

## Метод начальных функций в расчете изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластинки

Д. П. Голоскоков<sup>1</sup>, А. В. Матросов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций  
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, Российская Федерация,  
193232, Санкт-Петербург, пр. Большевиков, 22

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Метод начальных функций в расчете изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластинки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 330–344. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.402>

В настоящей работе методом начальных функций (МНФ) решена задача изгиба защемленной по всем четырем сторонам ортотропной пластинки, находящейся под воздействием нормальной равномерно распределенной по ее поверхности нагрузки. Решение получено в виде экспоненциального ряда с неизвестными коэффициентами. Алгоритм метода таков, что на двух противоположных сторонах граничные условия (равенство нулю перемещений и углов поворота) выполнены точно, тогда как на паре двух других противоположных сторон граничные условия удовлетворяются с произвольной степенью точности методом коллокаций. Все исследования проводились с помощью системы Maple, позволяющей работать с вещественными числами с произвольной мантисой. Расчеты с длинной мантисой преодолевают один из основных недостатков МНФ: вычислительную неустойчивость его алгоритма, возникающую при определенных параметрах задачи. Определены области вычислительной устойчивости полученного решения, а также изучено напряженно-деформированное состояние в окрестностях угловых точек пластины. Показано стремление к нулю значений моментов и перерезывающих сил при приближении к углам пластины с однократным изменением знака.

*Ключевые слова:* ортотропная пластинка, изгиб тонкой ортотропной пластинки, защемленная по контуру пластинка, метод начальных функций, компьютерная алгебра, система Maple.

**1. Введение.** Прямоугольные тонкие пластинки с разными граничными условиями на четырех их сторонах (защемление, шарнирное опирание, свободный край) являются одними из наиболее часто используемых элементов конструкций различного назначения. Применение современных композиционных материалов придает подобным элементам большую прочность при меньшем весе. Часто пластинки изготавливаются из ортотропного материала, и математической моделью для них служит бигармоническое уравнение для их прогиба, через который легко определяются все компоненты напряженного состояния пластинки: изгибающие моменты и перерезывающие силы.

Наибольший интерес представляет решение данного уравнения для пластин, защемленных по всем четырем сторонам. Такая задача не имеет точного аналитического решения в замкнутом виде, но с использованием различных подходов и методов построены приближенные решения в виде рядов по разным системам базовых функ-

ций. Основной подход в построении приближенного решения заключается в получении решения с достаточным количеством неизвестных констант для удовлетворения граничным условиям, по существу, общего решения задачи. В работе [1] приведен обзор подходов к решению бигармонического уравнения двух переменных, моделирующего изгиб изотропной тонкой пластинки. Отмечается, что вариационные методы, методы Бубнова — Галеркина и Ритца, метод собственных функций доминируют при решении задачи изгиба защемленной по контуру тонкой изотропной пластинки. Для ортотропной пластинки эти же методы также преобладают в исследованиях современных ученых. В представленном ниже кратком обзоре современных работ, посвященных изгибу защемленной по контуру ортотропной пластинки, можно обнаружить упомянутые выше методы.

В работе [2] прогиб защемленной ортотропной пластинки строится в виде ряда по собственным функциям дифференциального оператора задачи. Построены два класса комплекснозначных собственных функций, удовлетворяющих условиям равенства нулю самих функций и их первых производных, соответственно на двух парах противоположных граней  $x = 0, a$  и  $y = 0, b$ . Далее методом суперпозиции получено общее решение обобщенного бигармонического уравнения как сумма двух рядов по этим функциям, а также частного решения неоднородного уравнения и полиномиального решения однородного уравнения.

Для решения уравнения изгиба ортотропной пластинки в [3] используется двойное интегральное конечное синус-преобразование Фурье. На самом деле прогиб — обычное разложение в двойной ряд Фурье с неизвестными коэффициентами. Вычисление коэффициентов Фурье для частных производных функции прогиба, входящих в уравнение изгиба пластинки, приводит к их выражению через четыре неизвестных величины — значения вторых частных производных прогиба по переменным  $x$  и  $y$  на сторонах  $x = 0, a$  и  $y = 0, b$ . В результате каждый коэффициент Фурье прогиба пластинки представляется через определенные интегралы от этих неизвестных величин, умноженных на тригонометрический синус:  $\sin(n\pi y/b)$ . Граничные условия равенства нулю прогиба на всех сторонах пластинки выполняются тождественно, а для удовлетворения нулю на границе пластинки углов поворота получаются условия равенства нулю четырех тригонометрических рядов. Интегрируя их, предварительно умножив на соответствующие тригонометрические функции синуса или косинуса, выводится система бесконечных линейных алгебраических уравнений.

В работе [4] применяется метод обобщенного интегрального преобразования (generalized integral transform technique — GITT), сводящий исходное уравнение в частных производных к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем эта система решается численно.

Иной подход реализован в статье [5]. В ней задача изгиба ортотропной защемленной по всем сторонам пластинки решается расширенным методом Канторовича.

Интересен подход к задаче изгиба ортотропной тонкой пластинки в работе [6]. Решение в ней строится в виде ряда по собственным функциям оператора Гамильтона, полученного методом разделения переменных гамильтоновой системы, к которой были приведены уравнения изгиба ортотропной тонкой пластины.

Реализация метода Галеркина в [7] с использованием системы аналитических вычислений позволила построить несколько новых решений на основе различных аппроксимаций функции прогиба пластинки.

Расширенный метод Канторовича позволил авторам [8] разработать итерационный метод построения приближенного решения в замкнутой форме с заданной точностью задачи изгиба защемленной по контуру ортотропной пластинки.

Следует отметить, что в большинстве перечисленных работ расчеты по предложенным алгоритмам и методам выполнены для максимального прогиба в центре пластины, а также максимальных изгибающих моментов и приведенных перерезывающих сил в серединах защемленных краев ортотропной пластины. Исследование распределения моментов и перерезывающих сил в окрестностях угловых точек пластины, как было проведено для изотропных защемленных по краям пластин в [9, 10], в них не производилось.

В настоящей работе для решения задачи изгиба защемленной по всем четырем сторонам ортотропной пластинки, находящейся под воздействием нормальной равномерно распределенной по ее поверхности нагрузки, используется метод начальных функций (МНФ). Он позволяет представить компоненты напряженно-деформированного состояния пластины в виде линейной комбинации компонентов, определенных на какой-либо начальной стороне пластины, например  $x = 0$ . Эти компоненты называются начальными функциями. Коэффициенты линейной комбинации представляют собой операторы дифференцирования по другой переменной. Для их нахождения применяется подход, разработанный в [11] и опирающийся на символический способ записи решения дифференциального уравнения в частных производных [12]. Удовлетворение граничным условиям на противоположной стороне пластины  $x = a$  приводит к системе трансцендентных дифференциальных уравнений для нахождения двух неизвестных начальных функций (две другие известны из заданных граничных условий на стороне  $x = 0$ ). Решение данной системы получается в виде экспоненциальных рядов с неизвестными коэффициентами, что позволяет удовлетворить граничным условиям на второй паре сторон пластины  $y = 0, b$ .

МНФ интенсивно разрабатывался во второй половине XX в. Однако, обладая существенным недостатком — вычислительной неустойчивостью при определенных параметрах задачи и удерживаемого в решении количества членов, — он не получил широкого применения. (С природой вычислительной неустойчивости алгоритма МНФ можно ознакомиться в работе [13].) В настоящее время, используя системы аналитических вычислений Maple, Mathematica и др., этот недостаток преодолевается вычислениями с длинной мантисой. В последние десятилетия таким методом решен ряд задач: задачи изгиба защемленной по контуру изотропной тонкой пластинки [14–16], расчет плоских упругих систем сложной конфигурации [17–19], задачи изгиба полулопосы [20, 21], изгиба решетчатых конструкций [22], изгиба толстых плит [23, 24] и др.

**2. Постановка задачи и метод решения.** Прогиб прямоугольной ( $a \times b$ ) ортотропной пластинки толщиной  $h$  под действием распределенной нагрузки  $q(x, y)$  определяется дифференциальным уравнением [25]

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (1)$$

где  $D_x = E'_x h^3 / 12$ ;  $D_y = E'_y h^3 / 12$ ;  $D_1 = E'' h^3 / 12$ ;  $D_{xy} = G h^3 / 12$ ;  $H = D_1 + 2D_{xy}$ ;  $E'_x$ ,  $E'_y$ ,  $E''$  и  $G$  — упругие постоянные ортотропной пластинки.

Решением этого уравнения является сумма решения  $w_{hom}$  однородного уравнения ( $q(x, y) \equiv 0$ ) и частного решения  $w_{part}$  неоднородного уравнения:

$$w(x, y) = w_{hom} + w_{part}.$$

Частное решение уравнения (1) зависит от вида правой части. В случае равномерно распределенной нагрузки  $q = \text{const}$  его можно взять в виде

$$w_{part} = \frac{qx^4}{24D_x}. \quad (2)$$

Однородное уравнение решаем методом начальных функций. Рассматриваем однородное уравнение в частных производных как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной  $x$ , полагая оператор дифференцирования по переменной  $y$  символьным параметром  $\beta = \partial/\partial y$ :

$$D_x \frac{d^4 w}{dx^4} + 2H\beta^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + D_y \beta^4 w = 0. \quad (3)$$

Решение однородного уравнения (3) в соответствии с алгоритмом МНФ ищется как линейная комбинация компонентов напряженно-деформированного состояния пластинки на ее стороне  $x = 0$  [11]:

$$w_{hom} = L_{w,w}(x, \beta)w^0(y) + L_{w,\theta}(x, \beta)\theta_x^0(y) + L_{w,M}(x, \beta)M_x^0(y) + L_{w,V}(x, \beta)V_x^0(y). \quad (4)$$

Здесь  $w^0(y)$ ,  $\theta_x^0(y)$ ,  $M_x^0(y)$  и  $V_x^0(y)$  — соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и приведенная перерезывающая сила, заданные на стороне  $x = 0$  пластинки (начальной линии), а заданные на ней компоненты напряженно-деформированного состояния называются начальными функциями. Коэффициенты в представлении (4)  $L_{w,w}(x, \beta)$ ,  $L_{w,\theta}(x, \beta)$ ,  $L_{w,M}(x, \beta)$  и  $L_{w,V}(x, \beta)$  являются операторами-функциями ( $\beta$  — символ оператора дифференцирования по переменной  $y$ ), подлежащими определению.

Для их нахождения подставим (4) в (3) и с учетом независимости и произвольности начальных функций получим для определения неизвестных операторов-функций одно обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$D_x \frac{d^4 L_{w,k}}{dx^4} + 2H\beta^2 \frac{d^2 L_{w,k}}{dx^2} + D_y \beta^4 L_{w,k} = 0, \quad k = w, \theta, M, V. \quad (5)$$

Характеристическим уравнением для него является алгебраическое уравнение четвертой степени

$$D_x \lambda^4 + 2H\beta^2 \lambda^2 + D_y \beta^4 = 0,$$

которое имеет четыре неравных корня

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{(H + \sqrt{H^2 - D_x D_y})}{D_x}} \beta, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{-\frac{(H - \sqrt{H^2 - D_x D_y})}{D_x}} \beta.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (5) запишем следующим образом:

$$L_{w,k}(x, \beta) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x}. \quad (6)$$

Произвольные константы  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) для каждого оператора-функции определяются, исходя из его начальных значений на линии  $x = 0$ :  $\left. \frac{d^i L_{w,k}(x, \beta)}{dx^i} \right|_{x=0}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Если в представлении (4) для  $w_{hom}$  положить  $x = 0$ , то очевидно, что

$$L_{w,w}(0, \beta) = 1, \quad L_{w,\theta}(0, \beta) = 0, \quad L_{w,M}(0, \beta) = 0, \quad L_{w,V}(0, \beta) = 0. \quad (7)$$

Остальные начальные значения для операторов-функций находим из выражений для угла поворота, изгибающего момента и приведенной перерезывающей силы в сечении  $x = \text{const}$  через прогиб:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad M_x = - \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad V_x = - \left( D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \quad (8)$$

Подставив в (8) представление (4) для прогиба и вычислив полученные выражения при  $x = 0$ , для определения первых трех производных операторов-функций на начальной линии имеем соотношения

$$\theta_x^0 = \frac{dL_{w,w}}{dx} \Big|_{x=0} w^0 + \frac{dL_{w,\theta}}{dx} \Big|_{x=0} \theta_x^0 + \frac{dL_{w,M}}{dx} \Big|_{x=0} M_x^0 + \frac{dL_{w,V}}{dx} \Big|_{x=0} V_x^0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M_x^0 = & - \left( D_x \frac{d^2 L_{w,w}}{dx^2} \Big|_{x=0} + D_1 \beta^2 L_{w,w} \Big|_{x=0} \right) w^0 - \\ & - \left( D_x \frac{d^2 L_{w,\theta}}{dx^2} \Big|_{x=0} + D_1 \beta^2 L_{w,\theta} \Big|_{x=0} \right) \theta_x^0 - \\ & - \left( D_x \frac{d^2 L_{w,M}}{dx^2} \Big|_{x=0} + D_1 \beta^2 L_{w,M} \Big|_{x=0} \right) M_x^0 - \\ & - \left( D_x \frac{d^2 L_{w,V}}{dx^2} \Big|_{x=0} + D_1 \beta^2 L_{w,V} \Big|_{x=0} \right) V_x^0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V_x^0 = & - \left( D_x \frac{d^3 L_{w,w}}{dx^3} \Big|_{x=0} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{dL_{w,w}}{dx} \Big|_{x=0} \beta^2 \right) w^0 - \\ & - \left( D_x \frac{d^3 L_{w,\theta}}{dx^3} \Big|_{x=0} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{dL_{w,\theta}}{dx} \Big|_{x=0} \beta^2 \right) \theta_x^0 - \\ & - \left( D_x \frac{d^3 L_{w,M}}{dx^3} \Big|_{x=0} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{dL_{w,M}}{dx} \Big|_{x=0} \beta^2 \right) M_x^0 - \\ & - \left( D_x \frac{d^3 L_{w,V}}{dx^3} \Big|_{x=0} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{dL_{w,V}}{dx} \Big|_{x=0} \beta^2 \right) V_x^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из соотношения (9) вычислим первые производные операторов-функций

$$\frac{dL_{w,w}}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dL_{w,\theta}}{dx} \Big|_{x=0} = 1, \quad \frac{dL_{w,M}}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dL_{w,V}}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \quad (12)$$

Равенство (10) с учетом значений операторов-функций (7) позволяет вычислить вторые производные операторов-функций:

$$\frac{d^2 L_{w,w}}{dx^2} \Big|_{x=0} = - \frac{D_1 \beta^2}{D_x}, \quad \frac{d^2 L_{w,\theta}}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 L_{w,M}}{dx^2} \Big|_{x=0} = - \frac{1}{D_x}, \quad \frac{d^2 L_{w,V}}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0.$$

Третьи производные операторов-функций на начальной линии находятся из равенства (11) с учетом первых производных (12):

$$\left. \frac{d^3 L_{w,w}}{dx^3} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 L_{w,\theta}}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{H\beta^2}{D_x}, \quad \left. \frac{d^3 L_{w,M}}{dx^3} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 L_{w,V}}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{1}{D_x}.$$

Начальные значения для четырех операторов-функций  $L_{w,k}$  дают возможность определить произвольные константы в общем представлении операторов-функций (6). В результате указанные операторы-функции получены в виде

$$L_{w,w} = \frac{1}{2} \frac{(D_1 - H + \sqrt{-D_x D_y + H^2}) \operatorname{ch} \lambda_1 x - (D_1 - H - \sqrt{-D_x D_y + H^2}) \operatorname{ch} \lambda_3 x}{\sqrt{-D_x D_y + H^2}},$$

$$L_{w,\theta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{D_y \beta} \left[ \left( H - \sqrt{-D_x D_y + H^2} \right) \frac{\lambda_1}{\beta} \operatorname{sh} \lambda_1 x + \left( H + \sqrt{-D_x D_y + H^2} \right) \frac{\lambda_3}{\beta} \operatorname{sh} \lambda_3 x \right], \quad (13)$$

$$L_{w,M} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-D_x D_y + H^2} \beta^2} (\operatorname{ch} \lambda_1 x - \operatorname{ch} \lambda_3 x),$$

$$L_{w,V} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-D_x D_y + H^2} D_y \beta^3} \left[ - \left( H - \sqrt{-D_x D_y + H^2} \right) \frac{\lambda_1}{\beta} \operatorname{sh} \lambda_1 x + \left( H + \sqrt{-D_x D_y + H^2} \right) \frac{\lambda_3}{\beta} \operatorname{sh} \lambda_3 x \right].$$

Подстановка операторов-функций (13) в представление (4) решения однородного уравнения (3) завершает первый этап алгоритма МНФ: получение решения задачи в символьно-операторной форме. Если известны начальные функции, то найти решение достаточно просто. Для этого следует символу  $\beta$  в полученном решении вернуть первоначальный смысл оператора дифференцирования по переменной  $y$  и воздействовать операторами МНФ на соответствующие начальные функции, представив их как степенные ряды.

Однако при решении краевых задач только часть начальных функций может быть известна. При жестком защемлении пластинки по всему ее контуру на крае  $x = 0$  известны начальные функции  $w^0(y) = 0$  и  $\theta_x^0(y) = 0$ . Неизвестные начальные функции  $M_x^0(y)$  и  $V_x^0(y)$  определяются из системы дифференциальных уравнений, получаемых при удовлетворении аналогичным граничным условиям на стороне  $x = a$ :

$$w(a) = L_{w,M}(a, \beta) M_x^0(y) + L_{w,V}(a, \beta) V_x^0(y) + w_{part}(a) = 0,$$

$$\theta_x(a) = \frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, \beta) M_x^0(y) + \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, \beta) V_x^0(y) + \frac{\partial}{\partial x} w_{part}(a) = 0. \quad (14)$$

С учетом вида  $w_{part}$  (2) частное решение системы (14) ищется в форме констант  $M_{x,part}^0$ ,  $V_{x,part}^0$ . Подстановка его в систему дифференциальных уравнений приводит к решению линейной системы двух алгебраических уравнений:

$$L_{w,M}(a, 0) M_{x,part}^0 + L_{w,V}(a, 0) V_{x,part}^0 + w_{part}(a) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, 0) M_{x,part}^0 + \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, 0) V_{x,part}^0 + \frac{\partial}{\partial x} w_{part}(a) = 0.$$

В результате получим частное решение

$$M_{x,part}^0 = -\frac{qa^2}{12}, \quad V_{x,part}^0 = -\frac{qa}{12}. \quad (15)$$

Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (14) можно представить через одну функцию  $\Phi(y)$ :

$$M_x^0(y) = \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, \beta) \Phi(y), \quad V_x^0(y) = -\frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, \beta) \Phi(y), \quad (16)$$

удовлетворяющую трансцендентному дифференциальному уравнению

$$\left( L_{w,M}(a, \beta) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, \beta) - L_{w,V}(a, \beta) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, \beta) \right) \Phi(y) = 0. \quad (17)$$

Рассматривая его как обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение ищем в виде  $\Phi(y) = e^{\gamma y}$ . Подстановка этой функции в уравнение (17) приводит к характеристическому трансцендентному уравнению

$$L_{w,M}(a, \gamma) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, \gamma) - L_{w,V}(a, \gamma) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, \gamma) = 0,$$

которое имеет нулевой корень  $\gamma = 0$  четвертой кратности и счетное множество комплексных корней  $\gamma_i$ . Таким образом, функцию  $\Phi(y)$  можно записать как экспоненциальный ряд с произвольными комплексными постоянными:

$$\Phi(y) = A_0^0 + A_0^1 y + A_0^2 y^2 + A_0^3 y^3 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{\gamma_i y}. \quad (18)$$

Подстановка (18) в выражения (16) для неизвестных начальных функций  $M_x^0(y)$  и  $V_x^0(y)$  с последующим их использованием в решении (4) и с учетом двух частных решений (2), (15) приводит к следующему представлению прогиба защемленной по сторонам  $x = 0, a$  прямоугольной ортотропной тонкой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$ :

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[ L_{w,M}(x, \lambda_i) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, \lambda_i) - L_{w,V}(x, \lambda_i) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, \lambda_i) \right] e^{\lambda_i y} + \\ & + \left[ L_{w,M}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, 0) - L_{w,V}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, 0) \right] (A_0^0 + A_0^1 y + A_0^2 y^2 + A_0^3 y^3) + \\ & + L_{w,M}(x, 0) M_{x,part}^0 + L_{w,V}(x, 0) V_{x,part}^0 + w_{part}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение (19) точно удовлетворяет граничным условиям защемления на краях  $x = 0, a$ . Более того, оно обладает функциональным произволом для удовлетворения граничным условиям на краях пластины  $y = 0, b$ : наличие произвольных постоянных  $A_i$ . Удовлетворение граничным условиям можно осуществить различными способами, например методом коллокаций, приравнивая нулю в выбранных точках на сторонах  $y = 0, b$  перемещения и углы поворота, либо использовать метод наименьших квадратов в дискретной или интегральной форме. В любом случае будет получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений для нахождения произвольных постоянных  $A_i$ . Эта система решается методом редукции, в котором все

неизвестные с индексом больше некоторой величины полагаются нулевыми. Это равносильно сохранению в решении (19) конечного числа членов  $M$  в экспоненциальном ряде. После определения всех неизвестных, которые являются комплексными величинами, истинным приближенным решением будет действительная часть в полученном комплексном представлении решения:

$$w(x, y) = \operatorname{Re} \left( \sum_{i=1}^M A_i \left[ L_{w,M}(x, \lambda_i) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, \lambda_i) - L_{w,V}(x, \lambda_i) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, \lambda_i) \right] e^{\lambda_i y} + \right. \\ \left. + \left[ L_{w,M}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,V}(a, 0) - L_{w,V}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} L_{w,M}(a, 0) \right] (A_0^0 + A_0^1 y + A_0^2 y^2 + A_0^3 y^3) + \right. \\ \left. + L_{w,M}(x, 0) M_{x,part}^0 + L_{w,V}(x, 0) V_{x,part}^0 + w_{part} \right). \quad (20)$$

**3. Анализ результатов.** Для исследования решения (20) была рассмотрена квадратная  $a = b$  ортотропная пластина, изготовленная из пятислойной кленовой фанеры со следующими физико-механическими характеристиками [25]:  $E'_x = 131.0 \times 10^3$  кг/см<sup>2</sup>,  $E'_y = 42.0 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup>,  $E'' = 5.1 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup>,  $G = 11.1 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup>. Корни характеристического уравнения (16) для этой пластины получены с помощью системы Maple. Приведем несколько первых корней:

$$\begin{aligned} & \pm 4.879518656 \pm 3.973222413i, \\ & \pm 8.345582719 \pm 6.291507075i, \\ & \pm 11.79682993 \pm 8.638283151i, \\ & \pm 15.24981777 \pm 10.98520627i, \\ & \pm 18.70277499 \pm 13.33204033i, \\ & \pm 22.15572849 \pm 15.67887783i, \\ & \pm 25.60868223 \pm 18.02571543i, \\ & \pm 29.06163597 \pm 20.37255303i, \\ & \pm 32.51458972 \pm 22.71939062i, \\ & \pm 35.96754346 \pm 25.06622821i, \\ & \pm 39.42049720 \pm 27.41306581i, \\ & \pm 42.87345094 \pm 29.75990340i. \end{aligned}$$

Здесь  $i$  обозначает мнимую единицу.

В табл. 1 представлены результаты расчетов для максимальных значений безразмерных прогиба  $w^* = w \frac{D_x}{qa^4}$ , изгибающих моментов  $M_x^* = \frac{M_x}{qa^2}$ ,  $M_y^* = \frac{M_y}{qa^2}$  и перерезывающих сил  $Q_x^* = \frac{Q_x}{qa}$ ,  $Q_y^* = \frac{Q_y}{qa}$  в зависимости от числа  $M$  удерживаемых членов экспоненциального ряда. При удержании более 500 членов ряда результаты расчетов для прогиба и моментов не менялись, тогда как для перерезывающих сил изменение происходило в седьмой значащей цифре.

Из приведенных результатов видно, что уже при удержании 4 членов ряда относительная погрешность прогиба  $w$  равна 0.009 %, моментов  $M_x$  и  $M_y$  — соответственно 0.17 и 7.0 %, перерезывающих сил  $Q_x$  и  $Q_y$  — 0.15 и 8.9 %. Как видим, для



Таблица 1. Безразмерные значения перемещения в центре пластинки, изгибающих моментов и перерезывающих сил в серединах зашечленных сторон пластинки при разном числе удерживаемых членов в решении

| $M$ | $w^*(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ | $M_x^*(0, \frac{b}{2})$ | $M_y^*(\frac{a}{2}, 0)$ | $Q_x^*(0, \frac{b}{2})$ | $Q_y^*(\frac{a}{2}, 0)$ |
|-----|---------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 4   | 0.002257876                     | -0.07568506             | -0.03504499             | 0.4935508               | 0.3311029               |
| 12  | 0.002257566                     | -0.075812327            | -0.03234379             | 0.4938346               | 0.3118534               |
| 28  | 0.002257678                     | -0.07581435             | -0.03273336             | 0.4942802               | 0.3046420               |
| 44  | 0.002257679                     | -0.07581438             | -0.03275615             | 0.4942802               | 0.3047921               |
| 60  | 0.002257679                     | -0.07581438             | -0.03275654             | 0.4942802               | 0.3045878               |
| 76  | 0.002257679                     | -0.07581438             | -0.03275534             | 0.4942802               | 0.3044216               |
| 92  | 0.002257679                     | -0.07581438             | -0.0327544              | 0.4942802               | 0.3043093               |
| 132 | 0.002257679                     | -0.07581438             | -0.03275167             | 0.4942802               | 0.3039078               |
| 212 | 0.002257679                     | -0.07581438             | -0.03275227             | 0.4942802               | 0.3039963               |
| 500 | 0.002257679                     | -0.07581438             | -0.03275244             | 0.4942802               | 0.3040332               |

максимальных величин прогиба, момента  $M_x$  и перерезывающей силы  $Q_x$  получены значения, хорошо согласующие с точными. Для момента  $M_y$  и перерезывающей силы  $Q_y$  относительная погрешность превышает 5%, допускаемую при технических расчетах. Однако при удержании 12 членов ряда относительная погрешность для этих величин уменьшается до приемлемых значений 1.26 и 2.51% соответственно. Вычисление  $M_y$  и  $Q_y$  с меньшей точностью, чем  $M_x$  и  $Q_x$ , объясняется простым фактом: последние рассчитываются на линии  $x = 0$ , на которой точно удовлетворены граничные условия, а поэтому и экспоненциальные ряды сходятся быстрее, чем ряды на линии  $y = 0$ , на которой граничные условия удовлетворяются приближенно.

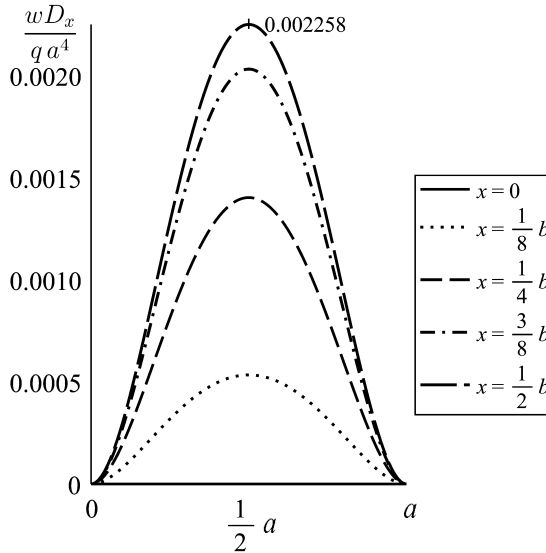


Рис. 1. Безразмерные перемещения  $\frac{wD_x}{qa^3}$  в различных сечениях ортотропной пластины

Графики безразмерных прогибов пластины представлены на рис. 1 в различных сечениях  $x = \text{const}$ . Видно, что на сторонах  $y = 0, b$  в рассчитанных сечениях перемещения равны нулю, что говорит об удовлетворении граничным условиям на этих сторонах.

Графики изгибающих моментов и перерезывающих сил показаны на рис. 2 и 3. Их максимальные значения достигаются на серединах сторон пластины. В углах пластины и моменты, и перерезывающие силы равны нулю и в окрестностях данных точек меняют знак. Для получения достоверных результатов в окрестностях угловых точек приходилось суммировать 500 членов ряда. Причем окончательный характер поведения моментов и перерезывающих сил в этих окрестностях начал обозначаться при удержании в сумме более 200 членов ряда (рис. 4 и 5). В табл. 2 приведены значения моментов и перерезывающих сил в угловой точке (0, 0) при разном количестве удерживаемых членов в рядах. Отметим, что для ортотропной пластины не наблюдается еще одно изменение знака при подходе к угловой точке, как в случае с изотропной пластиной в работах [9, 10].

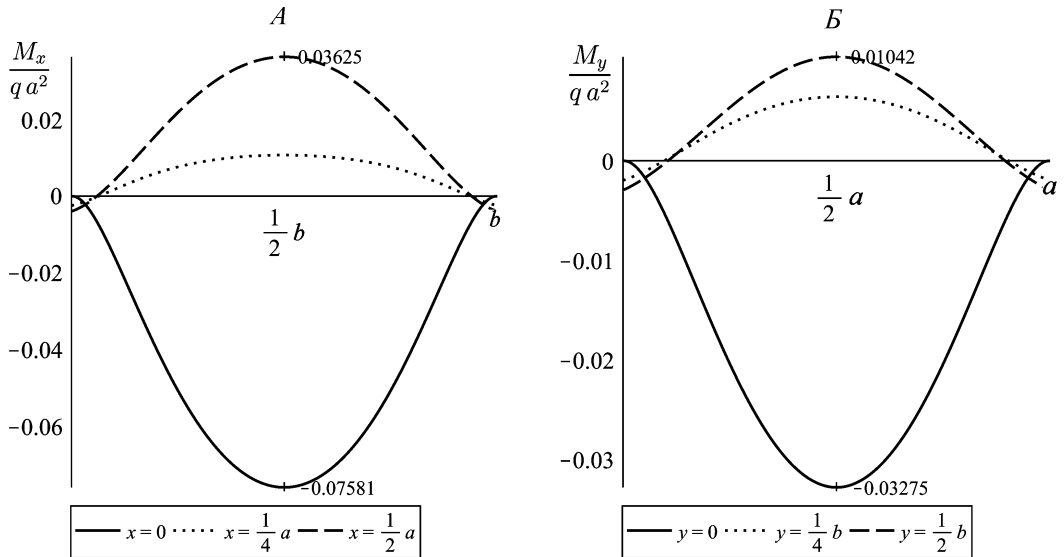


Рис. 2. Изгибающие моменты  $\frac{M_x(x, y)}{q a^2}$  (А) и  $\frac{M_y(x, y)}{q a^2}$  (Б) в различных сечениях ортотропной пластины

Таблица 2. Безразмерные значения изгибающих моментов и перерезывающих сил в угловой точке пластинки при разном числе удерживаемых членов в решении

| $M$ | $M_x^*(0, 0)$   | $M_y^*(0, 0)$     | $Q_x^*(0, 0)$  | $Q_y^*(0, 0)$    |
|-----|-----------------|-------------------|----------------|------------------|
| 44  | 0.0002843367    | 0.00001106960     | -0.02500088    | -0.001606894     |
| 60  | 0.0001701709    | 0.000006624976    | -0.01946553    | -0.00072574287   |
| 76  | 0.0001098057    | 0.000004274878    | -0.01544593    | -0.0002634972    |
| 92  | 0.00007483946   | 0.000002913597    | -0.012480389   | -0.0000082046398 |
| 132 | 0.00003364548   | 0.000001309862    | -0.007778558   | 0.0002848899     |
| 212 | 0.000009834077  | 0.000003828534    | -0.003499654   | 0.0003837374     |
| 500 | 0.0000001517346 | 0.000000005907223 | -0.00005463431 | 0.0002477406     |

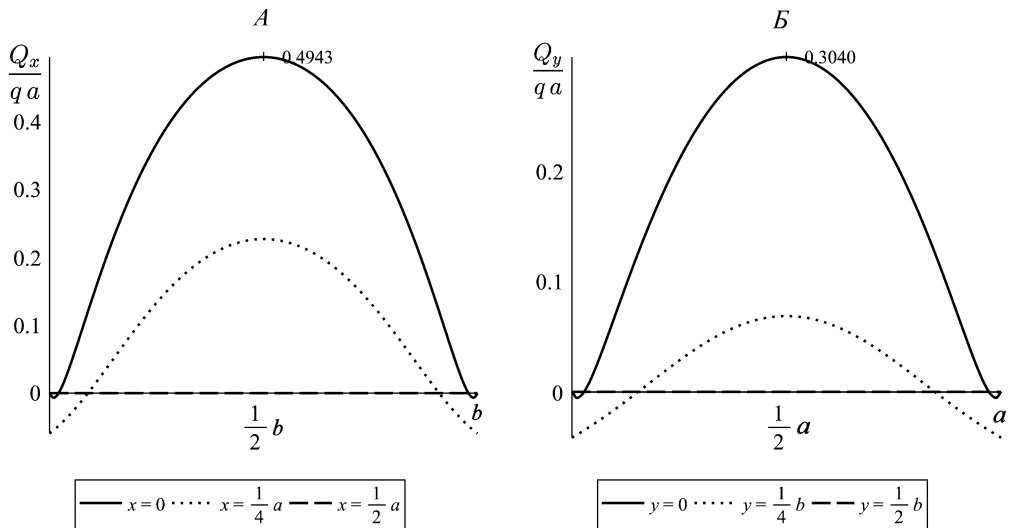


Рис. 3. Перерезывающие силы  $\frac{Q_x(x, y)}{qa}$  (А) и  $\frac{Q_y(x, y)}{qa}$  (Б) в различных сечениях ортотропной пластины

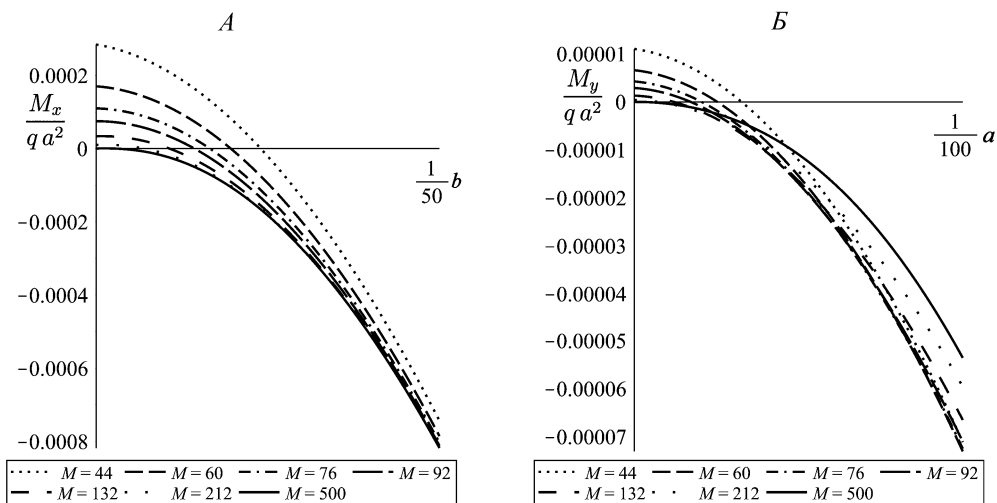


Рис. 4. Изгибающие моменты  $\frac{M_x(0, y)}{qa^2}$  (А) и  $\frac{M_y(x, 0)}{qa^2}$  (Б) в окрестности угловой точки (0,0) при разном числе удерживаемых членов ряда в решении

**4. Заключение.** Представленные результаты показывают достаточно быструю сходимость полученного в виде экспоненциального ряда решения: 4 члена ряда дают практически точное решение для максимального перемещения, а 12 членов позволяют вычислить и изгибающие моменты, и перерезывающие силы с достаточной для практики 5%-й точностью.

Более того, данное решение дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние ортотропной пластинки в угловых точках и их окрестностях.

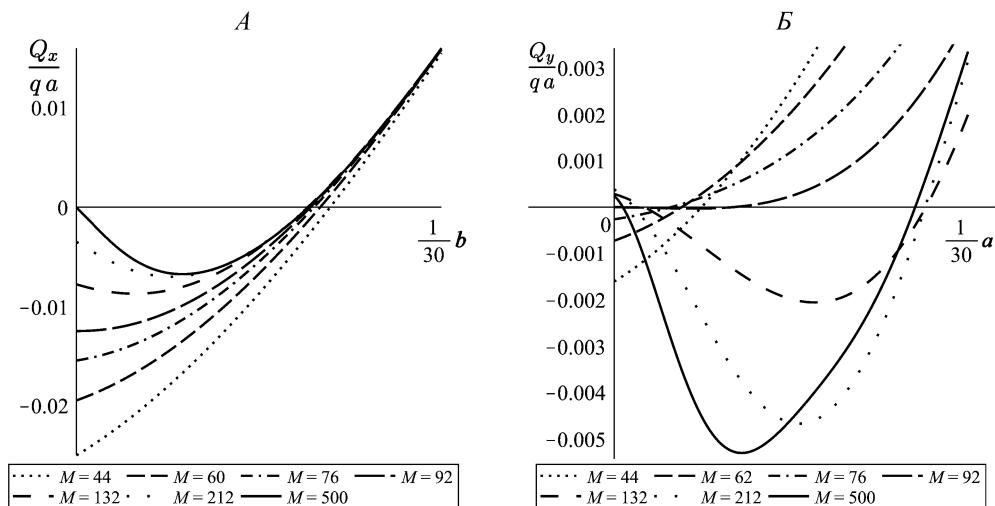


Рис. 5. Перерезывающие силы  $\frac{Q_x(0, y)}{qa}$  (А) и  $\frac{Q_y(x, 0)}{qa}$  (Б) в окрестности угловой точки (0,0) при разном числе удерживаемых членов ряда в решении

Правда, приходится при этом удерживать в рядах до 500 членов ряда. Отметим, что при проектировании тонких пластин важно иметь достоверные результаты для максимальных значений изгибающих моментов и перерезывающих сил. Предложенное в работе решение МНФ и позволяет определить эти величины с малыми вычислительными затратами.

В заключение сделаем одно замечание относительно приближенности полученного в работе решения МНФ. Неизвестные коэффициенты  $A_i$  в решении (19) определялись на основе процедуры метода коллокаций, а поэтому имеют приближенные значения. Однако их можно вычислить точно. Для этого следует воспользоваться технологией построения биортогональной системы функций для задач теории упругости [26]. Но такая задача достаточно сложна. Потому в данной работе построено приближенное аналитическое решение с использованием метода коллокаций.

## Литература

1. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Applied Mechanics Rev. 2003. Vol. 56. N 1. P. 33–85.
2. Ramachandra Rao B. S., Narasimham G. L. Eigenfunction analysis for bending of clamped rectangular orthotropic plates // Intern. Journal of Solids Structures. 1973. Vol. 9. P. 481–493.
3. Li R., Zhong Y., Tian B., Liu Yu. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol. 22. P. 1821–1827.
4. An C., Gu J., Su J. Exact solution of bending problem of clamped orthotropic rectangular thin plates // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2016. Vol. 38. N 2. P. 601–607.
5. Dalaei M., Kerr A. D. Analysis of clamped rectangular orthotropic plates subjected to a uniform lateral load // Intern. Journal of Mechanical Sciences. 1995. Vol. 37. N 5. P. 527–535.
6. Eburlitu F., Alatançang L. Analytical bending solutions of clamped orthotropic rectangular thin plates with the symplectic superposition method // Applied Mathematics and Mechanics. 2018. Vol. 39. N 3. P. 311–323.
7. Mbakogu F. C., Pavlovic M. N. Bending of clamped orthotropic rectangular plates: A variational symbolic solution // Computers and Structures. 2000. Vol. 77. N 2. P. 117–128.

8. *Dalaei M., Kerr A. D.* Analysis of clamped rectangular orthotropic plates subjected to a uniform lateral load // Intern. Journal of Mechanical Sciences. 1995. Vol. 37. N 5. P. 527–535.
9. *Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A.* Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate // Journal of Engineering Mathematics. 2001. Vol. 40. P. 377–398.
10. *Меleshko В. В.* Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2004. Т. 47. № 3. С. 45–68.
11. *Агарёв В. А.* Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 204 с.
12. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 495 с. (*Lur'e A. I.* Three dimensional problems of theory of elasticity.)
13. *Matrosov A. V.* Computational peculiarities of the method of initial functions // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2019. P. 37–51.
14. *Суратов В. А., Матросов А. В.* Метод начальных функций в расчете защемленной пластинки // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4(20). № 1. С. 238–244.
15. *Goloskokov D. P., Matrosov A. V.* Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // AIP Conference Proceedings. 2018. N 070012.
16. *Matrosov A. V., Suratov V. A.* Stress-strain state in the corner points of a clamped plate under uniformly distributed normal load // Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 36. N 1. P. 124–146.
17. *Matrosov A. V.* A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures // 2014 Intern. Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA-2014). Proceedings. 2014. P. 104–105.
18. *Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G.* A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71. N 6. P. 199.
19. *Matrosov A. V.* A superposition method in analysis of plane construction // 2015 Intern. Conference on “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP-2015). Proceedings. 2015. P. 414–416. N 7342156.
20. *Matrosov A. V., Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P.* Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71. N 1. P. 24.
21. *Kovalenko M. D., Abrukov D. A., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G.* Exact solutions of boundary value problems in the theory of plate bending in a half-strip: basics of the theory // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2019. Vol. 70. N 4. P. 98.
22. *Goloskokov D. P., Matrosov A. V.* Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // 2015 Intern. Conference on “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP-2015). Proceedings. 2015. P. 382–385. N 7342169.
23. *Matrosov A. V., Shirunov G. N.* Analyzing thick layered plates under their own weight by the method of initial functions // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 31. N 1–2. P. 36–39.
24. *Matrosov A. V., Shirunov G. N.* Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate // 2014 Intern. Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA-2014). Proceedings. 2014. P. 96. N 6893300.
25. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки / пер. с англ. Г. С. Шапиро; под ред. И. К. Снитко. М.: Наука, 1966. 636 с. (*Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. 2<sup>nd</sup> ed.)
26. *Kovalenko M. D.* On a property of the biorthogonal expansions over homogeneous solutions // Doklady Akademii Nauk. 1997. Vol. 352. N 2. P. 193–195.

Статья поступила в редакцию 21 мая 2021 г.

Статья принята к печати 13 октября 2021 г.

Контактная информация:

*Голоскоков Дмитрий Петрович* — д-р техн. наук, проф.; dpg1954@mail.ru

*Матросов Александр Васильевич* — д-р физ.-мат. наук, доц.; avmatrosov@mail.ru,  
a.matrosov@spbu.ru

# Method of initial functions in analyses of the bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour

D. P. Goloskokov<sup>1</sup>, A. V. Matrosov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications, 22, pr. Bol'shevnikov, St. Petersburg, 193232, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Method of initial functions in analyses of the bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 330–344. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.402> (In Russian)

In this paper, the method of initial functions (MIF) is used to solve the problem of bending an orthotropic plate clamped along all four sides, under the influence of a normal load uniformly distributed over its surface. The solution is obtained in the form of an exponential series with unknown coefficients. The algorithm of the method is such that on two opposite sides the boundary conditions (equality to zero of displacements and angles of rotation) are satisfied exactly, while on a pair of two other opposite sides the boundary conditions are satisfied with an arbitrary degree of accuracy by the collocation method. All studies were carried out using the Maple analytical computing system. This system allows you to perform calculations with an arbitrary mantissa in the representation of real numbers. Calculations with a long mantissa overcome one of the main disadvantages of the MIF: the computational instability of its algorithm, which arises under certain parameters of the problem. The computational stability of the obtained solution is investigated, as well as the stress-strain state in the neighbourhood of the corner points of the plate. It is shown that the moments and shear forces tend to zero when approaching the corners of the plate with a single change in sign.

*Keywords:* orthotropic plate, bending of a thin plate, clamped plate, method of initial functions, computer algebra, Maple.

## References

1. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. *Applied Mechanics Rev.*, 2003, vol. 56, no. 1, pp. 33–85.
2. Ramachandra Rao B.S., Narasimham G.L. Eigenfunction analysis for bending of clamped rectangular orthotropic plates. *Intern. Journal of Solids Structures*, 1973, vol. 9, pp. 481–493.
3. Li R., Zhong Y., Tian B., Liu Yu. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates. *Applied Mathematics Letters*, 2009, vol. 22, pp. 1821–1827.
4. An C., Gu J., Su J. Exact solution of bending problem of clamped orthotropic rectangular thin plates. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2016, vol. 38, no. 2, pp. 601–607.
5. Dalaei M., Kerr A. D. Analysis of clamped rectangular orthotropic plates subjected to a uniform lateral load. *Intern. Journal of Mechanical Sciences*, 1995, vol. 37, no. 5, pp. 527–535.
6. Eburlitu F., Alatacang L. Analytical bending solutions of clamped orthotropic rectangular thin plates with the symplectic superposition method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, vol. 39, no. 3, pp. 311–323.
7. Mbakogu F.C., Pavlovic M.N. Bending of clamped orthotropic rectangular plates: A variational symbolic solution. *Computers and Structures*, 2000, vol. 77, no. 2, pp. 117–128.
8. Dalaei M., Kerr A. D. Analysis of clamped rectangular orthotropic plates subjected to a uniform lateral load. *Intern. Journal of Mechanical Sciences*, 1995, vol. 37, no. 5, pp. 527–535.
9. Meleshko V.V., Gomilko A.M., Gourjii A. A. Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate. *Journal of Engineering Mathematics*, 2001, vol. 40, pp. 377–398.
10. Meleshko V.V. Bigarmonicheskaia zadacha dlia priamougol'nika: istoriia i sovremennost'

[Biharmonic problem for a rectangle: history and modernity]. *Mat. metody i fiz.-meh. polja* [Math. methods and phys.-mech. fields], 2004, vol. 47, no. 3, pp. 45–68. (In Russian)

11. Agaryov V. A. *Metod nachal'nykh funktsii' dlia dvumernykh kraevykh zadach teorii uprugosti* [Method of initial functions for two-dimensional boundary value problems of elasticity theory]. Kiev, Publ. House AS UkrSSR, 1963, 204 p. (In Russian)

12. Lur'e A. I. *Three dimensional problems of theory of elasticity*. New York, Willey Publ., 1964, 491 p. (Rus. ed.: Lur'e A. I. *Prostranstvenny'e zadachi teorii uprugosti*. Moscow, Gostechizdat Publ., 1955, 495 p.)

13. Matrosov A. V. Computational peculiarities of the method of initial functions. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2019, pp. 37–51.

14. Suratov V. A., Matrosov A. V. Metod nachal'nykh funktsii' v raschete zashchemlennoi' plastinki [The method of initial functions in analysing a clamped plate]. *Processy upravleniya i ustojchivost'* [Control Processes and Stability], 2017, vol. 4, no. 20, pp. 238–244. (In Russian)

15. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*, 2018, no. 070012.

16. Matrosov A. V., Suratov V. A. Stress-strain state in the corner points of a clamped plate under uniformly distributed normal load. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 36, no. 1, pp. 124–146.

17. Matrosov A. V. A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures. *2014 Intern. Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA-2014). Proceedings*, 2014, pp. 104–105.

18. Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2020, vol. 71, no. 6, p. 199.

19. Matrosov A. V. A superposition method in analysis of plane construction. *2015 Intern. Conference on "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov (SCP-2015). Proceedings*, 2015, pp. 414–416, no. 7342156.

20. Matrosov A. V., Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2020, vol. 71, no. 1, p. 24.

21. Kovalenko M. D., Abrukov D. A., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. Exact solutions of boundary value problems in the theory of plate bending in a half-strip: basics of the theory. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2019, vol. 70, no. 4, p. 98.

22. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *2015 Intern. Conference on "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov (SCP-2015). Proceedings*, 2015, pp. 382–385, no. 7342169.

23. Matrosov A. V., Shirunov G. N. Analyzing thick layered plates under their own weight by the method of initial functions. *Materials Physics and Mechanics*, 2017, vol. 31, no. 1–2, pp. 36–39.

24. Matrosov A. V., Shirunov G. N. Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate. *2014 Intern. Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA-2014). Proceedings*, 2014, p. 96, no. 6893300.

25. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. 2<sup>nd</sup> ed. New York, McGraw-Hill Publ., 1987, 580 p. (Rus. ed.: Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki*. Moscow, Nauka Publ., 1966, 636 p.)

26. Kovalenko M. D. On a property of the biorthogonal expansions over homogeneous solutions. *Proceedings of Academy Sciences*, 1997, vol. 352, no. 2, pp. 193–195.

Received: May 21, 2021.

Accepted: October 13, 2021.

Authors' information:

*Dmitry P. Goloskokov* — Dr. Sci. in Engineering, Professor; dpg1954d@mail.ru

*Alexander V. Matrosov* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor; avmatrosov@mail.ru, a.matrosov@spbu.ru