УДК 519.178 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2021. Т. 17. Вып. 4
MSC 91B38

Точные штрафные функции в задаче выбора оптимального оптового заказа в условиях быстрого колебания спроса*

В. М. Буре, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Буре В. М., Карелин В. В., Полякова Л. Н.* Точные штрафные функции в задаче выбора оптимального оптового заказа в условиях быстрого колебания спроса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 397–408.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.408

Рассматривается задача выбора оптимальной стратегии поведения торговой фирмы в рамках максиминного подхода, когда возможен ажиотажный спрос (rush demand). В одной из работ авторов исследовалась близкая по постановке задача выбора оптимальной стратегии поведения торговой фирмы, в которой маркетинговые исследования прогнозировали резкое падение спроса. В этой статье описывается другая ситуация на рынке, когда возникает ажиотажный спрос на новый товар с последующим резким падением спроса после достижения насыщения на некотором промежутке времени $[0, T]$. Необходимость изучения такой схемы оптового заказа связана с тем, что, во-первых, склады торговой фирмы имеют ограниченный объем и не могут вместить весь заказанный объем товара; во-вторых, производитель не может предложить сразу всю заказанную партию товара, так как не весь товар может быть произведен в начальный (нулевой) момент времени, сразу после поступления заказа. Предложена математическая модель, позволяющая выбрать оптимальную стратегию заказа торговой фирмы в условиях ажиотажного роста спроса на новый товар в промежутке времени τ_1, τ_2 в некоторый неизвестный момент времени, а также время $\tau_* \in [\tau_3, \tau_4]$ последующего резкого падения спроса в промежутке времени $[\tau_3, \tau_4]$ в связи с насыщением рынка новым товаром. Приведены четыре возможных варианта оптимизационных задач. Для их решения разработан метод точных штрафных функций. Безусловно, описанная задача может быть решена и другими максиминными методами.

Ключевые слова: уровень запаса товара, случайный спрос, дефицит товара, ажиотажный спрос, скидка, максимин, метод точных штрафных функций.

1. Введение. В данной работе будем считать, что спрос на товар носит постоянный характер (константа) на некотором промежутке времени $[0, \tau^*]$. В момент времени $\tau^* \in [\tau_1, \tau_2]$ спрос на новый товар становится ажиотажным, моменты времени τ_1, τ_2 известны. Подобная ситуация вполне возможна, если продается новый товар, ранее не известный покупателям. Маркетинговые исследования позволяют с высокой степенью уверенности предположить, что через некоторое время возникнет очень высокий спрос на новый товар, который сохранится в течение некоторого времени, после чего произойдет резкое падение спроса в связи с достижением уровня насыщения рынка. Примем, что можно указать границы возникновения повышенного спроса, а именно моменты времени τ_1, τ_2. Далее, в некоторый момент времени $\tau_* \in [\tau_3, \tau_4]$ произойдет резкое падение спроса. Будем предполагать, что в результате маркетин-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-0108).

говых исследований можно указать границы промежутков, т. е. моменты времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, причем $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < T$.

В работе [1] изучалась близкая по постановке задача, в которой маркетинговые исследования прогнозировали резкое падение спроса. В этой статье рассматривается другая ситуация на рынке, когда возникает ажиотажный спрос на новый товар с последующим резким падением спроса. Торговая фирма использует двухступенчатую схему оптового заказа товара. Весь заказанный у фирмы-производителя товар делится на две части. Первая партия товара поступает сразу, она должна быть продана в течение некоторого промежутка времени $[0, T_1]$. Вторая партия товара поставляется в конечный момент времени T_1. Однако на промежутке времени $[T_1, T]$ она также продается, но со скидкой.

Моменты времени T_1 и T выбираются торговой фирмой из условия максимизации дохода фирмы в рамках рассматриваемой модели спроса на реализуемый товар. Целесообразность применения двухступенчатой схемы оптового заказа связана с ограниченным объемом складов и расходами на хранение товара, а также с тем, что производство всего заказанного товара требует значительных финансовых средств, выплачиваемых торговой фирмой фирме-производителю товара. Кроме того, могут быть ограничения, обусловленные производственными мощностями фирмы-производителя. Будем считать, что в момент времени T_1 торговая фирма полностью продаст первую партию товара и получит средства, часть которых она сможет выплатить фирме-производителю. В момент времени T происходит завершение полной реализации всего закупленного товара. Выбор моментов времени T_1 и T с учетом предположений о характере спроса позволяет определить объем первой партии заказанного товара и общий объем всего заказанного у производителя товара. Близкие по постановке задачи рассматривались в работах [2–17].

Введем следующие обозначения: c — закупочная цена единицы товара у производителя; $p(p > c)$ — цена единицы товара для покупателя в магазине торговой фирмы; s — скидка, предоставляемая покупателю при покупке единицы товара при дефиците товара (товар поставляется покупателю позже); T_1 — момент времени, когда первая партия товара реализована; T — момент времени поступления второй партии товара; τ^* — момент резкого увеличения спроса, $\tau^* \in [\tau_1, \tau_2]$; τ_* — момент резкого падения спроса, $\tau_* \in [\tau_3, \tau_4]$; $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ — известные константы, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < T$; h — уровень ажиотажного спроса; l_1 — начальный уровень спроса до возникновения ажиотажного спроса $l_1 \ll h$; l_2 — уровень спроса после прекращения ажиотажного спроса $l_2 \ll l_1 \ll h$; Q — общий объем всего заказанного у производителя товара; Q_1 — объем первой партии товара; Q_2 — объем второй партии товара; $Q_1^{(\max)}$ — максимально возможный объем первой партии товара; $Q_1^{(\min)}$ — минимально возможный объем первой партии товара; $Q_2^{(\max)}$ — максимально возможный объем второй партии товара; $Q_2^{(\min)}$ — минимально возможный объем второй партии товара; $M(t)$ — текущий уровень запаса товара (дефицита товара); $D(t)$ — мгновенный спрос на товар; V — потери, связанные с дефицитом товара в торговой фирме; $TP(T_1, T)$ — усредненный доход торговой фирмы.

2. Постановка задачи и основные результаты. Будем предполагать, что функция спроса на товар имеет следующий вид:

$$D(t) = \begin{cases} l_1, & t < \tau^*, \\ h, & \tau^* \leqslant t \leqslant \tau_*, \\ l_2, & \tau_* < t, \end{cases} \quad 0 < l_2 \ll l_1 \ll h.$$

Таким образом, спрос в момент времени τ^* резко возрастает с уровня l_1 на уровень h и далее в момент времени τ_* падает до самого низкого уровня l_2, который может быть практически равен нулю. Уровень запаса $M(t)$ для $t \in [0, \min(\tau^*, T_1)]$ определяется дифференциальным соотношением

$$\frac{dM(t)}{dt} = -D(t) = -l_1$$

при обязательном выполнении условия

$$M(T_1) = 0.$$

Следовательно, для $t \in [0, \min(\tau^*, T_1)]$ справедливо равенство

$$M(t) = -l_1 t + Q_1.$$

Из равенства $M(T_1) = 0$ при условии $T_1 < \tau^*$ имеем

$$Q_1 = l_1 T_1.$$

Из формулировки задачи следует, что должно выполняться неравенство

$$Q_1^{(\min)} \leqslant Q_1 \leqslant Q_1^{(\max)}.$$

Предположим, что

$$l_1 \tau_1 < Q_1^{(\min)}.$$

Очевидно, что в этом случае должно выполняться неравенство $T_1 > \tau_1$.

Исходя из экономической природы задачи, с учетом требования сбалансированности объемов двух партий товара, последнее неравенство необходимо дополнить еще одним условием. В результате приходим к неравенству, которое вытекает из содержательной экономической формулировки задачи:

$$\tau_1 < T_1 < \tau_2. \tag{1}$$

Его выполнение нужно для сбалансированности двух партий товара, так как моменты времени T_1 и T полностью определяют объем партий товара. Неформальная постановка задачи заключается в том, чтобы выбрать эти моменты времени из условия максимизации дохода торговой фирмы при обязательном выполнении неравенства (1). Далее будем считать, что выполнены следующие неравенства:

$$0 < \tau_1 < T_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < T.$$

Потери, связанные с недопоставкой (дефицитом) товара на промежутке $[t_1, T]$, определяются функцией

$$V(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = sQ_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T),$$

где

$$Q_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = l_1(\tau^* - T_1)_+ + h(\tau_* - \tau^*) + l_2(T - \tau_*),$$

$$(\tau^* - T_1)_+ = \begin{cases} 0, & \tau^* < T_1, \\ \tau^* - T_1 & \tau^* \geqslant T_1. \end{cases}$$

Усредненный доход торговой фирмы рассчитываем по выражению

$$TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = \frac{1}{T}\left\{(p-c)Q(\tau^*, \tau_*, T_1, T) - V(\tau^*, \tau_*, T_1, T)\right\},$$

в котором

$$Q(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = Q_1(\tau^*, \tau_*, T_1, T) + Q_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T),$$
$$Q_1(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = l_1 \min(\tau^*, T_1) + h(T_1 - \tau^*)_+.$$

Следовательно,

$$TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = \frac{1}{T}\left\{(p-c)(Q_1(\tau^*, \tau_*, T_1, T) + Q_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T)) - sQ_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T)\right\} =$$

$$= \frac{1}{T}\left\{(p-c)Q_1(\tau^*, \tau_*, T_1, T) + (p-c-s)Q_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T)\right\}.$$

Также выполнены ограничения

$$\begin{gathered} Q_1^{(\min)} \leqslant Q_1(\tau^*, \tau_*, T_1, T) \leqslant Q_1^{(\max)}, \\ Q_2^{(\min)} \leqslant Q_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T) \leqslant Q_2^{(\max)}, \\ 0 < \tau_1 < T_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < T. \end{gathered}$$

Распишем более детально функции $Q_1(\tau^*, \tau_*, T_1, T)$ и $Q_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T)$.

Если $\tau^* < T_1$, то

$$\min(\tau^*, T_1) = \tau^*, \ (T_1 - \tau^*)_+ = T_1 - \tau^*, \ \max(\tau^*, T_1) = T_1.$$

Пусть $\tau^* \geqslant T_1$, тогда

$$\min(\tau^*, T_1) = T_1, \ (T_1 - \tau^*)_+ = 0, \ \max(\tau^*, T_1) = \tau^*.$$

Таким образом, имеем систему

$$Q_1(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = \begin{cases} l_1\tau^* + h(T_1 - \tau^*), & \tau^* < T_1, \\ l_1 T_1, & \tau^* \geqslant T_1, \end{cases}$$

$$Q_2(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = \begin{cases} h(\tau_* - T_1) + l_2(T - \tau_*), & \tau^* < T_1, \\ l_1(\tau_* - T_1) + h(\tau_* - \tau^*) + l_2(T - \tau_*), & \tau^* \geqslant T_1. \end{cases}$$

Если $\tau^* < T_1$, то $TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T)$ запишем в виде

$$TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = \frac{1}{T}\left\{(p-c)(l_1\tau^* + h(T_1 - \tau^*)) + (p-c-s)(h(\tau_* - T_1) + l_2(T - \tau_*))\right\}.$$

Если $\tau^* \geqslant T_1$, то находим, что

$$TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = \frac{1}{T}\left\{(p-c)l_1 T_1 + (p-c-s)(l_1(\tau_* - T_1) + h(\tau_* - \tau^*) + l_2(T - \tau_*))\right\}.$$

Отсюда при $\tau^* < T_1$ имеем уравнение

$$TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = \frac{1}{T}\left\{\tau^*(p-c)(l_1 - h) + \tau_*(p-c-s)(h - l_2) + \right.$$

$$+ (p-c)hT_1 + (p-c-s)l_2T\} .$$

Если $\tau^* \geqslant T_1$, то получим, что

$$TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T) = \frac{1}{T}\{\tau^* h(c+s-p) + \tau_*(p-c-s)(l_1 - l_2 + h) +$$

$$+ sl_1T_1 + (p-c-s)l_1T\} .$$

Пусть $\tilde{\tau}^*, \tilde{\tau}_*$ — решения минимизационной задачи

$$\min_{\substack{\tau^* \in [\tau_1, \tau_2] \\ \tau_* \in [\tau_3, \tau_4]}} TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T). \tag{2}$$

Введем множество

$$\mathfrak{T} = \left\{ (T_1, T) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{array}{c} Q_1^{(\min)} \leqslant l_1 \min(\tilde{\tau}^*, T_1) + h(T_1 - \tilde{\tau}^*)_+ \leqslant Q_1^{(\max)}, \\ Q_2^{(\min)} \leqslant l_1(\tilde{\tau}^* - T_1)_+ + h(\tilde{\tau}_* - \tilde{\tau}^*) + l_2(T - \tilde{\tau}_*) \leqslant Q_2^{(\max)}, \\ 0 < \tau_1 < T_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < T \end{array} \right\}.$$

В рамках построенной модели можно сформулировать оптимизационную задачу для выбора оптимальных моментов времени T_1 и T следующего вида:

$$\max_{(T_1, T) \in \mathfrak{T}} TP(\tilde{\tau^*}, \tilde{\tau}_*, T_1, T). \tag{3}$$

Решение оптимизационных задач (2), (3) приводит к максиминному выбору моментов времени T_1 и T.

Заметим, что функция $TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T)$ при фиксированных T_1 и T линейна по τ^* и τ_*. Следовательно, минимум линейной функции $TP(\tau^*, \tau_*, T_1, T)$ при линейных ограничениях $\tau^* \in [\tau_1, \tau_2]$, $\tau_* \in [\tau_3, \tau_4]$ достигается в крайних точках изучаемых отрезков. Рассмотрим четыре возможных варианта.

Пусть $\tilde{\tau}^* = \tau_1$, $\tilde{\tau}_* = \tau_3$ и $\tau_1 < T_1$. В таком случае имеем

$$TP(\tau_1, \tau_3, T_1, T) = \frac{1}{T}\{\tau_1(p-c)(l_1 - h) + \tau_3(p-c-s)(h - l_2) +$$

$$+ (p-c)hT_1 + (p-c-s)l_2T\} ,$$

$$\mathfrak{T}_1 = \left\{ (T_1, T) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{array}{c} Q_1^{\min} \leqslant l_1 \min(\tau_1, T_1) + h(T_1 - \tau_1)_+ \leqslant Q_1^{(\max)}, \\ Q_2^{(\min)} \leqslant l_1(\tau_1 - T_1)_+ + h(\tau_3 - \tau_1) + l_2(T - \tau_3) \leqslant Q_2^{(\max)}, \\ 0 < \tau_1 < T_1 < \tau_3 < T, \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (T_1, T_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{array}{c} Q_1^{(\min)} \leqslant l_1\tau_1 + h(T_1 - \tau_1) \leqslant Q_1^{(\max)}, \\ Q_2^{(\min)} \leqslant h(\tau_3 - \tau_1) + l_2(T - \tau_3) \leqslant Q_2^{(\max)}, \\ 0 < \tau_1 < T_1 < \tau_3 < T \end{array} \right\}.$$

Таким образом, в этом случае необходимо максимизировать на плоскости непрерывно дифференцируемую функцию при наличии линейных ограничений, т. е. решить оптимизационную задачу

$$\max_{(T_1, T) \in \mathfrak{T}_1} TP(\tau_1, \tau_3, T_1, T). \tag{4}$$

Пусть $\tilde{\tau}^* = \tau_1$, $\tilde{\tau}_* = \tau_4$ и $\tau_1 < T_1$. В данном случае имеем

$$TP(\tau_1, \tau_4, T_1, T) = \frac{1}{T}\left\{\tau_1(p-c)(l_1-h) + \tau_4(p-c-s)(h-l_2) + \right.$$

$$\left. + (p-c)hT_1 + (p-c-s)l_2T\right\},$$

$$\mathfrak{T}_2 = \left\{ (T_1, T_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{c} Q_1^{(\min)} \leqslant l_1\tau_1 + h(T_1-\tau_1) \leqslant Q_1^{(\max)}, \\ Q_2^{(\min)} \leqslant h(\tau_4-\tau_1) + l_2(T-\tau_4) \leqslant Q_2^{(\max)}, \\ 0 < \tau_1 < T_1 < \tau_4 < T \end{array} \right. \right\}.$$

Здесь также необходимо решать оптимизационную задачу, аналогичную задаче (4).

Пусть $\tilde{\tau}^* = \tau_2$, $\tilde{\tau}_* = \tau_3$ и $\tau_2 \geqslant T_1$. Тогда имеем

$$TP(\tau_2, \tau_3, T_1, T) = \frac{1}{T}\left\{\tau_2 h(c+s-p) + \tau_3(p-c-s)(l_1-l_2+h) + sl_1T_1 + (p-c-s)l_1T\right\},$$

$$\mathfrak{T}_3 = \left\{ (T_1, T) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{c} Q_1^{\min} \leqslant l_1\min(\tau_2, T_1) + h(T_1-\tau_3)_+ \leqslant Q_1^{(\max)}, \\ Q_2^{(\min)} \leqslant l_1(\tau_2-T_1)_+ + h(\tau_3-\tau_2) + l_2(T-\tau_3) \leqslant Q_2^{(\max)}, \\ 0 < T_1 < \tau_2 < \tau_3 < T, \end{array} \right. \right\} =$$

$$= \left\{ (T_1, T) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{c} Q_1^{\min} \leqslant l_1T_1 \leqslant Q_1^{(\max)}, \\ Q_2^{(\min)} \leqslant l_1(\tau_2-T_1)_+ + h(\tau_3-\tau_2) + l_2(T-\tau_3) \leqslant Q_2^{(\max)}, \\ 0 < T_1 < \tau_2 < \tau_3 < T \end{array} \right. \right\}.$$

Итак, получим оптимизационную задачу

$$\max_{(T_1, T) \in \mathfrak{T}_3} TP(\tau_2, \tau_3, T_1, T). \tag{5}$$

Пусть $\tilde{\tau}^* = \tau_2$, $\tilde{\tau}_* = \tau_4$ и $\tau_2 \geqslant T_1$. Тогда имеем

$$TP(\tau_2, \tau_4, T_1, T) = \frac{1}{T}\left\{\tau_2 h(c+s-p) + \tau_4(p-c-s)(l_1-l_2+h) + sl_1T_1 + (p-c-s)l_1T\right\},$$

$$\mathfrak{T}_4 = \left\{ (T_1, T) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{c} Q_1^{\min} \leqslant l_1T_1 \leqslant Q_1^{(\max)}, \\ Q_2^{(\min)} \leqslant l_1(\tau_2-T_1)_+ + h(\tau_4-\tau_2) + l_2(T-\tau_4) \leqslant Q_2^{(\max)}, \\ 0 < T_1 < \tau_2 < \tau_4 < T \end{array} \right. \right\}.$$

Следовательно, в каждом из вариантов следует максимизировать непрерывно дифференцируемую функцию на плоскости при наличии линейных ограничений, т. е. на многограннике.

В математическом программировании для решения задач (4), (5) существует достаточное число алгоритмов (см., например, [18–21]): метод проекции градиентов, метод условного градиента, метод линеаризации, метод штрафных функций. Остановимся более детально на методе точных штрафных функций [22].

3. Метод точных штрафных функций. Метод штрафных функций является одним из наиболее простых и широко известных для решения задач нелинейного программирования. Он был введен Курантом в 1943 г. из соображений, связанных с физической природой рассматривавшейся задачи. Основная идея метода состоит в приближенном сведении задачи максимизации при ограничениях к задаче максимизации некоторой функции без ограничений; при этом вспомогательная функция подбирается таким образом, чтобы она совпадала с заданной максимизируемой функцией внутри области и быстро возрастала вне ее.

Рассмотрим задачу условной оптимизации: найти

$$\sup_{x \in X} f(x), \tag{6}$$

где f — непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция. Предположим, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ непусто и компактно. Пусть множество X задано в виде

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\},$$

здесь φ — непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция, и

$$\varphi(x) < 0 \quad \forall x \notin X.$$

Тогда множество X есть замкнутое множество точек глобального максимума функции φ на $\mathbb{R}^n$. Как обычно, для решения задачи (6) методом штрафных функций введем функцию

$$F(c, x) = f(x) + c\varphi(x),$$

где c — некоторое неотрицательное число, называемое *штрафным параметром*. Рассмотрим задачу безусловной минимизации

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} F(c, x). \tag{7}$$

Для применения методов штрафов существенно предположение о существовании решений у вспомогательных задач. Примем, что супремум в задаче (7) достигается для любого неотрицательного числа c. Достаточным условием для этого является ограниченность лебегова множества

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant f(x_0)\},$$

в котором x_0 — некоторая точка из $\mathbb{R}^n$. Будем считать,что

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f(x), \quad f^* = \max_{x \in X} f(x) = f(x^*), \quad F^*(c) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} F(c, x),$$

$$x(c) = \arg\max_{x \in \mathbb{R}^n} F(c, x), \quad x^{**} = \arg\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad f^{**} = f(x^{**}).$$

Предположим, что $f^{**} < +\infty$. Заметим, что $f^* \leqslant F^*(c)$ для любого положительного c.

Выберем монотонно возрастающую последовательность неотрицательных чисел $\{c_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, стремящуюся к $+\infty$. Положим $c_1 = 0$. Тогда

$$x^{**} = x(c_1) = f^{**}.$$

На первом шаге проверяем принадлежность множеству X точки глобального минимума функции f на $\mathbb{R}^n$.

В теории штрафных функций большое значение имеет следующая теорема.

Теорема [22]. *Если $x(c_k)$ есть последовательность решений вспомогательных задач* (7), *то справедливы следующие неравенства:*

1) $F^*(c_k) = F(c_k, x(c_k)) \geqslant F(c_{k+1}, x(c_{k+1})) = F^*(c_{k+1}) \quad \forall k > 0;$

2) $f(x(c_k)) \geqslant f(x(c_{k+1}));$

3) $f(x(c_k)) \geqslant F(c_k, x(c_k)) \geqslant f^*.$

Таким образом, последовательности чисел $\{f(x(c_k))\}$ и $\{F(c_k, x_k)\}$ являются невозрастающими, причем число f^* — их нижняя грань.

Лемма 1. *При сделанных предположениях справедливо неравенство*

$$\varphi(x(c_{k+1})) \geqslant \varphi(x(c_k)) \quad \forall k > 0. \tag{8}$$

Обозначим множество

$$\mathcal{L}(x^{**}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x^{**})\},$$

которое компактно в силу непрерывности функции φ. Из неравенства (8) вытекает, что все точки последовательности $\{x(c_k)\}$ будут лежать во множестве $\mathcal{L}(x^{**})$.

Лемма 2. *Для любой последовательности положительных чисел* $\{c_k\}$, $c_k \to +\infty$, *справедливо соотношение*

$$\varphi(x(c_k)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, последовательность точек $\{x(c_k)\}$, получаемая в результате глобальной максимизациии семейства функций $F(c_k, x)$, является максимизирующей последовательностью для функции φ.

Как правило, при решении задач с ограничениями в виде неравенств: найти

$$\sup_{x\in X} f(x), \tag{9}$$

где $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m\}$ и f, h_i — непрерывные на $\mathbb{R}^n$ функции, используется функция

$$\varphi(x) = \min\{0, -h_1(x), \dots, -h_m(x)\}.$$

Особый интерес представляют точные штрафные функции, т. е. функции, для которых существует такой штрафной параметр c^*, что для любых $c \geqslant c^*$ множество точек максимума функции $F(c, x)$ на $\mathbb{R}^n$ будет совпадать со множеством решений задачи (6). Такой параметр c^* будем называть *точным штрафным параметром* для семейства функций $F(c, x)$. Поэтому любое число, превосходящее точный штрафной параметр, является также точным штрафным параметром. Очевидно, что реализация метода точных штрафных функций прежде всего зависит от свойств функции, с помощью которой задается ограничение.

Поэтому функция φ должна удовлетворять некоторым условиям, при выполнении которых она пригодна для конструирования семейства штрафных функций, обладающего точным штрафным параметром. Отметим, что при выполнении данных условий точный штрафной параметр существует всегда, какова бы ни была целевая функция, лишь бы она была локально липшицева на $\mathbb{R}^n$. Целевая функция влияет только на величину точного штрафного параметра.

Для решения задачи (9) с линейными ограничениями

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x\rangle + b_i \leqslant 0, i = 1, \dots, m\}$$

можно использовать функцию

$$\varphi(x) = \min\{0, -\langle a_i, x\rangle - b_i, \dots, -\langle a_m, x\rangle - b_m\},\ a_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно доказать [22], что для такой функции существует точный штрафной параметр. Например, в качестве такого параметра можно взять величину

$$c^* = \max\{||a_1||, \ldots, ||a_m||\}.$$

4. Заключение. Изложенная выше методика сводит решение задачи (6) к максимизации функции $F(c, x)$ на $\mathbb{R}^n$. Но многие методы безусловной максимизации данной функции находят точку, которая есть точка локального максимума, если максимизируемая функция не вогнута. Следовательно, при плохом начальном приближении будет найден локальный максимум $x(c_k)$ функции $F(c_k, x)$. Этот факт нарушает сходимость и является существенным недостатком метода штрафных функций в применении к невогнутым задачам. В случае, если решается задача вогнутого программирования, то, как нетрудно проверить, функция $F(c_k, x)$ будет вогнутой, потому указанная трудность исчезает. Но возникает другая трудность. Из приведенных оценок следует, что для получения хорошего приближения необходимо брать коэффициент c_k достаточно большим, но тогда все производные по параметру x функции $F(c_k, x)$ становятся большими, поскольку они пропорциональны величине c_k.

Все указанные трудности проявляют себя в практических расчетах, что снижает эффективность метода. В вычислительных алгоритмах метода штрафных функций используется идея постепенного возрастания параметра c вместе с постепенным увеличением точности решения вспомогательных задач.

Литература

1. *Полякова Л. Н., Буре В. М., Карелин В. В.* Максиминный подход к оценке объема заказа товара в условиях падения спроса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 4. С. 252–260. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.408

2. *Aggarwal S. P., Jaggi C. K.* Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments // J. Oper. Res. Soc. 1995. Vol. 46. N 5. P. 658–662.

3. *Буре В. М., Карелин В. В., Буре А. В.* Оценка объема заказа товара при возможном падении спроса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 252–260. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.306

4. *Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N.* Probabilistic model of terminal services // Appl. Math. Sci. 2016. Vol. 10(39). P. 1945–1952. https://doi.org/10.12988/ams.2016.63131

5. *Буре В. М., Карелин В. В., Полякова Л. Н., Ягольник И. В.* Моделирование процесса заказа для кусочно-линейного спроса с насыщением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 138–146.

6. *Bure V. M., Karelin V. V., Myshkov S. K., Polyakova L. N.* Determination of order quantity with piecewise-linear demand function with saturation // Intern. Journal of Applied Engineering Research. 2017. Vol. 12, N 18. P. 7857–7862.

7. *Chen S. C., Teng J. T., Skouri K.* Economic production quantity models for deteriorating items with up-stream full trade credit and down-stream partial trade credit // Intern. Journal Prod. Econ. 2013. Vol. 155. P. 302–309.

8. *Dave U.* Letters and viewpoints on economic order quantity under conditions of permissible delay in payments // J. Oper. Res. Soc. 1985. Vol. 46. N 5. P. 1069–1070.

9. *Giri B. C., Sharma S.* An integrated inventory model for a deteriorating item with allowable shortages and credit linked wholesale price // Optim. Lett. 2015. Vol. 37. P. 624–637. https://doi.org/10.1007/s11590-014-0810-2

10. *Giri B. C., Sharma S.* Optimal ordering policy for an inventory system with linearly increasing demand and alowable shortages under two levels trade credit financing // Oper. Res. Intern. Journal. 2016. Vol. 16. P. 25–50.

11. *Goyal S. K.* Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments // J. Oper. Res. Soc. 1985. Vol. 36(4). P. 335–338.

12. *Huang Y. F.* Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing // J. Oper. Res. Soc. 2003. Vol. 54(9). P. 1011–1015.

13. *Huang Y. F., Hsu K. H.* An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain // Intern. Journal Prod. Econ. 2008. Vol. 112(2). P. 655–664.

14. *Jamal A. M. M., Sarker B. R., Wang S.* An ordering policy for deteriorating items with allowable shortages and permissible delay in payment // J. Oper. Res. Soc. 1997. Vol. 48(8). P. 826–833.

15. *Khanra S., Ghosh S. K., Chaudhuri K. S.* An EOQ model for a deteriorating item with time dependent quadratic demand under permissible delay in payment // Appl. Math. Comput. 2011. Vol. 218(1). P. 1–9.

16. *Khanra S., Mandal B., Sarkar B.* An inventory model with time dependent demand and shortages under trade credit policy // Econ. Model. 2013. Vol. 35. P. 349–355.

17. *Maihami R., Abadi I. N. K.* Joint control of inventory and its pricing for non-instantaneously deteriorating items under permissible delay in payments and partial backlogging // Math. Comp. Model. 2012. Vol. 55(5–6). P. 1722–1733.

18. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. Кн. 1. М.: Изд-во Моск. центра непрерывного матем. образования, 2011. 624 с.

19. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.

20. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 325 с.

21. *Федоров В. В.* О методе штрафных функций в задаче определения максимина // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. № 2. С. 321–333.

22. *Полякова Л. Н.* О методе точных штрафных квазидифференцируемых функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 2. С. 225–238.

Статья поступила в редакцию 2 февраля 2021 г.
Статья принята к печати 13 октября 2021 г.

Контактная информация:

Буре Владимир Мансурович — д-р техн. наук, проф.; vlb310154@gmail.com

Карелин Владимир Витальевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlkarelin@mail.ru

Полякова Людмила Николаевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; lnpol07@mail.ru

Exact penalty functions in the problem of choosing the optimal wholesale order in the face of rapid fluctuations in demand*

V. M. Bure, V. V. Karelin, L. N. Polyakova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. Exact penalty functions in the problem of choosing the optimal wholesale order in the face of rapid fluctuations in demand. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 397–408. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.408 (In Russian)

The current article discusses a different situation in the market, when there is a rush demand for a new product followed by a sharp drop in demand. The trading company uses the following scheme for the wholesale order of goods. The ordered product is divided into two parts, and the first batch of goods arrives immediately, it is sold over a certain period of time $[0, T_1]$. The second batch of goods is delivered at the time T, but at the time interval $[0, T]$. This batch is sold at a discount and is completely sold out. Time T corresponds to the end of the sale of the entire product. The time points T_1, T are selected by the trading firm from the condition of maximizing income. The need to consider such a wholesale order scheme is related to the fact that, firstly, the warehouses of the trading firms have limited capacity and cannot accommodate all the ordered goods, and secondly, a manufacturer may not offer the entire ordered batch of goods, since not all goods can be produced at the initial (zero) point of time immediately after receiving the order. At the time T_1, the trading company completely sells the first batch of goods and receives financial resources, part of which is paid

* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project N 20-07-0108).

to the manufacturer. At the moment of time T, the complete sale of all purchased goods is completed. The choice of time points T_1 and T allow to determine the volume of the first batch of ordered goods and the total volume of product ordered from the manufacturer. In the article, a mathematical model is proposed that makes it possible to choose the optimal ordering strategy for a trading company in the conditions of excessive growth of demand for the new product in time τ_1, τ_2 at some unknown point in time and $\tau_* \in [\tau_3, \tau_4]$, and the subsequent sharp drop in demand in the period of time $[\tau_3,\ \tau_4]$ due to the saturation of the market with a new product. Four possible variants of optimization problems are considered. A method of exact penalty function is suggested, which allows one to find their solutions.

Keywords: inventory level, random demand, rush demand, shortage of goods, discount, maximin, method of exact penalty functions.

References

1. Polyakova L. N., Bure V. M., Karelin V. V. Maksiminnii podhod k ocenke obema zakaza tovara v usloviyah padeniya sprosa [Maximin approach in estimating of the goods order volume under condition of falling demand]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 4, pp. 252–260.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.408 (In Russian)

2. Aggarwal S. P., Jaggi C. K. Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments. *J. Oper. Res. Soc.*, 1995, vol. 46, no. 5, pp. 658–662.

3. Bure V. M., Karelin V. V., Bure A. V. Ocenka ob"ema zakaza tovara pri vozmozhnom padenii sprosa [Evaluation of the volume of ordering of goods while possible demand drop]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 252–260. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.306 (In Russian)

4. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. Probabilistic model of terminal services. *Appl. Math. Sci.*, 2016, vol. 10(39), pp. 1945–1952. https://doi.org/10.12988/ams.2016.63131

5. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N., Yagolnik I. V. Modelirovanie processa zakaza dlya kusochno-linejnogo sprosa s nasyshcheniem [Modeling of the ordering process for piecewise-linear demand with saturation]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 138–146. (In Russian)

6. Bure V. M., Karelin V. V., Myshkov S. K., Polyakova L. N. Determination of order quantity with piecewise-linear demand function with saturation. *Intern. Journal of Applied Engineering Research*, 2017, vol. 12, no. 18, pp. 7857–7862.

7. Chen S. C., Teng J. T., Skouri K. Economic production quantity models for deteriorating items with up-stream full trade credit and down-stream partial trade credit. *Intern. Journal Prod. Econ.*, 2013, vol. 155, pp. 302–309.

8. Dave U. Letters and viewpoints on economic order quantity under conditions of permissible delay in payments. *Journal Oper. Res. Soc.*, 1985, vol. 46, no. 5, pp. 1069–1070.

9. Giri B. C., Sharma S. An integrated inventory model for a deteriorating item with allowable shortages and credit linked wholesale price. *Optim. Lett.*, 2015, vol. 37, pp. 624–637.
https://doi.org/10.1007/s11590-014-0810-2

10. Giri B. C., Sharma S. Optimal ordering policy for an inventory system with linearly increasing demand and alowable shortages under two levels trade credit financing. *Oper. Res. Intern. Journal*, 2016, vol. 16, pp. 25–50.

11. Goyal S. K. Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments. *J. Oper. Res. Soc.*, 1985, vol. 36(4), pp. 335–338.

12. Huang Y. F. Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing. *Journal Oper. Res. Soc.*, 2003, vol. 54(9), pp. 1011–1015.

13. Huang Y. F., Hsu K. H. An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain. *Intern. Journal Prod. Econ.*, 2008, vol. 112(2), pp. 655–664.

14. Jamal A. M. M., Sarker B. R., Wang S. An ordering policy for deteriorating items with allowable shortages and permissible delay in payment. *J. Oper. Res. Soc.*, 1997, vol. 48(8), pp. 826–833.

15. Khanra S, Ghosh S. K., Chaudhuri K. S. An EOQ model for a deteriorating item with time dependent quadratic demand under permissible delay in payment. *Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 218(1), pp. 1–9.

16. Khanra S., Mandal B., Sarkar B. An inventory model with time dependent demand and shortages under trade credit policy. *Econ. Model.*, 2013, vol. 35, pp. 349–355.

17. Maihami R., Abadi I. N. K. Joint control of inventory and its pricing for non-instantaneously deteriorating items under permissible delay in payments and partial backlogging. *Math. Comp. Model.*, 2012, vol. 55(5–6), pp. 1722–1733.

18. Vasiliev F. P. *Metody optimizacii. Kniga 1* [*Optimization methods. Book 1*]. Moscow, Moscow Centre of continuous mathematical education Publ., 2011, 624 p. (In Russian)

19. Polyak B. T. *Vvedenie v optimizaciyu* [*Introduction to optimization*]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 384 p. (In Russian)

20. Sukharev A. G., Timokhov A.V., Fedorov V. V. *Kurs metodov optimizacii* [*Course of optimization methods*]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 325 p.

21. Fedorov V. V. O metode shtrafnih funkcii v zadache opredeleniya maksimina [On the method of penalty functions in the problem of determining maximina]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1972, no. 2, pp. 321–333. (In Russian)

22. Polyakova L. N. O metode tochnih shtrafnih kvazidifferenciruemih funkcii [On the method of exact penalty quasi-differentiable functions]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2001, vol. 41, no. 2, pp. 225–238. (In Russian)

Received: February 2, 2021.
Accepted: October 13, 2021.

A u t h o r s’ i n f o r m a t i o n:

Vladimir M. Bure — Dr. Sci. in Technics, Professor; vlb310154@gmail.com

Vladimir V. Karelin — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; lkarelin@mail.ru

Ludmila N. Polyakova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; lnpol07@mail.ru