ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

С. А. ВИНОГРАДОВ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ЗАМКНУТОМ КРУГЕ И ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗ l^p

(002 — функциональный анализ и теория функций)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЛЕНИНГРАД
1968

Работа выполнена на кафедре математического анализа Ленинградского ордена Ленина Государственного университета имени А. А. Жданова.

Научный руководитель —
кандидат физико-математических наук, доцент В. П. ХАВИН

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Б. С. МИТЯГИН
кандидат физико-математических наук, доцент Б. С. ПАВЛОВ

Ведущее предприятие — Институт Химической физики АН СССР (Отдел математики)

Автореферат разослан «16» мая 1968 г.

Защита диссертации состоится « » . . . . . 1968 г. на заседании Ученого Совета математико-механического факультета Ленинградского ордена Ленина Государственного университета имени А. А. Жданова по адресу: Ленинград, В. О., 10 линия, дом 33, ауд. 73.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

В анализе большой интерес представляют задачи такого типа: пусть $X(K)$ — некоторый класс функций, заданных на множестве K, $E \subset K$ и ψ — функция, заданная на множестве E; требуется выяснить, можно ли продолжить функцию ψ до функции, заданной на всем множестве K и принадлежащей классу $X(K)$; для многих интересных конкретных ситуаций на поставленный выше вопрос дан исчерпывающий ответ. Можно привести очень много примеров, иллюстрирующих эту общую постановку задачи, но мы ограничимся лишь двумя, имеющими непосредственное отношение к содержанию диссертации.

1°. Пусть K — единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости, $X(K) = H^\infty$ — класс всех функций, регулярных и ограниченных в круге D. Тогда только что сформулированная задача равносильна известной проблеме Неванлинна—Пика ([1], стр. 131).

2°. Другая интересная реализация этой общей задачи возникает в том случае, когда K представляет собой множество всех целых чисел, а $X(K)$ — класс всех последовательностей $\{\hat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и f — непрерывная 2π-периодическая функция.

В этом случае поставленная выше задача о распространении функции ψ тесно связана с тригонометрической проблемой моментов. Известные результаты, относящиеся к упомянутым примерам, несмотря на свою законченность и глубину, часто не позволяют практически проверить, продолжима ли та или иная функция ψ, заданная на множестве E, до функции класса $X(K)$ (см. [2], стр. 234 и [1]). Более того, эти результаты убедительно свидетельствуют о том, что — по крайней мере, если интересоваться произвольными множествами $E (E \subset K)$ — вряд ли возможно охарактеризовать сужения функций класса $X(K)$ на множество E в сколько-нибудь обозримых терминах.

В связи с этим целесообразно следующим образом изменить постановку задачи: пусть S — оператор, сопоставляющий каждой функции $f \in X(K)$ ее сужение на множество $E(E \subset K)$, $Y(E)$ — класс функций, заданных на множестве E; при каких условиях, наложенных на множество E, $S(X(K)) = Y(E)$?

Разумеется, эта постановка задачи интересна лишь в том случае, если $Y(E)$ — достаточно простой или хорошо изученный класс функций. В связи с этой новой постановкой задачи обратимся к рассмотренным выше примерам.

1′. Пусть $Y(E) = l^\infty(E)$ — класс всех функций, ограниченных на множестве E. Д. Ньюманом и Л. Карлесоном [3], [4] доказана следующая

Теорема. Для того чтобы $S(H^\infty) = l^\infty(E)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\xi \in E} \prod_{\eta \in E_\xi} \left| \frac{\xi - \eta}{1 - \xi\bar{\eta}} \right| > 0, \qquad (*)$$

где $E_\xi = \{\eta \in E : \eta \neq \xi\}$.

Отметим, что к настоящему времени имеется много работ, так или иначе связанных с теоремой Ньюмана—Карлесона и в которых условие (*) играет существенную роль. Мы здесь ограничимся указанием на работы [5], [6], [7], с которыми наиболее тесно связано содержание диссертации. Более подробную информацию можно найти в обзоре [8].

2′. Пусть E — подмножество множества всех целых чисел и $Y(E) = l^2(E)$ — класс всех семейств комплексных чисел $\{x_n\}_{n \in E}$, суммируемых с квадратом. Известная теорема Банаха [9] утверждает, что если множество E удовлетворяет условиям: для любого $n \in E$ также и $(-n) \in E$ и

$$\inf_{\substack{m,\, k \in E \\ 0 < k < m}} \left(\frac{m}{k} \right) > 1,$$

то

$$S(X(K)) = l^2(E),$$

где $X(K)$ обозначает то же, что и в примере 2°.

Приведем еще один пример.

3′. Пусть $K = \bar{D}$ — замкнутый единичный круг комплексной плоскости, $X(K) = C_A$ — класс всех функций, регулярных в D и непрерывных в $\bar{D}$, и E — замкнутое множество, лежащее на единичной окружности $\partial D = \{z : |z| = 1\}$. В. Рудин и Карлесон [10] доказали, что для того чтобы $S(C_A) = C(E)$ ($C(E)$ — класс всех функций, непрерывных на множестве E), необходимо и достаточно, чтобы $mes\, E = 0$ (mes — мера Лебега на окружности ∂D).

Отметим, что и в этом случае затруднительно в обозримых терминах описать функции вида Sf ($f \in C_A$), если $mesE>0$.

Настоящая диссертация посвящена решению интерполяционных задач, примыкающих в основном, к трем вышеперечисленным теоремам: к теореме Ньюмана—Карлесона (пример 1′), к теореме Банаха (пример 2′) и к теореме Рудина—Карлесона (пример 3′).

При решении этих задач используются средства функционального анализа, в первую очередь известные теоремы Банаха о разрешимости линейных уравнений в банаховых пространствах.

Диссертация состоит из введения, двух глав и Добавлений, содержащих доказательства утверждений чисто технического характера.

Прежде чем переходить к изложению содержания глав и параграфов, введем некоторые обозначения:

D — открытый единичный круг комплексной плоскости с центром в нуле,

$\overline{D}$ — замыкание круга D,

l^p_A ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$) — пространство всех аналитических в круге D функций, у которых $\left\{\hat{f}(n)\right\}_{n=0}^{\infty} \in l^p$, где

$$\hat{f}(n) = \frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пусть E — подмножество круга D.

S — линейный оператор, сопоставляющий каждой функции f, аналитической в круге D, ее сужение на множество E.

$C(E)$ — класс всех функций, равномерно непрерывных на множестве E.

Перейдем к обзору диссертации по главам. Отметим, что часто ради краткости и ясности мы формулируем теоремы в менее общей форме, чем это сделано в диссертации.

ГЛАВА I. ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗ l^p

В этой главе рассматриваются интерполяционные задачи для функций класса l^p_A ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$) такого же типа как задача, о которой идет речь в примере 1′. Класс l^p_A при $p \neq 2$ отличается от классов аналитических функций, изучавшихся в связи с проблемами интерполяции ранее ([3], [4], [5], [6], [7]) тем, что он характеризуется конечностью нормы, учитывающей лишь величину модулей коэффициентов функции и довольно сложно связанной с поведением значений функции, которые как раз и подлежат интерполяции.

При $p=2$ соответствующая задача полностью решена в работе Г. Шапиро и А. Шилдса [7].

В § 1 главы I вводятся основные обозначения и определения, используемые на протяжении всей диссертации.

В § 2 главы I показано, что естественное предположение о существовании бесконечного множества E, расположенного в открытом единичном круге D, для которого

$$S(l_A^1) = C(E), \tag{1}$$

неверно. Заметим, что на единичной окружности существуют бесконечные и даже совершенные множества E, для которых имеет место равенство (1) (см. [11]).

§ 3 главы I посвящен изучению сужений функций $f \in l_A^1$ на некоторые бесконечные подмножества круга D.

Приведем формулировку основного результата этого параграфа. Пусть bv — пространство всех последовательностей комплексных чисел $x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, у которых норма

$$\| x \|_{bv} = \lim_{n \to \infty} |x_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - x_{n+1}|$$

конечна; V_A — пространство всех регулярных в D функций f таких, что $\sup\limits_{0<\rho<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(\rho e^{it})|\, dt < +\infty$, и $B_\lambda = \{z \in D : |1-z| \leqslant \lambda(1 - |z|)\}$, $\lambda \geqslant 1$. Известно, что $V_A \subset l_A^1$ (см. [10]).

Теорема 1.* Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность точек единичного круга D, удовлетворяющая условиям:

$$\xi_k \neq \xi_m, \text{ если } k \neq m, \text{ и } |1-\xi_{k+1}| \leqslant |1-\xi_k| \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда, если $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \subset B_\lambda$ при некотором $\lambda \geqslant 1$, то следующие утверждения равносильны

1. $S_1(l_A^1) = bv$,
2. $S_1(V_A) = bv$,
3. Последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (*),

где S_1 — оператор, задаваемый равенством $S_1 f = \{f(\xi_k)\}_{k=0}^{\infty}$, $f \in l_A^1$.

* Нумерация теорем в автореферате не совпадает с нумерацией теорем в диссертации.

В § 4 главы I доказывается несколько утверждений, имеющих непосредственное отношение к теоремам Ньюмана—Карлесона (пример 1′) и Рудина—Карлесона (пример 3′). В частности, доказывается

Теорема 2. Если множество $E (E \subset \bar{D} - \{1\})$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\substack{\eta, \xi \in E \\ \xi \neq \eta, |1-\eta| \leqslant |1-\xi|}} \left| \frac{1-\eta}{1-\xi} \right| < 1,$$

то любую функцию ψ, равномерно непрерывную на множестве E, можно продолжить до функции f, заданной на всей расширенной комплексной плоскости $\hat{C}$, регулярной в $\hat{C} - \{1\}$, непрерывной в замкнутом круге $\bar{D}$ и такой, что

$$\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

где $\hat{f}(n) = \frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

В § 5 главы I доказывается ряд теорем об интерполяции в пространствах l^p_A $(1 < p \leqslant +\infty)$, опирающихся на результаты, полученные в § 3. Приведем формулировки двух основных теорем этого параграфа.

Пусть $h^p(E)$ $(1 < p \leqslant +\infty)$ — класс всех функций ψ, заданных на множестве E и таких, что

$$\sum_{\eta \in E} |\psi(\eta)|^p (1 - |\eta|)^{p-1} < +\infty, \text{ если } 1 < p < +\infty,$$

и

$$\sup_{\eta \in E} |\psi(\eta)| (1 - |\eta|) < +\infty, \text{ если } p = +\infty.$$

Теорема 3. Пусть $E \subset B_\lambda$ при некотором $\lambda \geqslant 1$ и $1 < p \leqslant +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны

1. $S(l^p_A) = h^p(E)$,
2. Множество E удовлетворяет условию (*).

Теорема 4. Пусть множество E $(E \subset D)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\substack{\xi, \eta \in E \\ \xi \neq \eta, |\eta| \leqslant |\xi|}} \frac{1 - |\xi|}{1 - |\eta|} < 1,$$

тогда $S(l^p_A) = h^p(E)$ $(1 < p < +\infty)$.

В § 6 главы I построен пример функции $f \in \bigcap\limits_{p>2} l_A^p$ $(f \neq 0)$ такой, что $f(z_k)=0$, $k=1, 2, \ldots$ ($z_k \neq z_m$, если $k \neq m$; $|z_k|<1$, $k=1, 2, \ldots$) и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)=+\infty.$$

ГЛАВА II. ПОВЕДЕНИЕ НОРМ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $C_A(G)$ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ БАНАХА И РУДИНА—КАРЛЕСОНА

Пусть E — непустое замкнутое множество, расположенное на единичной окружности ∂D $(E \neq \partial D)$. Обозначим символом $A_C(E)$ пространство всех функций, заданных на всей расширенной комплексной плоскости $\hat{C}$, регулярных в $\hat{C} \setminus E$ и непрерывных в замкнутом круге $\overline{D}$.

Глава II посвящена интерполяционным задачам в пространстве $A_C(E)$, примыкающим к интерполяционным теоремам Банаха (пример 2′) и Рудина—Карлесона (пример 3′). Кроме того, в этой главе изучается поведение коэффициентов Маклорена функций из пространства $A_C(\{1\})$.

В § 1 приводятся обозначения и предварительные сведения, используемые в §§ 2—3.

Прежде чем переходить к изложению результатов § 2 главы II, введем несколько обозначений.

Пусть G — односвязная область в $\hat{C}$.

$C_A(G)$ — пространство всех функций, регулярных в G и непрерывных в $\overline{G}$ ($\overline{G}$ —замыкание G). Пространство $C_A(G)$ снабжается нормой $\|f\|_{C_A(G)}=\max\limits_{z \in \overline{G}}|f(z)|$, $f \in C_A(G)$.

Q — подмножество множества всех целых неотрицательных чисел, $Q_n=\{k \in Q: k \leqslant n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

$d=\{d_k\}_{k \in Q}$ — семейство положительных чисел.

$l^p(Q_n, d)$ $(0<p<2)$ — пространство всех семейств комплексных чисел $x=\{x_k\}_{k \in Q_n}$, снабженное нормой $\|x\|_{(p,d)}=$
$=\left(\sum\limits_{k \in Q_n}|x_k|^p d_k^2\right)^{\frac{1}{p}}$.*

* При $0<p<1$ — $\|x\|_{(p,d)}$ не является нормой в общепринятом смысле слова.

Пусть область G содержит единичный круг D.

Обозначим символом $J^p_{n,G}$ — линейный оператор из $C_A(G)$ в $l^p(Q_n, d)$ $(0 < p < 2)$, задаваемый равенством

$$J^p_{n,G} f = \left\{ \frac{\hat{f}(k)}{d_k} \right\}_{k \in Q_n}, \quad f \in C_A(G) \; (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\hat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

$\| J^p_{n,G} \|$ — норма оператора $J^p_{n,G}$,

$$\| J^p_{n,G} \| = \sup_{\| f \|_{C_A(G)} \leqslant 1} \left(\sum_{k \in Q_n} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} \right)^{\frac{1}{p}} \; (0 < p < 2),$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Основным результатом § 2 главы II является следующая

Теорема 5. Пусть

$$G = \hat{C} - \left(\{ z \in \hat{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant 1 + \varepsilon \} \cap \{ z \in \hat{C} : |\arg z| \leqslant \varepsilon \} \right)$$

$(0 < \varepsilon < \pi)$ и $p \in (0,2)$. Тогда существует константа $M = M(\varepsilon, p) \in (0, +\infty)$ такая, что

$$M \left(\sum_{k \in Q_n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \leqslant \| J^p_{n,G} \| \leqslant \left(\sum_{k \in Q_n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \; (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Теорема 5 представляет собой обобщение одной известной теоремы Р. Пэли из [12]. При помощи этой теоремы доказывается ряд утверждений о поведении коэффициентов Маклорена функций из $A_C(\{1\})$. Приведем одно из них.

Теорема 6. Пусть семейство положительных чисел $\{d_k\}_{k \in Q}$ таково, что $\sum_{k \in Q} d_k^2 = +\infty$. Тогда существует функция $f \in A_C(\{1\})$ такая, что

$$\sum_{k \in Q} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} = +\infty$$

при всех $p \in (0,2)$.

Отметим, что § 2 главы II по своему содержанию примыкает к работам [12], [13], [14] Р. Пэли, С. Б. Стечкина и В. П. Хавина. Кроме того, все результаты работ [15], [16], относящиеся к пространству всех функций регулярных вне луча $[1, +\infty)$ и непрерывных в круге $\bar{D}$ будут верны, и в том случае, если это пространство заменить пространством $A_C(\{1\})$.

В § 2 главы II имеется также ряд результатов о поведении коэффициентов Маклорена функций, регулярных в $\hat{C} \setminus \{1\}$ и имеющих ряд Маклорена равномерно сходящийся в круге $\bar{D}$.

В § 3 главы II содержатся обобщения интерполяционных теорем Банаха и Рудина—Карлесона (примеры 2′, 3′).

Основной результат таков:

Теорема 7. Пусть E — замкнутое подмножество единичной окружности ∂D и $mes\, E = 0$ (mes — мера Лебега на окружности ∂D), Q — подмножество множества целых неотрицательных чисел, удовлетворяющее условию Адамара, т. е.

$$\inf_{\substack{m, n \in Q \\ m > n > 0}} \left(\frac{m}{n}\right) > 1.$$

Тогда для любой функции ψ, непрерывной на множестве E, и для любого семейства комплексных чисел $x = \{x_k\}_{k \in Q}$, суммируемого с квадратом, существует функция $f \in A_C(E)$ такая, что

$$f(z) = \psi(z), \quad z \in E,$$

и

$$\hat{f}(k) = x_k, \quad k \in Q.$$

Основные результаты диссертации изложены в статьях [17], [18], [19]. Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю Виктору Петровичу Хавину за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.
2. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.
3. Newman D. J., Interpolation in H^∞. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 92, № 3, 501—507.
4. Carleson L., An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. of Math., 1958, 80, № 4, 921—930.
5. Нафталевич А. Г., Об интерполировании функций ограниченного вида. Уч. зап. Вильнюсского университета., Сер. матем., физ. и хим. наук, 1956, 5, 5—27.
6. Кабайла В., Об интерполяции функций в классе H_δ. Успехи матем. наук, 1958, 13, № 1, 181—188.
7. Shapiro H. S., Shields A. L. On some interpolation problems for analytic functions. Amer. J. of Math., 1961, 83, № 3, 513—532.
8. Хавин В. П., Пространства аналитических функций. В сб. «Математический анализ. 1964». Москва, 1966, 76—164.

9. Banach S. Über einige Eigenschaften der lacunären trigonometrischen Reihen. Studia Math., 1930, 2, 207—220.
10. Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1963.
11. Kahane J. — P., Salem R. Séries trigonometriques et ensembles parfaits. Paris, Hermann, 1963.
12. Paley R. E. A. C., A note on power series. Journal London Math. Soc., 1932, 7, 122—130.
13. Стечкин С. Б., Одна экстремальная задача для многочленов. Известия АН СССР, серия матем., 1956, т. 20, 765—774.
14. Хавин В. П., О нормах некоторых операций в пространстве многочленов. Вестник Ленинградского Университета, 1959, вып. 4, № 19, серия матем., мех. и астр., 47—59.
15. Махмудов А. С., О коэффициентах Фурье и Тейлора непрерывных функций. В сб. «Некоторые вопросы функционального анализа и его применений», Баку, 1965, 103—128.
16. Махмудов А. С., О коэффициентах Фурье и Тейлора непрерывных функций. Известия АН АзербССР, 1964, серия физ.-матем. и техн., № 2 и № 4.
17. Виноградов С. А., Об интерполяции и нулях степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p. ДАН СССР, 1965, т. 160, № 2.
18. Виноградов С. А., Об интерполяции степенных рядов, абсолютно сходящихся на границе круга сходимости. Вестник Ленинградского Университета, 1965, вып. 2, № 7, серия матем., мех. и астр., 30—44.
19. Виноградов С. А., Об интерполяции степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p. Функциональный анализ и его приложения, 1967, т. I, вып. 3, 83—85.

М-22838 Подп. к печ. 1 IV 1968 г. Бумага 60×90$^{1}/_{16}$
Объем 0,5 п. л. Зак. 470 Тир. 180 Бесплатно

Типография № 6Б Управления по печати Ленгорисполкома
Ленинград, Д-41, ул. Халтурина, 5

Бесплатно