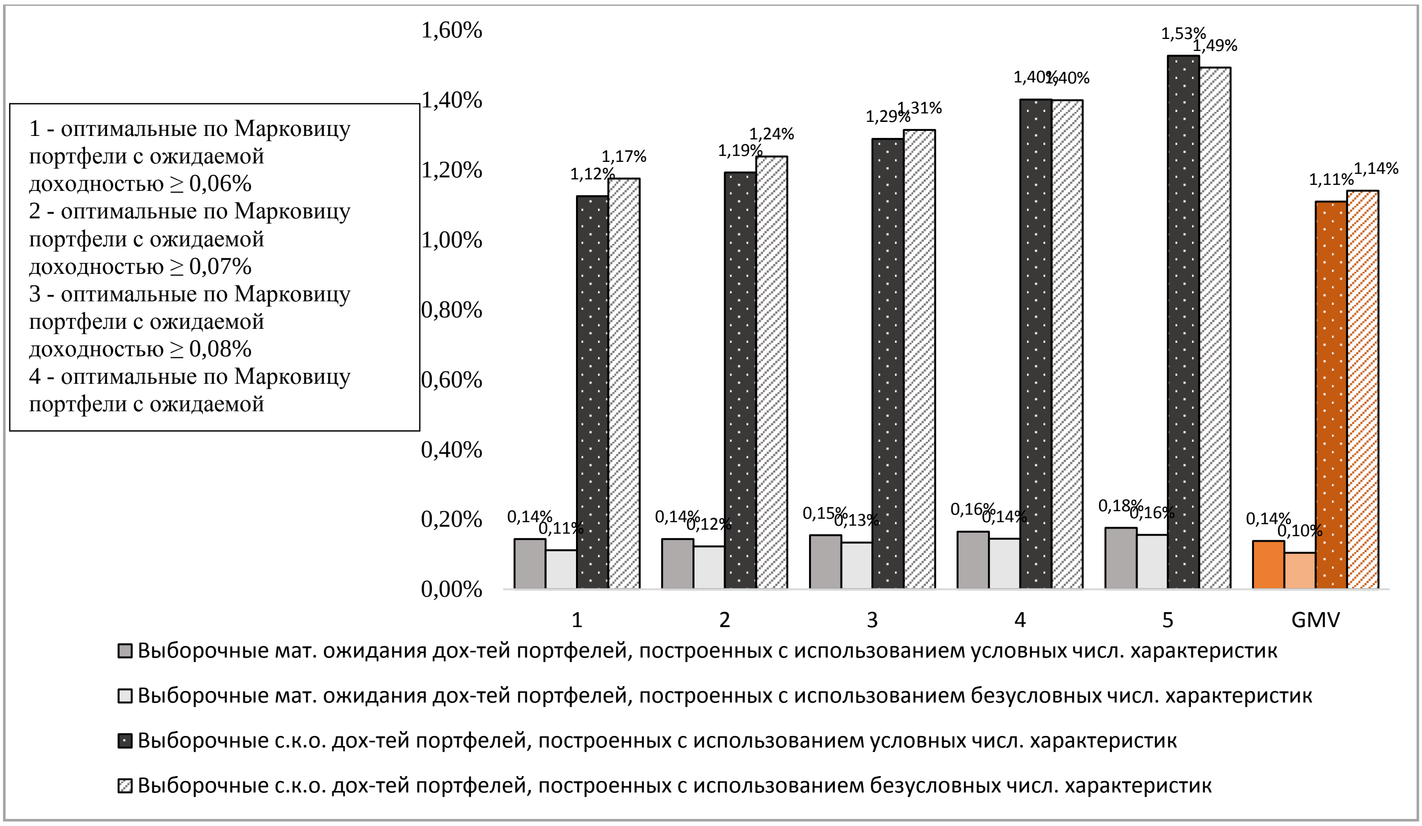

Рис. 14 *Выборочные математические ожидания и с.к.о. реальных доходностей построенных оптимальных портфелей*

Оптимальные портфели, построенные с использованием условных числовых характеристик, оцененных с помощью многомерной модели GARCH, в среднем приносят бóльшую ожидаемую доходность, чем оптимальные портфели, построенные с использованием безусловных числовых характеристик. Это касается как оптимальных портфелей, для которых была задана минимальная ожидаемая доходность, так и портфеля глобального минимума дисперсии.

Что касается выборочных с.к.о. доходностей, то оптимальные портфели, построенные с использованием условных числовых характеристик, оцененных с помощью многомерной модели GARCH, имеют меньшие выборочные с.к.о., чем оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием оценок безусловных числовых характеристик. Исключение составляет портфель, для которого было задано минимальное значение ожидаемой доходности, равное 0,10%: в данном случае выборочное стандартное отклонение портфеля, оптимизированного с использованием оценок безусловных числовых характеристик, меньше, чем у того, который был оптимизирован с использованием оценок условных числовых характеристик. Полученные результаты в соотносятся с результатами, полученными в работе [Pojarliev, Polasek, 2001].

Кроме того, с повышением уровня задаваемой минимальной ожидаемой доходности, разница между выборочными стандартными отклонениями доходностей портфелей, построенных с использованием оценок условных числовых характеристик, и портфелей, построенных с использованием оценок безусловных числовых характеристик, сокращается. Возможным объяснением является то, что оценки условных математических ожиданий доходностей индексов недостаточно точны. Это, в свою очередь, выявляется с ужесточением ограничений на значение их взвешенной суммы (ожидаемой доходности портфеля) при построении оптимального портфеля. Качество решения задачи оптимизации ухудшается – портфель имеет больший риск, чем в случае, когда его условное математическое ожидание было бы верно оценено.

К тому же, можно обратить внимание на то, что портфель глобального уровня дисперсии, построенный с использованием условных характеристик, имеет такое же выборочное математическое ожидание доходности, как и оптимальные портфели, для которых была задана минимальная ожидаемая доходность равная 0,06% и 0,07%. Сравнение графиков долей индексов в этих трех портфелях (Рис.8, 9, 13) позволяет сказать, что они имели разную структуру на протяжении рассматриваемого периода. В то же время, доходность портфеля глобального уровня дисперсии имеет наименьшее выборочное с.к.о. среди данных трех портфелей. Данный факт подтверждает предположение, сделанное ранее, о недостаточно точной оценке условных математических ожиданий доходностей индексов. Также данный результат соответствует выводу, сделанному авторами статьи [Chopra, Ziemba, 1993] о том, что оптимальные по Марковицу портфели, построенные только на оценках дисперсии портфеля, могут оказаться такими же прибыльными, как и оптимальные по Марковицу портфели, построенные с ограничениями, касающимися ожидаемой доходности портфеля, и иметь более низкий риск.

Выводы

На основе анализа реальных доходностей во время периода 07.07.2015-07.10.2015 построенных оптимальных портфелей можно сделать следующие выводы.

Оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием условных числовых характеристик, оцененных с помощью многомерной модели GARCH, в среднем приносят бóльшую доходность, чем оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием безусловных числовых характеристик.

Оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием условных числовых характеристик, оцененных с помощью многомерной модели GARCH, имеют меньшие выборочные с.к.о., чем оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием оценок безусловных числовых характеристик. Это касается оптимальных портфелей, имеющих невысокий заданный минимальный уровень ожидаемой доходности портфеля, и портфелей глобального минимума дисперсии. Данные факты могут служить подтверждением того, что действительно, при подобных условиях, использование условных числовых характеристик, смоделированных с помощью многомерной модели GARCH, при построении оптимального портфеля по модели Марковица позволяет уменьшить риск формируемого портфеля, по сравнению с портфелями, сформированными с использованием безусловных числовых характеристик. Однако, стоит помнить о том, что этот вывод применим только в том случае, если во временных рядах доходностей активов, включаемых в портфель, замечен эффект «кластеризации волатильности».

Также было выдвинуто предположение о недостаточно точной оценке условных математических ожиданий доходностей индексов. Подтверждением этого предположения является тот факт, что портфель глобального уровня дисперсии, построенный с использованием условных характеристик, имеет такое же выборочное математическое ожидание доходности, как и оптимальные портфели, для которых была задана минимальная ожидаемая доходность равная 0,06% и 0,07%, и наименьшее выборочное с.к.о.

Практические рекомендации

На основе сделанных выше выводов можно дать следующие практические рекомендации лицам, ответственным за построение портфеля ценных бумаг и управление им.

Построение портфеля, основанного на минимизации дисперсии (глобальный минимум) с использованием условных числовых характеристик, оцененных с помощью многомерной модели GARCH, предпочтительнее по сравнению с построением такого портфеля с использованием безусловных числовых характеристик, если для временных рядов доходностей активов, включаемых в портфель, замечен и подтвержден эффект «кластеризации волатильности». Данная рекомендация подтверждается как данным исследованием, так и многими научными статьями (см. например [Tse, Tsui, 1999; Fleming, Kirby, Ostdiek, 2001; Pojarliev, Polasek, 2001; Engle, Colacito, 2012; Becker, 2015]). Дать подобную рекомендацию относительно построения оптимальных по Марковицу портфелей, имеющих заданные минимальные значения ожидаемой доходности, не предоставляется возможным, поскольку результаты исследования противоречивы.

Однако вышеуказанная рекомендация также имеет ограничения. Во-первых, следует внимательно отнестись к процедуре выбора многомерной GARCH модели и оценки ее параметров. Тесты и проверки, которые необходимо произвести, прежде чем использовать модель, описаны в параграфе 2.2.

Во-вторых, построение портфеля глобального минимума дисперсии с использованием условных числовых характеристик, оцененных с помощью многомерной модели GARCH, предполагает постоянный пересмотр структуры портфеля, то есть активное управление. Данная стратегия управления портфелем подходит не всем инвесторам. Инвесторы, предпочитающие пассивные стратегии управления портфелем, должны рассмотреть другие способы построения портфеля ценных бумаг.

В-третьих, не каждый инвестор будет удовлетворен портфелем, имеющим наименьшую возможную дисперсию. Существуют индивиды, которые наоборот склонны к риску. Также некоторые инвесторы могут иметь некие требования к уровню ожидаемой доходности формируемого портфеля ценных бумаг, от которых они не могут отказаться. Так, например, управляющие ПИФом часто должны следить за тем, чтобы доходность ПИФа (который также можно рассматривать как некий портфель ценных бумаг) превышала значение бенчмарка. Очевидно, что к вышеописанным инвесторам рекомендация не относится.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена моделированию оптимального инвестиционного портфеля с применением многомерной модели условной гетероскедастичности (GARCH).

Цель работы заключалась в том, чтобы установить, можно ли за счет использования многомерной модели условной гетероскедастичности (GARCH) улучшить точность прогноза волатильности портфеля и, тем самым, уменьшить риск формируемого оптимального портфеля. Для достижения данной цели были поставлены и выполнены задачи исследования.

В первой главе был представлен анализ теоретических основ формирования оптимального портфеля. Было определено, что формирование оптимального инвестиционного портфеля, то есть нахождение сочетания активов, которое обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска, либо обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности, является одним из наиболее важных решений инвестора. В зависимости от выбранной стратегии управления портфелем инвестор решает эту задачу один раз за период инвестирования (пассивное управление) или же несколько раз в течение этого периода (активное управление).

Была рассмотрена модель формирования оптимального портфеля Гарри Марковица. Были выделены следующие ее достоинства:

1. Для построения портфеля нужно знать лишь выборочные математические ожидания доходностей и их ковариационную матрицу.
2. Задача построения оптимального портфеля по модели Г. Марковица является задачей квадратической оптимизации при линейных ограничениях, для решения которой существует большое количество инструментов (в том числе в составе программы Microsoft Excel).
3. Задача Г. Марковица по построению оптимального портфеля предполагает наличие явного аналитического решения, что позволяет анализировать поведение решения при изменении параметров задачи.

Также был отмечен вклад данной теории в развитие практики формирования инвестиционных портфелей.

В качестве недостатков модели Г. Марковица по построению оптимального портфеля были выделены:

1. Использование дисперсии доходности в качестве меры риска для инвестора, поскольку данная мера отражает как положительные, так и отрицательные изменения, в то время как многие инвесторы определяют риск как «возможность потерь». Данный недостаток исправляется с помощью использования альтернативных мер риска, таких как полудисперсия, VaR и CVaR, при решении задачи по построению оптимального портфеля. Однако, теоретических доказательств того, что использование альтернативных мер риска для построения портфеля действительно позволяет максимизировать ожидаемую полезность от вложений в него средств для инвестора, не существует;
2. Использование выборочных оценок безусловных характеристик доходностей. Данный подход не позволяет рассмотреть вектор доходностей в динамике, возможность автокорреляции доходностей и наличие эффекта «кластеризации волатильности».

Для решения последней проблемы учеными было предложено использование условных математических ожиданий и ковариационных матриц при решении задачи построения оптимального по Марковицу портфеля. Для моделирования условной ковариационной матрицы распространенным стало использование многомерных моделей GARCH, позволяющих учесть динамические связи между временными рядами доходностей активов, включенных в портфель. Эмпирические исследования [Pojarliev, Polasek, 2001; Gupta, Donleavy, 2006; Cha, Jithendranathan, 2009; Хабров В.В., 2012] показывают, что применение многомерной модели GARCH для прогнозирования условной ковариационной матрицы и использование последней для решения задачи построения оптимального по Марковицу портфеля приводит к тому, что сформированный портфель приносит большую доходность и имеет меньшую дисперсию, чем портфель, построенный с использованием выборочных оценок.

Во второй главе приведено описание и результаты эмпирического исследования по применению многомерной GARCH модели для построения оптимальных по Марковицу инвестиционных портфелей, включающих в себя индексы MSCI USA, MSCI China, MSCI Japan, MSCI Germany и ММВБ. Портфели были построены для инвесторов с разными предпочтениями относительно минимальной ожидаемой доходности, также был построен портфель точки глобального минимума дисперсии. Для сравнения приведено описание и результат построения оптимального инвестиционного портфеля с помощью выборочных числовых характеристик. Для того чтобы установить, действительно ли использование условных числовых характеристик, смоделированных с помощью многомерной модели GARCH, при построении оптимального портфеля по модели Марковица позволяет уменьшить риск формируемого портфеля, по сравнению с портфелями, сформированными с использованием безусловных числовых характеристик, был проведен анализ фактических доходностей построенных портфелей.

В результате исследования было установлено, что оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием многомерной модели GARCH, в среднем приносят большую доходность, чем оптимальные портфели, построенные с использованием выборочных оценок безусловных числовых характеристик. Также было установлено, что оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием условных числовых характеристик, оцененных с помощью многомерной модели GARCH, имеют меньшие выборочные с.к.о., чем оптимальные по Марковицу портфели, построенные с использованием оценок безусловных числовых характеристик. Это касается оптимальных портфелей, имеющих невысокий заданный минимальный уровень ожидаемой доходности портфеля, и портфелей глобального минимума дисперсии.

Данные результаты могут служить подтверждением того, что действительно, при построении оптимального портфеля по модели Марковица в подобных условиях, использование условных числовых характеристик, смоделированы при помощи многомерной модели GARCH, позволяет уменьшить риск формируемого портфеля, по сравнению с портфелями, сформированными с использованием безусловных числовых характеристик. Стоит помнить, однако, что этот вывод применим только в том случае, если во временных рядах доходностей активов, включаемых в портфель, замечен эффект «кластеризации волатильности».

На основе полученных результатов можно дать следующие практические рекомендации лицам, ответственным за построение портфеля ценных бумаг и управление им.

Построение портфеля, основанного на минимизации дисперсии (глобальный минимум) с использованием условных числовых характеристик, оцененных с помощью многомерной модели GARCH, предпочтительнее по сравнению с построением такого портфеля с использованием безусловных числовых характеристик, если для временных рядов доходностей активов, включаемых в портфель, замечен и подтвержден эффект «кластеризации волатильности». Сделать подобную рекомендацию относительно построения оптимальных по Марковицу портфелей, имеющих заданные минимальные значения ожидаемой доходности, не предоставляется возможным на основе результатов, полученных в ходе выполнения данной работы, поскольку они неоднозначны.

Однако вышеуказанная рекомендация также имеет ограничения. Она предполагает постоянный пересмотр структуры портфеля, иначе говоря, активное управление инвестиционным портфелем. Инвесторы, предпочитающие пассивные стратегии управления портфелем, должны рассмотреть другие способы построения портфеля ценных бумаг. К тому же, не каждый инвестор будет удовлетворен портфелем, имеющим наименьшую возможную дисперсию. К таким инвесторам относятся индивиды, которые склонны к риску, а также инвесторы, которые несут обязательства по обеспечению некоторого определенного уровня доходности портфеля ценных бумаг, от которых они не могут отказаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боди З. Финансы / З. Боди, Р. Мертон. - 1-е изд. – М. [и др.] : Вильямс, 2007. - 592 с.
2. Брейли Р. Принципы корпоративных финансов / Р. Брейли, С. Майерс. - 2-е изд. – М. : Олимп-Бизнес, 2008. - 1008 с.
3. Дамодаран, А. Стратегический риск-менеджмент: принципы и методики / А. Дамодаран. – 1-е изд. – М.: Вильямс, 2010. – 496 с.
4. Дудов С. И. Оптимальное портфельное инвестирование // Учебное пособие для студентов экон.-мат. специальностей/ С.И. Дудов. – 2008. – С. 59.
5. Коваль Л. Обойдемся без Уолл-стрит [Электронный ресурс] // Ведомости. – 2014. – 12 декабря. – М.: АО Бизнес Ньюс Медиа, 2014. – Режим доступа: http://www.vedomosti.ru/finance/articles/2014/12/12/obojdemsya-bez-uoll-strit. – Загл. с экрана. (15.04.2016)
6. Окулов В.Л. Управление рисками: основы теории и практика применения / В.Л. Окулов. - Санкт-Петербург : Высшая Школа Менеджмента, 2015.
7. Фонды ETF на Московской Бирже [Электронный ресурс] // Сайт Московской Биржи. – Московская Биржа, [2011-2016]. – Режим доступа: http://moex.com/s221. – Загл. с экрана. (15.04.2016)
8. Хабров В.В. Оптимизация управления инвестиционным портфелем на основе моделей векторных авторегрессий и моделей многомерной волатильности / В.В. Хабров // Прикладная эконометрика. – 2012. – № 4. – С. 35-62.
9. Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Д. Бэйли. – 5-е изд. – М.: Инфра-М, 2003. – 1028 с.
10. Amenc N. Practitioner portfolio construction and performance measurement: Evidence from Europe / N. Amenc, F. Goltz, A. Lioui // Financial Analysts Journal. – 2011. – Vol. 67, N. 3. – P. 39-50.
11. Agapova A. Conventional mutual index funds versus exchange-traded funds / A. Agapova // Journal of Financial Markets. – 2011. – Vol. 14, N. 2. – P. 323-343.
12. Andersen T. G. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts / T. G. Andersen, G. Torben, T. Bollerslev // International Economic Review. – 1998 – P. 885-905.
13. Becker R. Selecting volatility forecasting models for portfolio allocation purposes / R. Becker et al. // International Journal of Forecasting. – 2015. – Vol. 31, N. 3. – P. 849-861.
14. Bennett P. The international transmission of stock prices disruption in October 1987 / P. Bennett, J. Kelleher // Quarterly Review. – 1988. – N. Summer. – P. 17-33.

15. Best M. J. On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results / M. J. Best, R. R. Grauer // Review of Financial Studies. – 1991. – Vol. 4, N. 2. – P. 315-342.
16. Bogle J. C. An index fund fundamentalist / J. C. Bogle // The Journal of Portfolio Management. – 2002. – Vol. 28, N 3. – P. 31-38.
17. Bollerslev T. Capital asset pricing model with time-varying covariances / T. Bollerslev, R. F. Engle, J. M. Wooldridge // The Journal of Political Economy. – 1988. – Vol. 96, N. 1. – P. 116-131.
18. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity / T. Bollerslev // Journal of econometrics. – 1986. – Vol. 31, N. 3. – P. 307-327.
19. Brooks, C. Introductory Econometrics for Finance / Chris Brooks. – 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 648 p.
20. Carhart M. M. On persistence in mutual fund performance / M.M. Carhart // The Journal of finance. – 1997. – Vol. 52, N. 1. – P. 57-82.
21. Cha H. J. Time - varying correlations and optimal allocation in emerging market equities for the US investors / H.J. Cha, T. Jithendranathan // International Journal of Finance & Economics. – 2009. – Vol. 14, N. 2. – P. 172-187.
22. Chopra V. K. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice / V. K. Chopra, W. T. Ziemba // Journal of Portfolio Management. – 1993. – Vol. 9, – P. 6-11.
23. DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? / V. DeMiguel, L. Garlappi, R. Uppal //Review of Financial Studies. – 2009. – Vol. 22, N. 5. – P. 1915-1953.
24. Elton E. J. The persistence of risk-adjusted mutual fund performance / E. J. Elton, M. J. Gruber, C. R. Blake // The Journal of Business. – 1995. – Vol. 69, N 2. (Apr., 1996) – P. 133-157.
25. Engle R. GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics / R. Engle // The Journal of Economic Perspectives. – 2001. – Vol. 15, N. 4. – P. 157-168.
26. Engle R. F. Multivariate simultaneous generalized ARCH / R. F. Engle, K. F. Kroner // Econometric theory. – 1995. – Vol. 11, N 01. – P. 122-150.
27. Engle R. F. Testing and valuing dynamic correlations for asset allocation / R. F. Engle, R. Colacito // Journal of Business & Economic Statistics. – 2012. – Vol. 24, N 02. – P. 238-253.
28. Engle R. F. Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation

multivariate GARCH / R.F. Engle, K. Sheppard // National Bureau of Economic Research – 2001. – Working Paper 8554.
29. Estrada J. Mean-semivariance optimization: A heuristic approach / J. Estrada //Journal of Applied Finance. – 2008. – Vol. 18, N. 1. – P. 57-72.
30. Evstigneev I. Mathematical Financial Economics: A Basic Introduction / Igor Evstigneev, T. Hens, K. R. Schenk-Hoppé. – Springer, 2015. – 224 p.
31. Fabozzi Frank J. The legacy of modern portfolio theory / F. J. Fabozzi, F. Gupta, H. M. Markowitz // The Journal of Investing. – 2002. – Vol. 11, N.3. – P. 7-22.
32. Fabozzi, Frank J. The Theory and Practice of Investment Management / F. J. Fabozzi, H. M. Markowitz. – 2nd ed. – Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2011. – 704 p.
33. Fleming J. The economic value of volatility timing / J. Fleming, C. Kirby, B. Ostdiek // The Journal of Finance. – 2001. – Vol. 56, N 1. – P. 329-352.
34. Gupta R. Benefits of diversifying investments into emerging markets with time-varying correlations: An Australian perspective / R. Gupta, G. D. Donleavy // Journal of Multinational Financial Management. – 2009. – Vol. 19, N 2. – P. 160-177.
35. Harper J. T. Performance comparison between exchange-traded funds and closed-end country funds / J. T. Harper, J. Madura, O. Schnusenberg // Journal of International Financial Markets, Institutions and Money. – 2006. – Vol. 16, N. 2. – P. 104-122.
36. Kaplan P. D. Frontiers of modern asset allocation / P. D. Kaplan. – 1st ed. - John Wiley & Sons, 2012. - 384 p.
37. Kaplanis E. C. Stability and forecasting of the co-movement measures of international stock market returns / E.C. Kaplanis // Journal of International Money and Finance. – 1988. – Vol. 7, N. 1. –P. 63-75.
38. King M. Volatility and links between national stock markets / M. King, E. Sentana, S. Wadhwani // National Bureau of Economic Research. – 1990. – N. w3357.
39. Kirby C. It's all in the timing: simple active portfolio strategies that outperform naive diversification / C. Kirby, B. Ostdiek //Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 2012. – Vol. 47, N. 02. – P. 437-467.
40. Koch P. D. Evolution in dynamic linkages across daily national stock indexes / P.D. Koch, T. W. Koch // Journal of International Money and Finance. – 1991. – Vol. 10, N. 2. – P. 231-251.
41. Krokhmal P., Palmquist J., Uryasev S. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints / P. Krokhmal, J. Palmquist, S. Uryasev //Journal of risk. – 2002. – Vol. 4. – P. 43-68.

42. Malkiel B. G. Returns from investing in equity mutual funds 1971 to 1991 / B. Malkiel // The Journal of finance. – 1995. – Vol. 50, N. 2. – P. 549-572.
43. Markowitz H. Nobel Prize Lecture: Foundations of Portfolio Theory [Electronic resource] // Сайт Nobel Foundation. − Nobel Foundation, [2016]. − Режим доступа: http://www.nobelprize.org/ − Загл. с экрана. (01.05.2016).
44. Markowitz H. M. Portfolio selection / H. M. Markowitz // The Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, N 1. – P. 77-91.
45. Michaud R. O. The Markowitz optimization enigma: is 'optimized' optimal? / R. O. Michaud // Financial Analysts Journal. – 1989. – Vol. 45, N 1. – P. 31-42.
46. Miralles-Marcelo J. L. Multivariate GARCH models and risk minimizing portfolios: The importance of medium and small firms / J. L. Miralles-Marcelo, J.L. Miralles-Quirós, M. del Mar Miralles-Quirós // The Spanish Review of Financial Economics. – 2013. – Vol. 11, N. 1. –P. 29-38.
47. OECD Economic Surveys Japan 2015 [Electronic resource] // Сайт OECD. – Organisation for Economic Co-operation and Development, [2016]. – Режим доступа: http://www.oecd.org/. – Загл. с экрана. (03.05.2016)
48. Pojarliev M. Applying multivariate time series forecasts for active portfolio management / M. Pojarliev, W. Polasek // Financial Markets and Portfolio Management. – 2001. – Vol. 15, N. 2. – P. 201-211.
49. Similarities between ETFs and Mutual Funds [Electronic resource] // Сайт iShares. – BlackRock, Inc. [2016]. − Режим доступа: https://www.ishares.com/us/about-etfs/what-is-an-etf/comparing-etfs-and-mutual-funds − Загл. с экрана. (15.04.2016).
50. Sharpe W. F. The arithmetic of active management /W. F. Sharpe //Financial Analysts Journal. – 1991. – Vol. 47, N. 1. – P. 7-9.
51. Tse Y. K. A note on diagnosing multivariate conditional heteroscedasticity models / Y. K. Tse, A. K.C. Tsui //Journal of time series analysis. – 1999. – Vol. 20, N. 6. – P. 679-691.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Описание алгоритма проведения теста на наличие ARCH-эффекта

В данной работе данный тест был проведен с помощью эконометрического пакета EViews 8. Алгоритм проведения теста следующий:

1. Выбрать на ленте пункт Quick→Estimate equation

2. В поле Equation Specification записать уравнение модели временного ряда. Например, в данной работе для временного ряда дневных доходностей индекса MSCI China (переменная названа china) запись выглядит следующим образом: china c (c обозначает константу).

3. Остальные параметры в окне оставить неизменными→OK

4. Выбрать в ленте пункт View→Residual Diagnostics→Heteroskedasticity tests…

5. В появившемся окне в разделе Test type выбрать ARCH→OK

6. Основной гипотезой является отсутствие ARCH-эффекта. Если значение Prob. F выше заданного уровня значимости (обычно 1%, 5% или 10%), то основная гипотеза принимается и делается вывод о том, что условная дисперсия инноваций постоянна. В противном случае делается вывод о том, что условная дисперсия инноваций непостоянна (присутствует ARCH-эффект).

Приложение 2. Значения критерия Акаике для моделей BEKK GARCH

Значение информационного критерия	BEKK GARCH (1,1)	BEKK GARCH (1,2)
AIC	-30.43150	-30.4213

Приложение 3. Алгоритм оценки параметров диагональной BEKK GARCH модели в EViews 8

1. Выделение временных рядов доходностей, для которых оценивается модель;
2. Кликнув правой кнопкой мыши выбрать Open → As System. На данном шаге следует указать модель для случайного вектора доходностей. Поскольку программа EViews по умолчанию предполагает модель вида (16), следует оставить все поля без изменений и кликнуть OK;
3. В открывшемся новом окне выбрать Proc → Estimate для оценки параметров модели для условной ковариационной матрицы;
4. В открывшемся окне в поле Estimation method выбрать ARCH – Conditional Heteroscedasticity из выпадающего списка. В поле Model type выбрать Diagonal BEKK. В полях ARCH и GARCH устанавливаются значения порядка модели q и p соответственно. В данной работе была рассмотрена модель BEKK GARCH (1,1), как указывалось выше. Также следует выбрать закон распределения случайного вектора инноваций в поле Error Distribution. В данной работе, как говорилось ранее, предполагается многомерное нормальное распределение (Multivariate Normal). Для начала оценки параметров нажать кнопку OK;
5. В новом открывшемся окне Estimation output будут представлены оценки матриц параметров M, A, B для модели условной ковариационной матрицы, а также параметров $c_{1,\dots,5}$ для модели случайного вектора доходностей.

Приложение 4. Графики фактических доходностей оптимальных портфелей

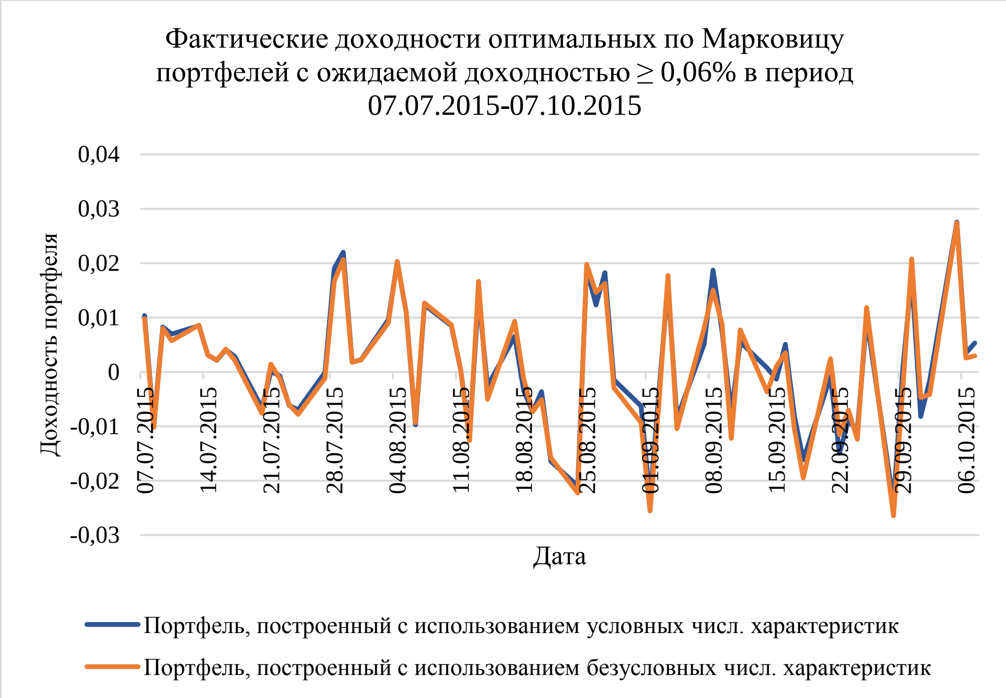

Рис. 1 *График фактических доходностей оптимальных по Марковицу портфелей с ожидаемой доходностью ≥ 0,06% в период 07.07.2015-07.10.2015*

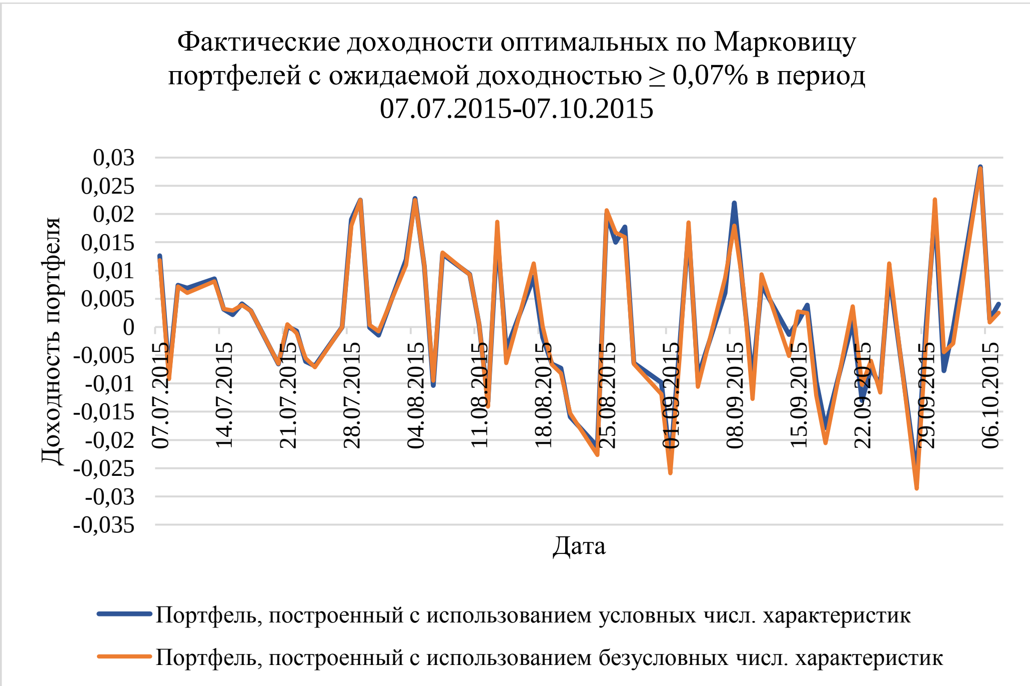

Рис. 2 *График фактических доходностей оптимальных по Марковицу портфелей с ожидаемой доходностью ≥ 0,07% в период 07.07.2015-07.10.2015*

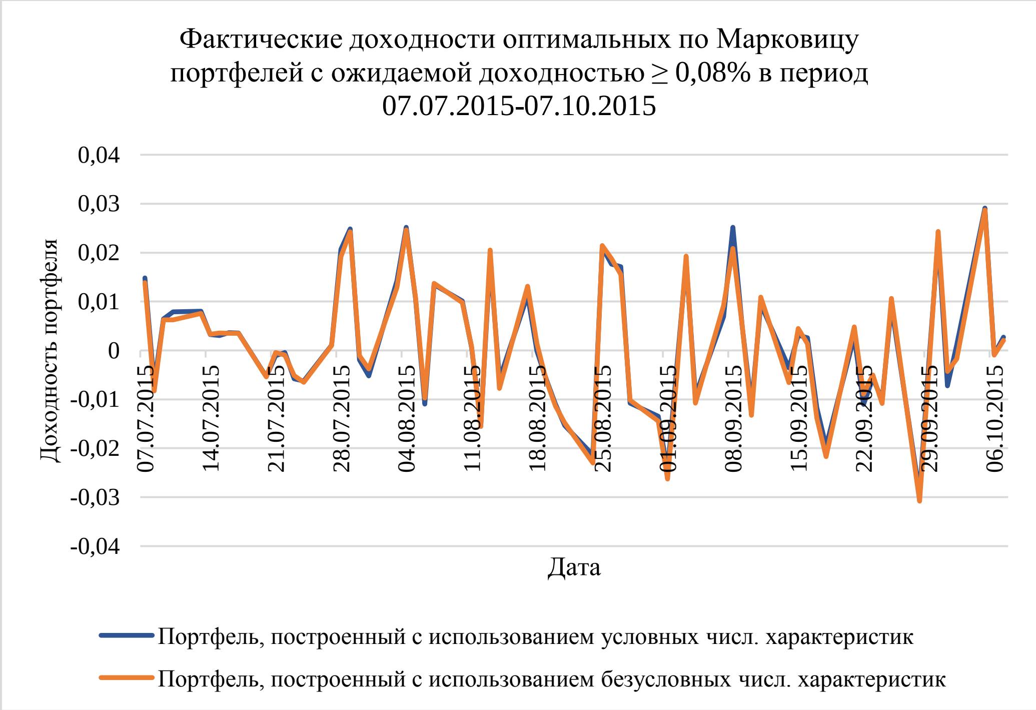

Рис. 3 *График фактических доходностей оптимальных по Марковицу портфелей с ожидаемой доходностью ≥ 0,08% в период 07.07.2015-07.10.2015*

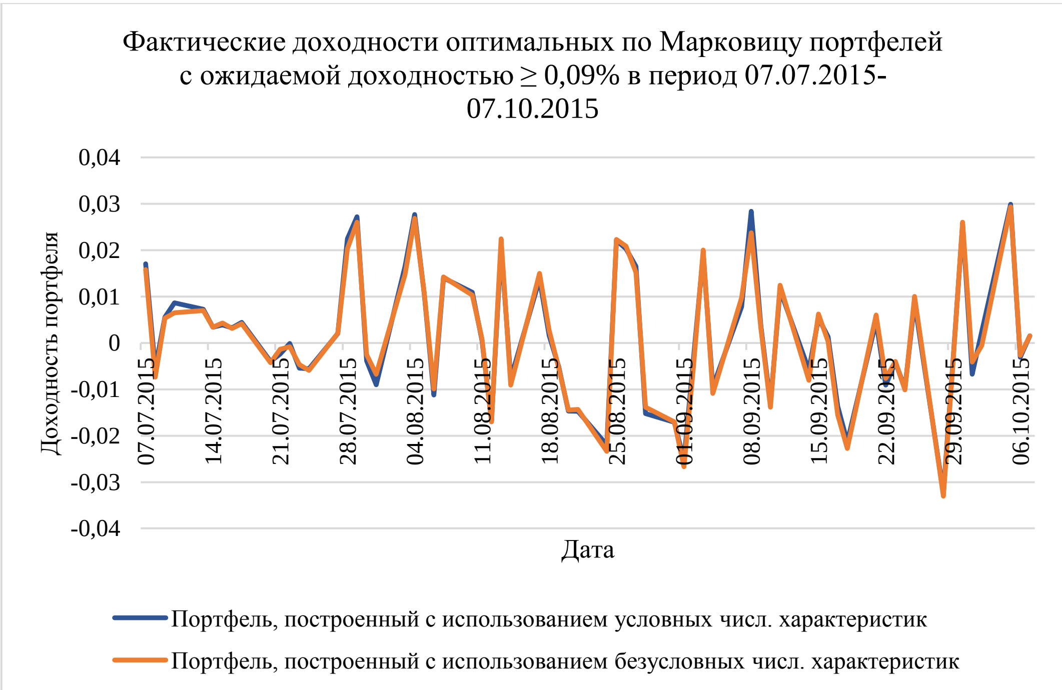

Рис. 4 *График фактических доходностей оптимальных по Марковицу портфелей с ожидаемой доходностью ≥ 0,09% в период 07.07.2015-07.10.2015*

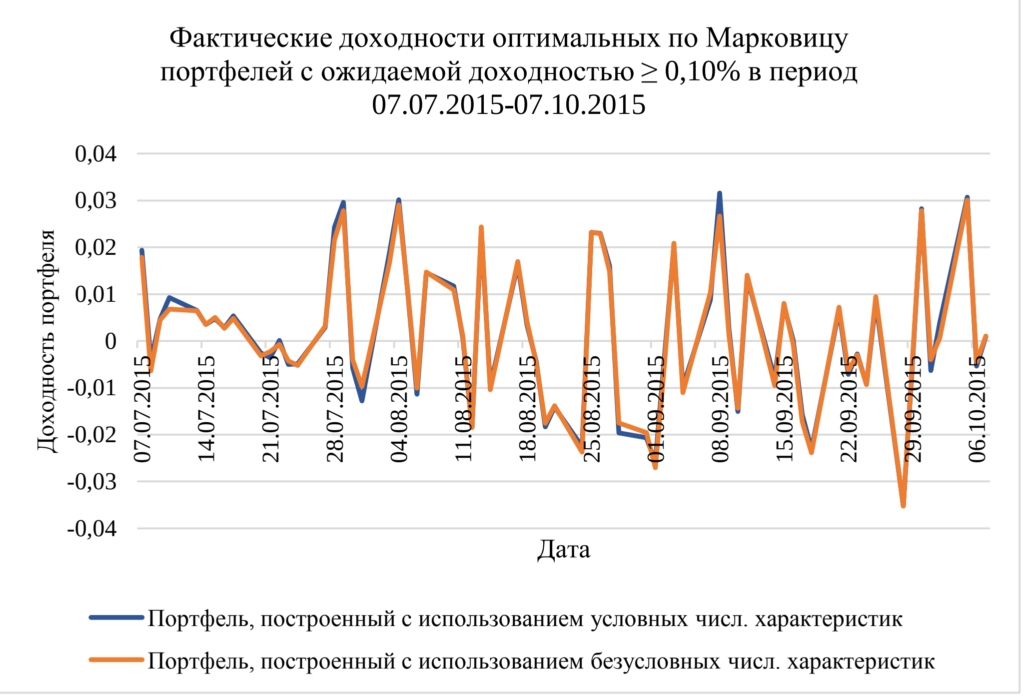

Рис. 5 *График фактических доходностей оптимальных по Марковицу портфелей с ожидаемой доходностью ≥ 0,10% в период 07.07.2015-07.10.2015*

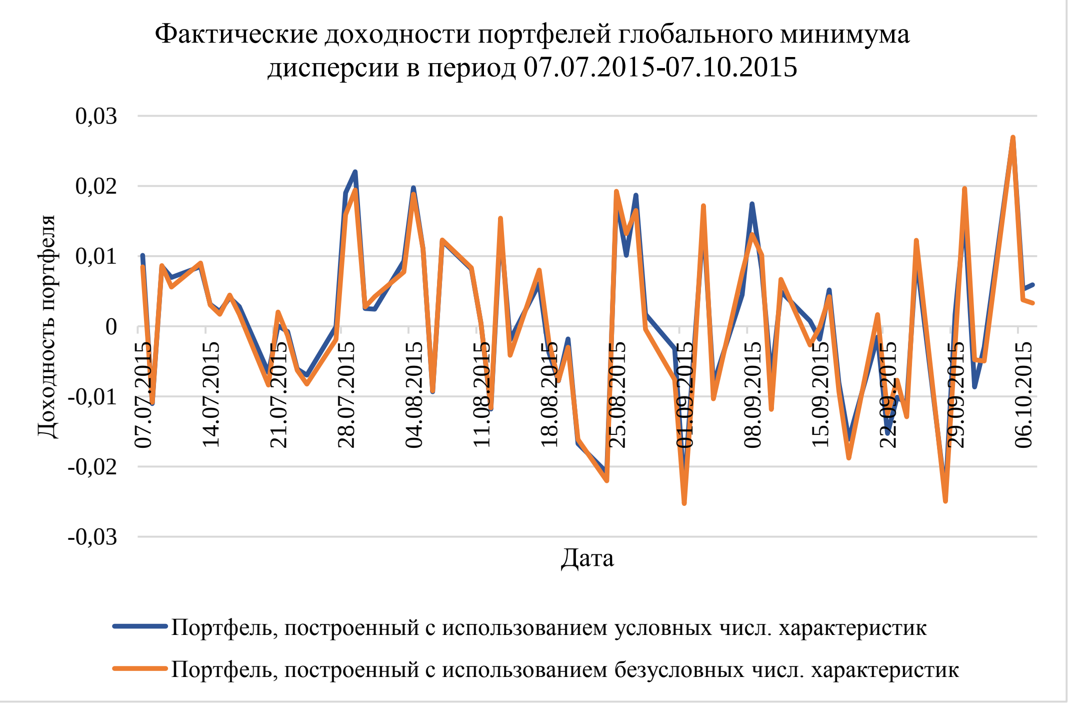

Рис. 6 *График фактических доходностей портфелей глобального минимума дисперсии в период 07.07.2015-07.10.2015*