

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 621.3.038 (615+617)
MSC 78M50

Особенности разработки мультипольных элементов на основе постоянных магнитов для систем транспортировки заряженных частиц. I. Методика предварительного выбора конфигурации и параметров магнитов*

В. М. Амосков¹, В. Н. Васильев¹, Е. И. Гапионов¹, Г. Г. Гульбекян², Н. С. Едаменко³, И. А. Иваненко², Н. Ю. Казаринов², И. В. Калагин², М. В. Капаркова¹, В. П. Кухтин¹, Е. А. Ламзин¹, А. А. Макаров¹, А. Н. Неженцев¹, Д. А. Овсянников³, Д. А. Овсянников (мл.)^{1,4}, Н. Ф. Осипов², И. Ю. Родин¹, С. Е. Сычевский^{1,3}, А. А. Фирсов¹

¹ НИИ электрофизической аппаратуры им. Д. В. Ефремова, Российская Федерация, 196641, Санкт-Петербург, Дорога на Металлострой, 3

² Объединенный институт ядерных исследований, Российская Федерация, 141980, Московская область, Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6

³ Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

⁴ Университет промышленных технологий и дизайна, Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18

Для цитирования: *Амосков В. М., Васильев В. Н., Гапионов Е. И., Гульбекян Г. Г., Едаменко Н. С., Иваненко И. А., Казаринов Н. Ю., Калагин И. В., Капаркова М. В., Кухтин В. П., Ламзин Е. А., Макаров А. А., Неженцев А. Н., Овсянников Д. А., Овсянников Д. А. (мл.), Осипов Н. Ф., Родин И. Ю., Сычевский С. Е., Фирсов А. А.* Особенности разработки мультипольных элементов на основе постоянных магнитов для систем транспортировки заряженных частиц. I. Методика предварительного выбора конфигурации и параметров магнитов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 313–329.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.401>

Работа посвящена разработке магнитной линзы на основе постоянных магнитов для канала вывода пучков заряженных частиц из циклотрона. На начальном этапе для анализа и синтеза магнитной системы линзы используется упрощенная математическая модель постоянных магнитов квадратного и круглого сечений. Прямая задача магнитостатики для линзы решается путем численного моделирования с помощью комплексов программ КОПРОТ и KLONDIKE, базирующихся на дифференциальной и интегральной постановках задач соответственно; обратная задача — минимизацией регуляризирующего функционала. Рассмотрены возможные способы коррекции решения с учетом

* Работа выполнена при частичной поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект INI_2021, ID:73371205).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

практических требований. Приведен пример решения задачи с использованием упрощенной модели. Проведены учет и анализ формы и магнитного состояния постоянных магнитов. Представлены результаты предварительных расчетов трехмерного поля. Предложенная методика может служить базой комплексного подхода для создания мультипольных элементов систем транспортировки заряженных частиц на основе постоянных магнитов.

Ключевые слова: постоянные магниты, квадрупольная линза, система вывода пучка, упрощенная модель постоянных магнитов, прямая и обратная задачи магнитостатики, вычислительные комплексы, численное моделирование.

1. Введение. Для ряда систем транспортировки заряженных частиц в ускорителях может оказаться эффективным применение мультипольных магнитов с неизменными во времени распределениями поля [1]. В этом случае целесообразно использование высококоэрцитивных постоянных магнитов (ПМ), которые характеризуются сравнительно долговременной стабильностью свойств, отсутствием значительных вариаций температуры из-за отсутствия внутренних источников тепловыделения, удобством и надежностью эксплуатации.

В настоящее время в лаборатории ядерных реакций Объединенного института ядерных исследований (ЛЯР ОИЯИ, г. Дубна, РФ) ведутся работы по созданию циклотронного комплекса ДЦ140, предназначенного для решения широкого круга прикладных задач [2, 3]. В процессе вывода из циклотрона ионный пучок проходит область с резко спадающим краевым магнитным полем. Для компенсации горизонтальной дефокусировки в системе вывода ДЦ140 в области высокого уровня поля будет применен пассивный магнитный канал, а в области низкого уровня поля — квадрупольная линза на постоянных магнитах. Необходимость использования ПМ в этой области обусловлена относительно невысокой величиной рассеянного поля циклотрона, не позволяющей создать компенсирующий градиент магнитного поля с помощью стальных магнитных масс, как в случае пассивного магнитного канала.

В данной работе рассматривается возможность разработки для канала вывода пучков заряженных частиц из циклотрона магнитной линзы, сформированной системой из постоянных магнитов. Требуется обеспечить в рабочей области (апертуре) магнита квадрупольное поле 60×25 мм с градиентом 9 Тл/м.

Дополнительные «естественные» требования (или ограничения) к постоянным магнитам априори сводятся к следующим. Магниты должны быть:

- желателен вид параллелепипеда с близкой к квадратной формой поперечного сечения;

- с «разумными» намагниченностью и размерами;
- использованы в «разумном» количестве;
- жестко закреплены в немагнитной обечайке.

Требуется также, чтобы магниты были одинаковыми (либо не более 2–3 видов) и выбирались из производимых и коммерчески поставляемых ПМ.

Допустимая для размещения ПМ область: 86–156 мм в горизонтальном направлении, 36–102 мм в вертикальном направлении. Эффективная длина линзы — 30 см.

Синтез магнитной системы (определение конфигурации и параметров источников поля магнитной системы по требуемому распределению поля в рабочей области) квадруполя выполняется с использованием упрощенной аналитической 2D-модели каждого ПМ. Анализ решений, полученных с учетом указанных «естественных» ограничений, а также технологических и финансовых соображений, позволяет выбрать наиболее приемлемый начальный вариант расположения ПМ. Прямая задача маг-

нитостатики для этого варианта решается на основе как упрощенной аналитической модели, так и достаточно точных численных моделей. Найденное решение прямой задачи применяется, в частности, для учета эффектов размагничивания и построения трехмерной вычислительной модели. В свою очередь, 3D-модель дает возможность уточнить влияние распределения магнитного поля, обусловленного конечными размерами линзы, на эффекты размагничивания и степень приближения сформированного поля к требуемому.

В дальнейшем 3D-модель используется для траекторного анализа так же по его результатам для соответствующей корректировки требований к квадруполью. Однако эти результаты выходят за рамки данной статьи.

2. Упрощенная математическая модель постоянных магнитов. Рассмотрим бесконечно длинные диаметрально намагниченные магниты (т. е. однородно намагниченные магниты с вектором намагниченности, перпендикулярным продольной оси магнита) квадратного и круглого поперечного сечений. Можно показать [4], что в двумерном приближении — в плоскости $z = 0$ (r, φ, z — цилиндрическая система координат, ось z проходит через центр тяжести постоянного магнита) — поле ПМ квадратного сечения на заданном расстоянии r , превышающим характерные размеры поперечного сечения магнита в несколько раз, с достаточной на практике точностью совпадает с полем цилиндрического магнита, который имеет такие же площади поперечного сечения и намагниченности.

Приближение цилиндрических магнитов будет применяться на начальном этапе для анализа и синтеза магнитной системы линзы на основе аналитических расчетов. В дальнейшем для детального численного моделирования магнитостатических полей предполагается использование комплексов программ КОМПОТ и KLONDIKE [5–8], отвечающих дифференциальной и интегральной постановкам задач.

В двумерном приближении представим поле бесконечно длинного диаметрально намагниченного цилиндрического магнита следующим образом [9]:

$$\mathbf{H} = \left((\mathbf{n}, \mathbf{M})\mathbf{n} - \frac{\mathbf{M}}{2} \right) \frac{R^2}{r^2} = \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{m})\mathbf{n} - \mathbf{m}/2}{\pi r^2}, \quad (1)$$

где \mathbf{M} — вектор намагниченности ПМ; R — радиус цилиндрического магнита; $\mathbf{m} = \mathbf{M} \cdot \pi R^2$ — удельный дипольный магнитный момент на единицу длины магнита; \mathbf{r} — радиус-вектор в плоскости $z = 0$, проведенный от оси z в точку наблюдения; $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от оси z до точки наблюдения, при этом $r > R$; $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — направление (единичный вектор) в плоскости $z = 0$ от оси z в точку наблюдения.

Следует отметить, что применение известного аналитического представления поля, создаваемого прямоугольным параллелепипедом с квадратным поперечным сечением [4], менее удобно в силу его существенно более сложного вида без заметного выигрыша в точности. В частности, поле от повернутого магнита квадратного сечения не равно полю магнита, в котором повернут только вектор намагниченности, в то время как для цилиндрического магнита этот факт имеет место. Поэтому в выражение поля для параллелепипеда в явном виде входят его размеры и намагниченность.

Как видно из (1), в отличие от параллелепипеда поле цилиндрического магнита может быть выражено через магнитный момент. Поэтому на начальном этапе все ПМ можно эквивалентировать бесконечно тонкими стержнями с соответствующими магнитными моментами.

3. Методика синтеза магнитной системы линзы на основе упрощенной модели ПМ. Итак, бесконечно тонкие магниты с неизвестными пока еще векторами

магнитных моментов располагаются в заранее выбранных точках в плоскости $z = 0$ вокруг апертуры 60×25 мм.

В рассматриваемом случае в плоскости $z = 0$ для описания координат точек наблюдения, центров тяжести поперечных сечений постоянных магнитов, границ апертуры и немагнитной обечайки используется двумерная декартова система координат X, Y . Центр апертуры принят за начало системы отсчета.

Выбор положения магнитов обуславливается несколькими факторами.

Во-первых, чем чаще (с меньшим шагом) расположены магниты, тем точнее может быть сформировано требуемое распределение поля, но

- тем большее количество магнитов требуется для формирования этого поля (технологически более трудоемко и больше статистическая погрешность за счет разброса свойств реальных магнитов);

- тем меньше должны быть размеры магнитов, чтобы избежать их перекрытия (также хуже с технологической точки зрения);

- в таком случае магниты должны либо иметь большую намагниченность, либо располагаться в несколько рядов.

Последний тезис базируется на двух предыдущих. Цепочка логических заключений кратко сводится к следующей.

Пусть (условно) шаг уменьшен вдвое,

⇒ (следовательно) размеры магнитов должны быть также вдвое меньше (чтобы они не перекрывали друг друга);

⇒ площади магнитов уменьшатся в 4 раза;

⇒ если намагниченность оставить прежней, магнитные моменты магнитов снижаются в 4 раза;

⇒ магнитный момент, приходящийся на единицу длины периметра апертуры, уменьшится в 2 раза (число магнитов по периметру хоть и удвоилось, но магнитный момент каждого стал меньше в 4 раза);

⇒ соответственно в 2 раза уменьшатся и поле, и градиент в рабочей области;

⇒ чтобы скомпенсировать это уменьшение момента на периметр, нужно либо удвоить момент (значит, намагниченность) каждого магнита, либо расположить второй такой же (или подобный) ряд магнитов за первым (причем его эффективность будет ниже, так как он находится дальше от апертуры).

Во-вторых, чем дальше от апертуры располагаются магниты, тем более гладко и соответственно точнее сформированное поле, но в этом случае для формирования требуемого градиента магниты также должны иметь или большую намагниченность, или большее поперечное сечение.

С учетом симметрии в расположении магнитов достаточно рассмотреть первый квадрант ($x > 0, y > 0$). В табл. 1 показано соответствие положений центров (x, y) ПМ и магнитных ориентаций φ в остальных квадрантах. Угол φ характеризует ориентацию магнитных моментов \mathbf{m} и отсчитывается от оси X против часовой стрелки.

Таблица 1. Соответствие положений и ориентаций магнитов в четырех квадрантах

Квадрант	x	y	φ
I	x_I	y_I	φ_I
II	$x_{II} = -x_I$	$y_{II} = y_I$	$\varphi_{II} = -\varphi_I$
III	$x_{III} = -x_I$	$y_{III} = -y_I$	$\varphi_{III} = \varphi_I - 180^\circ$
IV	$x_{IV} = x_I$	$y_{IV} = -y_I$	$\varphi_{IV} = 180^\circ - \varphi_I$

В результате анализа различных (иногда противоречивых) технических, технологических и финансовых ограничений был выбран вариант из 24 магнитов, представленный на рис. 1, с координатами центров поперечных сечений шести магнитов первого квадранта: (8, 32); (24, 32); (40, 32); (54, 24); (68, 16) и (54, 8) мм. Такой конфигурации соответствуют 6 неизвестных векторов магнитных моментов или 12 неизвестных величин компонент этих моментов, которые составляют вектор \mathbf{X} .

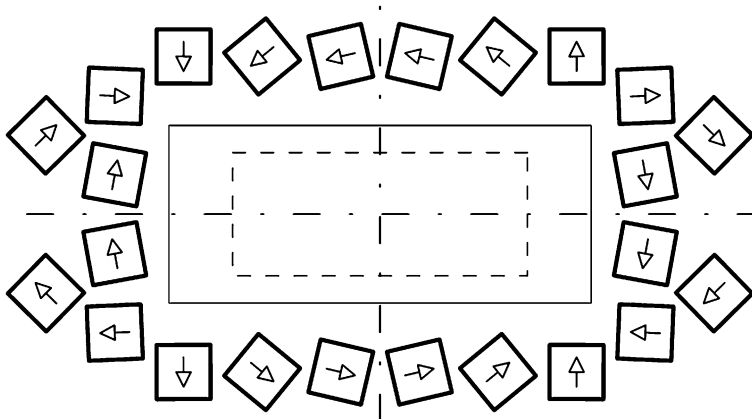


Рис. 1. Сечение системы из 24 постоянных магнитов сечением 11×11 мм с намагниченностью 1.268 Тл

Стрелками показаны направления намагниченностей. Пунктиром обозначена рабочая область 60×25 мм, предельно допустимые границы области размещения магнитов: 86×36 и 156×102 мм.

Площадь внутри апертуры 60×25 мм покрыта регулярной равномерной сеткой точек наблюдения с шагом 1 мм, в которых требуется сформировать квадрупольное поле ($G = 9$ Тл/м)

$$\mathbf{B}_0(x, y) = (G \cdot y, G \cdot x). \quad (2)$$

Для этого множества из 360 точек с (x, y) -координатами: (0.5, 0.5); (1.5, 0.5); (2.5, 0.5); ...; (28.5, 11.5); (29.5, 11.5) мм заданы 360 известных векторов индукции магнитного поля, определяемых требованиями (2), или 720 известных компонент поля (по две на точку: B_x и B_y). Эти 720 известных величин составляют вектор \mathbf{Y}_0 .

Зная значения компонент векторов магнитных моментов всех ПМ, можно определить компоненты поля во всех выбранных точках наблюдения, используя в данном случае упрощенную математическую модель постоянных магнитов (1). Эти величины составят вектор \mathbf{Y} , линейно зависящий от значений вектора \mathbf{X} :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (3)$$

где \mathbf{A} — прямоугольная матрица размерности 12×720 , коэффициенты которой вычисляются с помощью аналитического выражения поля цилиндрического магнита (1) в точках наблюдения в апертуре. Учитывается положение каждого магнита в первом квадранте и магнитов в других квадрантах.

Задача синтеза магнитной системы линзы состоит в том, чтобы найти такой вектор \mathbf{X} (комбинацию магнитных моментов), при котором вектор \mathbf{Y} (3) полей, создаваемых магнитами, был максимально близок к \mathbf{Y}_0 (требуемому распределению поля)

при условии, что дипольные магнитные моменты постоянных магнитов должны быть равны между собой по модулю (условие технологичности).

Вектор \mathbf{X} неизвестных может быть разбит на подвекторы $\mathbf{X}^{(k)}$, по два значения в каждом, которые соответствуют двум компонентам (m_x и m_y) магнитных моментов.

Решение задачи ищется как результат минимизации функционала Φ :

$$\Phi = \max_k \left(\left\{ \left\| X^{(k)} \right\|_2^2 \right\} \right) = \max_k \left(\left\{ \sum_{i=2k-1}^{2k} X_i^2 \right\} \right) \quad (4)$$

при заданном значении другого функционала Ψ :

$$\Psi = \|Y - Y_0\|_2^2 = \sum_j \left(\sum_i A_{ji} X_i - Y_{0j} \right)^2 = \text{const.} \quad (5)$$

Минимальная величина функционала (4) достигается в случае, когда аргументы функции «max» стремятся к равным между собой значениям. Константа Ψ в (5) характеризует отклонение полученного распределения поля от требуемого.

Чем меньше поле удовлетворяет требуемому распределению (чем больше величина Ψ), тем лучше выполняется условие технологичности (равенство по модулю магнитных моментов ПМ) и тем меньше эти моменты. Можно ожидать, что, начиная с некоторого значения Ψ , все магнитные моменты будут одинаковыми по величине (но разными по направлению).

Для поиска численного решения (4), (5) применен регуляризованный метод наименьших квадратов [10]. Алгоритмически процесс решения сводится к минимизации регуляризирующего функционала $\|W_Y(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{Y}_0)\|_2^2 + \alpha\|W_X\mathbf{X}\|_2^2$ с параметром регуляризации α и диагональными матрицами весовых коэффициентов W_X , W_Y для каждой компоненты. Весовые коэффициенты W_X , W_Y в данном случае подбираются итерационно.

При нахождении решения обратной задачи нет смысла (технического, технологического или экономического) в завышении требований к качеству (в частности, ориентациям векторов намагниченности и степени близости между собой величин их модулей) решений обратной задачи. На практике эта точность определяется точностью обеспечения аналогичных параметров производимых и коммерчески поставляемых магнитов.

В случае необходимости приблизить распределение намагниченностей ПМ некоторым заданным распределением можно ввести соответствующий известный (заданный) вектор \mathbf{X}_0 . Функционал (4) примет вид

$$\Phi = \max_k \left(\left\{ \left\| X^{(k)} / X_0^{(k)} \right\|_2^2 \right\} \right) = \max_k \left(\left\{ \sum_{i=2k-1}^{2k} (X_i / X_0^{(k)})^2 \right\} \right). \quad (6)$$

В результате решения задачи (6) при заданном Ψ получится набор магнитных моментов $m^{(k)}$, отличающийся от заданного набора $m_0^{(k)}$ (выбранного из номенклатуры ПМ потенциального производителя) на постоянный множитель: $m^{(k)} / m_0^{(k)} = c = \text{const}$. Если $c \neq 1$, то возможны такие способы коррекции решения:

1) можно попытаться итерационно подобрать такое значение Ψ , при котором $c = 1$. Может оказаться, что получающаяся при этом точность формирования поля (за которую отвечает функционал Ψ) недостаточна;

2) тогда можно повторить (итерационно) решение задачи с положениями центров магнитов, пропорционально (на множитель, близкий к единице) сдвинутых относительно центра координат (при этом необходимо контролировать, чтобы магниты не вышли за разрешенную область), и выбрать то, при котором $c = 1$ (и Ψ приемлемо);

3) можно сразу найти новое решение, используя следующие свойства магнитного поля в магнитных системах. Рассмотрим магнитную систему, в которой все геометрические размеры (в том числе и размеры магнитов в каждом направлении) изменены в c_d раз (d — dimensions), а все величины намагниченности магнитов сохраняются. Магнитные моменты магнитов изменятся в c_d^2 раз (пропорционально изменению площади). Поскольку расстояния между подобными точками (с одинаковыми полями) меняются в c_d раз, то градиенты полей (dB/dx , dB/dy) в подобной системе изменятся в $1/c_d$ раз. Опишем теперь другую систему, в которой все размеры сохраняются, а намагниченности (и магнитные моменты) меняются в c_M раз (M — magnetization). В ней все поля и все градиенты также меняются в c_M раз. Представим теперь комбинацию этих двух преобразований. Магнитные моменты в такой системе изменятся по сравнению с исходными в $c_d^2 c_M$ раз, а градиенты поля — в c_M/c_d раз. Вернемся к исходной системе, в которой $m^{(k)}/m_0^{(k)} = c$. Цель — отмасштабировать ее так, чтобы моменты $m^{(k)}$ приняли значение $m_0^{(k)}$, т. е. изменились в $1/c$ раз, а градиент поля в рабочей области остался прежним (так как из условия (5) он уже был достигнут с точностью, обусловленной Ψ). Таким образом, $c_d^2 c_M = 1/c$, $c_M/c_d = 1$. Отсюда $c_d = c_M = 1/c^{1/3}$. Если, к примеру, в результате решения (6) получились магниты на 10% сильнее, чем имеющиеся в наличии ($c = 1.1$), то координаты центров всех магнитов следует уменьшить, умножив на коэффициент $c_d = 1/c^{1/3} = 0.9687$.

Можно использовать комбинацию способов, применив сначала третий способ для определения нового положения магнитов, а затем первый или второй для уточнения решения.

4. Пример синтеза магнитной системы линзы на основе упрощенной модели ПМ. Следует отметить, что решение задачи выбора параметров постоянных магнитов получено в терминах величин удельных магнитных моментов на единицу длины магнита. Составляющие магнитный момент намагниченность M и площадь поперечного сечения $a \times a$ мультипликативно обеспечивают относительную свободу выбора величин M и a для каждого магнита согласно $\mu_0 m = \mu_0 M \cdot a^2 = \text{const}$.

В табл. 2 представлено найденное решение, при котором магнитные моменты всех магнитов становятся одинаковыми и соответствуют магнитам квадратного сечения $a = 11$ мм с намагниченностью 1.268 Тл, а $\Psi = 2.8 \cdot 10^{-5}$ Тл².

Таблица 2. Параметры магнитов квадруполя (первый квадрант)

Магнит	x, y , мм	$\mu_0 m_x, \mu_0 m_y$, Тл·мм ²	$\mu_0 M$, Тл	φ , °	a , мм
1	8.0, 32.0	-149.40, 34.96	1.268	166.83	11.0
2	24.0, 32.0	-118.62, 97.32	1.268	140.63	11.0
3	40.0, 32.0	-0.60, 153.44	1.268	90.22	11.0
4	54.0, 24.0	153.31, 6.28	1.268	2.35	11.0
5	68.0, 16.0	109.49, -107.49	1.268	-44.47	11.0
6	54.0, 8.0	27.64, -150.93	1.268	-79.62	11.0

Рис. 1 соответствует сечению сформированной системы постоянных магнитов.

В табл. 3 приведены варианты соответствия M и a (т. е. решений задачи синтеза магнитной системы квадруполя), обеспечивающие необходимый магнитный момент.

Таблица 3. Варианты соответствия намагниченности и поперечного размера магнита

$\mu_0 M$, Тл	a , мм	$\mu_0 M$, Тл	a , мм	$\mu_0 M$, Тл	a , мм	$\mu_0 M$, Тл	a , мм	$\mu_0 M$, Тл	a , мм
1.20	11.307	1.25	11.079	1.30	10.864	1.35	10.661	1.40	10.468
1.21	11.260	1.26	11.035	1.31	10.822	1.36	10.621		
1.22	11.214	1.27	10.991	1.32	10.781	1.37	10.582		
1.23	11.168	1.28	10.948	1.33	10.740	1.38	10.544		
1.24	11.123	1.29	10.906	1.34	10.700	1.39	10.506		

На рис. 2–4 показаны сформированное поле (покомпонентно B_x , B_y и по модулю $|\mathbf{B}|$) и его относительное отклонение от идеального квадрупольного ($|\delta\mathbf{B}|/|\mathbf{B}|$) в первом квадранте апертуры 60×25 мм. Полученные распределения, очевидно, представляют собой решения прямой задачи магнитостатики в системе с цилиндрическими магнитами. Максимальное отклонение поля в рабочей области не превышает 1 %, среднее отклонение — 0.1–0.2 %.

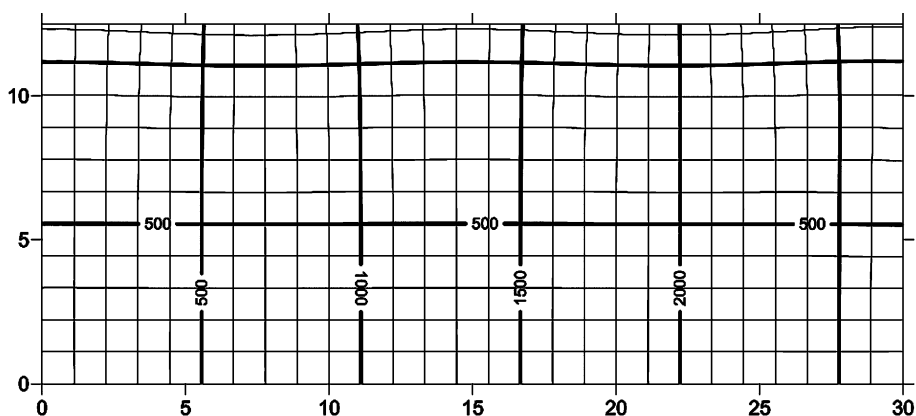


Рис. 2. Изолинии компонент B_x (горизонтальные линии) и B_y (вертикальные) сформированного поля (в Гс) в первом квадранте апертуры 60×25 мм

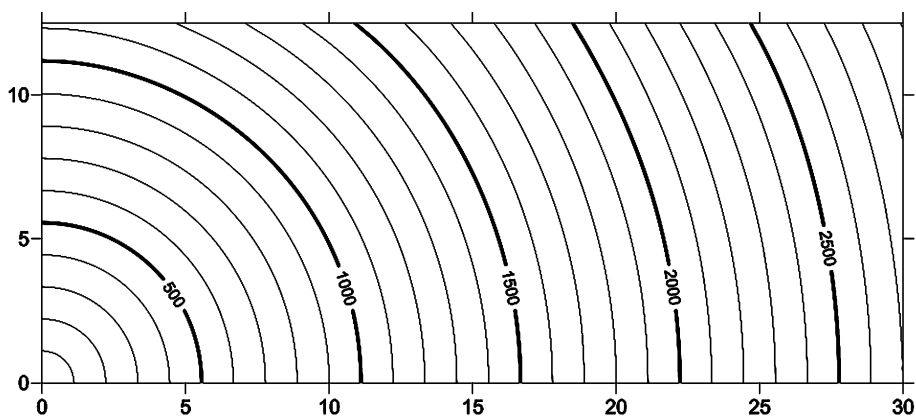


Рис. 3. Изолинии сформированного поля $|\mathbf{B}|$ (в Гс)

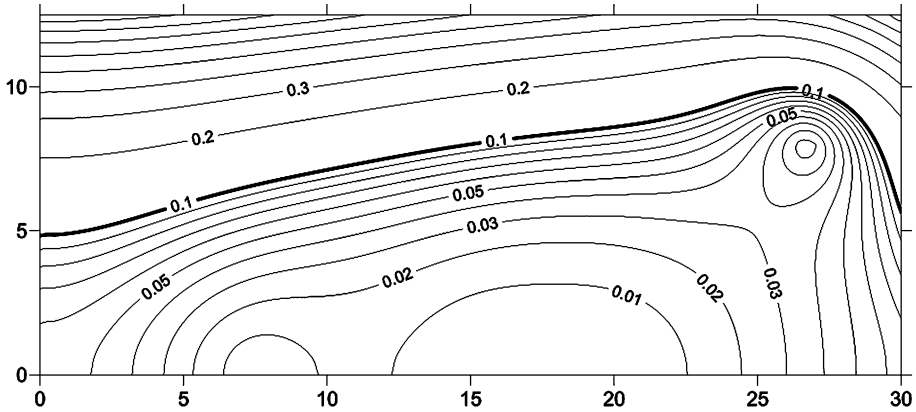


Рис. 4. Относительное отклонение $|\delta\mathbf{B}|/|\mathbf{B}|$ (в %)

5. Учет влияния формы ПМ. На текущем этапе все расчеты выполнялись в предположении, что магнитные и геометрические параметры магнитов точно соответствуют требуемым, т. е. без учета их разброса, а также неточностей, обусловленных изготовлением и сборкой магнитной системы квадрупольной линзы.

На рис. 5, 6 представлены результаты двумерного конечно-элементного расчета (использован комплекс вычислительных программ КОМРОТ) магнитной системы с магнитами квадратного сечения, соответствующими приведенным в табл. 2. В частности, примем, что намагниченность всех постоянных магнитов $\mu_0 M = \mu_0 M_r = B_r = 1.268$ Тл (12.68 кЭ) и не зависит от напряженности магнитного поля: $M(H) = \text{const}$, т. е. рабочая точка магнитов лежит на горизонтальном участке кривой размагничивания $M(H)$. Чем меньше отношение H/H_{cM} , где H_{cM} — коэрцитивная сила магнита по намагниченности, тем точнее допущение [11].

Обозначим $\mathbf{V}_{\text{ideal}}$ требуемое поле с градиентом 9 Тл/м. На рис. 5 показаны распределения компонент поля B_x , B_y , $|\mathbf{B}| = (B_x^2 + B_y^2)^{1/2}$, а также карта относительных отклонений $|\delta\mathbf{V}_{\text{цилПМ}}|/|\mathbf{V}_{\text{ideal}}| = |\mathbf{B} - \mathbf{V}_{\text{цилПМ}}|/|\mathbf{V}_{\text{ideal}}|$ поля \mathbf{B} системы магнитов квадратного сечения от поля $\mathbf{V}_{\text{цилПМ}}$, образованного системой цилиндрических (бесконечно тонких стержневых) магнитов. Найдено, что в рабочей области это отклонение составляет в среднем 0.1–0.2 % (и не превышает 0.3 %).

Распределение относительного отклонения $|\delta\mathbf{B}|/|\mathbf{V}_{\text{ideal}}|$, где $\delta B_x = B_x - B_{x,\text{ideal}}$, $\delta B_y = B_y - B_{y,\text{ideal}}$, иллюстрирует рис. 6, а. Показано, что максимальное отклонение поля в рабочей области ($|x| < 30$ мм, $|y| < 12.5$ мм) составляет около 1 %, среднее отклонение — 0.1–0.3 %.

В ходе процедуры входного контроля каждого постоянного магнита определяют его индивидуальные параметры, характеризующие точность его изготовления. Полученные результаты позволяют допустить возможность использования предложенной методики, базирующейся на упрощенной модели цилиндрических ПМ, для возможной коррекции поля квадрупольной линзы с учетом измеренных индивидуальных параметров.

6. Анализ магнитного состояния ПМ. Определение магнитного состояния ПМ позволяет сформулировать требования к коэрцитивной силе и остаточной намагниченности.

По результатам расчета системы магнитов были найдены распределения поля $|\mathbf{H}| = |\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}|$ (в кЭ) и его компонент $H_{\parallel M}$ и $H_{\perp M}$ внутри магнитов: параллельной

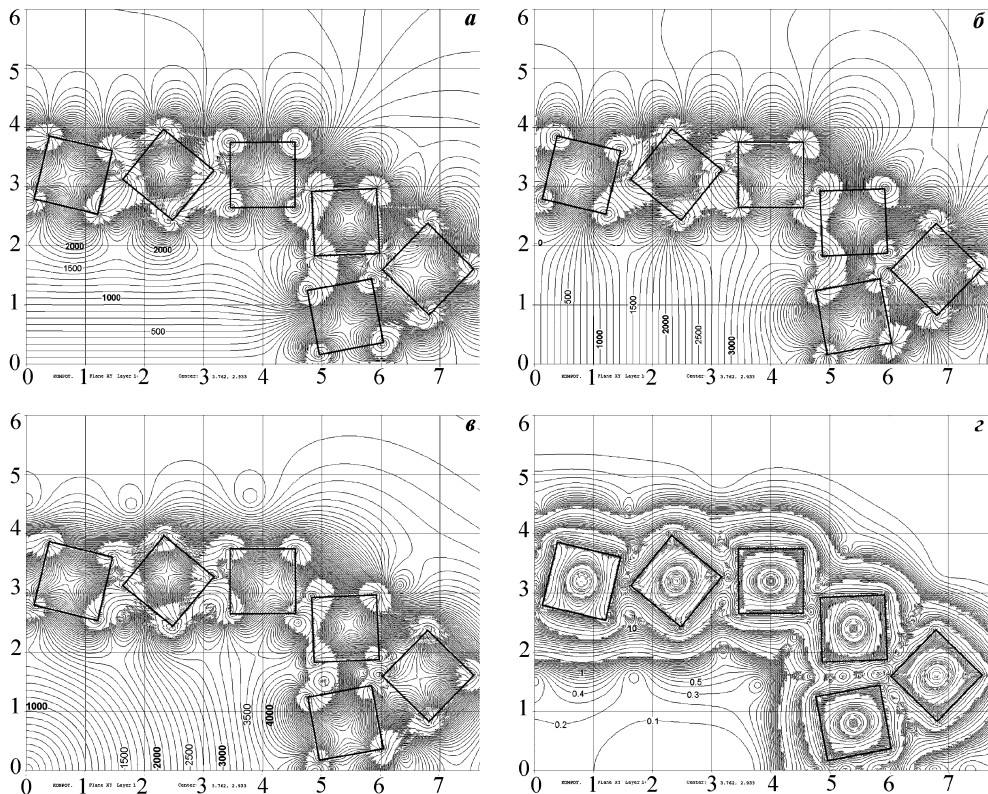


Рис. 5. Расчет 1. Изолинии (в Гс) компонент магнитного поля B_x (а), B_y (б), модуля поля \mathbf{B} (в) и относительное отклонение $|\delta\mathbf{B}_{\text{сyIRM}}|/|\mathbf{B}_{\text{ideal}}|$ (в %) от $\mathbf{B}_{\text{сyIRM}}$ — поля, образованного системой цилиндрических (бесконечно тонких) магнитов (г)

и перпендикулярной вектору намагненности \mathbf{M} . Максимальные и минимальные значения этих компонент приведены в табл. 4. Видно, что компоненты $H_{\parallel M}$ всегда отрицательны, т. е. действуют в направлении размагничивания, и лежат в диапазоне от 2.5 до 10.5 кЭ (от 20 до 80 % от величины намагненности 12.68 кЭ). Компоненты $H_{\perp M}$ могут быть любого знака и достигают 10 кЭ. Максимальное поле $|\mathbf{H}|$ в магните составляет 12 кЭ.

Таблица 4. Напряженность поля в постоянных магнитах

Магнит	H_{max} , кЭ	$H_{\parallel M}$, кЭ	$H_{\perp M}$, кЭ
1	9.0	-8.0 ÷ -2.5	-6.0 ÷ +7.0
2	12.0	-10.0 ÷ -3.0	-7.0 ÷ +8.0
3	11.0	-9.5 ÷ -4.5	-6.0 ÷ +7.0
4	12.0	-10.0 ÷ -4.0	-10.0 ÷ +6.0
5	9.0	-8.5 ÷ -4.0	-6.0 ÷ +5.0
6	11.0	-10.0 ÷ -5.0	-8.0 ÷ +7.0

Необходимо также учесть то обстоятельство, что к собственному полю линзы добавляется внешнее поле, которое в рабочей области в рассматриваемом случае составляет 3.5 кЭ. Поэтому максимальная напряженность поля в магнитах будет равна

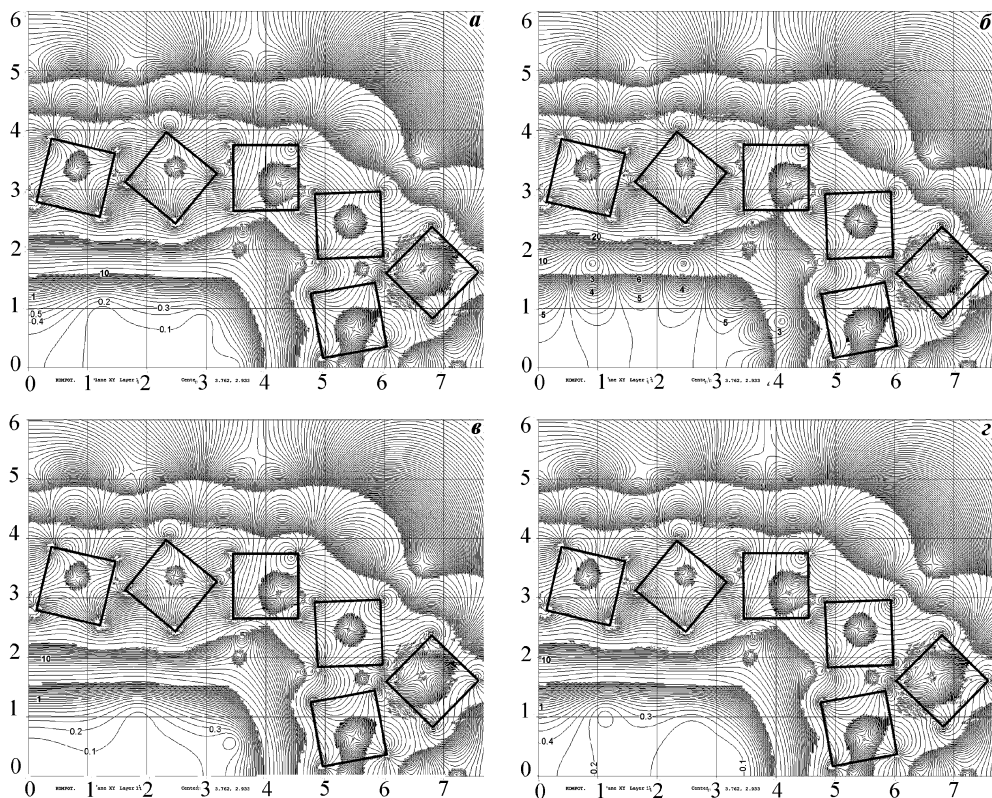


Рис. 6. Относительное отклонение $|\delta\mathbf{B}|/|\mathbf{B}_{\text{ideal}}|$ (в %) согласно расчету 1 (а) при $\mu_0 M_0 = 1.268$ Тл и $\kappa = 0$, расчету 2 (б) при $\mu_0 M_0 = 1.268$ Тл и $\kappa = 0.1$, расчету 2а (в) при $\mu_0 M_0 = 1.268 \times 1.05 = 1.3315$ Тл и $\kappa = 0.1$, а также 3D-расчету 3 (г) при $L_{PM} = 30$ см, $\mu_0 M = 1.268$ Тл и $\kappa = 0$ в центральном сечении $z = 0$

12 + 3.5 = 15.5 кЭ. Это означает, что для предотвращения необратимого размагничивания и сохранения свойств постоянных магнитов их коэрцитивная сила H_{CM} должна быть не меньше этой величины, т. е. $H_{CM} \geq 15.5$ кЭ (1240 кА/м).

Анализ параметров постоянных магнитов из предлагаемого производителями номенклатурного списка показывает возможность приобретения подобных магнитов, например, вариант 1: $B_r = 12.5\text{--}12.8$ кГс, $H_{CM} \geq 17$ кЭ, $T_w = 120$ °С или вариант 2: $B_r = 12.5\text{--}12.8$ кГс, $H_{CM} \geq 20$ кЭ, $T_w = 150$ °С, где T_w — рабочая температура.

В общем случае намагниченность M может зависеть от напряженности поля H ($M \neq \text{const}$). Чтобы избежать размагничивания, рабочая точка постоянных магнитов должна оставаться во втором квадранте ($-H_{CM} < H < 0$, $M > 0$) на размагничивающем участке $M(H)$ предельной петли гистерезиса. На практике [11] эта зависимость близка к линейной: $M = M_r + \kappa H$. Типичным значением магнитной восприимчивости κ можно считать $\kappa = 0.1$, которое использовано в расчетах. По-прежнему принималось $M_r = 12.68$ кЭ. На рис. 6, б, в представлены результаты двумерного конечно-элементного расчета той же магнитной системы, но с учетом величины $\kappa = 0.1$ постоянных магнитов.

На рис. 6, б показано, что в этом случае отклонение сформированного поля от

требуемого в рабочей области ($|x| < 30$ мм, $|y| < 12.5$ мм) составляет 4.0–5.5 %, а это существенно больше допустимого уровня 1 %. Как показал расчет, намагниченность постоянных магнитов теперь не постоянна, а меняется от 11.7 до 12.4 кЭ, т. е. составляет от 92 до 98 % от $M_r = 12.68$ кЭ, что в среднем на 5 % меньше M_r . Полученный результат согласуется с предыдущим расчетом, в котором поле H в магнитах составляет 20–80 % (в среднем около 50%) от M в направлении размагничивания. Учитывая, что $\kappa = 0.1$, размагничивание составит 2–8 % (в среднем примерно 5 %). Следовательно, и поле в рабочей области должно уменьшиться приблизительно на 5 %.

Таким образом, получено, что при $\kappa = 0.1$ для восстановления уровня сформированного поля в рабочей области квадруполь остаточную намагниченность M_r следует увеличить на 5 %. На рис. 6, в показаны отклонения поля от требуемого при $\kappa = 0.1$ и $M_0 = 12.68 \times 1.05 = 13.315$ кЭ. В рабочей области отклонение составляет в среднем 0.1–0.3 % (максимум 1 %).

Однако теперь изменяются требования к магнитам, которые должны соответствовать следующим параметрам, например, вариант 1: $B_r = 13.2$ – 13.8 кГс, $H_{cj} \geq 17$ кЭ, $T_w = 120^\circ\text{C}$ или вариант 2: $B_r = 13.2$ – 13.8 кГс, $H_{cj} \geq 20$ кЭ, $T_w = 150^\circ\text{C}$. Анализ магнитов из номенклатурного списка и в этом случае показывает наличие магнитов с требуемыми параметрами.

В общем случае при известной восприимчивости κ магниты должны иметь остаточную намагниченность $M_r = M \times (1 + 0.5\kappa)$, где M — расчетная намагниченность постоянных магнитов в предположении отсутствия эффектов их размагничивания (в данном случае 12.68 кЭ), а коэффициент 0.5 — известный коэффициент размагничивания для длинного стержня в поперечном поле [12].

7. Предварительный расчет трехмерного поля (постоянная намагниченность). На рис. 6, г и 7 представлены результаты трехмерного расчета системы постоянных магнитов длиной 30 см в продольном направлении Z с параметрами, соответствующими приведенным в табл. 2. Для трехмерного (3D) конечно-элементного расчета использован комплекс вычислительных программ КОМПРОТ. Из рис. 6, г видно, что в центральном сечении ($z = 0$) отклонение поля от требуемого (9 Тл/м) укладывается в допустимые пределы (0.3–0.4 % в среднем, максимум примерно 1 %). Однако на торце магнита ($z = 15$ см) поле составляет ровно половину от требуемого (отклонение приблизительно 50 %). Характерное распределение поля и его компонент вдоль направления Z (для одной линии — вдоль угла апертуры: $x = 30$ мм, $y = 12.5$ мм) показано на рис. 7. Спад поля (градиент $\partial B/\partial z$) вблизи торца определяется характерным размером апертуры, вокруг которой расположены постоянные магниты (около 60 мм, см. рис. 1).

В данном случае в большей степени имеет значение не собственно точность формирования поля в поперечном сечении квадруполь, а величина интеграла поля вдоль продольного направления Z :

$$I_B(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} B(x, y, z) dz.$$

Можно показать, что в случае $\kappa = 0$ этот интеграл в пределе (при $z_1 \rightarrow -\infty$, $z_2 \rightarrow \infty$) равен

$$I_B(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x, y, z) dz = B_{2D}(x, y) \cdot L_{PM},$$

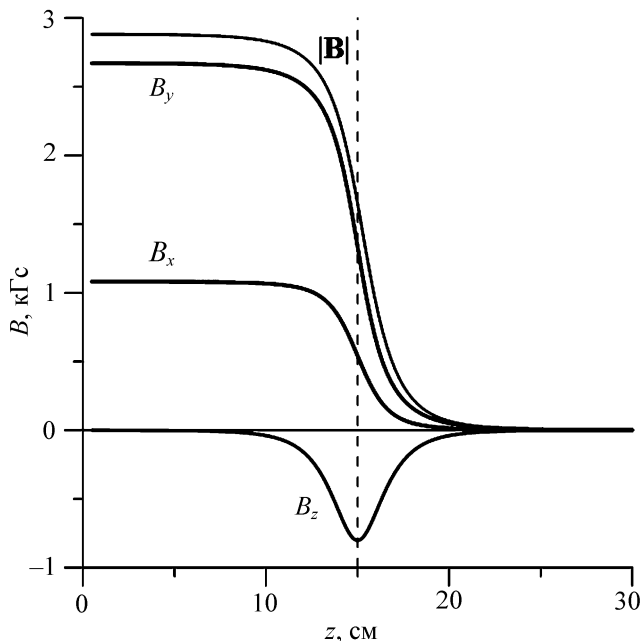


Рис. 7. Компоненты поля вдоль линии $x = 3$ см, $y = 1.25$ см, $0 < z < 30$ см
Пунктиром отмечен торец системы магнитов ($z = 15$ см).

где $B_{2D}(x, y)$ — решение 2-мерной задачи в плоскости XY ; L_{PM} — длина системы постоянных магнитов (в данном случае 30 см). Тогда среднее поле $\bar{B}_{3D}(x, y)$ вдоль линии (x, y) , отнесенное к длине L_{PM} , равно полю $B_{2D}(x, y)$ в точке (x, y) :

$$\bar{B}_{3D}(x, y) = \frac{I_B(x, y)}{L_{PM}} = B_{2D}(x, y).$$

8. Заключение. Предложена методика разработки мультипольных элементов систем транспортировки заряженных частиц на основе постоянных магнитов. Она носит достаточно общий характер, базируется на использовании вычислительного эксперимента с применением разработанного в России программного обеспечения и позволяет принимать во внимание различные ограничения технологического и экономического характера. Процесс формирования технического облика магнитной системы разделен на несколько последовательных шагов, что позволяет учитывать трудно формализуемые требования и ограничения технологического, логистического и финансового характера. Синтезированная таким образом конструкция магнитной системы подвергается окончательному проверочному численному расчету с помощью точных и детальных моделей. В случае, если задача синтеза не имеет решения, что обусловлено сочетанием наложенных ограничений, разработанная методика позволяет получить мотивированное обоснование для модификации как конструкции магнитной системы, так и вышеупомянутых ограничений.

В рассматриваемом случае с учетом характерных размеров квадрупольного отклонения результатов расчетов с магнитами квадратного сечения и цилиндрическими магнитами составляет в среднем 0.1–0.2 % (и не превышает 0.3 %). Это дает возможность использовать предложенную на предыдущем этапе численную методику выбора цилиндрических магнитов для возможной коррекции поля квадрупольного отклонения с учетом из-

меренных индивидуальных параметров каждого постоянного магнита квадратного сечения.

В описываемом случае, принимая во внимание эффекты размагничивания постоянных магнитов и типичное значение магнитной восприимчивости $\kappa = 0.1$, а также наличие внешнего поля, достигающего 3.5 кГс в области канала вывода, требуемые характеристики поля квадрупольного поля могут быть обеспечены выбором производимых и коммерчески поставляемых постоянных магнитов. При этом остаточная намагниченность $M_r = M(1 + 0.5\kappa)$, где $M = 12.68$ кЭ — расчетная намагниченность постоянных магнитов в предположении отсутствия их размагничивания.

Для последующего траекторного анализа пучка заряженных частиц по результатам расчетов сформирована 3D карта распределения магнитного поля «идеального квадрупольного» (при отсутствии отклонения геометрических и магнитных параметров постоянных магнитов).

Литература

1. *Капчинский И. М., Скачков В. С., Артемов В. С.* и др. Опыт использования неавтополосных квадрупольных линз с постоянными магнитами на линейном ускорителе И-2 // Труды IX Всесоюз. совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 16–18 октября, 1984 г.). Дубна, Объед. ин-т ядерных исследований, 1984. Т. 2. С. 57–60.
2. *Mitrofanov S., Apel P., Bashevoy V.* et al. The DC130 project: new multipurpose applied science facility for FLNR // Proceedings of 14th Intern. Conference on Heavy Ion Accelerator Technology. Lanzhou, China. 2018. P. 122–124.
3. *Kazarinov N., Apel P., Bekhterev V.* et al. Conceptual design of FLNR JINR radiation facility based on DC130 cyclotron // Proceedings of 61 Advanced Beam Dynamics Workshop on High-Intensity and High-Brightness Hadron Beams. Daejeon, Korea. 2018. P. 324–328.
4. *Том Р., Тарр Дж.* Магнитные системы МГД-генераторов и термоядерных установок. Основы расчета полей и сил / пер. с англ. Ю. А. Горшкова, А. В. Крымасова. М.: Энергоатомиздат, 1985. 272 с. (*Thome R. J., Tarrh J. M.* MHD and fusion magnets: field and force design concepts.)
5. *Беляков В. А., Сычевский С. Е.* Особенности технологии численного моделирования электромагнитных полей термоядерных реакторов на основе токамаков // Изв. Рос. акад. наук. Энергетика. 2014. № 1. С. 141–149.
6. *Амосков В. М., Арсланова Д. Н., Базаров А. М.* и др. Адаптация вычислительной технологии моделирования установок термоядерного синтеза для анализа и оптимизации магнитных подвесов левитационных транспортных систем // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2014. Т. 37. Вып. 4. С. 84–95.
7. *Amoskov V. M., Belov A. V., Belyakov V. A.* et al. Computation technology based on КОМПОТ and KLONDIKE codes for magneto static simulations in tokamaks // Plasma Devices Oper. 2008. Vol. 16. P. 89–103.
8. *Amoskov V. M., Belov A. V., Belyakov V. A.* et al. Magnetic model ММТС-2.2 of ITER tokamak complex // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 5–21. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.101>
9. *Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970. 503 с.
10. *Тихонов А. А., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
11. *Преображенский А. А., Бишард Е. Г.* Магнитные материалы и элементы. М.: Высшая школа, 1986. 352 с.
12. *Нейман Л. Р., Демирчян К. С.* Теоретические основы электротехники: учебник для вузов. Т. 2. Л.: Энергия, 1975. 407 с.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2021 г.

Статья принята к печати 13 октября 2021 г.

Контактная информация:

Амосков Виктор Михайлович — канд. физ.-мат. наук; [syтч@sintez.niiefa.spb.ru](mailto:sytch@sintez.niiefa.spb.ru)

Васильев Вячеслав Николаевич — [syтч@sintez.niiefa.spb.ru](mailto:sytch@sintez.niiefa.spb.ru)

Гапионок Елена Игоревна — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Гульбекян Георгий Герасимович — georgy@jinr.ru

Едаменко Николай Семенович — канд. физ.-мат. наук, доц.; n.edamenko@spbu.ru

Иваненко Иван Анатольевич — канд. физ.-мат. наук; ivan@jinr.ru

Казаринов Николай Юрьевич — канд. физ.-мат. наук; nyk@jinr.ru

Калагин Игорь Владимирович — канд. физ.-мат. наук; kalagin@jinr.ru

Капаркова Марина Викторовна — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Кухтин Владимир Петрович — канд. физ.-мат. наук; sytch@sintez.niiefa.spb.su

Ламзин Евгений Анатольевич — д-р физ.-мат. наук; sytch@sintez.niiefa.spb.su

Макаров Анатолий Александрович — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Неженцев Андрей Николаевич — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Овсянников Дмитрий Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; dovs45@mail.ru

Овсянников Дмитрий Александрович (мл.) — аспирант, ассистент; d-ovs@yandex.ru

Осипов Николай Федорович — onik@jinr.ru

Родин Игорь Юрьевич — канд. техн. наук; rodin@sintez.niiefa.spb.su

Сычевский Сергей Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук; sytch@sintez.niiefa.spb.su

Фирсов Алексей Анатольевич — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Modelling and design of permanent magnet multipoles for beam transport and focusing. I. Selection of optimal design and parameters*

V. M. Amoskov¹, V. N. Vasiliev¹, E. I. Gapionok¹, G. G. Gulbekyan², N. S. Edamenko³, I. A. Ivanenko², N. Yu. Kazarinov², I. V. Kalagin², M. V. Kaparkova¹, V. P. Kukhtin¹, E. A. Lamzin¹, A. A. Makarov¹, A. N. Nezhentzev¹, D. A. Ovsyannikov³, D. A. Ovsyannikov^{1,4} (Jr.), N. F. Osipov², I. Yu. Rodin¹, S. E. Sytchevsky^{1,3}, A. A. Firsov¹

¹ D. V. Efremov Institute of Electrophysical Apparatus, 3, Doroga na Metallostroy, St. Petersburg, 196641, Russian Federation

² Joint Institute for Nuclear Research, 6, ul. Zholio-Kyuri, Moscow Region, Dubna, 141980, Russian Federation

³ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

⁴ St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, 18, ul. Bolshaya Morskaya, St. Petersburg, 191186, Russian Federation

For citation: Amoskov V. M., Vasiliev V. N., Gapionok E. I., Gulbekyan G. G., Edamenko N. S., Ivanenko I. A., Kazarinov N. Yu., Kalagin I. V., Kaparkova M. V., Kukhtin V. P., Lamzin E. A., Makarov A. A., Nezhentzev A. N., Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov D. A. (Jr.), Osipov N. F., Rodin I. Yu., Sytchevsky S. E., Firsov A. A. Modelling and design of permanent magnet multipoles for beam transport and focusing. I. Selection of optimal design and parameters. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 313–329. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.401> (In Russian)

The design and specification choices are described for a PM quadrupole used to enable beam transport in a cyclotron. First an analytic study with a simplified 2D model is performed to give initial values for magnet configuration and performance. Characteristics of PM blocks and cylinders are analysed. Then a 3D parametrized model is used to solve the direct mag-

* This work was supported by the Saint Petersburg State University (project INI_2021, ID:73371205).

netostatic problem and accurately define quad specifications. Simulations are carried out with KOMPOT electromagnetic code utilizing the differential formulation. The regularization method is applied to solve the inverse problem. Magnetic characteristics, dimensions and shapes of the PM units and iron parts are determined in order to reach the specified field gradient. Possible correction of the resulting the ideal specification is discussed with respect to additional constraints put by practical implementation. Candidate PM materials are proposed. Simulated field maps are presented. The method described may serve as a basis for virtual prototyping and be integrated into end-to-end design and construction of magnet systems.

Keywords: permanent magnet, quadrupole, beam transport, analytical model, numerical model, direct and inverse problems, computed code, simulation.

References

1. Kapchinsky I. M., Skachkov V. S., Artemov V. S. et al. Opyt ispol'zovaniya neyavnopolyusnykh kvadrupol'nykh lins s postoyannymi magnitami na lineinom uskoritele I-2 [Experience of employing nonsalient-pole PM quads in the linear particle accelerator I-2]. *Trudy IX Vsesoyuznogo sovetshania po uskoriteliam zariazhennykh chastits* [Proceedings of All-Union Conference by accelerating for charged particles] (Dubna, October 16–18, 1984). Dubna, Joint Inst. for Nucl. Research, 1984, vol. 2, pp. 57–60. (In Russian)
2. Mitrofanov S., Apel P., Bashevoy V. et al. The DC130 project: new multipurpose applied science facility for FLNR. *Proceedings of 14th Intern. Conference on Heavy Ion Accelerator Technology*. Lanzhou, China, 2018, pp. 122–124.
3. Kazarinov N., Apel P., Bekhterev V. et al. Conceptual design of FLNR JINR radiation facility based on DC130 cyclotron. *Proceedings of 61 Advanced Beam Dynamics Workshop on High-Intensity and High-Brightness Hadron Beams*. Daejeon, Korea, 2018, pp. 324–328.
4. Thome R. J., Tarrh J. M. *MHD and fusion magnets: field and force design concepts*. New York, Wiley Publ., 1982, 249 p. (Rus. ed.: Thome R. J., Tarrh J. M. *Magnitnye sistemy MGD-generatorov i termoyadernykh ustanovok. Osnovy rascheta polei i sil*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985, 272 p.)
5. Belyakov V. A., Sytchevsky S. E. Osobennosti tekhnologii chislennogo modelirovaniya elektromagnitnykh polej termoyadernykh reaktorov na osnove tokamakov [Aspects of EM field simulations for designing, analyzing and optimizing the tokamak-type fusion reactors]. *Izvestia Rossiiskoi akademii nauk. Energetika* [Proceedings of Russian Academy of Sciences. Energetics], 2014, no. 1, pp. 141–149. (In Russian)
6. Amoskov V. M., Arslanova D. N., Bazarov A. M. et al. Adaptatsiya vychislitel'noj tekhnologii modelirovaniya ustanovok termoyadernogo sinteza dlya analiza i optimizatsii magnitnykh podvesov levitatsionnykh transportnykh sistem [Adaptation computation technology of modeling of thermonuclear synthesis machines for analysis and optimization of magnetic suspension of levitating vehicle]. *VANT. Series Thermonuclear syntheses*, 2014, vol. 37, iss. 4, pp. 84–95. (In Russian)
7. Amoskov V. M., Belov A. V., Belyakov V. A. et al. Computation technology based on KOMPOT and KLONDIKE codes for magneto static simulations in tokamaks. *Plasma Devices Oper.*, 2008, vol. 16, pp. 89–103.
8. Amoskov V. M., Belov A. V., Belyakov V. A. et al. Magnetic model MMTC-2.2 of ITER tokamak complex. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 5–21. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.101>
9. Batygin V. V., Toptygin I. N. *Problems in electrodynamics*. London, New York, Academic Press, 1964, 587 p. (Rus. ed.: Batygin V. V., Toptygin I. N. *Sbornik zadach po elektrodinamike*. Moscow, Nauka Publ., 1970, 503 p.)
10. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Solutions of ill-posed problems*. New York, Halsted Press, 1977, 288 p. (Rus. ed.: Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.)
11. Preobrazhenskiy A. A., Bishard E. G. *Magnitnye materialy i elementy* [Magnetic materials and elements]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1986, 352 p. (In Russian)
12. Neiman L. R., Demirchan K. S. *Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki*. Uchebnik dlya vuzov [Theoretical foundations of electrical engineering. Textbook for high schools]. Leningrad, Energiya Publ., 1975, 407 p. (In Russian)

Received: July 15, 2021.

Accepted: October 13, 2021.

A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

Victor M. Amoskov — PhD in Physics and Mathematics; sytch@sintez.niiefa.spb.su

Vyacheslav N. Vasiliev — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Elena I. Gaponok — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Georgy G. Gulbekyan — georgy@jinr.ru

Nikolai S. Edamenko — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; n.edamenko@spbu.ru

Ivan A. Ivanenko — PhD in Physics and Mathematics; ivan@jinr.ru

Nikolay Yu. Kazarinov — PhD in Physics and Mathematics; nyk@jinr.ru

Igor V. Kalagin — PhD in Physics and Mathematics; kalagin@jinr.ru

Marina V. Kaparkova — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Vladimir P. Kukhtin — PhD in Physics and Mathematics; sytch@sintez.niiefa.spb.su

Evgeny A. Lamzin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics; sytch@sintez.niiefa.spb.su

Anatoly A. Makarov — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Andrey N. Nezhentzev — sytch@sintez.niiefa.spb.su

Dmitrij A. Ovsyannikov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; dovs45@mail.ru

Dmitry A. Ovsyannikov (Jr.) — Postgraduate Student, Assistant; d-ovs@yandex.ru

Nikolai F. Osipov — onik@jinr.ru

Igor Yu. Rodin — PhD in Engineering; rodin@sintez.niiefa.spb.su

Sergey E. Sytchevsky — Dr. Sci. in Physics and Mathematics; sytch@sintez.niiefa.spb.su

Alexey A. Firsov — sytch@sintez.niiefa.spb.su