

Расчет турбулентного пограничного слоя плоской пластины*

В. А. Павловский¹, С. А. Кабриц²

¹ Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Российская Федерация, 190121, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

² Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Павловский В. А., Кабриц С. А. Расчет турбулентного пограничного слоя плоской пластины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 370–380.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.405>

Выполнен расчет турбулентного пограничного слоя при обтекании плоской пластины установившимся потоком вязкой жидкости. В основании расчета лежит система уравнений турбулентного движения жидкости, полученная путем обобщения формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости за счет придания ей степенного вида с последующей записью соответствующего реологического соотношения в тензорном виде и подстановки его в уравнение движения сплошной среды в напряжениях. Использование такой системы для задачи продольного обтекания плоской пластины после оценок погранслоного вида позволило записать систему уравнений, описывающую двумерное течение жидкости в пограничном слое плоской пластины. Данная система сведена к одному обыкновенному уравнению третьего порядка, аналогично тому, как выполнил Блазиус для ламинарного пограничного слоя. При решении этого уравнения применялся метод прямого сведения краевой задачи к задаче Коши. Результаты решения позволили вывести выражения для коэффициентов сопротивления, толщин пограничного слоя, вытеснения и потери импульса, которые были сравнены с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: турбулентность, дифференциальные уравнения турбулентного течения, плоская пластина, пограничный слой, число Рейнольдса, коэффициент сопротивления, толщина пограничного слоя, толщина вытеснения, толщина потери импульса.

1. Введение. Формулу Ньютона для касательного напряжения при продольном обтекании плоской поверхности со скоростью u , зависящей от поперечной координаты y :

$$\tau = \rho\nu \frac{du}{dy},$$

в которой ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, можно обобщить [1] в следующем степенном виде:

$$\tau = \rho\chi_n \left(\nu \frac{du^{(2n-1)}}{dy} \right)^{(1/n)}. \quad (1)$$

В этом двухпараметрическом выражении χ_n — безразмерный коэффициент, зависящий от показателя степени n , который может принимать значения $n \geq 1$. Можно распространить обобщение уравнения (1) на пространственный случай течения и записать соответствующее реологическое соотношение в тензорном виде. В результате

* Данное исследование проводилось в рамках государственного задания на выполнение научно-исследовательских работ № 075-03-2020-094/1 от 10 июня 2020 г.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

может быть получена система дифференциальных уравнений, которая позволяет решать краевые задачи механики жидкости. Такая система уравнений при произвольных значениях показателя степени может быть использована для описания поведения как ньютоновских, так и неньютоновских жидкостей при различных режимах течения. Для показателя степени $n = 4$ и соответствующего ему значения коэффициента $\chi_n = 0.019746$, определенного из сопоставления с экспериментальными данными результатов аналитического решения задач для простых сдвиговых течений, эта система предлагается для расчета турбулентных течений. В декартовой прямоугольной системе координат в пренебрежении массовыми силами ее можно представить так:

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \chi_n (7\nu)^{1/4} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{V_s V_s}{\sqrt{Y_2}} \right)^{3/4} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2)$$

где Y_2 — второй инвариант тензора скоростей деформаций, который в декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) записывается следующим образом:

$$Y_2 = 2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2.$$

Уравнения (2) позволяют описывать турбулентные течения для «блазиусовского» диапазона чисел Рейнольдса, который, например, для течения в трубе заключен в интервале $10^4 < \text{Re} < 10^6$, а при обтекании плоской пластины — в интервале $10^5 < \text{Re} < 10^8$. Для течения в прямой круговой трубе получаемое решение приводит к коэффициенту сопротивления в виде формулы Блазиуса, хорошо согласующегося с экспериментальными данными [2–4].

В развернутом виде в проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат уравнения (2) приводят к системе трех дифференциальных уравнений частных производных:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + C \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi \left(2 \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \Phi \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \Phi \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right], \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial V_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + C \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \Phi \left(2 \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \Phi \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \right], \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + C \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \Phi \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \Phi \left(2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right]. \quad (5)$$

Здесь для краткости записи обозначим

$$C = \rho \chi_n (7\nu)^{1/4}, \quad \Phi = \left(\frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{\sqrt{Y_2}} \right)^{3/4}.$$

В случае течения несжимаемой жидкости для замыкания системы служит уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Граничными условиями для системы уравнений (3)–(5) будут условия прилипания. Задачи о турбулентных течениях жидкости, в том числе и при обтекании тел

произвольной геометрии, можно решать на основе этой системы уравнений. Уравнения позволяют находить аналитические решения как для простых сдвиговых течений, так и для ламинарного режима течения [2]. Этим рассматриваемый подход к решению задач турбулентных течений выгодно отличается от современных дифференциальных моделей турбулентности [5, 6], которые не дают возможность получать аналитические решения. Результаты расчетов турбулентных течений на основе уравнений (3)–(5) будут справедливы и согласовываться с экспериментальными данными для диапазона чисел Рейнольдса, соответствующего «блазиусовскому». Но это согласование будет несколько хуже, чем при применении дифференциальных моделей турбулентности, которые приводят к более точным результатам расчетов за счет большого количества эмпирических констант, зачастую подобранных под решение конкретной задачи. Потому предлагаемая система уравнений турбулентного движения жидкости может быть полезна, по крайней мере, для получения предварительных оценочных характеристик турбулентного течения перед началом численного моделирования с помощью дифференциальных моделей турбулентности.

2. Обтекание плоской пластины. На основе уравнений (3)–(5) рассмотрим обтекание плоской пластины, расположенной вдоль потока, турбулентным потоком, который набегаёт из бесконечности с постоянной скоростью V_∞ (рис. 1). Ламинарным участком у носика пластины пренебрегаем.

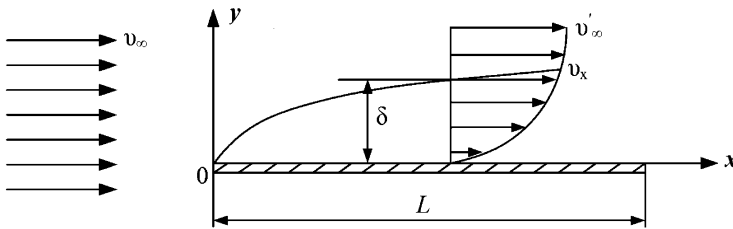


Рис. 1. Обтекание плоской пластины

В окрестности пластины скорость частиц жидкости имеет две компоненты $\mathbf{V} = \mathbf{V}(V_x, V_y)$, зависящие от двух переменных (x, y) [7]. Система уравнений (3)–(5) после стандартных оценок пограничного слоя [5, 7] даёт одно уравнение — уравнение движения жидкости в проекции на ось x :

$$\rho \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \rho \chi_n (7\nu)^{1/4} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{V_x^2}{\frac{\partial V_x}{\partial y}} \right)^{3/4} \frac{\partial V_x}{\partial y} \right]. \quad (6)$$

После несложных преобразований правую часть уравнения (6) можно представить в виде

$$\rho \chi_n \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial V_x^7}{\partial y} \right)^{1/4}.$$

В итоге система уравнений, описывающих пограничный слой при обтекании плоской пластины потоком несжимаемой жидкости, содержит два дифференциальных уравнения: уравнение движения жидкости в проекции на ось x и уравнение неразрывности:

$$\begin{aligned}
 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \chi_n \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial V_x^7}{\partial y} \right)^{1/4}, \\
 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Первое уравнение системы (7) позволяет оценить толщину пограничного слоя δ так же, как при оценке ламинарного пограничного слоя [7]. Левая часть уравнения имеет порядок величины V_∞^2/L , где L — характерный продольный размер, например длина пластины. Учитывая, что характерный поперечный размер течения равен δ , правая часть уравнения имеет порядок $\frac{1}{\delta} \left(\nu \frac{V_\infty^7}{\delta} \right)^{1/4}$. Тогда, принимая во внимание одинаковый порядок величин левой и правой частей, можно записать такое пропорциональное соотношение:

$$\frac{V_\infty^2}{L} \sim \frac{1}{\delta} \left(\nu \frac{V_\infty^7}{\delta} \right)^{1/4},$$

откуда

$$\delta \sim \left(\frac{\nu L^4}{V_\infty} \right)^{1/5} = \frac{L}{\text{Re}_L^{1/5}},
 \tag{8}$$

здесь Re_L — число Рейнольдса, вычисленное по длине пластины:

$$\text{Re}_L = \frac{V_\infty L}{\nu}.$$

Учитывая, что x есть расстояние от носика пластины, его можно заменить в выражении (8) на размер L :

$$\delta = c \frac{x}{\text{Re}_x^{1/5}},
 \tag{9}$$

где $\text{Re}_x = \frac{V_\infty x}{\nu}$ — местное число Рейнольдса, рассчитанное по координате x ; c — константа (некоторый коэффициент пропорциональности), которую можно далее вычислить после нахождения решения системы уравнений (7).

Уравнения (7) следует интегрировать, как и при решении задачи Блазиуса [7], с учетом следующих граничных условий:

$$\begin{aligned}
 V_x = V_y = 0 & \quad \text{при } y = 0 \text{ и } x > 0, \\
 V_x = V_\infty & \quad \text{при } y \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функцию тока $\psi(x, y)$, позволяющую превратить уравнение неразрывности в тождество и записать компоненты вектора скорости через эту функцию:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда уравнения движения системы (7) приводятся к одному:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = \chi_n \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^7 \right)^{1/4}.
 \tag{10}$$

После введения в него безразмерной переменной

$$\eta = y \left(\frac{V_\infty}{\nu x^4} \right)^{1/5} \quad (11)$$

будем искать решение для функции тока через новую функцию $\varphi(\eta)$. Для этого представим продольную компоненту скорости в виде

$$V_x = V_\infty \varphi'(\eta), \quad (12)$$

где штрихом обозначена производная по η . Левую часть (12) с учетом (11) можно представить следующим образом:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{V_\infty}{\nu x^4} \right)^{1/5} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}.$$

Тогда из формулы (12) следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = V_\infty \varphi'(\eta) \left(\frac{\nu x^4}{V_\infty} \right)^{1/5} = (\nu V_\infty^4 x^4)^{1/5} \varphi'(\eta).$$

Отсюда с точностью до произвольной постоянной имеем уравнение

$$\psi = (\nu V_\infty^4 x^4)^{1/5} \varphi(\eta).$$

Выразим теперь через $\varphi(\eta)$ все величины, входящие в (10):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_\infty \varphi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{4}{5} \frac{V_\infty}{x} \eta \varphi'', \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{4}{5} \left(\frac{\nu V_\infty^4}{x} \right) (\varphi - \eta \varphi'), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = V_\infty \left(\frac{V_\infty}{\nu x^4} \right)^{1/5} \varphi''.$$

Здесь учтено, что $x \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{4}{5} \eta$. Тогда левую часть уравнения (10) можно преобразовать:

$$V_\infty \varphi' \left(-\frac{4}{5} \right) \frac{V_\infty}{x} \eta \varphi'' - \frac{4}{5} \left(\frac{\nu V_\infty^4}{x} \right)^{1/5} (\varphi - \eta \varphi') V_\infty \left(\frac{V_\infty}{\nu x^4} \right)^{1/5} \varphi'' = -\frac{4}{5} \frac{V_\infty^2}{x} \varphi \varphi''.$$

Запишем правую часть уравнения (10) так:

$$\chi_n \frac{V_\infty^2}{x} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\varphi'^7}{d\eta} \right)^{1/4}.$$

В итоге уравнение (10) принимает вид

$$\frac{4}{5} \varphi \varphi'' + \chi_n \frac{V_\infty^2}{x} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\varphi'^7}{d\eta} \right)^{1/4} = 0. \quad (13)$$

Граничными для этого обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка будут условия

$$\begin{aligned} \eta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \\ \eta \rightarrow \infty, \quad \varphi' \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\chi_n = 0.019746$, уравнение (13) можно переписать так:

$$\varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + 0.0246825 \cdot \frac{d}{d\eta} \left(\left(\frac{d}{d\eta} \left(\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^7 \right) \right)^{0.25} \right) = 0. \quad (14)$$

3. Численное решение уравнения (14). Асимптотику уравнения (14) в окрестности $\eta = 0$ можно представить таким образом:

$$\varphi = \alpha\eta^{8/7}, \quad \varphi' = \frac{8}{7}\alpha\eta^{1/7}, \quad \varphi'' = \frac{8}{49}\alpha\eta^{-6/7}, \quad \varphi''' = -\frac{48}{343}\alpha\eta^{-13/7}.$$

При использовании метода прямого сведения краевой задачи к задаче Коши [8] получено решение уравнения при $\alpha = 1.14885$ на интервале $\eta \in [10^{-15}, 100]$. Численное решение уравнения (14) приведено в табл. 1.

Таблица 1. Результаты численного решения уравнения (14)

η	φ	φ'	φ''	$\left(\left(\varphi'\right)^7\right)'$
1.00E-15	8.27E-12	0.00945	1.35E+12	6.7264
0.0500	0.03707	0.83830	1.09249	4.8143
0.1000	0.08082	0.90268	0.61077	3.18826
0.1500	0.12681	0.93385	0.37780	2.13126
0.2000	0.17399	0.95186	0.24778	1.4639
0.2500	0.22189	0.96330	0.17002	1.03658
0.3000	0.27026	0.97104	0.12113	0.75565
0.3500	0.31896	0.97652	0.08908	0.56553
0.4000	0.36789	0.98055	0.06731	0.43322
0.4500	0.41700	0.98360	0.52057	0.33873
0.5000	0.46624	0.98597	0.04107	0.26965
0.5500	0.51559	0.98785	0.03298	0.21809
0.6000	0.56502	0.98936	0.02688	0.17887
0.6247	0.58943	0.99000	0.02473	0.16296
0.6500	0.61452	0.99060	0.02221	0.14853
0.7000	0.66408	0.99162	0.01856	0.12471
0.7500	0.71368	0.99248	0.01568	0.10575
0.8000	0.76332	0.99321	0.01337	0.09047
0.8500	0.81300	0.99384	0.01150	0.07803
0.9000	0.86270	0.99439	0.00997	0.06779
0.9500	0.91243	0.99484	0.00870	0.05929
1.0000	0.96219	0.99525	0.00764	0.05217
50.000	49.9558	0.99999	2.41E-07	1.69E-06

На рис. 2 приведен график распределения продольных скоростей в сечениях плоской пластины в безразмерных коэффициентах ($\eta, \varphi' = V_x/V_\infty$). Для сравнения на рис. 3 представлен полученный Блазиусом [7] график распределения продольных скоростей для ламинарного режима течения. Видно, что по мере удаления от носика пластины турбулентный пограничный слой нарастает быстрее, чем ламинарный.

Касательное напряжение на стенке можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \rho\chi_n \left(\nu \frac{dV_x^7}{dy} \right)^{1/4} \Big|_{y=0} = (2.6)\rho\chi_n\nu^{1/4} \left(\frac{d(V_\infty\varphi')^7}{dy} \right)^{1/4} \Big|_{y=0} = \\ &= \rho\chi_n\nu^{1/4}V_\infty^{7/4} \left(\frac{d(\varphi')^7}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \right)^{1/4} \Big|_{\eta=0} = \end{aligned}$$

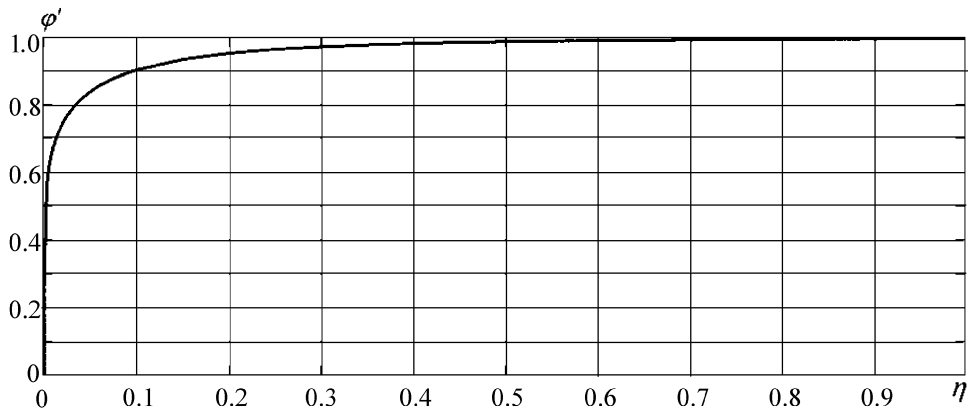


Рис. 2. Продольные скорости в координатах $(\varphi', \eta = y (\frac{V_\infty}{\nu x^4})^{1/5})$

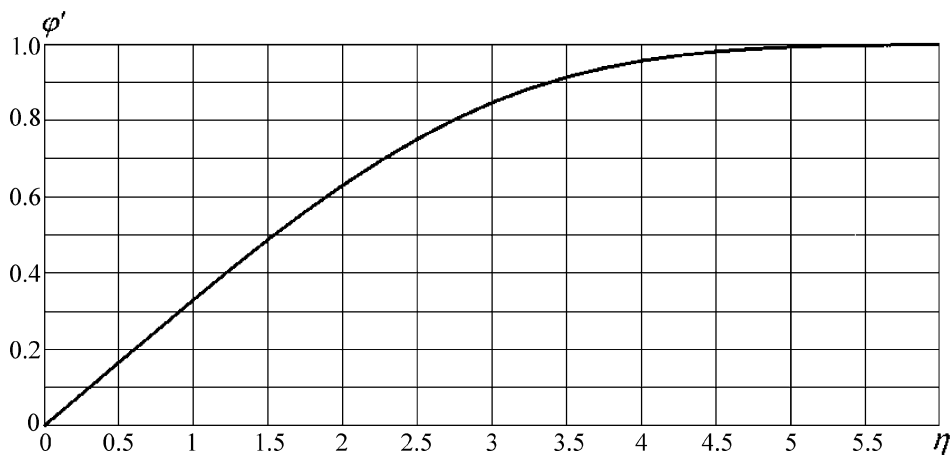


Рис. 3. Решение Блазиуса в координатах $(\varphi', \eta = y (\frac{V_\infty}{\nu x})^{1/2})$

$$= \rho \chi_n \nu^{1/4} V_\infty^{7/4} \left(\frac{V_\infty}{\nu x^4} \right)^{1/20} \Big|_{\eta=0} = \rho \chi_n \frac{V_\infty^{9/5} \nu^{1/5}}{x^{1/5}} \left([(\varphi')^7]' \right)^{1/4} \Big|_{\eta=0} = a \rho \chi_n \frac{V_\infty^{9/5} \nu^{1/5}}{x^{1/5}}.$$

Здесь $a = ((\varphi'^7)')^{1/4} \Big|_{\eta=0} = 1.610$, поскольку из табл. 1 имеем $(\varphi'^7)' \Big|_{\eta=0} = 6.726$. Тогда местный коэффициент трения, согласно определению [7], имеет вид

$$C_T = \frac{\tau_0}{\rho V_\infty / 2} = \frac{2a \chi_n}{\text{Re}_x^{1/5}} = \frac{0.0636}{\text{Re}_x^{1/5}},$$

где Re_x — местное число Рейнольдса.

Сопротивление трения одной стороны пластины, длина которой равна L , а ширина равна единице, можно рассчитать по формуле

$$R_T = \int_0^L \tau_0 = a\rho\chi_n V_\infty^{9/5} \nu^{1/5} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/5}} = \frac{5}{4} a\rho\chi_n V_\infty^{9/5} \nu^{1/5} L^{4/5}.$$

Общий коэффициент трения определяется соотношением

$$C_T = \frac{R_T}{\rho V_\infty^2 / 2} = \frac{5}{2} \frac{a\chi_n}{\text{Re}_L^{1/5}} = \frac{0.0795}{\text{Re}_L^{1/5}}, \quad (15)$$

где число Рейнольдса берется по длине пластины: $\text{Re}_L = \frac{V_\infty}{\nu} L$. Опытные данные дают близкий результат [7, 8]:

$$C_T = \frac{0.0307}{\text{Re}_L^{1/7}} \quad (16)$$

или по Шлихтингу [2, 3]:

$$C_T = \frac{0.455}{(\lg \text{Re}_L)^{2.58}}. \quad (17)$$

В табл. 2 представлены результаты расчета коэффициента сопротивления по формуле (15). Было проведено сравнение их с экспериментальными данными (формулы (16) и (17)). Видно удовлетворительное их согласование.

Таблица 2. Результаты расчета коэффициента сопротивления

lg Re	lg1000C _T		
	формула (15), расчет	формула (16), эксперимент	формула (17), эксперимент
5	0.875	0.887	0.854
6	0.675	0.687	0.650
7	0.475	0.487	0.477
8	0.275	0.288	0.328

При $\eta = 0.625$ имеем $\varphi' = 0.99$, что позволяет указать, что константа $c = 0.625$ в формуле (9). Тогда толщина пограничного слоя в турбулентном режиме течения, согласно этой формуле, равна

$$\delta = \frac{0.625x}{\text{Re}_x^{1/5}}.$$

Она несколько отличается от приводимого в литературе значения $\delta = \frac{0.37x}{\text{Re}_x^{1/5}}$, вычисляемого на основе представления турбулентного профиля скорости в виде степенной зависимости [3]. Здесь следует заметить, что толщина пограничного слоя является условной величиной, она определяется как расстояние от обтекаемой поверхности, на котором скорость течения отличается на 1% от скорости внешнего течения. Менее произвольной мерой толщины пограничного слоя служит толщина вытеснения, которая вычисляется [6] следующим образом:

$$\delta^* = \int_0^{\delta, \infty} \left(1 - \frac{V_x}{V_\infty}\right) dy = \left(\int_0^\delta (1 - \varphi) d\eta\right) \frac{x}{\text{Re}_x^{1/5}}.$$

Значение интеграла в скобках равно 0.0352. Отсюда

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{0.0352}{\text{Re}_x^{1/5}}.$$

Аналогичным образом можно определить толщину потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta, \infty} \frac{V_x}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_x}{V_\infty}\right) dy = \left(\int_0^\delta \varphi'(1 - \varphi') d\eta \right) \frac{x}{\text{Re}_x^{1/5}}.$$

Интеграл в скобках имеет значение 0.030, тогда

$$\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{c}{\text{Re}_x^{1/5}} = \frac{0.03}{\text{Re}_x^{1/5}}.$$

Опытные данные [6] дают

$$\frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0.015}{\text{Re}_x^{1/7}}.$$

Нетрудно заметить, что расчетные и опытные данные близки для интервала $10^5 \leq \text{Re}_x \leq 10^8$.

Литература

1. Павловский В. А. Степенное обобщение формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости в форме тензорного реологического соотношения и вытекающие из него варианты построения моделей течения // Тез. докл. IX Поляховских чтений: Материалы Междунар. науч. конференции по механике. 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия. СПб.: Изд-во ВВМ, 2021. С. 226–227.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / пер. Г. А. Вольтера с 5-го нем. изд., испр. по 6-му (амер.) изд.; под ред. Л. Г. Лойцянского. М.: Наука, 1974. 711 с. (*Schlichting H. Grenzschicht Theorie.*)
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
4. Павловский В. А., Чистов А. Л., Кучинский Д. М. Моделирование течений в трубах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 93–106. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.107>
5. Павловский В. А., Никущенко Д. В. Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2018. 368 с.
6. Федяевский К. К., Войткунский Я. И., Фаддеев Ю. И. Гидромеханика. Л.: Судостроение, 1968. 568 с.
7. Kabrits S. A., Kolpak E. P. Numerical study of convergence of nonlinear models of the theory of shells with thickness decrease // AIP Conference Proceedings. 2015. Vol. 1648. N 300005. <https://doi.org/10.1063/1.4912547>
8. Новожилов В. В., Павловский В. А. Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости. 2-е изд. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2012. 484 с.

Статья поступила в редакцию 3 октября 2020 г.

Статья принята к печати 13 октября 2021 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я :

Павловский Валерий Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.a.pavlovsky@gmail.com

Кабриц Сергей Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц.; s.kabrits@spbu.ru

Calculation of the turbulent boundary layer of a flat plate*

V. A. Pavlovsky¹, S. A. Kabrits²

¹ St. Petersburg State Marine Technical University, 3, ul. Locmanskaya, St. Petersburg, 190121, Russian Federation

² St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Pavlovsky V. A., Kabrits S. A. Calculation of the turbulent boundary layer of a flat plate. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 370–380. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.405> (In Russian)

The calculation of the turbulent boundary layer is performed when a steady flow of a viscous fluid flows around a flat plate. The calculation is based on a system of equations of turbulent fluid motion, obtained by generalizing Newton's formula for the tangential stress in a fluid by giving it a power-law form followed by writing the corresponding rheological relationship in tensor form and substituting it into the equation of motion of a continuous medium in stresses. The use of this system for the problem of longitudinal flow around a flat plate after estimates of the boundary layer form made it possible to write a system of equations describing a two-dimensional fluid flow in the boundary layer of a flat plate. This system is reduced to one ordinary third-order equation, similarly to how Blasius performed it for a laminar boundary layer. When solving this equation, the method of direct reduction of the boundary value problem to the Cauchy problem was used. The results of this solution made it possible to determine expressions for the thickness of the boundary layer, displacement and loss of momentum. These values are compared with the available experimental data.

Keywords: turbulence, differential equations of turbulent flow, flat plate, boundary layer, Reynolds number, drag coefficient, boundary layer thickness, displacement thickness, momentum loss thickness.

References

1. Pavlovsky V. A. Stepennoe obobchenie formuly Newtona dlya kasatel'nogo napriazheniya v zhidkosti v forme tensor'nogo rheologicheskogo sootnosheniya i vitekayuchie iz nego varianty postroyeniya modeli techeniya [Power-law generalization of Newton's formula for the shear stress in a fluid in the form of a tensor rheological relation and the resulting options for constructing flow models]. *Thesisy dokladov IX Potiachovskikh tsheniyy. Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii po mekhanike* [Thesis of papers IX Potiachovsky readings. Materials of Intern. Sci. Conference on Mechanics]. March 9–12, 2021. Saint Petersburg, Russia. St. Petersburg, BBM Press, 2021, pp. 226–227. (In Russian)
2. Schlichting H. *Grenzschicht Theorie* [Boundary layer theory]. Berlin, Verlag G. Braun Publ., 1965, 736 p. (Rus. ed.: Schlichting H. *Teoriya pogramichnogo sloya*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 711 p.)
3. Lojczyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2003, 840 p. (In Russian)
4. Pavlovsky V. A., Chistov A. L., Kuchinsky D. M. Modelirovaniye techeniy v trubah [Modeling of pipe flows]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 93–106. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.107> (In Russian)
5. Pavlovsky V. A., Nikushhenko D. V. *Vychislitel'naya gidrodinamika. Teoreticheskie osnovy* [Computational fluid dynamics. Theoretical fundamentals]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2018, 368 p. (In Russian)
6. Fediyaevsky K. K., Voitkunsky Ya. I., Faddeev Yu. I. *Gidromekhanika* [Hydromechanics]. Leningrad, Sudostroeniye Publ., 1968, 568 p. (In Russian)
7. Kabrits S. A., Kolpak E. P. Numerical study of convergence of nonlinear models of the theory of shells with thickness decrease. *AIP Conference 2015. Proceedings*, vol. 1648, no. 300005. <https://doi.org/10.1063/1.4912547>

* This study was carried out within the framework of the state task for the implementation of research works N 075-03-2020-094/1 of June 10, 2020.

8. Novozhilov V. V., Pavlovskij V. A. *Ustanovivchiesiya turbulentniya tchechenia neszhimaemoi zhidkosty. 2-e izd.* [*Establishment of turbulence through an incompressible fluid. 2nd ed.*]. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2012, 484 p.

Received: October 3, 2020.

Accepted: October 13, 2021.

A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

Valery A. Pavlovsky — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; v.a.pavlovsky@gmail.com

Sergey A. Kabrits — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; s.kabrits@spbu.ru