Ленинградский ордена Ленина Государственный Университет

имени А.А.Жданова

С.А. ВИНОГРАДОВ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ЗАМКНУТОМ КРУГЕ И ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗ ℓ^p.

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель -

кандидат физико-математических наук, доцент

В.П. ХАВИН

Ленинград,

1968

ВВЕДЕНИЕ

В анализе большой интерес представляют задачи такого типа : пусть $X(K)$ - некоторый класс функций, заданных на множестве K, $E \subset K$ и ψ - функция, заданная на множестве E; требуется выяснить, можно ли продолжить функцию ψ до функции, заданной на всем множестве K и принадлежащей классу $X(K)$. Для многих интересных конкретных ситуаций на поставленный выше вопрос дан исчерпывающий ответ. Можно привести очень много примеров, иллюстрирующих эту общую постановку задачи, но мы ограничимся лишь двумя, имеющими непосредственное отношение к содержанию диссертации .

1^0 . Пусть K - единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости, $X(K) = H^\infty$ - класс всех функций, регулярных и ограниченных в круге D. Тогда только что сформулированная задача равносильна известной проблеме Неванлинна- Пика ([6] , стр. 131).

2^0 . Другая интересная реализация этой общей задачи возникает в том случае, когда K представляет собой множество всех целых чисел, а $X(K)$ - класс всех последовательностей $\{\hat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ и f — 2π - периодическая непрерывная функция.

В этом случае поставленная выше задача о распространении функции ψ тесно связана с тригонометрической проблемой моментов. Известные результаты, относящиеся к упомянутым примерам, несмотря на свою законченность и глубину, часто не позволяют практически проверить, продолжима ли та или иная функция ψ , заданная на множестве E , до функции класса $X(K)$ (см. [7] , стр. 234 и [6]) . Более того эти результаты убедительно свидетельствуют о том, что - по крайней мере, если интересоваться произвольными множествами $E\ (E\subset K)$ - вряд ли возможно охарактеризовать сужение функций класса $X(K)$ на множество E в сколько - нибудь обозримых терминах.

В связи с этим целесообразно следующим образом изменить постановку задачи : пусть S - оператор, сопоставляющий каждой функции $f\in X(K)$ ее сужение на множество $E\ (E\subset K)$. $Y(E)$ - класс функций, заданных на множестве E ; при каких условиях, наложенных на множество E, $S(X(K))=Y(E)$? ?

Разумеется, эта постановка задачи интересна лишь в том случае, если $Y(E)$ - достаточно простой или хорошо изученный класс функций. В связи с этой новой постановкой задачи обратимся к рассмотренным выше примерам.

1' . Пусть $Y(E)=\ell^{\infty}(E)$ - класс всех функций, ограниченных на множестве E . Ньюменом и Карлесоном [5], [8] доказана следующая

Теорема . Для того чтобы $S(H^{\infty})=\ell^{\infty}(E)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\xi\in E}\prod_{z\in E_\xi}\left|\frac{\xi-z}{1-\xi\bar z}\right|>0, \qquad (*)$$

где $E_\xi=\{z\in E: z\neq\xi\}$.

Отметим, что к настоящему времени имеется много работ, так или иначе связанных с теоремой Ньюмена - Карлесона и в которых условие $(*)$ играет существенную роль. Мы здесь ограничимся указанием на работы [9], [10], [11], с которыми наиболее тесно связано содержание диссертации. Более подробную информацию можно найти в обзоре [12].

2'. Пусть E – подмножество множества всех целых чисел и $Y(E)=\ell^2(E)$ –класс всех семейств комплексных чисел $\{x_n\}_{n\in E}$, суммируемых с квадратом. Известная теорема Банаха [13] утверждает, что если множество E удовлетворяет условиям :

для любого $n\in E$ также и $(-n)\in E$ и

$$\inf_{\substack{m,k\in E,\\ 0<k<m}}\left(\frac{m}{k}\right)>1,$$

то

$$S(X(K))=\ell^2(E),$$

где $X(K)$ обозначает тоже, что и в примере 2°.

Приведем еще один пример.

3'. Пусть $K=\bar{D}$ – замкнутый единичный круг комплексной плоскости. $X(K)=C_A$ – класс всех функций, регулярных в D и непрерывных в $\bar{D}$ и E – замкнутое множество, лежащее на единичной окружности $\partial D=\{z:|z|=1\}$. В. Рудин и Карлесон [2] доказали, что для того чтобы $S(C_A)=C(E)$ ($C(E)$ класс всех функций непрерывных на множестве E), необходимо и достаточно, чтобы $mes\,E=0$ (mes – мера Лебега на окружности ∂D).

Отметим, что и в этом случае затруднительно в обозримых терминах описать функции вида Sf $(f\in C_A)$, если $mes\,E>0$.

Настоящая диссертация посвящена решению интерполяционных задач, примыкающих, в основном, к трем вышеперечисленным теоремам : к теореме Ньюмана- Карлесона (пример 1'), к теореме Банаха (пример 2') и к теореме Рудина- Карлесона (пример 3'). При решении этих задач используются средства функционального анализа, в первую очередь известные теоремы Банаха о разрешимости линейных уравнений в банаховых пространствах.

Диссертация состоит из Введения, двух глав и Добавлений, содержащих доказательства утверждений чисто технического характера.

Прежде чем переходить к изложению содержания глав и параграфов, введем некоторые обозначения :

D - открытый единичный круг комплексной плоскости с центром в нуле, $\bar{D}$ - замыкание круга D.

ℓ^p_A $(1\le p\le +\infty)$ - пространство всех аналитических в круге D функций, у которых $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}\in \ell^p$, где

$$\hat{f}(n)=f^{(n)}(0)/n! \qquad (n=0,1,2,\dots).$$

Пусть E - подмножество круга D.

S - линейный оператор, сопоставляющий каждой функции f, аналитической в круге D, ее сужение на множество E.

$C(E)$ - класс всех функций, равномерно непрерывных на множестве E.

Перейдем к обзору диссертации по главам. Отметим, что часто ради краткости и ясности мы формулируем теоремы в менее общей форме, чем это сделано в диссертации.

Глава 1. Об интерполяции степенных рядов с последовательностью коэффициентов из ℓ^p.

В этой главе рассматриваются интерполяционные задачи для функций класса ℓ^p_A $(1\le p\le +\infty)$ такого же типа как задача, о которой идет речь в примере 1'. Класс ℓ^p_A при $p\ne 2$

отличается от классов аналитических функций, изучавшихся в связи с проблемами интерполяции ранее [5], [8], [9], [10], [11] тем, что он характеризуется конечностью нормы, учитывающей лишь величину модулей коэффициентов функции, и довольно сложно связанной с поведением значений функции, которые как раз и подлежат интерполяции.

При $p=2$ соответствующая задача полностью решена в работе Г. Шапиро и А. Шилдса [11].

В § 1 главы I вводятся основные обозначения и определения, используемые на протяжении всей диссертации.

В § 2 главы I показано, что естественное предположение о существовании бесконечного множества E, расположенного в открытом единичном круге D, для которого

$$S(\ell^1_A)=C(E) \tag{1}$$

неверно. Заметим, что на единичной окружности существуют бесконечные и даже совершенные множества E, для которых имеет место равенство (1) (см. [3]).

§ 3 главы I посвящен изучению сужений функций $f\in \ell^1_A$ на некоторые бесконечные подмножества круга D.

Приведем формулировку основного результата этого параграфа. Пусть bv – пространство всех последовательностей комплексных чисел $x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, у которых норма

$$\|x\|_{bv}=\lim_{n\to\infty}|x_n|+\sum_{n=0}^{\infty}|x_n-x_{n+1}|$$

конечна; V_A – пространство всех регулярных в D функций f таких, что $\sup\limits_{0<\rho<1}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(\rho e^{it})|\,dt<+\infty$; и

$$B_\lambda=\{z\in D:\ |1-z|\leqslant\lambda(1-|z|)\},\ \lambda\geqslant 1$$

. Известно, что $V_A\subset\ell^1_A$ (см. [2]).

<u>Теорема 1.</u>[x)] Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек единичного круга D , удовлетворяющая условиям :

$$\xi_k \neq \xi_m \text{, если } k \neq m \text{, и } |1-\xi_{k+1}| \leq |1-\xi_k| \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Тогда, если $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \subset B_\lambda$ при некотором $\lambda \geq 1$, то следующие утверждения равносильны:

1. $S_1(\ell_A^1) = b\sigma$,

2. $S_1(V_A) = b\sigma$,

3. последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $(*)$,

где S_1 - оператор, задаваемый равенством $S_1 f = \{f(\xi_k)\}_{k=0}^{\infty}$, $f \in \ell_A^1$.

В § 4 главы I доказывается несколько утверждений, имеющих непосредственное отношение к теоремам Ньюмана-Карлесона (пример 1$^{\text{v}}$) и Рудина- Карлесона (пример 3$^{\text{v}}$) . В частности, доказывается

Теорема 2. Если множество E $(E \subset \bar{D} \setminus \{1\})$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\substack{\zeta,\xi \in E \\ \xi \neq \zeta,\ |1-\zeta| \leq |1-\xi|}} \left| \frac{1-\zeta}{1-\xi} \right| < 1 ,$$

то любую функцию ψ , равномерно непрерывную на множестве E ,

---

x) Нумерация теорем во введении не совпадает с нумерацией теорем в диссертации.

можно продолжать до функции f, заданной на всей расширенной комплексной плоскости $\hat{C}$, регулярной в $\hat{C}\setminus\{1\}$, непрерывной в замкнутом круге $\bar{D}$ и такой, что

$$\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to+\infty,$$

где $\hat{f}(n)=f^{(n)}(0)/n!$ $\quad(n=0,1,2,\dots)$.

В § 5 главы I доказывается ряд теорем об интерполяции в пространствах l_A^p $(1<p\leq+\infty)$, опирающихся на результаты, полученные в § 3. Приведем формулировки двух основных теорем этого параграфа.

Пусть $h^p(E)$ $(1<p\leq+\infty)$ – класс всех функций ψ, заданных на множестве E и таких, что

$$\sum_{z\in E}|\psi(z)|^p(1-|z|)^{p-1}<+\infty,\quad \text{если}\quad 1<p<+\infty, \text{ и}$$

$$\sup_{z\in E}|\psi(z)|(1-|z|)<+\infty,\quad \text{если}\quad p=+\infty.$$

<u>Теорема 3.</u> Пусть $E\subset B_\lambda$ при некотором $\lambda\geq1$ и $p\in(1,+\infty]$.

Тогда следующие утверждения равносильны

1. $S(l_A^p)=h^p(E)$,

2. Множество E удовлетворяет условию $(*)$.

<u>Теорема 4.</u> Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет

условию

$$\sup_{\substack{\xi, z \in E \\ \xi \neq z,\ |z| \leq |\xi|}} \frac{1-|\xi|}{1-|z|} < 1 .$$

Тогда
$$S(l_A^p) = h^p(E) \quad (1<p<+\infty).$$

В § 6 главы 1 построен пример функции $f \in \bigcap_{p>2} l_A^p$ $(f \not\equiv 0)$ такой, что $f(z_k)=0$, $k=1,2,\ldots$ ($z_k \neq z_m$, если $k \neq m$; $|z_k|<1$, $k=1,2,\ldots$) и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|) = +\infty .$$

Глава П. Поведение норм некоторых линейных операций в пространстве $C_A(G)$ и интерполяционные теоремы Банаха и Рудина-Карлесона.

Пусть E - непустое замкнутое множество, расположенное на единичной окружности ∂D $(E \neq \partial D)$. Обозначим символом $A_C(E)$ - пространство всех функций, заданных на всей расширенной комплексной плоскости $\hat{C}$, регулярных в $\hat{C} \setminus E$ и непрерывных в замкнутом круге $\bar{D}$.

Глава П посвящена интерполяционным задачам в пространстве $A_C(E)$, примыкающем к интерполяционным теоремам Банаха (пример 2') и Рудина- Карлесона (пример 3'). Кроме того, в этой главе изучается поведение коэффициентов Маклорена функций из пространства $A_C(\{1\})$.

В § 1 приводятся обозначения и предварительные сведения, используемые в §§ 2-3.

Прежде чем переходить к изложению результатов § 2 главы II, введем несколько обозначений.

Пусть G односвязная область в $\hat{C}$.

$C_A(G)$ – пространство всех функций, регулярных в G и непрерывных в $\bar{G}$ ($\bar{G}$ – замыкание G). Пространство $C_A(G)$ снабжается нормой

$$\|f\|_{C_A(\bar{G})} = \max_{z\in\bar{G}} |f(z)|, \quad f\in C_A(G).$$

Q – подмножество множества всех целых неотрицательных чисел, $Q_n = \{k\in Q:\ k\leq n\}$ $(n=0,1,2,\dots)$.

$d=\{d_k\}_{k\in Q}$ – семейство положительных чисел.

$l^p(Q_n,d)$ $(0<p<2)$ –пространство всех семейств комплексных чисел $x=\{x_k\}_{k\in Q_n}$, снабжённое нормой

$$\|x\|_{(p,d)} = \Big(\sum_{k\in Q_n} |x_k|^p d_k^2\Big)^{1/p}\ ^{x)}.$$

Пусть область G содержит единичный круг D.

Обозначим символом $J^p_{n,G}$ –линейный оператор из $C_A(G)$ в $l^p(Q_n,d)$ $(0<p<2)$, задаваемый равенством

$$J^p_{n,G} f = \{\hat{f}(k)/d_k\}_{k\in Q_n}, \quad f\in C_A(G) \quad (n=0,1,2,\dots),$$

---

x) При $0<p<1$ – $\|x\|_{(p,d)}$ не является нормой в общепринятом смысле слова.

где $\hat{f}(n) = f^{(n)}(0)/n! \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

$\| J^p_{n,G} \|$ – норма оператора $J^p_{n,G}$.

$$\| J^p_{n,G} \| = \sup_{\|f\|_{C_A(G)} \le 1} \left(\sum_{k \in Q_n} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (0<p<2),$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Основным результатом § 2 главы II является следующая

Теорема 5. Пусть

$$G = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z \in \hat{\mathbb{C}} : 1 \le |z| \le 1+\varepsilon\} \cap \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |\arg z| \le \varepsilon\}$$

$(\varepsilon \in (0,1))$ и $p \in (0,2)$. Тогда существует константа $M = M(\varepsilon, p) \in (0, +\infty)$ такая, что

$$M \left(\sum_{k \in Q_n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \le \| J^p_{n,G} \| \le \left(\sum_{k \in Q_n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 5 представляет собой обобщение одной известной теоремы Пэли из [14]. При помощи этой теоремы доказывается ряд утверждений о поведении коэффициентов Маклорена функций из $A_C(\{1\})$. Приведем одно из них.

Теорема 6. Пусть семейство положительных чисел $\{d_k\}_{k \in Q}$ таково, что $\sum_{k \in Q} d_k^2 = +\infty$. Тогда существует функция $f \in A_C(\{1\})$ такая, что

$$\sum_{k \in Q} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} = +\infty$$

при всех $p \in (0,2)$.

Отметим, что § 2 главы II по своему содержанию примыкает к работам [14], [15], [16] Р. Пэли, С.Б. Стечкина и В.П. Хавина. Кроме того, все результаты работ [17], [18], относящиеся к пространству всех функций регулярных вне луча $[1,+\infty)$ и непрерывных в круге $\bar{D}$ будут верны и в том случае, если это пространство заменить пространством $A_C(\{1\})$.

В § 2 главы II имеется также ряд результатов о поведении коэффициентов Маклорена функций, регулярных в $\hat{C} \setminus \{1\}$ и имеющих ряд Маклорена равномерно сходящийся в круге $\bar{D}$.

В § 3 главы II содержатся обобщения интерполяционных теорем Банаха и Рудина- Карлесона (примеры 2', 3').

Основной результат таков :

<u>Теорема 7.</u> Пусть E - замкнутое подмножество единичной окружности ∂D и $mes\, E = 0$ (mes - мера Лебега на окружности ∂D), Q - подмножество множества целых неотрицательных чисел, удовлетворяющее условию Адамара, т.е.

$$\inf_{\substack{m,n \in Q,\\ m>n>0}} \left(\frac{m}{n}\right) > 1 .$$

Тогда для любой функции ψ ,непрерывной на множестве E и для любого семейства комплексных чисел $x=\{x_k\}_{k\in Q}$, суммируемого с квадратом,существует функция $f\in A_C(E)$ такая,что

$$f(z)=\psi(z)\ ,\quad z\in E$$

и

$$\hat{f}(k)=x_k\ ,\quad k\in Q\ .$$

Основные результаты диссертации изложены в статьях [19],[20], [21] .

ГЛАВА I.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗ l^p.

§ 1. Основные обозначения

1.1. D - открытый единичный круг комплексной плоскости с центром в нуле, ∂D - единичная окружность с центром в нуле, $\bar{D} = D \cup \partial D$.

1.2. H^p - класс Харди $(p \in (0, +\infty])$ x), т.е. класс всех функций f, голоморфных в круге D и таких, что

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \text{ если } 0<p<+\infty \quad (1)$$

и

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{|z|<1} |f(z)| < +\infty, \text{ если } p = +\infty. \quad (2)$$

Если $p \geq 1$, то H^p есть банахово пространство с нормой, задаваемой равенствами (1), (2).

1.3. Если функция f голоморфна в круге D, то символ $\hat{f}(n)$ будет обозначать n - ный коэффициент ($n = 0, 1, 2, \ldots$) ряда Маклорена функции f.

1.4. ℓ^p $(p \in [1, +\infty])$ - пространство всех последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, имеющих конечную норму

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \text{ если } p \in [1, +\infty)$$

и

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k| < +\infty, \text{ если } p = +\infty.$$

---

x) Свойства классов Харди изложены в [1], [2].

1.5. ℓ^p_A - пространство всех функций f, голоморфных в круге D и таких, что $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^p$. Норма в ℓ^p_A задается равенством

$$\|f\|_{\ell^p_A} = \|\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}\|_p \quad (1 \le p \le +\infty).$$

1.6 Пусть X - подмножество комплексной плоскости. $C(X)$ - пространство всех функций, ограниченных и равномерно непрерывных на X, с нормой

$$\|f\|_{C(X)} = \sup_{z \in X} |f(z)|, \quad f \in C(X).$$

1.7. Пусть E - произвольное счетное подмножество круга $\overline{D}$. Символом γ_E будем обозначать класс всех последовательностей $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$, состоящих из всех точек множества E и удовлетворяющих условию

$$\xi_k \ne \xi_m, \quad \text{если } k \ne m \ (k,m = 0,1,2,\dots)$$

В дальнейшем будут рассматриваться, если не оговорено противное, только такие последовательности точек множества E.

§ 2. О множествах Карлесона, содержащихся в круге D.

2.1. Определение. Пусть E - подмножество круга $\bar{D}$. Следуя [3], будем называть E множеством Карлесона, если для любой функции $\psi \in C(E)$ существует функция $f \in \ell^1_A$ такая, что

$$f(z) = \psi(z) \quad , \quad z \in E .$$

2.2. В [3] доказано существование непустых совершенных множеств Карлесона, лежащих на единичной окружности ∂D. Возникает вопрос: существуют ли бесконечные множества Карлесона, лежащие в открытом круге D? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. Любое множество Карлесона, лежащее в круге D, конечно.

Доказательство. Заметим, что всякое подмножество множества Карлесона есть множество Карлесона, и что множество Карлесона не имеет точек сгущения в круге D. Поэтому достаточно показать, что всякое бесконечное счетное множество $E \; (E \subset D)$, имеющее только одну предельную точку на окружности ∂D, не есть множество Карлесона. Не умаляя общности, будем считать, что эта предельная точка $z = 1$.

Пусть S - линейный оператор из ℓ^1 в $C(E)$, задаваемый равенством

$$(Sx)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k , \quad z \in \bar{E} \quad , \quad x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell^1$$

($\bar{E}$ - замыкание E).

Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$S(\ell^1) \neq C(\bar{E}).$$

Предположим противное, т.е. что $S(\ell^1) = C(\bar{E})$. Так как S - непрерывный линейный оператор из ℓ^1 в $C(\bar{E})$, а ℓ^1 и $C(\bar{E})$ - банаховы пространства, то по известной теореме Банаха ([4] ,стр. 433) сопряженный оператор S^* имеет ограниченный левый обратный. Используя определение сопряженного оператора и теоремы об общем виде функционалов из $(\ell^1)^*$ и $C^*(\bar{E})$, получим

$$(S^*\psi)(x) = \sum_{z\in\bar{E}} \overline{\psi(z)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \left(\sum_{z\in\bar{E}} \overline{\psi(z)} z^k\right), \quad \psi \in \ell^1(\bar{E}), \quad x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell^1,$$

$$S^*\psi \in \ell^\infty,$$

где $\ell^1(\bar{E})$ - пространство всех функций ψ, заданных на множестве $\bar{E}$, и таких, что норма

$$\|\psi\|_{\ell^1(\bar{E})} = \sum_{z\in\bar{E}} |\psi(z)| < +\infty.$$

Так как

$$\sum_{z\in\bar{E}} |\psi(z)| < +\infty, \quad |z| < 1 \quad (z \in E)$$

и $\bar{E} \setminus E = \{1\}$, то

$$\sum_{z\in\bar{E}} \psi(z)\bar{z}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \psi(1),$$

т.е. $S^*(\ell^1(E))\subset C$, где C – пространство всех сходящихся последовательностей.

Используя определение сопряженного оператора и теоремы об общем виде функционалов из C^* и $(\ell^1(\bar{E}))^*$, получим

$$(S^{**}_x)(\psi)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{x}_k\sum_{z\in\bar{E}}\psi(z)\bar{z}^k+\bar{x}_\infty\cdot\psi(1)=$$

$$=\overline{\sum_{z\in E}\psi(z)\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^k}+\psi(1)\overline{\left(x_\infty+\sum_{k=0}^{\infty}x_k\right)},$$

$$\psi\in\ell^1(\bar{E}),\quad x=(x_\infty,x_0,x_1,\dots)\in\ell^1.$$

Итак, $$(S^{**}_x)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^k,\ \text{если } z\in E \qquad (1)$$

и $(S^{**}_x)(1)=x_\infty+\sum_{k=0}^{\infty}x_k$, $x\in\ell^1$, $S^{**}_x\in\ell^\infty(\bar{E})$ –

– пространство всех функций, ограниченных на $\bar{E}$.

Так как S^* есть линейный непрерывный оператор из $l^1(E)$ в C, имеющий ограниченный левый обратный, то по теореме Банаха ([4] , стр. 432)

$$S^{**}(l^1) = l^{\infty}(E). \tag{2}$$

Но из (1) легко усмотреть, что равенство (2) невозможно. Следовательно, наше допущение неверно. Теорема доказана.

2.3. Интересно сравнить утверждение этой теоремы с утверждением теоремы 4.10 (§ 4 , гл. I), из которой, в частности, следует существование бесконечного множества E $(E \subset D)$ такого, что любую функцию $\psi \in C(E)$ можно распространить до функции f, голоморфной во всей расширенной комплексной плоскости, кроме $z=1$, имеющей ряд Маклорена, равномерно сходящийся на окружности ∂D, и $\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$. В качестве такого множества можно взять, например, множество

$$E = \{1-2^{-k} : k = 0,1,2,\dots\}.$$

§ 3. Интерполяция в пространствах V_A и ℓ^1_A.

В пунктах 3.1 — 3.14 приведены необходимые в дальнейшем обозначения и предварительные сведения, в пункте 3.15 дан краткий план доказательства основной теоремы этого параграфа.

3.1 V_A - пространство всех функций f, голоморфных в круге D и таких, что производная $f' \in H^1$. V_A снабдим нормой

$$\|f\|_{V_A} = \frac{1}{2\pi}\Big(f(1) + \int_{|\zeta|=1} |f'(\zeta)|\,|d\zeta|\Big), \qquad (1)$$

где $f'(\zeta)$ $(\zeta \in \partial D)$ — граничное значение функции f'.

3.2. bv - пространство всех последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ таких, что норма

$$\|x\|_{bv} = |x_\infty| + \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| < +\infty, \qquad (2)$$

где $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k$.

3.3. Пусть $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ - произвольная последовательность комплексных чисел, принадлежащих замкнутому кругу $\bar{D}$.

Символ S будет обозначать линейный оператор, задаваемый равенством

$$Sf = \{f(z_k)\}_{k=0}^{\infty}, \quad f \in \ell^1_A. \qquad (3)$$

3.4. Теорема (Харди). $V_A \subset \ell^1_A$ и

$$\|f\|_{\ell^1_A} \le B_0 \|f\|_{V_A}, \quad f \in V_A, \tag{4}$$

где B_0 - абсолютная константа (см. [2] ,стр. 104).

3.5. Определение. Пусть E - счетное подмножество круга D. Будем говорить, что множество E удовлетворяет условию Карлесона, если

$$\delta = \inf_{\xi \in E} \prod_{z \in E_\xi} \left| \frac{z-\xi}{1-\bar{z}\xi} \right| > 0, \tag{I}$$

где $E_\xi = \{z \in E : z \ne \xi\}$.

3.6. Определение. Пусть E - счетное подмножество круга D. Будем говорить, что множество E удовлетворяет условию Ньюмана, если

$$\gamma = \sup_{\substack{z,\xi \in E \\ z \ne \xi,\ |\xi| \le |z|}} \frac{1-|z|}{1-|\xi|} < 1. \tag{II}$$

3.7. Лемма [5] . Если множество E $(E \subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана с константой γ $(0<\gamma<1)$, то оно удовлетворяет условию Карлесона с константой

$$\delta \ge \exp\left\{-\frac{16}{(1-\gamma)^3}\right\} \tag{5}$$

и имеет место неравенство

$$\frac{||z|-|\xi||}{1-|z||\xi|} \geq \frac{1-\gamma}{2}, \quad z\neq\xi,\ z,\xi\in E. \qquad (6)$$

Доказательство приведено в Добавлении I , I.10 .

3.8. Определение . Будем говорить,что множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) , если существует число $\lambda \geq 1$ такое, что

$$|1-z| \leq \lambda(1-|z|) \qquad (III)$$

для всех $z\in E$.

Иными словами, множество E может иметь на окружности ∂D только одну предельную точку $z=1$ причем оно сгущается к ней,оставаясь в угле раствора меньшего π с центром в точке $z=1$ и биссектрисой $(-\infty, 1)$ (см. Добавление I , лемма I.28) .

3.9. Лемма . Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию Карлесона с константой $\delta>0$. Тогда

$$\sup_{\xi\in E}\left(\sum_{z\in E_\xi}\frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{|1-\bar{z}\xi|^2}\right) \leq 2\ln\frac{1}{\delta}, \qquad (7)$$

$$E_\xi = \{z\in E : z\neq\xi\}.$$

Доказательство приведено в Добавлении I , I.2.

3.10. Лемма. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию Карлесона с константой $\delta>0$ и условию (III) с константой $\lambda \geq 1$. Тогда

$$\sup_{\xi \in E} \left(\sum_{z \in E} \frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{(1-|z||\xi|)^2} \right) \leq (1-2\ln\delta)\lambda^2 = M_0, \tag{8}$$

$$\sup_{\xi \in E} \left(\sum_{\substack{z \in E, \\ |z| \leq |\xi|}} \frac{1-|\xi|}{1-|z|} \right) \leq M_0, \tag{9}$$

$$\sum_{\substack{z \in E, \\ |\xi| \leq |z|}} (1-|z|) \leq M_0 (1-|\xi|), \quad \xi \in E, \tag{10}$$

$$\sup_{\xi \in E} \left(\sum_{z \in E} \frac{|1-\xi|}{|1-z|} \right) \leq M_0, \tag{11}$$

$$\sum_{\substack{z \in E, \\ |1-z| \leq |1-\xi|}} |1-z| \leq M_0 |1-\xi|, \quad \xi \in E. \tag{12}$$

Доказательство приведено в Добавлении I, I.3.

3.11. Лемма. Пусть множество E удовлетворяет условию $(\overline{III})$ с константой $\lambda \geq 1$. Тогда для любого $z \in E$ и любого $\xi \in \partial D$ имеем

$$|1-z\xi|^2 \leq (1+\lambda^2)|1-\xi|z||^2, \tag{13}$$

$$|1-\xi|z||^2 \leq (1+\lambda^2)|1-\bar{z}\xi|^2. \tag{14}$$

Доказательство приведено в Добавлении I, 1.4.

3.12. Лемма. Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E ($\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\gamma_E$, см. 1.7.) и множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда , если

1°. последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что $|\xi_k|\le|\xi_{k+1}|$ $(k=0,1,2,\dots)$, то для любого числа $\gamma_0\in(0,1)$ и натурального $l_0>\frac{M_0}{\gamma_0}$ имеем

$$\frac{1-|\xi_{m+l_0}|}{1-|\xi_m|}<\gamma_0<1 \quad (m=0,1,2,\dots) \qquad (15)$$

(M_0 - константа из 3.10) и

$$\frac{|\xi_{m+l_0}|-|\xi_m|}{1-|\xi_m||\xi_{m+l_0}|}\ge\frac{1}{2}(1-\gamma_0) \quad (m=0,1,2,\dots) \qquad (16)$$

2°. если же последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что $|1-\xi_{k+1}|\le|1-\xi_k|$ $(k=0,1,2,\dots)$, то для любого числа $\gamma_0\in(0,1)$ и натурального $l_0>\frac{M_0}{\gamma_0}$ имеем

$$\frac{|1-\xi_{m+l_0}|}{|1-\xi_m|}<\gamma_0<1 \quad (m=0,1,2,\dots) \qquad (17)$$

и

$$\frac{1}{\lambda}\,\frac{|1-\xi_m|-|1-\xi_{m+l_0}|}{1-(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_m|)(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m+l_0}|)}\ge\frac{1}{2}(1-\gamma_0) \qquad (18)$$

$(m=0,1,2,\dots)$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.15.

3.13. Определение. Будем говорить, что множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (IV), если

$$\delta_0 = \inf_{\substack{\xi,\zeta\in E\\ \xi\neq\zeta}} \left|\frac{\xi-\zeta}{1-\bar{\zeta}\xi}\right| > 0. \qquad (IV)$$

3.14. Лемма. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III). Тогда условие (IV) и условие Карлесона равносильны.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.14.

3.15. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.26. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III). Тогда, если $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ -последовательность таких точек множества E $(\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in \mathcal{X}_E$, см. 1.7$)$ такая, что

$$|1-\xi_{k+1}| \leq |1-\xi_k| \quad (k=0,1,2,\dots),$$

то следующие утверждения равносильны:

1°. $S(V_A) = bv$,

2°. $S(\ell^1_A) = bv$,

3°. множество E удовлетворяет условию Карлесона.

Приведем план доказательства этой теоремы. Пусть последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.26 и множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда прежде всего будет показано (леммы 3.16, 3.18), что

$$S(\ell^1_A) \subset bv. \qquad (19)$$

Затем будет построена (леммы 3.22, 3.23) последовательность функций $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(F_n \in V_A,\ n=0,1,2,\dots)$, удовлетворяющая условиям

$$\sup_n \|F_n\|_{V_A} < +\infty \quad \text{и} \quad F_n(\xi_k) = \begin{cases} 1, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}.$$

При помощи этой последовательности строится линейный непрерывный оператор R, действующий из bv в V_A и такой, что

$$S(Rx) = x$$

для всех $x \in bv$ (см. теорему 3.24) . Но тогда

$$bv = S(R(bv)) \subset S(V_A), \qquad (20)$$

и так как $V_A \subset \ell^1_A$ (теорема 3.4), то (20) вместе с (19) дает

$$S(V_A) = S(\ell^1_A) = bv.$$

Доказательство того, что любое из утверждений 1°, 2°, влечет 3°, не представляет особого труда (лемма 3.25) и приведено в Добавлении I, 1.25.

3.16. Лемма. Пусть $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ - произвольная неубывающая последовательность чисел отрезка $[0,1)$. Тогда

$$S(\ell^1_A) \subset bv \qquad (21)$$

Доказательство. Если $f \in \ell^1_A$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f(r_{k+1}) - f(r_k)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| (r_{k+1}^n - r_k^n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| \sum_{k=0}^{\infty} (r_{k+1}^n - r_k^n) \le \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| = \|f\|_{\ell^1_A} < +\infty.$$

Лемма доказана.

3.17. Лемма. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) с константой $\lambda\geq 1$ и условию

$$\gamma_0=\sup_{\substack{\zeta,\xi\in E,\\ \xi\neq\zeta,\ |1-\zeta|\leq|1-\xi|}}\frac{|1-\zeta|}{|1-\xi|}<1 .$$

Тогда имеет место неравенство

$$\left|\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^n-\zeta^n\right|\leq\frac{2\lambda}{1-\gamma_0}\left|\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^n-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\zeta|\right)^n\right| \qquad (22)$$

для всех $\zeta,\xi\in E,\ \xi\neq\zeta$ и всех $n\ (n=0,1,2,\dots)$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.16.

3.18. Лемма. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда, если $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества $E\ (\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\mathcal{X}_E)$ такая, что $|1-\xi_{k+1}|\leq|1-\xi_k|\ (k=0,1,2,\dots)$, то

$$S(l_A^1)\subset bv .$$

Доказательство. Пусть $f\in l_A^1$, тогда

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}|f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\xi_{k+1})-f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{k+1}|\right)\right|+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{k+1}|\right)-f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_k|\right)\right|+\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_k|\right)-f(\xi_k)\right|.$$

Применив лемму $\underline{3.16}$, получим

$$S \le 2\sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_k|\right) - f(\xi_k)\right| + \|f\|_{\ell^1_A} . \qquad (23)$$

Далее имеем

$$\tilde{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_k|\right) - f(\xi_k)\right| =$$

$$= \sum_{j=0}^{\ell_0-1} \sum_{m=0}^{\infty} \left| f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m,j}|\right) - f(\xi_{m,j})\right| ,$$

где $\xi_{m,j} = \xi_{m\ell_0+j}$ $(j=0,1,\dots,\ell_0-1;\ j=0,1,2,\dots)$, а ℓ_0 - натуральное число.

$$\tilde{S} \le \sum_{j=0}^{\ell_0-1} \sum_{m=0}^{\infty} \left| f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m,j}|\right) - f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m+1,j}|\right)\right| +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\ell_0-1} \sum_{m=0}^{\infty} \left| f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m+1,j}|\right) - f(\xi_{m,j})\right| \le$$

$$\le \ell_0 \|f\|_{\ell^1_A} + \sum_{j=0}^{\ell_0-1} \sum_{m=0}^{\infty} \left| f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m+1,j}|\right) - f(\xi_{m,j})\right| . \qquad (24)$$

Пусть ℓ_0 - удовлетворяет условиям леммы $\underline{3.12}$, тогда последовательность $\{\xi_{m,j}\}_{m=0}^{\infty}$ $(j=0,1,2,\dots \ell_0-1)$ удовлетворяет условиям леммы $\underline{3.17}$ (см. лемму $\underline{3.12}$), поэтому будем иметь

$$S_j=\sum_{m=0}^{\infty}\left|f\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m+1,j}|\right)-f(\xi_{m,j})\right|\leq$$

$$\leq\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|\left|\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m+1,j}|\right)^n-\xi_{m,j}^n\right|\leq$$

$$\leq\frac{2\lambda}{1-\gamma_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|\left(\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m+1,j}|\right)^n-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m,j}|\right)^n\right)\leq$$

$$\leq\frac{2\lambda}{1-\gamma_0}\|f\|_{\ell_A^1}\qquad (j=0,1,\ldots,\ell_0-1). \qquad (25)$$

Учитывая (23), (24), (25), получим, что

$$S\leq\|f\|_{\ell_A^1}+2\ell_0\|f\|_{\ell_A^1}+2\ell_0\frac{2\lambda}{1-\gamma_0}\|f\|_{\ell_A^1}<+\infty;$$

γ_0 можно положить равным $\frac{1}{2}$, а $\ell_0=[2M_0]+1$, где M_0 из 3.10. Лемма доказана.

3.19. Лемма. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию $(\overline{\underline{III}})$ и условию Карлесона. Тогда существует константа $M_1\in(0,+\infty)$ такая, что

$$\varkappa(z)=\sum_{\zeta\in E}\frac{(1-|\zeta|)|1-z|}{|1-\bar{\zeta}z|^2}\leq M_1 \qquad (26)$$

для всех $z\in\partial D$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.7.

3.20. Лемма. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию $(\overline{\underline{III}})$

и условию Карлесона. Тогда

1°. если $\{h_{\xi}\}$ $(\xi\in E)$ - семейство функций, регулярных и ограниченных в круге D, такое, что

$\sup\limits_{\xi\in E}\|h_{\xi}\|_{H^{\infty}}<+\infty$, то функция

$$g(z)=\sum_{\xi\in E}h_{\xi}(z)\frac{(1-|\xi|)(1-z)}{(1-\bar{\xi}z)^2}\ , z\in D, \qquad (27)$$

регулярна в круге D и

$$\|g\|_{H^{\infty}}=\sup_{z\in D}|g(z)|\leq M_1\sup_{\xi\in E}\|h_{\xi}\|_{H^{\infty}}, \qquad (28)$$

где константа M_1 из 3.19;

2°. если, кроме того, $\|h_{\xi}\|_{H^{\infty}}\xrightarrow[\xi\to 1,\ \xi\in E]{}0$ и функции непрерывны в $\bar{D}\setminus\{1\}$, то функция g, задаваемая равенством (27), регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.8.

3.21. Пусть E - произвольное счётное подмножество круга D, удовлетворяющее условию

$$\sum_{\zeta\in E}(1-|\zeta|)<+\infty. \qquad (29)$$

Символами B, B_{ξ}, $B_{\xi,\zeta}$ $(\xi,\zeta\in E)$ будем обозначать соответствующие произведения Бляшке:

$$B(z)=\prod_{\zeta\in E}\frac{|\zeta|}{\zeta}\cdot\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\ , z\in D,$$

$$B_{\xi}(z)=\prod_{\zeta\in E_{\xi}}\frac{|\zeta|}{\zeta}\cdot\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\ , z\in D,$$

где $E_\xi = \{\zeta \in E : \zeta \neq \xi\}$, $\xi \in E$,

$$B_{\xi,\varsigma}(z) = \prod_{\zeta \in E_\xi \cap E_\varsigma} \frac{|\zeta|}{\zeta} \cdot \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z}, \quad z \in D.$$

Если $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E $\left(\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{X}_E\right)$, то вместо B_{ξ_n} и B_{ξ_n,ξ_m} $(n,m=0,1,2,\dots)$ будем писать короче B_n и $B_{n,m}$.

<u>3.22. Лемма.</u> Пусть множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда семейство функций $\{\Phi_\xi\}(\xi \in E)$, задаваемых равенством :

$$\Phi_\xi(z) = a_\xi \frac{(1-|\xi|^2)(1-z^2)}{(1-\bar{\xi} z)^2} B_\xi(z), \quad z \in D \ (\xi \in E) \tag{30}$$

где $a_\xi = \frac{1-|\xi|^2}{1-\xi^2} \cdot \frac{1}{B_\xi(\xi)}$ $(\xi \in E)$ (B_ξ определено в <u>3.21</u>) удовлетворяет условиям :

1°. $$\Phi_\xi(\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \zeta \neq \xi \\ 1, & \text{если } \zeta = \xi \end{cases} \quad (\zeta, \xi \in E),$$

2°. $\Phi_\xi \in V_A$ $(\xi \in E)$ и $$M_2 = \sup_{\xi \in E} \|\Phi_\xi\|_{V_A} < +\infty. \tag{31}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что из условия Карлесона следует, что $\sum_{\zeta\in E}(1-|\zeta|)<+\infty$, и тем самым равенство (30) имеет смысл.

Первое условие выполняется очевидным образом.

Покажем, что $\Phi_\xi\in V_A$ $(\xi\in E)$ и что их нормы ограничены в совокупности.

$$\Phi'(z)=a_\xi\cdot\frac{(1-|\xi|^2)(1-z^2)}{(1-\bar\xi z)^2}\cdot\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{|\zeta|^2-1}{(1-\bar\zeta z)^2}\cdot\frac{|\zeta|}{\zeta}\cdot B_{\xi,\zeta}(z)+$$

$$+2a_\xi B_\xi(z)\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar\xi z)^2}\cdot\frac{(\bar\xi-z)}{(1-\bar\xi z)},\quad z\in D$$

$$(E_\xi=\{\zeta\in E:\zeta\neq\xi\}).$$

Учитывая, что E удовлетворяет условию Карлесона, получим:

$$|a_\xi|=\frac{1-|\xi|^2}{|1-\xi^2|}\cdot\frac{1}{|B_\xi(\xi)|}\leq\frac{1}{\delta},\ \xi\in E, \qquad (32)$$

(δ из 3.5).

Пусть $0<\rho<1$, тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi'(\rho e^{it})|dt\leq\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{\zeta\in E_\xi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)(1-\rho^2e^{2it})}{(1-\bar\xi\rho e^{it})^2(1-\bar\zeta\rho e^{it})^2}\right|dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{(1-|\xi|^2)(\bar\xi-\rho e^{it})}{(1-\bar\xi\rho e^{it})^3}\right|dt\right)\leq$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{\zeta\in E'}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)(1-e^{2it})}{(1-\bar\xi e^{it})^2(1-\bar\zeta e^{it})^2}\right|dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{(1-|\xi|^2)(\bar\xi-e^{it})}{(1-\bar\xi e^{it})^3}\right|dt\right) \tag{33}$$

Применяя лемму 3.19 и используя введенные в ней обозначения, получим

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\zeta\in E'}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)|1-e^{2it}|}{|1-\bar\xi e^{it}|^2|1-\bar\zeta e^{it}|^2}dt\leqslant 4\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar\xi e^{it}|^2}\chi(e^{it})dt\leqslant$$

$$\leqslant 4M_1\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar\xi e^{it}|^2}dt=4M_1, \tag{34}$$

последнее равенство очевидно, так как под интегралом стоит ядро Пуассона.

Из неравенств (13) и (14) леммы 3.11 следует, что

$$|1-\bar\xi e^{it}|\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}|1-|\xi|e^{it}|\geqslant\frac{1}{1+\lambda^2}|1-\xi e^{it}| \tag{35}$$

Применяя (35), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar\xi e^{it}|^2}\cdot\frac{|\bar\xi-e^{it}|}{|1-\bar\xi e^{it}|}dt\leqslant\frac{1+\lambda^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar\xi e^{it}|^2}dt=$$

$$=2(1+\lambda^2). \tag{36}$$

Учитывая (33), (34), (36) и то, что

$$\Phi_\xi(1)=0 \quad (\xi\in E)$$

, получим

$$\|\Phi_\xi\|_{V_A} = \sup_{0<\rho<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi'(\rho e^{it})|dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\left(4M_1+2(1+\lambda^2)\right)$$ для всех $\xi\in E$.

Лемма доказана.

3.23. Лемма. Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ -последовательность точек множества E ($\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\mathcal{Y}_E$, см. 1.7) такая, что $|1-\xi_{k+1}|\leq|1-\xi_k|$ (37)

($k=0,1,2,\dots$). Тогда, если множество E удовлетворяет условию (III) с константой $\lambda\geq 1$ и условию Карлесона с константой $\delta>0$, то существует последовательность функций $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что

$$1^\circ.\ F_n(\xi_k)=\begin{cases}1, & \text{если } k\leq n\\ 0, & \text{если } k>n\end{cases} \quad (k,n=0,1,2,\dots) \tag{38}$$

2°. $F_n\in V_A$ $(n=0,1,\dots)$ и $M_3=\sup_n\|F_n\|_{V_A}<+\infty$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций :

$$\Psi_n(z)=\frac{1-z}{1-\xi_n z}B_n(z),\ z\in D\ (n=0,1,2,\dots), \tag{39}$$

где
$$b_n(z)=\prod_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\xi_k|}{\xi_k}\cdot\frac{\xi_k-z}{1-\bar{\xi}_k z},\ z\in D \qquad (40)$$

$(n=0,1,2,\ldots)$.

Покажем, что $\Psi_n\in V_A$ $(n=0,1,\ldots)$ и что последовательность

$\{\|\Psi_n\|_{V_A}\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена.

Имеем

$$\Psi_n'(z)=\frac{\xi_n-1}{(1-z\xi_n)^2}b_n(z)+\frac{(1-z)}{1-z\xi_n}\cdot\sum_{k=n+1}\frac{(|\xi_k|^2-1)}{(1-\bar{\xi}_k z)^2}b_{n,k}(z)\cdot\frac{|\xi_k|}{\xi_k},$$

где

$$b_{n,k}(z)=\prod_{\substack{j=n+1\\ k\neq j}}^{\infty}\frac{|\xi_j|}{\xi_j}\cdot\frac{\xi_j-z}{1-\bar{\xi}_j z}\quad (k,n=0,1,2,\ldots;\ k>n).$$

Пусть $0<\rho<1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n'(\rho e^{it})|dt\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-\xi_n|\,dt}{|1-\xi_n\rho e^{it}|^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sup_{\substack{m\\ m>n}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1-\rho e^{it}}{1-\xi_n\rho e^{it}}\cdot\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1-|\xi_k|^2}{(1-\rho e^{it}\bar{\xi}_k)^2}b_{n,k}(\rho e^{it})\cdot\frac{|\xi_k|}{\xi_k}\right|dt\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-\xi_n|}{|1-\xi_n e^{it}|^2}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sup_{\substack{m\\ m>n}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1-e^{it}}{1-\xi_n e^{it}}\cdot\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1-|\xi_k|^2}{(1-\bar{\xi}_k e^{it})^2}b_{n,k}(e^{it})\frac{|\xi_k|}{\xi_k}\right|dt. \qquad (41)$$

Так как множество E удовлетворяет условию $(\overline{III})$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-\xi_n|\,dt}{|1-\xi_n e^{it}|^2}\le\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-|\xi_n|^2)\,dt}{|1-\xi_n e^{it}|^2}=\lambda. \qquad (42)$$

Оценим второе слагаемое в (41)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{1-\xi_n e^{it}}\cdot\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(1-e^{it})(1-|\xi_k|^2)}{(1-\bar{\xi}_k e^{it})^2}b_{n,k}(e^{it})\cdot\frac{|\xi_k|}{\xi_k}\right|dt\le$$

$$\le\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{|1-\xi_n e^{it}|^2}\right)^{\frac12}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(1-e^{it})(1-|\xi_k|^2)}{(1-\bar{\xi}_k e^{it})(\xi_k-e^{it})}\right|^2|b_n(e^{it})|^2dt\right)^{\frac12}=$$

$$=(1-|\xi_n|^2)^{-\frac12}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j,k=n+1}^{m}\frac{(1-e^{it})(1-e^{-it})(1-|\xi_k|^2)(1-|\xi_j|^2)\,dt}{(1-\bar{\xi}_k e^{it})(1-\xi_j e^{-it})(\xi_k-e^{it})(\bar{\xi}_j-e^{-it})}\right)^{\frac12}=$$

$$=(1-|\xi_n|^2)^{-\frac12}\left(\frac{-1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\sum_{j,k=n+1}^{m}\frac{(1-|\xi_k|^2)(1-|\xi_j|^2)(1-z)^2\,dz}{(z-\xi_j)(z-\xi_k)(1-\bar{\xi}_j z)(1-\bar{\xi}_k z)}\right)^{\frac12}. \qquad (43)$$

Имеем

$$I_{j,k}=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1-|\xi_j|^2)(1-|\xi_k|^2)(1-z)^2\,dz}{(z-\xi_j)(z-\xi_k)(1-\bar{\xi}_j z)(1-\bar{\xi}_k z)}=$$

$$=\frac{(1-|\xi_k|^2)|1-\xi_j|^2+(1-|\xi_j|^2)|1-\xi_k|^2}{|1-\xi_j\bar{\xi}_k|^2} \qquad (44)$$

(подробное вычисление интеграла $I_{j,k}$ см. в Добавлении I, I.21).

Так как множество E удовлетворяет условию (III), то

$$I_{j,k} \leq \lambda^2 \frac{(1-|\xi_k|^2)(1-|\xi_j|)^2+(1-|\xi_j|^2)(1-|\xi_k|)^2}{(1-|\xi_j||\xi_k|)^2} =$$

$$= 2\lambda^2 \frac{(1-|\xi_k|)(1-|\xi_j|)}{1-|\xi_j||\xi_k|}. \qquad (45)$$

Принимая во внимание неравенства (41), (43), (45) и (42), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n'(\rho e^{it})|dt \leq \lambda + \left(\frac{2\lambda^2}{1-|\xi_n|^2}\sum_{j,k=n+1}^{\infty}\frac{(1-|\xi_k|)(1-|\xi_j|)}{1-|\xi_k||\xi_j|}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \lambda + \left(\frac{4\lambda^2}{1-|\xi_n|}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-|\xi_k|)(1-|\xi_{k+j}|)}{1-|\xi_k||\xi_{k+j}|}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (46)$$

Так как $\dfrac{1-|\xi_k|}{1-|\xi_k||\xi_{k+j}|} \leq 1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n'(\rho e^{it})|dt \leq \lambda + 2\lambda\left(\frac{1}{1-|\xi_n|}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(1-|\xi_{k+j}|)\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \lambda + 2\lambda\left(\frac{\lambda}{|1-\xi_n|}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|1-\xi_{k+j}|\right)^{\frac{1}{2}},$$

применим сначала к внутренней сумме, а затем и к внешней - неравенство (12) из леммы 3.10

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Psi_n'(\rho e^{it})\right|dt \leq \lambda + 2\lambda\left(\frac{\lambda M_0}{|1-\xi_n|}\sum_{k=n+1}^{\infty}|1-\xi_k|\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \lambda + 2\lambda^{\frac{3}{2}}M_0 .$$

Итак, $\Psi_n \in V_A \quad (n=0,1,2,\dots)$ и

$$\|\Psi_n\|_{V_A} \leq \lambda\left(1+2M_0\sqrt{\lambda}\right) \quad (n=0,1,2,\dots) \tag{47}$$

Теперь приступим к построению функций $F_n \quad (n=0,1,2,\dots)$, удовлетворяющих условию нашей леммы.

Рассмотрим числа β_{nk}:

$$\beta_{nk} = 1-\Psi_n(\xi_k) = 1-\frac{1-\xi_k}{1-\xi_n\xi_k}b_n(\xi_k), \text{ где } n \geq k .$$

$$|\beta_{nk}| = \left|1-b_n(\xi_k)+b_n(\xi_k)\left(1-\frac{1-\xi_k}{1-\xi_n\xi_k}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|1-b_n(\xi_k)\right| + \left|1-\frac{1-\xi_k}{1-\xi_n\xi_k}\right| \leq$$

$$\leq |1-b_n(\xi_k)| + \left|\frac{1-\xi_n}{1-\xi_n\xi_k}\right| \leq$$

$$\leq |1-b_n(\xi_k)| + \frac{|1-\xi_n|}{1-|\xi_k|} \leq |1-b_n(\xi_k)| + \lambda\left|\frac{1-\xi_n}{1-\xi_k}\right|. \quad (48)$$

Далее

$$|1-b_n(\xi_k)| = \left|\sum_{j=0}^{m}\left(b_{n+j+1}(\xi_k) - b_{n+j}(\xi_k)\right) + \left(1-b_{n+m+1}(\xi_k)\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m}\left|b_{n+j+1}(\xi_k) - b_{n+j}(\xi_k)\right| + \left|1-b_{n+m+1}(\xi_k)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|b_{n+j+1}(\xi_k) - b_{n+j}(\xi_k)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|1 - \frac{|\xi_{n+j+1}|}{\xi_{n+j}} \cdot \frac{\xi_{n+j+1}-\xi_k}{1-\bar{\xi}_{n+j+1}\xi_k}\right| =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left|\xi_{n+j+1}+\xi_k|\xi_{n+j+1}|\right|}{|\xi_{n+j+1}|} \cdot \frac{1-|\xi_{n+j+1}|}{|1-\bar{\xi}_{n+j+1}\xi_k|} \leq$$

$$\leq \frac{2}{1-|\xi_k|} \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\left(1-|\xi_{n+j+1}|\right) \leq \frac{2\lambda}{|1-\xi_k|}\sum_{j=0}^{\infty}|1-\xi_{n+j+1}|.$$

Применяя неравенство (12) леммы 3.10, получим

$$|1-b_n(\xi_k)| \leq 2M_0\lambda\frac{|1-\xi_{n+1}|}{|1-\xi_k|} \leq 2M_0\lambda\left|\frac{1-\xi_n}{1-\xi_k}\right|. \quad (49)$$

Из (48) и (49) следует, что

$$|\beta_{nk}| \leq (2M_0+1)\lambda\left|\frac{1-\xi_n}{1-\xi_k}\right| \quad (k=0,1,\dots,n;\ n=0,1,2,\dots) \qquad (50)$$

Используя (50), а также неравенство (11) леммы 3.10, получим

$$\sum_{k=0}^{n}|\beta_{nk}| \leq (2M_0+1)\lambda\cdot\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1-\xi_n}{1-\xi_k}\right| \leq (2M_0+1)\lambda M_0 \qquad (51)$$

$(n=0,1,2,\dots)$.

Пусть $\Phi_n=\Phi_{\xi_n}$ $(\xi_n\in E,\ n=0,1,2,\dots)$, где Φ_{ξ_n} — функции из леммы 3.22. Тогда функции

$$F_n=\Psi_n+\sum_{k=0}^{n}\beta_{nk}\Phi_k \quad (n=0,1,2,\dots)$$

искомые. Действительно, если $n\geq m$, то $F_n(\xi_m)=\Psi_n(\xi_m)+\beta_{nm}\Phi_m(\xi_m)=$

$$=\Psi_n(\xi_m)+\beta_{nm}=1,$$

если $n<m$, то $F_n(\xi_m)=0$.

Кроме того, используя (47), (51) и лемму 3.22, получим

$$\|F_n\|_{V_A}\leq\|\Psi_n\|_{V_A}+\sum_{k=0}^{n}|\beta_{nk}|\,\|\Phi_k\|_{V_A}\leq$$

$$\leq \lambda\left(1+2M_0\sqrt{\lambda}\right)+M_2\left(2M_0+1\right)\lambda M_0$$ для всех n $(n=0,1,2,\ldots)$.

Лемма доказана.

3.24. Теорема. Пусть $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E $\left(\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\gamma_E\right)$ такая, что $|1-\xi_{k+1}|\leq|1-\xi_k|$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

Тогда, если множество E удовлетворяет условию $(\overline{III})$ и условию Карлесона, то существует непрерывный линейный оператор S_r^{-1} из bv в V_A такой, что

$$S(S_r^{-1}x)=x \tag{52}$$

для всех $x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\in bv$ (S определен в 3.3).

Доказательство. Покажем, что в качестве такого оператора можно взять оператор, определенный равенством:

$$S_r^{-1}x=x_\infty+\sum_{n=0}^{\infty}(x_n-x_{n+1})F_n$$

для всякого элемента $x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\in bv$, где $x_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$ и F_n $(n=0,1,2,\ldots)$ - функции, построенные в лемме 3.23.

Действительно, во-первых,

$$\|S_r^{-1}x\|_{V_A}\leq|x_\infty|+\sum_{n=0}^{\infty}|x_n-x_{n+1}|\cdot\|F_n\|_{V_A}\leq$$

$$\leq|x_\infty|+M_3\sum_{n=0}^{\infty}|x_n-x_{n+1}|\leq\max\{1,M_3\}\cdot\|x\|_{bv},$$

$x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\in bv$, M_3 из леммы 3.23;

и, во-вторых,

если $\xi_k \in E$ $(k=0,1,2,\dots)$, то

$$\left(S_r^{-1}x\right)(\xi_k) = x_\infty + \sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n+1})F_n(\xi_k) =$$

$$= x_\infty + \sum_{n=0}^{k-1}(x_n - x_{n+1})F_n(\xi_k) + \sum_{n=k}^{\infty}(x_n - x_{n+1})F_n(\xi_k).$$

Воспользуемся тем, что

$$F_n(\xi_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \le n, \\ 0, & \text{если } k > n. \end{cases}$$

Тогда $\left(S_r^{-1}x\right)(\xi_k) = x_\infty + \sum_{n=k}^{\infty}(x_n - x_{n+1}) = x_k$

$(k=0,1,2,\dots)$,

следовательно, $S\left(S_r^{-1}x\right) = x$ для любого $x \in bv$.

Теорема доказана.

Замечание. Так как пространство V_A непрерывно вложено в l_A^1 (см. 3.4), то в формулировке теоремы можно вместо пространства V_A рассматривать l_A^1.

3.25. Лемма. Пусть E - счетное подмножество круга D. $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E $\left(\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \gamma_E; 1.7\right)$.

Тогда имеют место следующие утверждения :

1°. если $S(V_A) = bv$, то множество E удовлетворяет условию Карлесона ;

2°. если $S(l_A^1) = bv$, то множество E удовлетворяет условию Карлесона.

Это утверждение легко доказать, рассуждая аналогично тому как это делается у Ньмана в [5] . (Доказательство леммы 3.25 приведено в Добавлении I , I.25.) .

3.26. Теорема. Пусть множество $E\ (E \subset D)$ удовлетворяет условию (III) . Тогда, если $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E $(\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \gamma_E$; см. 1.7) такая, что

$$|1-\xi_{k+1}| \leq |1-\xi_k| \qquad (k=0,1,2,\dots),$$

то следующие утверждения равносильны:

1°. $S(V_A) = bv$,

2°. $S(l_A^1) = bv$,

3°. множество E удовлетворяет условию Карлесона.

Доказательство. Во-первых, из леммы 3.25 следует, что как 1°, так и 2° влечет 3°, во-вторых, из теоремы 3.24 следует, что если множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона, а последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \gamma_E)$ такова, что $|1-\xi_{k+1}| \leq |1-\xi_k|$ $(k=0,1,2,\dots)$, то $S(l_A^1) = S(V_A) = bv$. Действительно, пусть S_r^{-1} - оператор, построенный в теореме 3.24, тогда

$$S_r^{-1}(bv) \subset V_A,$$

$$bv = S(S_r^{-1}(bv)) \subset S(V_A),$$

а так как $V_A \subset l^1_A$ (см. 3.4),то и

$$bv \subset S(l^1_A).$$

Включение $S(l^1_A) \subset bv$ доказано в лемме 3.18. Теорема доказана.

В предыдущих рассмотрениях существенно использовалось то обстоятельство,что множество $E\ (E \subset D)$ удовлетворяет условию III. В пунктах 3.32 и 3.33 для некоторых множеств E, уже не удовлетворяющих условию (III), будет показано,что $S(V_A) = bv$.

Для этого нам понадобятся несколько вспомогательных лемм (3.27-3.31).

3.27. Лемма. Пусть $W(z) = 1 - \sqrt{1-z} \quad (z \in \bar{D})$, (53)

тогда $W(\bar{D}) \subset \bar{D}$ и $W(\bar{D})$ удовлетворяет условию (III) с $\lambda = 2 + \sqrt{2}$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.17.

3.28. Лемма. Пусть E есть счетное подмножество множества $\bar{D} \setminus \{1\}$. Для того,чтобы множество $W(E)$ удовлетворяло условию Карлесона,необходимо и достаточно, чтобы

$$M_4 = \sup_{\substack{z,\xi \in E \\ z \neq \xi}} \frac{|1-\xi| + |1-z|}{|\xi - z|^2} \sqrt{|1-\xi||1-z|} < +\infty. \quad (\underline{V})$$

Доказательство приведено в Добавлении I, I.18.

3.29. Следствие. Пусть множество $E\ (E \subset \bar{D} \setminus \{1\})$ удовлетворяет условию

$$\gamma_1 = \sup_{\substack{\zeta,\xi\in E \\ \xi\neq\zeta,\ |1-\zeta|\le|1-\xi|}} \left|\frac{1-\zeta}{1-\xi}\right| < 1 .$$

Тогда множество E удовлетворяет условию $(\overline{V})$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.19.

3.30. Лемма (Р.Габриэль, [22]). Если Γ - выпуклая кривая и $\Gamma\subset\overline{D}$, то

$$\int_\Gamma |f(z)||dz| \le 2\int_{|z|=1} |f(z)||dz|$$

для любой функции $f\in H^1$.

3.31. Лемма. Пусть последовательность точек $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($|\xi_k|<1$, $k=0,1,2,3,\ldots$) удовлетворяет условию

$$\sup_k \left|\frac{1-\xi_{k+1}}{1-\xi_k}\right| < \frac{1}{2} .$$

Тогда, если $\Gamma_k = \{z\in D:\ |1-z| = |1-\xi_k|\}$ ($k=0,1,2,\ldots$), то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma_k} |f(z)||dz| < +\infty$$

для любой функции $f\in H^1$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.23 .

3.32. Теорема. Пусть E - счётное подмножество замкнутого круга $\overline{D}$ $(1\notin E)$, $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E ($\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\gamma_E$, см. 1.7), такая, что

$$|1-\xi_{k+1}| \leq |1-\xi_k| \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Тогда, если множество E удовлетворяет $(\overline{V})$, то существует линейный непрерывный оператор $S_r^{-1}: bv \to V_A$ такой, что

$$S(S_r^{-1}x) = x$$

для всех $x \in bv$.

<u>Доказательство.</u> Так как множество $w(E)$ удовлетворяет условию $(\overline{III})$ (лемма <u>3.27</u>) и условию Карлесона (лемма <u>3.28</u>), а

$$|1-w(\xi_{k+1})| = |1-\xi_{k+1}|^{\frac{1}{2}} \leq |1-\xi_k|^{\frac{1}{2}} = |1-w(\xi_k)|$$

$(k=0,1,2,\dots)$, то из леммы <u>3.23</u> вытекает, что существует последовательность функций $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что

$$M_3 = \sup_n \|F_n\|_{V_A} < +\infty$$

и

$$F_n(w(\xi_k)) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \leq n \\ 0, & \text{если } k > n \end{cases} \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Так как $w(\partial D)$ есть выпуклая Жорданова кривая, и $w(\partial D) \subset \overline{D}$, то применяя лемму <u>3.30</u>, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{w(\partial D)} |F_n'(z)||dz| \leq 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} |F_n'(z)||dz| \leq 2M_3$$

$$(n=0,1,2,\dots).$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}|F_n'(w(z))|\cdot|w'(z)||dz| \leqslant 2M_3 \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

т.е.

$$\|F_n\circ w\|_{V_A} \leqslant 2M_3 \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

и

$$(F_n\circ w)(\xi_k)=\begin{cases}1, & k\leqslant n\\ 0, & k>n\end{cases} \quad (n,k=0,1,2,\ldots),$$

где $F_n\circ w$ — суперпозиция функций F_n и w.

Легко видеть, что оператор S_Γ^{-1}, задаваемый равенством

$$S_\Gamma^{-1}x = x_\infty + \sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n+1})(F_n\circ w),$$

$$x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\in bv, \quad x_\infty=\lim_{k\to\infty}x_k,$$

удовлетворяет условиям теоремы. Теорема доказана.

3.33. Теорема. В условиях теоремы 3.32 имеет место равенство

$$S(V_A)=bv.$$

Доказательство. Включение $S(V_A)\supset bv$ следует из теоремы 3.32. Покажем, что $S(V_A)\subset bv$.

Пусть $f\in V_A$, тогда

$$S_0=\sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\xi_{k+1})-f(\tilde{\xi}_{k+1})\right|+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\tilde{\xi}_{k+1})-f(\tilde{\xi}_k)\right|+\sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\tilde{\xi}_k)-f(\xi_k)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\tilde{\xi}_{k+1})-f(\tilde{\xi}_k)\right|+2\sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\tilde{\xi}_k)-f(\xi_k)\right|, \qquad (54)$$

где $\tilde{\xi}_k=e^{i\theta_k}$, $\theta_k=2\arcsin\frac{1}{2}|1-\xi_k|$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Заметим, что $|1-\tilde{\xi}_k|=|1-\xi_k|$ и $\theta_{k+1}\leq\theta_k$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Оценим первое слагаемое из (54):

$$S_1=\sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\tilde{\xi}_{k+1})-f(\tilde{\xi}_k)\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_{\theta_{k+1}}^{\theta_k} f'(e^{it})e^{it}dt\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\theta_{k+1}}^{\theta_k}|f'(e^{it})|dt \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f'(e^{it})|dt<+\infty.$$

Оценим второе слагаемое из (54) в предположении, что

$$\sup_k\left|\frac{1-\xi_{k+1}}{1-\xi_k}\right|<\frac{1}{2}.$$

$$S_2 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\tilde{\xi}_k) - f(\xi_k)\right| \le 2\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\Gamma_k}|f'(z)||dz|,$$

где $\Gamma_k = \left\{ z\in D:\ |1-z| = |1-\xi_k| \right\}$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Так как $\sup\limits_k \left|\dfrac{1-\xi_{k+1}}{1-\xi_k}\right| < \dfrac{1}{2}$ и $f' \in H^1$

то, применяя лемму 3.31, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\Gamma_k}|f'(z)||dz| < +\infty.$$

Пусть теперь E - произвольное множество

$(E \subset \bar{D} \setminus \{1\})$, удовлетворяющее $(\bar{V})$. Тогда

$w(E)$ удовлетворяет условию Карлесона

(—————————————————) и условию (III) (леммы 3.27, 3.28).

Применив к множеству $W(E)$ лемму 3.12, получим, что множество E можно разбить на конечное число непересекающихся подмножеств E_m $\left(E=\bigcup_{m=1}^{l_0} E_m\ ;\ m=1,2,\dots,l_0\right)$ таких, что каждое из множеств $W(E_m)\ (m=1,\dots,l_0)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\substack{u,v\in W(E_m)\\ u\neq v,\ |1-u|\le|1-v|}}\left|\frac{1-u}{1-v}\right|<\frac{1}{4}\qquad(m=1,2,\dots,l_0).$$

Так как $|1-W(z)|=|1-z|^{\frac{1}{2}}\quad(z\in\bar{D})$, то

$$\sup_{\substack{\xi,\zeta\in E_m\\ \xi\neq\zeta,\ |1-\xi|\le|1-\zeta|}}\left|\frac{1-\xi}{1-\zeta}\right|<\frac{1}{2}\qquad(m=1,2,\dots,l_0),$$

следовательно, $S_2<+\infty$ и в случае, если множество удовлетворяет условию (V).

Теорема доказана.

3.34. В заключение этого параграфа приведем пример последовательности $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(|\xi_k|<1,\ k=0,1,2,\dots)$, удовлетворяющей условию (V) и такой, что

$$S(l_A^1)\not\subset bv.$$

Рассмотрим последовательность $d=\left\{(1-a^{-2k})e^{i\frac{2\pi}{a^k}}\right\}_{k=0}^{\infty}$,

где a $(a>2)$ - натуральное число. Применив к последовательности d следствие из 3.29, легко убедиться, что последовательность d удовлетворяет условию (V).

Покажем, что $S(l_A^1)\not\subset bv$.

Для этого достаточно доказать, что последовательность

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\xi_{k+1}^{n}-\xi_{k}^{n}\right|\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad (55)$$

не ограничена $\left(\xi_k=(1-a^{-2k})e^{i\frac{2\pi}{a^k}},\ k=0,1,2,\dots\right)$.

Действительно, если $S(\ell_A^1)\subset bv$, то (См. Добавление I, I.24), S - ограниченный оператор, а тогда

$$\|S\varsigma^n\|_{bv}=1+\sum_{k=0}^{\infty}\left|\xi_{k+1}^{n}-\xi_{k}^{n}\right|\leq\|S\|\cdot\|\varsigma^n\|_{\ell_A^1}=$$
$$=\|S\|<+\infty,$$

где $\varsigma(z)=z,\ z\in D$.

Теперь покажем, что последовательность (55) не ограничена.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\xi_{k+1}^{n}-\xi_{k}^{n}\right|=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl|\,|\xi_{k+1}|^n e^{i\frac{2\pi n}{a^{k+1}}}\Bigl(1-e^{i\frac{2\pi n(a-1)}{a^{k+1}}}\Bigr)+$$
$$+e^{i\frac{2\pi n}{a^k}}\left(|\xi_{k+1}|^n-|\xi_k|^n\right)\Bigr|\geq$$
$$\geq 2\sum_{\substack{k\\ \sqrt{n}\leq a^k\leq n}}(1-a^{-2k})^n\left|\sin\left(\frac{\pi(a-1)n}{a^k}\right)\right|-\sum_{k=0}^{\infty}\left(|\xi_{k+1}|^n-|\xi_k|^n\right)\geq$$
$$\geq 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\sum_{\substack{k\\ \sqrt{n}\leq a^k\leq n}}\left|\sin\left(\frac{\pi(a-1)}{a^k}n\right)\right|-1.$$

Пусть $n_m = \sum_{p=0}^{m} a^{2p}$ $(m=1,3,5,\ldots)$; имеем

$\sqrt{n_m} \leq a^{m+1}$, поэтому, если $m+1 \leq k \leq 2m$, то

$$\sqrt{n_m} \leq a^k \leq n_m .$$

Пусть

$$k = 2j \quad \left(j = \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \ldots, m;\ m=1,3,5,\ldots\right),$$

тогда

$$\frac{n_m}{a^{2j}} = a^{2(m-j)} + \ldots + a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^{2j}}$$ и

$$\frac{1}{a^2} \leq \frac{a-1}{a^2} \leq (a-1)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \ldots + \frac{1}{a^{2j}}\right) < \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1} \quad (a>2).$$

Итак,

$$\sum_{\substack{k \\ \sqrt{n_m} \leq a^k \leq n_m}} \left|\sin\left(\frac{\pi(a-1)}{a^k} n_m\right)\right| > \frac{m-1}{2} \sin\frac{\pi}{a^2} \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$$

$(m=1,3,5,\ldots)$.

§ 4. Несколько замечаний об интерполяции функций из H^∞ и C_A.

4.1. Символом C_A будем обозначать пространство всех функций f, регулярных в D и непрерывных $\bar{D}$. Пространство H^∞ было определено в 1.2.

4.2. Символ $\hat{C}$ будет обозначать расширенную комплексную плоскость.

4.3. Теорема 2.2 показывает, что на любом бесконечном подмножестве E открытого единичного круга D проявляется различие свойств функций класса ℓ^1_A и функций класса $C(E)$. Ситуация радикально меняется, если слегка расширить класс ℓ^1_A, заменив его классом всех функций $f \in C_A$, для которых $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$, x) $n \to \infty$: в этом случае можно построить такие счетные множества $E \subset \bar{D}$, что всякая функция $\varphi \in C(E)$ представляет собой след на множестве E некоторой функции f с вышеперечисленными свойствами. Более того справедлива

Теорема. Если множество E $(E \subset \bar{D} \setminus \{1\})$ удовлетворяет условию (V), т.е.

$$\sup_{\substack{z,\xi \in E \\ z \neq \xi}} \frac{|1-\xi| + |1-z|}{|\xi - z|^2} \sqrt{|1-\xi||1-z|} < +\infty$$

то для любой функции φ, непрерывной на множестве $\bar{E}$, суще-

---

x) Заметим, что если $f \in C_A$ и $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$, $n \to \infty$, то ряд Маклорена функции f равномерно сходится в круге $\bar{D}$ (см. [23], стр. 56).

ствует функция f удовлетворяющая условиям :

1°. f регулярна во всей расширенной комплексной плоскости, кроме точки $z=1$, непрерывна в $\bar{D}$ и $\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty$.

2°. $f(z)=\psi(z)$ для всех $z\in E$.

Эта теорема представляет собой следствие теоремы 4.10.

4.4. Лемма. (М.Рисс, [23]). Пусть G - некоторая область расширенной комплексной плоскости $\hat{C}$, содержащая множество

$$\{z\in\hat{C}:|z|<R\}\cap\{z\in\hat{C}:\ \Theta_0<\arg(z-1)<2\pi-\Theta_0\},$$

где $R>1,\ \Theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Имеют место следующие утверждения:

1°. Если f - функция регулярная и ограниченная в области G, то

$$|\hat{f}(n)|\le M_5\frac{1}{n+1}\sup_{z\in G}|f(z)|\quad (n=0,1,2,\dots),$$

где константа M_5 $(0<M_5<+\infty)$ зависит только от R и Θ_0;

2°. Если f - функция, регулярная в G и непрерывная в $\bar{G}$, то $\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty$, и ряд Маклорена функции f сходится равномерно в круге $\bar{D}$.

4.5. Лемма. Обозначим символами α_n, W, β, ω_n функции, задаваемые равенствами

$$\alpha_n(z)=\frac{1}{n\left(\frac{n+1}{n}-z\right)},\quad z\in\hat{C}\setminus\left\{1+\frac{1}{n}\right\},\qquad (1)$$

$(n=1,2,\dots)$

($\hat{C}$ - расширенная комплексная плоскость).

$$w(z) = 1 - \sqrt{1-z}\ , \quad z \in \hat{C} \ \text{и} \quad z \notin (1, +\infty), \qquad (2)$$

$$\beta(z) = \frac{z}{2-z}\ , \quad z \in \hat{C} \setminus \{2\}\ , \qquad (3)$$

$$\omega_n(z) = \beta(w(\alpha_n(z)))\ , \quad z \in \hat{C} \setminus (1, 1+\tfrac{1}{n}), \qquad (4)$$

$(n = 1, 2, \dots)$

Следующие утверждения равносильны :

1°. множество $\omega_n(E)$ $(E \subset \bar{D} \setminus \{1\})$ удовлетворяет условию Карлесона,

2°. множество E удовлетворяет условию $(\underline{V})$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.20.

4.6. Лемма. Множество $\omega_n(\bar{D})$ удовлетворяет условию $(\underline{III})$ с константой $\lambda = 2(2+\sqrt{2})$.

Доказательство этой леммы содержится в доказательстве леммы 4.5 (см. Добавление I, I.20).

4.7. Теорема. Пусть множество E $(E \subset \bar{D} \setminus \{1\})$ удовлетворяет условию $(\underline{V})$ и L - линейный оператор, задаваемый равенством

$$(L\psi)(z) = \sum_{\xi \in E} \psi(\xi) \cdot \Phi_{\omega(\xi)}(\omega(z)) \qquad (z \in \hat{C} \setminus [1, 2]) \qquad (5)$$

$\psi \in \ell^{\infty}(E)$, где $\omega = \omega_1$ (ω_1 -обозначает то же, что и в 4.5; см. (4) при $n = 1$), $\{\Phi_{\zeta}\}$ $(\zeta \in \omega(E))$ - семейство функций, определенных в 3.22. $\ell^{\infty}(E)$- пространство всех функций, ограниченных на множестве E .

Тогда для любой функции $\psi \in \ell^\infty(E)$ функция $L\psi$, задаваемая равенством (5), регулярна и ограничена в области $\hat{C} \setminus [1,2]$, существует константа $M_6 \in (0,+\infty)$ такая, что

$$\sup_n (n+1) |(\widehat{L\psi})(n)| \le M_6 \cdot \sup_{\xi \in E} |\psi(\xi)|$$

и

$$(L\psi)(\xi) = \psi(\xi) \quad , \quad \xi \in E . \tag{6}$$

<u>Доказательство</u>. То что функция

$$g(z) = \sum_{\xi \in E} \psi(\xi) \Phi_{\omega(\xi)}(z) =$$

$$= \sum_{\xi \in E} \psi(\xi) \cdot a_{\omega(\xi)} \cdot \frac{(1-|\omega(\xi)|^2)(1-z^2)}{(1-z\overline{\omega(\xi)})^2} B_{\omega(\xi)}(z), \tag{7}$$

$z \in D$,

где $a_5 = \dfrac{1-|5|^2}{1-5^2} \cdot \dfrac{1}{B_5(5)}$, $5 \in \omega(E)$ (см. <u>3.22</u>),

регулярна и ограничена в круге D, следует из лемм <u>4.5</u>, <u>4.6</u>, <u>3.20</u>) . Так как функция ω отображает конформно и однолистно область $\hat{C} \setminus [1,2]$ на открытый единичный круг D, то функция $L\psi$, задаваемая равенством (5), регулярна и ограничена в области $\hat{C} \setminus [1,2]$. Остается только заметить, что эта область удовлетворяет условиям леммы <u>4.4</u>. . Равенство (6) выполняется очевидным образом. Теорема доказана.

Доказанная теорема представляет собой для некоторых множеств E $(E\subset\bar{D})$ усиление интерполяционной теоремы Карлесона (см. [8]).

<u>4.8. Теорема.</u> Пусть множество E $(E\subset\bar{D}\setminus\{1\})$ удовлетворяет условию $(\underline{V})$ и K_n – линейный оператор, задаваемый равенством:

$$(K_n\psi)(z)=\psi(1)+\sum_{\xi\in E}(\psi(\xi)-\psi(1))\Phi_{\omega_n(\xi)}(\omega_n(z)), \tag{8}$$

$$z\in\hat{C}\setminus(1,1+\tfrac{1}{n}),\ (n=1,2,\ldots),\ \psi\in C(\bar{E})$$

где ω_n – то же, что и в <u>4.5</u>. $\{\Phi_\zeta\}$ $(\zeta\in\omega_n(E))$ – семейство функций, определенных в <u>3.22</u>.

Тогда для любой функции $\psi\in C(\bar{E})$ функция $K_n\psi$, задаваемая равенством (8), регулярна в $\hat{C}\setminus[1,1+\frac{1}{n}]$, непрерывна в $\hat{C}\setminus(1,1+\frac{1}{n})$, и сужения функции $K_n\psi$ на полуплоскости

$\hat{C}_+=\{z\in\hat{C}:\operatorname{Im}z>0\}$, $\hat{C}_-=\{z\in\hat{C}:\operatorname{Im}z<0\}$ имеют непрерывные продолжения соответственно на $\bar{\hat{C}}_+=\{z\in\hat{C}:\operatorname{Im}z\geq 0\}$ и $\bar{\hat{C}}_-=\{z\in\hat{C}:\operatorname{Im}z\leq 0\}$,

$$\text{и}\quad (K_n\psi)(\zeta)=\psi(\zeta),\quad \zeta\in E. \tag{9}$$

<u>Доказательство.</u> Если $\psi\in C(\bar{E})$, то функция

$$g_n(z)=\psi(1)+\sum_{\xi\in E}(\psi(\xi)-\psi(1))\Phi_{\omega_n(\xi)}(z)\quad (z\in\bar{D})$$

регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$ (см. 4.5, 4.6 и 3.20).

Остаётся только заметить, что функция ω_n отображает конформно и однолистно область $\hat{C} \setminus [1, 1+\frac{1}{n}]$ на единичный круг D, причём функция ω_n непрерывна в $\hat{C} \setminus (1, 1+\frac{1}{n})$ и её сужения на полуплоскости $\hat{C}_+$ и $\hat{C}_-$ имеют непрерывные продолжения соответственно на $\bar{\hat{C}}_+$ и $\bar{\hat{C}}_-$. Равенство (9) выполняется очевидным образом.

Теорема доказана.

4.9. Символ $C_A(G)$ будет обозначать пространство всех функций, регулярных в G и непрерывных в $\bar{G}$ ($\bar{G}$ - замыкание G). $C_A(G)$ снабжается нормой

$$\|f\|_{C_A(G)} = \max_{z \in \bar{G}} |f(z)| \quad , \ f \in C_A(G).$$

4.10. Теорема. Пусть множество E ($E \subset \bar{D} \setminus \{1\}$) удовлетворяет условию ($\underline{V}$). Тогда для любой функции $\psi \in C(\bar{E})$ и для любой односвязной в $\hat{C}$ области G (см. рис. 1), удовлетворяющей условиям

$$D \subset G, \ \partial G \cap \partial D = \{1\}, \ (\hat{C} \setminus \bar{G}) \cap \{z \in \hat{C} : |z| < 1 + \tfrac{1}{n}\} \neq \emptyset \qquad (10)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

($\bar{G}$ - замыкание области G, ∂G - граница области G), существует функция f, заданная в $\hat{C}$, регулярная в $\hat{C} \setminus \{1\}$, непрерывная в $\bar{G}$ и такая, что $f(z) = \psi(z)$ для всех $z \in \bar{E}$.

Доказательство. Пусть

$$G_n = G \cup \{z \in \hat{C} : |z| > 1 + \tfrac{1}{n}\}$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots),$$

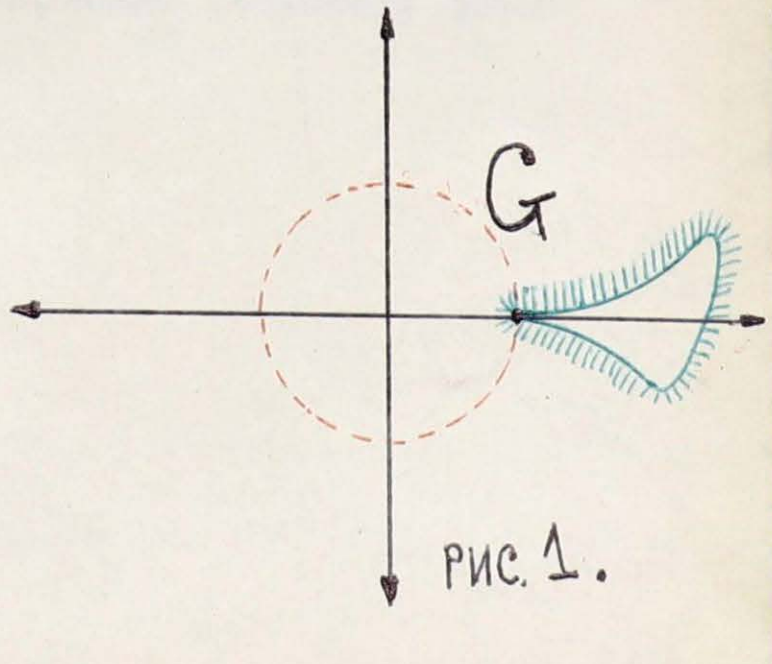

рис. 1.

$(n=1,2,\ldots)$. где G – область удовлетворяющая условиям (10). Тогда последовательность пространств $\{C_A(G_n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям :

(a) $C_A(G_{n+1})$ непрерывно вложено в $C_A(G_n)$ $(n=1,2,\ldots)$,

(b) $C_A(G_{n+1})$ плотно в $C_A(G_n)$ $(n=1,2,\ldots)$,

(c) $S(C_A(G_n))=C(\bar{E})$ $(n=1,2,\ldots)$

(S – оператор, сопоставляющий каждой функции $f\in C_A(G)$ ее сужение на множество $\bar{E}$). Выполнение первых двух условий очевидно. Третье условие вытекает из теоремы 4.8. Тогда по лемме 3.10, гл. II заключаем, что

$$S\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_A(G_n)\Big)=C(\bar{E}).$$ Теорема доказана.

4.11. Заметим, что из теоремы 4.10 следует, теорема, сформулированная в 4.3, так как область G, фигурирующую в условии теоремы 4.10, можно взять удовлетворяющей условиям леммы 4.4.

§ 5. Об интерполяции в пространствах ℓ^p_A $(1<p\le+\infty)$.

Введем некоторые обозначения.

5.1. $h^p(E)$ $(1\le p<+\infty)$ – пространство всех функций ψ, заданных на множестве E, у которых норма

$$\|\psi\|_{h^p}=\left(\sum_{z\in E}|\psi(z)|^p(1-|z|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

конечна, $h^\infty(E)$ – пространство всех функций ψ, заданных на множестве E, у которых норма

$$\|\psi\|_{h^\infty}=\sup_{z\in E}|\psi(z)(1-|z|)|$$

конечна.

5.2. Пусть $\mu(z)=(1-|z|)^{-1}$, $z\in D$.

$\ell^p(E,\mu)$ $(1\le p<+\infty)$ – пространство всех заданных на множестве E функций ψ, у которых норма

$$\|\psi\|_{(p,\mu)}=\left(\sum_{z\in E}|\psi(z)|^p(1-|z|)^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

конечна, $\ell^\infty(E,\mu)$ – пространство всех функций ψ, ограниченных на множестве E. Норма в $\ell^\infty(E,\mu)$ определяется равенством

$$\|\psi\|_{(\infty,\mu)}=\sup_{z\in E}|\psi(z)|$$

5.3. Пусть $\{z_k\}_{k=0}^\infty$ – последовательность точек множества E $(\{z_k\}_{k=0}^\infty\in\gamma_E$; см. 1.7) такая, что $|z_k|\le|z_{k+1}|$ $(k=0,1,2,\dots)$.

$bv^p(E)$ $(1\leq p<+\infty)$ — пространство всех функций ψ, заданных на множестве E, и таких, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\psi(z_{k+1})-\psi(z_k)|^p(1-|z_{k+1}|)^{p-1}<+\infty .$$

5.4. S_p — оператор сужения на множество E $(E\subset D)$ функций из пространства ℓ_A^p, т.е.

$$(S_p f)(z)=f(z)\ ,\ z\in E\ ,\ f\in \ell_A^p .$$

T_p — линейный оператор, заданный на пространстве ℓ^p $(1\leq p\leq+\infty)$ следующим образом

$$(T_p x)(z)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^k\right)(1-|z|)\ ,\ z\in E\ ,\ x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\in\ell^p .$$

Ясно, что $T_p=U^{(1)}S_pU^{(2)}$, где $U^{(1)}$ — линейная изометрия пространства $h^p(E)$ на пространство $\ell^p(E,\mu)$:

$$(U^{(1)}\psi)(z)=(1-|z|)\psi(z)\ ,\ z\in E\ ,\ \psi\in h^p(E),$$

а $U^{(2)}$ — линейная изометрия пространства ℓ^p на пространство ℓ_A^p :

$$\left(U^{(2)}_x\right)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k, \quad z \in D, \quad x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell^p.$$

5.5. Определение. Функция ψ, заданная на множестве E, называется простой, если существует конечное множество e $(e \subset E)$ такое, что $\psi(\zeta) = 0$ для всех $\zeta \in E \setminus e$.

Символ $\Omega(E)$ будет обозначать множество всех простых функций, заданных на множестве E.

5.6. Определение. Будем говорить, что множество E $(E \subset D)$ удовлетворяет условию $(\overline{VI})$, если

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ. \text{ множество } E \text{ представимо в виде объединения конечного числа попарно не пресекающихся множеств } E_j\ (j = 1, 2, \dots, m), \\ \text{удовлетворяющих условию Ньюмана, и} \\ 2^\circ.\ \delta_0 = \inf\limits_{\substack{\zeta, \xi \in E \\ \zeta \neq \xi}} \left| \dfrac{\zeta - \xi}{1 - \bar{\zeta}\xi} \right| > 0. \end{array}\right\} (\overline{VI})$$

5.7. Основными результатами этого параграфа являются следующие две теоремы.

Теорема 5.31. Пусть множество E удовлетворяет условию $(\overline{III})$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1°. $S_p(\ell^p_A) = h^p(E) \quad (1 < p \le +\infty)$,

2°. $T_p(\ell^p) = \ell^p(E, \mu) \quad (1 < p \le +\infty)$, 3°. множество E удовлетворяет условию Карлесона.

Теорема 5.37. Если множество E удовлетворяет условию (VI), то $S_p(l_A^p) = h^p(E)$ и $T_p(l^p) = l^p(E,\mu)$ $(1 < p < +\infty)$.

Легко видеть, что утверждения 1° и 2° теоремы 5.31 равносильны (ведь $T_p = U^{(1)} S_p U^{(2)}$). Рассмотрение двух операторов S_p и T_p, а не одного из них обусловлено тем, что оператор S_p кажется более естественным при постановке задачи и при доказательстве включения $S(l_A^p) \subset h^p(E)$ (леммы 5.15, 5.16), а оператор T_p будет полезен при доказательстве включения $T_p(l^p) \supset l^p(E,\mu)$.

Приведем план доказательства теорем 5.31 и 5.37.

Начнем с теоремы 5.31. Пусть множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда прежде всего будет показано, что $S_p(l_A^p) \subset h^p(E)$ $(1 < p \leq +\infty)$ (и тем самым, что $T_p(l^p) \subset l^p(E,\mu)$). Для этого в предположение, что $E \subset [0,1)$, будет доказано включение $S_p(l_A^p) \subset bv^p(E)$ (лемма 5.16). Но как будет показано в лемме 5.15 $bv^p(E)$ в условиях теоремы 5.31 совпадает с $h^p(E)$. Более общая ситуация легко сводится к случаю, когда $E \subset [0,1)$ (лемма 5.16). Включение $T_p(l^p) \supset l^p(E,\mu)$ (тем самым и $S_p(l_A^p) \supset h^p(E)$) доказывается при помощи интерполяционной теоремы Рисса - Торина (см. [25], стр. 144).

Делается это следующим образом.

Будут построены два линейных оператора W и V, обладающих следующими свойствами :

1°. W действует из $\Omega(E)$ в l^1. V действует из $\Omega(E)$ в ℓ^2,

2°. $\|W\psi\|_1 \le \alpha_0 \|\psi\|_{(1,\mu)}$, $\|W\psi\|_2 \le \alpha_1 \|\psi\|_{(2,\mu)}$ $(\psi\in\Omega(E))$ и

$$\|V\psi\|_2 \le \beta_0 \|\psi\|_{(2,\mu)}, \quad \|V\psi\|_\infty \le \beta_1 \|\psi\|_{(\infty,\mu)} \quad (\psi\in\Omega(E))$$

(константы $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ не зависят от ψ).

3°. $T_1(W\psi)=\psi$ $(\psi\in\Omega(E))$ и $T_2(V\psi)=\psi$ $(\psi\in\Omega(E))$.

Условия 1° и 2° дают возможность заключить по теореме Рисса-Торина, что если $p\in[1,2]$, то существует единственное распространение оператора W до непрерывного оператора W_p, действующего из $\ell^p(E,\mu)$ в ℓ^p и обладающего для всех $\psi\in\ell^p(E,\mu)$ свойством 3°. Но тогда будем иметь $W_p(\ell^p(E,\mu))\subset\ell^p$, значит $T_p(W_p(\ell^p(E,\mu)))\subset T_p(\ell^p)$, и учитывая, что W_p обладает свойством 3° на $\ell^p(E,\mu)$, получим

$$\ell^p(E,\mu)\subset T_p(\ell^p) \quad (1\le p\le 2)$$

Если $p\in[2,+\infty]$, то рассуждая аналогичным образом получим, что $\ell^p(E,\mu)\subset T_p(\ell^p)$ $(2\le p\le+\infty)$.

Правда, в случае $p=+\infty$ придется доказывать существование непрерывного распространения на все $\ell^\infty(E,\mu)$ у построенного нами оператора V, (лемма <u>5.24</u>), так как из условия 2°

это не следует.

Необходимость условия Карлесона в теореме 5.31 доказывается (леммы 5.28, 5.29) при помощи теоремы Банаха об открытом отображении по той же схеме, что и у Ньюмана (см. [5]). Одно из отличий состоит в том, что сначала надо доказать непрерывность оператора S_p в предположении, что $S_p(\ell^p_A)\subset h^p(E)$. Отметим также, что если $p\in(1,2]$, то условие Карлесона будет необходимо и без предположения о выполнении условия $(\mathrm{\underline{III}})$, в то время как при $p\in(2,+\infty]$ условие $(\mathrm{\underline{III}})$ существенно используется.

Доказательство теоремы 5.37 по существу аналогично доказательству достаточности условия Карлесона в теореме 5.31. Основное отличие состоит в том, что вместо теоремы Рисса-Торина применяется теорема Марцинкевича (см. [25], стр. 167).

В этом параграфе мы будем использовать обозначения и утверждения, приведенные в § 1, § 3.

Кроме того нам будут нужны следующие определения и утверждения.

5.8. Лемма. Если множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию $(\mathrm{\underline{VI}})$, то оно удовлетворяет условию Карлесона.

Доказательство приведено в Добавлении I, 1.13.

5.9. Лемма. Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана с константой $\gamma\in(0,1)$ и $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E ($\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\gamma_E$; см. 1.7) такая, что $|\xi_k|\le|\xi_{k+1}|$ $(k=0,1,2,\dots)$. Тогда имеет место неравенства

$$\frac{1-|\xi_{k+m}|}{1-|\xi_k|}\le\gamma^m \quad (k,m=0,1,2,\dots) \quad (1)$$

$$\sup_{\xi\in E}\left(\sum_{\eta\in E}\frac{(1-|\eta|)(1-|\xi|)}{(1-|\eta||\xi|)^2}\right)\leq\frac{8}{1-\gamma}, \qquad (2)$$

$$\sup_{\xi\in E}\left(\sum_{\substack{\eta\in E\\ |\eta|\leq|\xi|}}\frac{1-|\xi|}{1-|\eta|}\right)\leq\frac{8}{1-\gamma}, \qquad (3)$$

$$\sum_{\substack{\eta\in E\\ |\xi|\leq|\eta|}}(1-|\eta|)\leq\frac{8}{1-\gamma}(1-|\xi|), \xi\in E. \qquad (4)$$

5.10. Лемма. Если множество $E\,(E\subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана, то

$$M_7=\sup_{\xi\in E}\left(\sum_{\eta\in E}\frac{(1-|\xi|)^{\frac{1}{2}}(1-|\eta|)^{\frac{1}{2}}}{1-|\xi||\eta|}\right)<+\infty.$$

Доказательство приведено в Добавлении I, I.11.

5.11. Лемма (Шур, [26]). Пусть $\{C_{\xi\eta}\}$ $(\xi,\eta\in E)$ есть счетное семейство неотрицательных чисел $(C_{\xi\eta}\geq 0)$. Тогда, если

$$C_1=\sup_{\xi\in E}\sum_{\eta\in E}C_{\xi\eta}<+\infty$$

и

$$C_2=\sup_{\eta\in E}\sum_{\xi\in E}C_{\xi\eta}<+\infty$$

то

$$\sum_{\xi,\eta\in E}C_{\xi\eta}x_\xi x_\eta\leq\sqrt{C_1C_2}\cdot\sum_{\eta\in E}x_\eta^2$$

для любого семейства неотрицательных чисел $\{x_\eta\}$ $(\eta\in E)$.

5.12. Лемма. Пусть множество E удовлетворяет условию Ньюмана (см. 3.6) . Тогда

$$1^\circ.\ \sum_{z\in E}(1-|z|)^2|z|^n \le \frac{2}{1-\gamma}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}$$

$(n=0,1,2,\dots)$,

где γ $(\gamma\in(0,1))$ из условия Ньюмана.

$$2^\circ\ \sum_{z\in E}(1-|z|)^{\frac{1}{p}}|z|^n \le \frac{3p}{1-\gamma}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$(n=0,1,2,\dots)$, $1\le p<+\infty$,

где γ $(\gamma\in(0,1))$ из условия Ньюмана.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.12.

5.13. Лемма. Пусть $f\in l_A^p$ $(p\ge 1)$, $g\in l_A^1$.

Тогда

$$\|f\cdot g\|_{l_A^p} \le \|f\|_{l_A^p}\cdot\|g\|_{l_A^1}.$$

Доказательство приведено в Добавлении I, I.27.

5.14. Лемма ([23] ,стр. 56) . Пусть $f\in H^\infty$ и

$$a=\sup_n|(n+1)\cdot\hat{f}(n)|<+\infty.$$

.Тогда

$$\sup_n\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}\right|\le\|f\|_{H^\infty}+2a$$

для всех $t\in[-\pi,\pi]$.

Приступим к осуществлению плана, намеченного в <u>5.7</u>.

<u>5.15.</u> <u>Лемма.</u> Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана. Тогда

$$bv^p(E)=h^p(E)\quad(1<p<+\infty).$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E $(\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\gamma_E)$ такая, что $|\xi_k|\leq|\xi_{k+1}|$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Предположим, что $\psi\in h^p(E)$, тогда

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\psi(\xi_{k+1})-\psi(\xi_k)|^p(1-|\xi_{k+1}|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\psi(\xi_{k+1})|^p(1-|\xi_{k+1}|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\psi(\xi_k)|^p(1-|\xi_k|)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Следовательно,
$$h^p(E)\subset bv^p(E).$$

Теперь предположим, что $\psi\in bv^p(E)$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\psi(\xi_{k+1})-\psi(\xi_k)|^p(1-|\xi_{k+1}|)^{p-1}<+\infty\qquad(5)$$

Пусть

$$\alpha_0=\psi(\xi_0)(1-|\xi_0|)^{\frac{p-1}{p}},\quad \alpha_{k+1}=(\psi(\xi_{k+1})-\psi(\xi_k))(1-|\xi_{k+1}|)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$(k=0,1,2,\dots);$$

имеем

$$\psi(\xi_0)=\alpha_0(1-|\xi_0|)^{\frac{1-p}{p}},$$
$$\psi(\xi_k)-\psi(\xi_{k-1})=\alpha_k(1-|\xi_k|)^{\frac{1-p}{p}}\quad(k=1,2,\dots,n).$$

Сложив эти $(n+1)$ равенства, получим

$$\psi(\xi_n)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,(1-|\xi_k|)^{\frac{1-p}{p}}\qquad (n=0,1,2,\dots),$$

причем в силу (5) имеем $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^p<+\infty$.

Далее

$$\|\psi\|_{h^p}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\psi(\xi_n)|^p(1-|\xi_n|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,(1-|\xi_k|)^{\frac{1-p}{p}}\right|^p(1-|\xi_n|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(\frac{1-|\xi_n|}{1-|\xi_k|}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Используя неравенство (1) из леммы $\underline{5.9}$, а затем лемму $\underline{5.13}$, получим

$$\|\psi\|_{h^p}\leqslant\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k|\left(\gamma^{\frac{p-1}{p}}\right)^{n-k}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{1-\gamma^{1-\frac{1}{p}}}<+\infty.$$

Лемма доказана.

$\underline{5.16.}$ <u>Лемма</u>. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана. Тогда $S_p(l^p_A)\subset h^p(E)$ и $T_p(l^p)\subset l^p(E,\mu)$ $(1<p\leqslant+\infty)$.

Доказательство. Пусть $p=+\infty$, тогда, если $f\in l_A^\infty$, то

$$|f(\xi)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|\hat f(n)||\xi|^n\leqslant\|f\|_{l_A^\infty}\cdot\frac{1}{1-|\xi|},\ \xi\in E. \quad (6)$$

Следовательно, $S_\infty(l_A^\infty)\subset h^\infty(E)$ и $T_\infty(l^\infty)\subset l^\infty(E,\gamma)$.

Отметим, что это верно для любого множества E $(E\subset D)$.

Предположим теперь, что $1<p<+\infty$. Рассмотрим сначала случай, когда $E\subset[0,1)$. Пусть $f\in l_A^p$ и $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$ - последовательность точек множества E $(\{\xi_k\}_{k=0}^\infty\in\gamma_E;$ 1.7$)$ такая, что $0\leqslant\xi_k\leqslant\xi_{k+1}$ $(k=0,1,2,\dots)$. Тогда

$$S(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\left|f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)\right|^p(1-\xi_{k+1})^{p-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\hat f(n)\left(\xi_{k+1}^n-\xi_k^n\right)^{\frac1p}\left(\xi_{k+1}^n-\xi_k^n\right)^{\frac1q}\right|^p(1-\xi_{k+1})^{\frac pq} \quad (7)$$

$\left(\frac1p+\frac1q=1\right)$, применяя к внутренней сумме неравенство Гёльдера с показателями p и q $\left(\frac1p+\frac1q=1\right)$, получим

$$S(f)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\hat f(n)|^p\left(\xi_{k+1}^n-\xi_k^n\right)\right)^{\frac1p}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\xi_{k+1}^n-\xi_k^n\right)\right)^{\frac1q}\right)^p(1-\xi_{k+1})^{\frac pq}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\hat f(n)|^p\left(\xi_{k+1}^n-\xi_k^n\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\xi_{k+1}}-\frac{1}{1-\xi_k}\right)^{\frac pq}(1-\xi_{k+1})^{\frac pq}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{p}\left(\xi_{k+1}^{n}-\xi_{k}^{n}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1-\xi_{k+1}}{1-\xi_{k}}\right)^{\frac{p}{q}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{p}\left(\xi_{k+1}^{n}-\xi_{k}^{n}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{p}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\xi_{k+1}^{n}-\xi_{k}^{n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{p}<+\infty.$$

Тем самым доказано включение $S_p(\ell_A^p)\subset bv^p(E)$ $(1<p<+\infty)$. Заметим, что при доказательстве этого факта условие Ньюмана не использовалось, но зато было использовано то обстоятельство, что $E\subset[0,1)$.

Так как множество E удовлетворяет условию Ньюмана, то $bv^p(E)=h^p(E)$ (лемма <u>5.15</u>).

Итак, в этом случае имеем $S_p(\ell_A^p)\subset h^p(E)$ $(1<p<+\infty)$.

Пусть теперь E $(E\subset D)$ - произвольное множество, удовлетворяющее условию Ньюмана. Тогда, если $f\in\ell_A^p$ $(1<p<+\infty)$, то

$$\|S_p f\|_{h^p}=\left(\sum_{z\in E}|f(z)|^p(1-|z|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_{z\in E}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n\right|^p(1-|z|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{z\in E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)||z|^n\right)^p(1-|z|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{z\in E}|\tilde{f}(|z|)|^p(1-|z|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где
$$\tilde{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|z^n \quad , \ z\in D .$$

Так как множество $\{|\zeta|:\zeta\in E\}$ удовлетворяет условию Ньюмана и $\tilde{f}\in \ell_A^p$, то, по только что доказанному, получим

$$\|S_p f\|_{h^p} <+\infty \quad , \ f\in \ell_A^p \quad (1<p<+\infty).$$

Лемма доказана.

5.17. Следствие 1. Если множество $E\ (E\subset D)$ представимо в виде объединения конечного числа попарно не пересекающихся множеств $E_j\ (j=1,2,\dots,m)$, каждое из которых удовлетворяет условию Ньюмана, то

$$S_p(\ell_A^p)\subset h^p(E),\quad T_p(\ell^p)\subset \ell^p(E,\mu) \quad (1<p\leq+\infty).$$

Следствие 2. Если множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона, то

$$S_p(\ell_A^p)\subset h^p(E),\quad T_p(\ell^p)\subset \ell^p(E,\mu) \quad (1<p\leq+\infty).$$

Доказательство. См. лемму 3.12 и следствие 1.

В случае, если $p\in[2,+\infty]$, можно доказать более сильное утверждение, чем лемма 5.16.

5.18. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию Карлесона. Тогда

$$S_p(\ell_A^p)\subset h^p(E),\quad T_p(\ell^p)\subset \ell^p(E,\mu),\quad 2\leq p\leq+\infty.$$

Доказательство. Пусть $\Omega(\mathcal{N})$ обозначает множество всех простых последовательностей (последовательность $x=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

будем называть простой, если существует число m_x такое, что $x_n=0$ для всех $n>m_x$).

Пусть T есть сужение оператора T_2 на множество $\Omega(\mathcal{N})$, т.е. $Tx=T_2x$, $x\in\Omega(\mathcal{N})$. Ясно, что

$$Tx=T_px \quad , x\in\Omega(\mathcal{N}), \quad p\in[2,+\infty],$$

Если $p=+\infty$, то (см. доказательство леммы $\underline{5.16}$) имеем

$$\|Tx\|_{(\infty,\mu)} \leq \|x\|_{\infty} , \quad x\in\Omega(\mathcal{N}).$$

Если $p=2$ и множество E удовлетворяет условию Карлесона, то из теоремы Шапиро - Шаддса (см. [2] стр. 277-290) следует, что

$$\|Tx\|_{(2,\mu)} \leq \|T_2\|\cdot\|x\|_2 \quad , x\in\Omega(\mathcal{N}),$$

где $\|T_2\|<+\infty$.

Применяя теорему Рисса - Торина (см. [25], стр. 144), получим

$$\|Tx\|_{(p,\mu)} \leq \|T_2\|^{\frac{2}{p}}\|x\|_p , \quad x\in\Omega(\mathcal{N}) \quad (8)$$
$$(2\leq p\leq+\infty),$$

причем, если $2\leq p<+\infty$, то оператор T можно единственным образом распространить до оператора, действующего из ℓ^p в $\ell^p(E,\mu)$, с сохранением (8). Ясно, что этим распространением оператора T будет оператор T_p.

$\underline{5.19}$ Символом W будем обозначать линейный оператор, заданный на $\Omega(E)$ (см. $\underline{5.5}$) следующим образом

$$W\psi=\left\{\hat{f}(n)\right\}_{n=0}^{\infty},\ \psi\in\Omega(E),\qquad(9)$$

где $\left\{\hat{f}(n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ -последовательность коэффициентов Маклорена функции

$$f=\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1}\Phi_{\xi}$$

(Φ_{ξ} - функции, построенные в лемме 3.22).

5.20. Лемма. Пусть множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона, тогда

$$\|W\psi\|_1\leq M_2\|\psi\|_{(1,\mu)},\ \psi\in\Omega(E),$$

где M_2 - константа из леммы 3.22.

Доказательство. Принимая во внимание лемму 3.22, получим

$$\|W\psi\|_1=\Big\|\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1}\Phi_{\xi}\Big\|_{\ell^1_A}\leq$$

$$\leq\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-1}\cdot\|\Phi_{\xi}\|_{\ell^1_A}\leq M_2\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-1}=$$

$$=M_2\cdot\|\psi\|_{(1,\mu)}.$$

Лемма доказана.

5.21. Лемма. В условиях леммы 5.20 имеем :

$$\|W\psi\|_2 \leqslant M_8 \cdot \|\psi\|_{(2,\mu)}, \quad \psi \in \Omega(E),$$

где M_8 не зависит от ψ.

Доказательство. Так как множество E удовлетворяет условию $(\overline{III})$ и условию Карлесона, то

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} E^{(j)} \quad (E^{(j)} \cap E^{(k)} = \phi, \; j \neq k)$$

где $E^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяет условию Ньюмана (см. лемму 3.12).

Далее

$$\|W\psi\|_2 = \Big\| \sum_{\xi \in E} \psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1} \Phi_\xi \Big\|_{\ell^2_A} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big\| \sum_{\xi \in E^{(j)}} \psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1} \Phi_\xi \Big\|_{\ell^2_A}$$

(Φ_ξ из леммы 3.22).

Оценим

$$I_j = \Big\| \sum_{\xi \in E^{(j)}} \psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1} \Phi_\xi \Big\|_{\ell^2_A}, \; \psi \in \Omega(E), \; j = 1, \ldots, m.$$

Имеем (так как $\ell^2_A = H^2$. см. [1])

$$I_j^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \Big| \sum_{\xi \in E^{(j)}} \psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1} \cdot a_\xi \frac{(1-|\xi|^2)(1-z^2)}{(1-z\xi)^2} B_\xi(z) \Big|^2 |dz| \leqslant$$

$$\leq \frac{4}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \Big| \sum_{\xi \in E^{(\delta)}} d_\xi \frac{(1-|\xi|^2)(1-z)}{(1-z\bar{\xi})(\xi - z)} \Big|^2 |dz| \text{, где} \qquad (10)$$

$$d_\xi = \psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1} a_\xi \frac{|\xi|}{\bar{\xi}} \text{, а} \quad a_\xi = \frac{1-|\xi|^2}{1-\xi^2} \cdot \frac{1}{B_\xi(\xi)} \; (\xi \in E)$$

(см. 3.22).

Учитывая, что $|w|^2 = w\bar{w}$ и $\bar{z} = \frac{1}{z}$, если $|z| = 1$, получим

$$I_\delta^2 \leq 4 \cdot \sum_{\xi, \zeta \in E^{(\delta)}} d_\xi \bar{d}_\zeta (1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{-(1-z)^2 dz}{(z-\xi)(z-\zeta)(1-\bar{\xi}z)(1-\bar{\zeta}z)} =$$

$$= 4 \sum_{\xi, \zeta \in E^{(\delta)}} d_\xi \bar{d}_\zeta \frac{|1-\zeta|^2(1-|\xi|^2) + |1-\xi|^2(1-|\zeta|^2)}{|1-\bar{\zeta}\xi|^2},$$

чтобы получить последнее равенство надо к интегралу применить теорему о вычетах, а затем проделать несколько несложных тождественных преобразований (подробное вычисление см. в Добавлении I, I.21).

Так как по условию (III) $|1-\zeta| \leq \lambda(1-|\zeta|)$ $(\zeta \in E)$, то

$$I_\delta^2 \leq 4\lambda^2 \sum_{\xi, \zeta \in E^{(\delta)}} |d_\xi| |d_\zeta| \frac{(1-|\zeta|)^2(1-|\xi|^2) + (1-|\xi|)^2(1-|\zeta|^2)}{(1-|\xi||\zeta|)^2} =$$

$$= 8\lambda^2 \sum_{\xi,\zeta\in E^{(j)}} |d_\xi||d_\zeta| \frac{(1-|\zeta|)(1-|\xi|)}{1-|\xi||\zeta|} =$$

$$= 8\lambda^2 \sum_{\xi,\zeta\in E^{(j)}} \left(|d_\xi|(1-|\xi|)^{\frac{1}{2}}\right)\left(|d_\zeta|(1-|\zeta|)^{\frac{1}{2}}\right) \frac{(1-|\xi|)^{\frac{1}{2}}(1-|\zeta|)^{\frac{1}{2}}}{1-|\zeta||\xi|}.$$

Применяя к последней сумме леммы 5.10 и 5.11 получим

$$I_j^2 \leq 8\lambda^2 M_7 \sum |d_\xi|^2 (1-|\xi|)$$

. (M_7 из леммы 5.10), но

$$|d_\xi| = \left|\psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1} a_\xi \frac{|\xi|}{\xi}\right| =$$

$$= |\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-1} \cdot \frac{1-|\xi|^2}{|1-\xi^2|} \cdot \frac{1}{|B_\xi(\xi)|} \leq \frac{1}{\delta} |\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-1}, \ \xi\in E,$$

где $\delta = \inf\limits_{\xi\in E} |B_\xi(\xi)|$ и $\delta > 0$,так как E удовлетворяет условию Карлесона.

Далее

$$I_j^2 \leq 8\lambda^2 M_7 \delta^{-2} \sum_{\xi\in E^{(j)}} |\psi(\xi)|^2 (1-|\xi|)^{-1} \quad (j=1,\dots,m)$$

и, наконец, для любой простой функции ψ имеем

$$\|W\psi\|_2 \leq \sum_{j=1}^{m} I_j \leq$$

$$\leqslant \left(2\lambda\delta^{-1}\sqrt{2M_7}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\xi\in E^{(j)}}|\psi(\xi)|^2(1-|\xi|)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(2\lambda\delta^{-1}\sqrt{2M_7 m}\right)\left(\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|^2(1-|\xi|)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=M_8\,\|\psi\|_{(2,\mu)}\,,\qquad \psi\in\Omega(E)\,, \tag{11}$$

$$M_8=2\lambda\delta^{-1}\sqrt{2M_7 m}\,.$$

Лемма доказана.

5.22. Теорема. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда существует линейный непрерывный оператор $W_p: l^p(E,\mu)\longrightarrow l^p\ (1\leqslant p\leqslant 2)$, удовлетворяющий условию :

$$T_p(W_p\psi)=\psi\,,\quad \psi\in l^p(E,\mu)\quad (1\leqslant p\leqslant 2).$$

Доказательство .

Используя результаты лемм 5.20 и 5.21, можем написать

$$\|W\psi\|_2\leqslant M_8\,\|\psi\|_{(2,\mu)}\,,\quad \psi\in\Omega(E),$$

и

$$\|W\psi\|_1\leqslant M_2\,\|\psi\|_{(1,\mu)}\,,\quad \psi\in\Omega(E).$$

Применяя к линейному оператору W теорему Рисса - Торина (см. [25]), получим

$$\|W\psi\|_p \leq M_8^{1-t} M_2^{t} \|\psi\|_{(p,\mu)}, \quad \psi \in \Omega(E), \tag{12}$$

$$t = \frac{2}{p} - 1, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

причем оператор W имеет единственное распространение до линейного непрерывного оператора (с сохранением (12)), действующего из $\ell^p(E,\mu)$ в ℓ^p. Ясно, что этим распространением будет оператор W_p, задаваемый равенством

$$W_p \psi = \{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \psi \in \ell^p(E,\mu) \quad (1 \leq p \leq 2),$$

где $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность коэффициентов Маклорана функции

$$f(z) = \sum_{\xi \in E} \psi(\xi)(1-|\xi|)^{-1} \Phi_\xi(z), \quad z \in D. \tag{13}$$

Покажем только, что равенство (13) задает функцию, голоморфную в круге D. Действительно,

$$\sum_{\xi \in E} \max_{|z| \leq \rho < 1} \left(|\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-1} |\Phi_\xi(z)|\right) \leq$$

$$\leq \sum_{\xi \in E} |\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-1} \max_{|z| \leq \rho < 1} \left(|a_\xi| \left|\frac{(1-|\xi|^2)(1-z^2)}{(1-\bar{\xi} z)^2}\right| |B_\xi(z)|\right) \leq$$

$$\leq \frac{4}{\delta(1-\rho)^2} \sum_{\xi \in E} |\psi(\xi)|,$$

так как $|a_\xi| = \left|\frac{1-|\xi|^2}{1-\xi^2} \cdot \frac{1}{B_\xi(\xi)}\right| \leq \frac{1}{\delta}$ (см. определение Φ_ξ в 3.22).

Но

$$\sum_{\xi\in E} |\psi(\xi)| = \sum_{\xi\in E} |\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-\frac{1}{p}}(1-|\xi|)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\xi\in E} |\psi(\xi)|^p(1-|\xi|)^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$ так

как

$\psi \in \ell^p(E,\mu)$ $(1 \leq p \leq 2)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $\frac{q}{p} \geq 1$.

Очевидно, что $T_p(W_p'\psi) = \psi$, $\psi \in \ell^p(E,\mu)$, ведь

$$\Phi_\xi(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta=\xi \\ 0, & \eta\neq\xi. \end{cases}$$

Теорема доказана.

5.23. Символом V будем обозначать линейный оператор, заданный на $\Omega(E)$ равенством

$$V\psi = \{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \psi \in \Omega(E), \tag{14}$$

где $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность коэффициентов Маклорена функции

$$f(z)=\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)\cdot\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar{\xi}z)^2}\cdot B_\xi(z)\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\quad,\ z\in D,\qquad(15)$$

(B_ξ - произведения Бляшке, определенные в 3.21) .

5.24. Лемма . Пусть множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда оператор V_∞ ,задаваемый равенством

$$V_\infty\psi=\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}\ ,\quad \psi\in l^\infty(E,\mu),\qquad(16)$$

где

$$f(z)=\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)\cdot\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar{\xi}z)^2}\cdot B_\xi(z)\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\ ,\ z\in D,\qquad(17)$$

есть линейный непрерывный оператор из $l^\infty(E,\mu)$ в l^∞ .

Ясно,что

$$V_\infty\psi=V\psi\quad,\quad \psi\in\Omega(E).$$

Доказательство.

Прежде всего отметим,что

$$\sum_{\xi\in E}\max_{|z|\le\rho<1}\left|\psi(\xi)\cdot\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar{\xi}z)^2}B_\xi(z)\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\right|\le$$

$$\le\frac{4}{\delta(1-\rho)^2}\sup_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\cdot\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)<+\infty,\ \psi\in l^\infty(E,\mu),\ 0<\rho<1.$$

Следовательно,равенство (17) задает функцию голоморфную в круге D .

Пусть ψ - простая функция,заданная на множестве E .

Рассмотрим голоморфную в D функцию f, задаваемую равенством (15).

Положим $g(z)=(1-z)f(z),\ z\in D$, тогда $$g(z)=(1-z)f(z),\quad z\in D \tag{18}$$

$$\hat{g}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})e^{-n\theta i}\,d\theta \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Следуя Ньюману и Шапиро [27], рассмотрим вместо числа $\hat{g}(n)$ число сопряженное с ним:

$$\overline{\hat{g}(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{g(e^{i\theta})}\,e^{in\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\overline{g(z)}\,z^{n-1}\,dz.$$

Используя то обстоятельство, что $\bar{z}=\frac{1}{z}$, при $|z|=1$, получим

$$\overline{\hat{g}(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}(1-\bar{z})\left(\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}\cdot\frac{1-|\xi|^2}{(1-\xi\bar{z})^2}\,\overline{B_\xi(z)}\cdot\frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\right)z^{n-1}\,dz=$$

$$=\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}\,(1-|\xi|^2)\,\frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(z-1)}{(z-\xi)^2}\cdot\frac{z^n}{B_\xi(z)}\,dz. \tag{19}$$

Интеграл, стоящий под знаком суммы в (19), вычислим по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(z-1)}{(z-\xi)^2}\cdot\frac{z^n}{B_\xi(z)}\,dz=\sum_{\tau\in E_\xi}\frac{\tau-1}{(\tau-\xi)^2}\cdot\frac{\tau^n}{B'_\xi(\tau)}\;+$$

$$+\frac{(n+1)\xi^n-n\xi^{n-1}}{B_\xi(\xi)}+\frac{(1-\xi)\xi^n}{B^2_\xi(\xi)}\,B'_\xi(\xi), \tag{20}$$

где

$$E_\xi=\{z\in E: z\neq \xi\}.$$

Учитывая (20), получим

$$\hat{g}(n)=\left(\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}(1-|\xi|^2)\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\sum_{z\in E_\xi}\frac{z-1}{(z-\xi)^2}\cdot\frac{z^n}{B'_\xi(z)}\right)+$$

$$+\left(\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}(1-|\xi|^2)\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\cdot\frac{(n+1)\xi^n-n\xi^{n-1}}{B_\xi(\xi)}\right)+$$

$$+\left(\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}(1-|\xi|^2)\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\cdot\frac{(1-\xi)}{B^2_\xi(\xi)}\xi^n B'_\xi(\xi)\right)=$$

$=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}+S_n^{(3)}$, где $S_n^{(1)}$ обозначает первое слагаемое, $S_n^{(2)}$ - второе, а $S_n^{(3)}$ - третье.

Оценим каждое $S_n^{(j)}$ $(j=1,2,3)$ в отдельности.

$$|S_n^{(1)}|\leq\frac{2\lambda}{\delta^3}\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\sum_{z\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|)}{|1-\bar z\xi|^2}\cdot\frac{|z|^n}{B'_\xi(z)},$$

, где число δ из условия Карлесона, а λ из условия $(\overline{\text{III}})$.

Так как $$|B'_\xi(z)|=\frac{|B_{\xi,z}(z)|}{1-|z|^2}\geq\frac{\delta}{1-|z|^2},\ \xi,z\in E,\ \xi\neq z,$$

то $$|S_n^{(1)}|\leq\frac{2\lambda}{\delta^4}\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\sum_{z\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\xi z|^2}|z|^n(1-|z|)\leq$$

$$\leq\frac{2\lambda}{\delta^4}\left(\sup_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\right)\cdot\sum_{\xi\in E}\sum_{z\in E}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\xi\bar z|^2}|z|^n(1-|z|)=$$

$$= \frac{2\lambda}{\delta^4} \|\psi\|_{(\infty,\mu)} \cdot \sum_{z\in E} (1-|z|)|z|^n \left(\sum_{\xi\in E} \frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\xi\bar{z}|^2} \right).$$

Учитывая, что

$$\sum_{\xi\in E} \frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{z}\xi|^2} \leqslant 1-2\ln\delta \qquad (21)$$

для любого $z\in E$ (лемма 3.9), получим

$$|S_n^{(1)}| \leqslant \frac{2\lambda}{\delta^4}(1-2\ln\delta)\|\psi\|_{(\infty,\mu)} \cdot \sum_{z\in E}(1-|z|)|z|^n,$$

применив лемы 5.12 и 3.12 (с $\gamma_0=\frac{1}{2}$ и $l_0=[2M_0]+1$)

будем иметь

$$|S_n^{(1)}| \leqslant \frac{2\lambda}{\delta^4}(1-2\ln\delta)\cdot 6(2M_0+1)\cdot\frac{\|\psi\|_{(\infty,\mu)}}{n+1} \qquad (22)$$

$$(n=0,1,2,\dots).$$

Оценим $S_n^{(2)}$:

$$|S_n^{(2)}| \leqslant \frac{4}{\delta^2}\cdot\left(\sup_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\right)\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)\left|n\xi^{n-1}(\xi-1)+\xi^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\lambda}{\delta^2}\|\psi\|_{(\infty,\mu)}\left(n\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)^2|\xi|^{n-1}\right)+$$

$$+\frac{4}{\delta^2}\|\psi\|_{(\infty,\mu)}\left(\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)|\xi|^n\right),$$

применяя к первой сумме лемму 5.12 (утверждение 1°), а ко второй – лемму 5.12 (утверждение 2°), получим

$$|S_n^{(2)}| \leq \frac{4}{\delta^2}(2M_0+1)(4\lambda+6)\cdot\frac{\|\psi\|_{(\infty,\mu)}}{n+1} \qquad (23)$$

$$(n=0,1,2,\dots)$$

(кроме того применили лемму 3.12 с $\gamma_0=\frac{1}{2}$ и $\ell_0=[2M_0]+1$).

Для $S_n^{(3)}$ имеем

$$|S_n^{(3)}| \leq \frac{2\lambda}{\delta^2}\left(\sup_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\right)\cdot\sum_{\xi\in E}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\xi|)}{|B_\xi(\xi)|}|B_\xi^{\blacktriangledown}(\xi)||\xi|^n \text{; так как}$$

$$B_\xi^{\blacktriangledown}(z)=B_\xi(z)\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{|\zeta|^2-1}{(\zeta-z)(1-\bar{\zeta}z)},\ z\in D\setminus E_\xi, \text{ то}$$

$$|S_n^{(3)}| \leq \frac{2\lambda}{\delta^2}\|\psi\|_{(\infty,\mu)}\cdot\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)|\xi|^n\cdot\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)}{|\zeta-\xi||1-\bar{\zeta}\xi|} \leq$$

$$\leq \frac{2\lambda}{\delta^3}\|\psi\|_{(\infty,\mu)}\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)|\xi|^n\cdot\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)}{|1-\bar{\zeta}\xi|^2}.$$

Применяя к внутренней сумме (21) , а затем леммы 3.12, 5.12 получим

$$|S_n^{(3)}| \leq \frac{2\lambda}{\delta^3}(1-2\ln\delta)\cdot 6(2M_0+1)\frac{\|\psi\|_{(\infty,\mu)}}{n+1} \qquad (24)$$

$$(n=0,1,2,\dots).$$

Учитывая (22), (23), (24) будем иметь, что существует константа $M_9 \in (0,+\infty)$ такая, что

$$|\hat{g}(n)| \leq M_9 \frac{\|\psi\|_{(\infty,\mu)}}{(n+1)} \tag{25}$$

для всех $\psi \in \Omega(E)$ и всех n $(n=0,1,2,\ldots)$.

Пусть ψ - произвольная функция из $l^\infty(E,\mu)$, а функция g определяется формулами (17) и (18). Тогда легко убедиться, используя (25), что и в этом случае

$$|\hat{g}(n)| \leq M_9 \frac{\|\psi\|_{(\infty,\mu)}}{n+1}, \quad \psi \in l^\infty(E,\mu) \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{26}$$

Кроме того, функция g ограничена в круге D (см. лемму 3.20), причем существует константа $M_1 \in (0,+\infty)$ (см. 3.20) такая, что

$$\sup_{|z|<1} |g(z)| \leq \frac{4}{\delta} M_1 \cdot \|\psi\|_{(\infty,\mu)} \tag{27}$$

для любой функции $\psi \in l^\infty(E,\mu)$.

Функция $f(z) = \frac{g(z)}{1-z}$ $(z \in D)$ имеет коэффициенты Маклорена $\hat{f}(n) = \sum_{k=0}^{n} \hat{g}(k)$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Поэтому из того, что

$$|\hat{g}(n)| \leq M_9 \frac{\|\psi\|_{(\infty,\mu)}}{n+1}, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

и

$$\sup_{|z|<1} |g(z)| \leq \frac{4}{\delta} M_1 \cdot \|\psi\|_{(\infty,\mu)}, \quad \psi \in l^\infty(E,\mu),$$

следует (см. лемму 5.14)

$$\|V_\infty \psi\| = \sup_n |\hat{f}(n)| = \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} \hat{g}(k)\right| \leq \left(\frac{4}{\delta} M_1 + 2M_9\right) \|\psi\|_{(\infty,\mu)} = M_{10} \|\psi\|_{(\infty,\mu)}. \tag{28}$$

Лемма доказана.

5.25. Лемма. Пусть множество E удовлетворяет условию (VI) (см. 5.6). Тогда существует константа $M_{11}\in(0,+\infty)$, такая, что

$$\|V\psi\|_2 \leq M_{11}\cdot\|\psi\|_{(2,\mu)} \tag{29}$$

для всех $\psi\in\Omega(E)$.

Доказательство. Сначала докажем лемму в предположении, что множество E удовлетворяет условию Ньюмана. Пусть $\psi\in\Omega(E)$, тогда (так как $\ell^2_A=H^2$, см. [1])

$$\left(\|V\psi\|_2\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\left|\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar{\xi}z)^2}B_\xi(z)\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\right|^2|dz|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\left|\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar{\xi}z)(\xi-z)}\cdot\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\right|^2|dz|=$$

$$=\sum_{\xi,\zeta\in E}\psi(\xi)\overline{\psi(\zeta)}\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|}\,\frac{(1+|\xi|)}{B_\xi(\xi)}\cdot\frac{(1+|\zeta|)}{\overline{B_\zeta(\zeta)}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)\,|dz|}{(\xi-z)(1-\bar{\xi}z)(\bar{\zeta}-\bar{z})(1-\zeta\bar{z})}. \tag{30}$$

Вычислим интеграл

$$I_{\xi,\zeta}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\frac{|dz|}{(\xi-z)(1-\bar{\xi}z)(\bar{\zeta}-\bar{z})(1-\zeta\bar{z})};$$

так как $\bar{z}=\frac{1}{z}$, при $|z|=1$, то

$$I_{\xi,\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(\xi-z)(\zeta-z)(1-\bar{\xi}z)(1-\bar{\zeta}z)}.$$

Применив теорему о вычетах, получим

$$I_{\xi,\zeta} = \frac{1-|\xi|^2|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}\xi|^2(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)} .$$

(подробнее вычисление интеграла $I_{\xi,\zeta}$ см. в Добавлении I, I.22

Подставляя полученное в (30), будем иметь

$$\left(\|V\psi\|_2\right)^2 \leq \frac{4}{\delta^2}\sum_{\xi,\zeta\in E}|\psi(\xi)||\psi(\zeta)|\frac{1-|\xi|^2|\zeta|^2}{|1-\xi\bar{\zeta}|^2} \leq$$

$$\leq \frac{8}{\delta^2}\sum_{\xi,\zeta\in E}\left(|\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(|\psi(\zeta)|(1-|\zeta|)^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{(1-|\xi|)^{\frac{1}{2}}(1-|\zeta|)^{\frac{1}{2}}}{1-|\xi||\zeta|},$$

где

$$\delta = \inf_{\xi\in E}|B_\xi(\xi)| > 0 \quad (\text{см. } \underline{3.5}\ ).$$

Принимая во внимание леммы $\underline{5.10}$ и $\underline{5.11}$, получим

$$\|V\psi\|_2 \leq \frac{\sqrt{8M_7}}{\delta}\left(\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|^2(1-|\xi|)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \psi\in\Omega(E).$$

Пусть теперь множество E удовлетворяет условию $(\overline{\underline{VI}})$ (см. $\underline{5.6}$), тогда

$$\|V\psi\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left|\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\xi\in E^{(\gamma)}}\psi(\xi)\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar{\xi}z)^2}B_\xi(z)\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\right|^2|dz|\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma=1}^{m}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left|\sum_{\xi\in E^{(\gamma)}}\psi(\xi)\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar{\xi}z)^2}B_\xi(z)\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\right|^2|dz|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $E^{(j)}$ $(j=1,\dots,m)$ удовлетворяет условию Ньюмана, а множество E условию Карлесона (лемма 5.8), то, рассуждая как и выше, получим

$$\|V\psi\|_2 \leq \frac{\sqrt{8M_7}}{\delta}\sum_{j=1}^{m}\Bigl(\sum_{\xi\in E^{(j)}}|\psi(\xi)|^2(1-|\xi|)^{-1}\Bigr)^{\frac12}\leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{8M_7 m}}{\delta}\Bigl(\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|^2(1-|\xi|)^{-1}\Bigr)^{\frac12}=$$

$$=\frac{\sqrt{8M_7 m}}{\delta}\|\psi\|_{(2,\mu)},\ \psi\in\Omega(E).$$

Лемма доказана.

Следствие. Если множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона, то имеет место утверждение леммы 5.25.

Доказательство. Из леммы 3.12 следует, что множество E в этом случае удовлетворяет условию (VI).

5.26. Теорема. Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда существует линейный непрерывный оператор $V_p: \ell^p(E,\mu)\longrightarrow \ell^p$ $(2\leq p\leq+\infty)$, удовлетворяющий условию

$$T_p(V_p\psi)=\psi\ ,\quad \psi\in\ell^p(E,\mu)\ (2\leq p\leq+\infty). \tag{31}$$

Доказательство. Используя результаты леммы 5.24 и следствия к лемме 5.25, можем написать

$$\|V\psi\|_\infty \leqslant M_{10}\|\psi\|_{(\infty,\mu)},\quad \psi\in\Omega(E),$$

и

$$\|V\psi\|_2 \leqslant M_{11}\|\psi\|_{(2,\mu)},\quad \psi\in\Omega(E).$$

Применяя к линейному оператору V теорему Рисса - Торина (см. [25], стр. 144), получим, что

$$\|V\psi\|_p \leqslant M_{10}^{(1-t)} M_{11}^{t}\|\psi\|_{(p,\mu)},\ \psi\in\Omega(E),\ 2\leqslant p\leqslant+\infty, \qquad (32)$$

$t=\frac{2}{p}$, причем при $p\in[2,+\infty)$ оператор V имеет единственное распространение до линейного непрерывного оператора (с сохранением (32)), действующего из $l^p(E,\mu)$ в l^p. Легко видеть, что этим распространением будет оператор V_p $(2\leqslant p<+\infty)$, задаваемый равенством

$$V_p\psi=\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty},\quad \psi\in l^p(E,\mu),$$

где

$$f(z)=\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar{\xi}z)^2}B_\xi(z)\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)},\ z\in D. \qquad (33)$$

Случай $p=+\infty$ обсуждался в лемме 5.24, там же можно найти доказательство того, что равенство (33) задает функцию, голоморфную в круге D (т.к. $l^p(E,\mu)\subset l^\infty(E,\mu)$, $p\geqslant 1$).

Выполнение равенства (31) очевидно. Теорема доказана.

5.27. Лемма. Если $S_p(l^p_A)\subset h^p(E)$ $(1<p\leqslant+\infty)$, то S_p есть непрерывный оператор из l^p_A в $h^p(E)$.

Доказательство приведено в Добавлении I, I.24.

<u>5.28. Лемма.</u> Если $S_p(l_A^p) \subset h^p(E)$ $(1 < p \leq +\infty)$, то существует семейство функций $\{f_\xi\}$ $(\xi \in E)$ такое, что

1°. $f_\xi \in l_A^p$ $(\xi \in E)$,

2°. $f_\xi(\zeta) = \varepsilon_{\xi\zeta}(1-|\xi|)^{-\frac{1}{q}}$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, $\varepsilon_{\xi\zeta} = \begin{cases} 1, & \xi = \zeta \\ 0, & \xi \neq \zeta \end{cases}$, $\xi, \zeta \in E$,

3°. $M_{12} = \sup\limits_{\xi \in E} \| f_\xi \|_{l_A^p} < +\infty$.

Доказательство приведено в Добавлении I, <u>I.26</u>.

<u>5.29. Лемма</u>. Пусть $1 < p \leq +\infty$, если $S_p(l_A^p) = h^p(E)$, то множество E удовлетворяет [redacted] условию $(\underline{IV})$, т.е.

$$\inf_{\substack{\xi, \zeta \in E \\ \xi \neq \zeta}} \left| \frac{\zeta - \xi}{1 - \bar{\zeta}\xi} \right| > 0$$

<u>Доказательство.</u> Так как

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)||z|^n \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{nq}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\|f\|_{l_A^p}}{(1-|z|)^{\frac{1}{q}}},$$

$z \in D$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(p \geq 1, q \geq 1)$, то для функции f_ξ из леммы <u>5.28</u> имеем .

$$\|f_\xi\|_{\ell^p_A} \geqslant \sup_{|z|=\frac{3+|\xi|}{4}<1} (1-|z|)^{\frac{1}{q}} |f_\xi(z)| =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{q}} (1-|\xi|)^{\frac{1}{q}} \cdot \sup_{|z|=\varepsilon=\frac{3+|\xi|}{4}<1} \left| f_\xi(z) \cdot \frac{\varepsilon^2 - z\bar{\zeta}}{\varepsilon\zeta - \varepsilon z} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}(1-|\xi|)^{\frac{1}{q}} \left| (1-|\xi|)^{-\frac{1}{q}} \frac{\varepsilon^2 - \xi\bar{\zeta}}{\varepsilon(\zeta-\xi)} \right| > \frac{1}{4} \cdot \left| \frac{\varepsilon^2 - \xi\bar{\zeta}}{\zeta - \xi} \right|,$$

где $\zeta, \xi \in E$, $\zeta \neq \xi$ и $|\zeta| \leqslant |\xi|$.

Так как

$$|\varepsilon^2 - \xi\bar{\zeta}| \geqslant |1-\xi\bar{\zeta}| - (1-\varepsilon^2) > |1-\xi\bar{\zeta}| - 2(1-\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2}|1-\xi\bar{\zeta}| + \frac{1}{2}|1-\xi\bar{\zeta}| - \frac{1}{2}(1-|\xi|) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|1-\xi\bar{\zeta}| + \frac{1}{2}(1-|\xi|) - \frac{1}{2}(1-|\xi|) = \frac{1}{2}|1-\xi\bar{\zeta}|,$$

то

$$\|f_\xi\|_{\ell^p_A} \geqslant \frac{1}{8} \left| \frac{1-\xi\bar{\zeta}}{\xi-\zeta} \right|, \quad \xi, \zeta \in E, \ \xi \neq \zeta.$$

Применяя лемму 5.28, получим

$$\inf_{\substack{\xi, \zeta \in E \\ \xi \neq \zeta}} \left| \frac{\xi - \zeta}{1 - \xi\bar{\zeta}} \right| \geqslant \frac{1}{8 M_{12}},$$

где M_{12} - константа из леммы 5.28.

Следствие. Пусть выполнены условия леммы и множество E удовлетворяет условию (III). Тогда множество E удовлетворяет условию Карлесона.

Доказательство. Надо воспользоваться утверждением леммы 3.14.

При $p\in(1,2]$ можно доказать более сильное утверждение, чем лемма 5.29.

5.30. Если
$$S_p(\ell^p_A)=\ell^p(E)\quad(1<p\leq 2),$$

то множество E удовлетворяет условию Карлесона.

Доказательство. Известно (см. [28], стр 304), что для любого $z\in D$

$$(1-|z|^2)^{\frac{1}{s}}|f(z)|\leq\|f\|_{H^s},\quad f\in H^s,\quad s\geq 1.\qquad(34)$$

Применяя теорему Юнга- Хаусдорфа (см. [1] ,стр. 156) к функции f_ξ из леммы 5.28, а затем неравенство (34) ,получим

$$\|f_\xi\|_{\ell^p_A}\geq\|f_\xi\|_{H^q}=\left\|\frac{f_\xi}{B_\xi}\right\|_{H^q}\geq$$

$$\geq\left|\frac{f_\xi(\xi)}{B_\xi(\xi)}\right|(1-|\xi|^2)^{\frac{1}{q}}\geq\frac{1}{|B_\xi(\xi)|},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, B_ξ -произведение Бляшке, определенное в 3.21.

Применяя лемму 5.28 ,получим

$$|B_\xi(\xi)|\geq\frac{1}{M_{12}}>0,\quad\xi\in E.$$

5.31. **Теорема.** Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию (III). Тогда следующие утверждения равносильны:

$$1^\circ.\quad S_p(l^p_A)=h^p(E)\qquad (1<p\le+\infty),$$

$$2^\circ.\quad T_p(l^p)=l^p(E,\mu)\qquad (1<p\le+\infty),$$

3°. Множество E удовлетворяет условию Карлесона.

Доказательство. Как уже отмечалось выше (см. 5.7) равносильность утверждений 1° и 2° очевидна. То, что из 1° следует 3°, доказано в лемме 5.29 и следствии к ней. Более того, в 5.30 для случая $1<p\le 2$ доказано более сильное утверждение, так как на множество E не накладывалось никаких дополнительных ограничений.

Докажем, что в условиях теоремы из 3° следует 2°.

Пусть W_p $(1<p\le 2)$ и V_p $(2\le p\le+\infty)$ операторы, рассмотренные в теоремах 5.22 и 5.26. Из теорем 5.22 и 5.26 следует, что

$$W_p(l^p(E,\mu))\subset l^p\ (1<p\le 2)\quad\text{и}\quad V_p(l^p(E,\mu))\subset l^p\ (2\le p\le+\infty),$$

и так как

$$T_p(W_p\psi)=\psi\ ,\ \psi\in l^p(E,\mu)\ ,\ p\in(1,2],$$

$$T_p(V_p\psi)=\psi\ ,\ \psi\in l^p(E,\mu)\ ,\ p\in[2,+\infty],$$

то

$$l^p(E,\mu)=T_p\left(W_p\left(l^p(E,\mu)\right)\right)\subset T_p\left(l^p\right),\ p\in(1,2],$$

и

$$l^p(E,\mu)=T_p\left(V_p\left(l^p(E,\mu)\right)\right)\subset T_p\left(l^p\right),\ p\in[2,+\infty].$$

Включение $T_p\left(l^p\right)\subset l^p(E,\mu)$ $(1<p\leq+\infty)$ доказано в лемме 5.16 и следствиях из 5.17, более того, в 5.18 для $p\in[2,+\infty]$ доказано более сильное утверждение, чем в лемме 5.16 (в 5.18 требуется, чтобы множество E удовлетворяло только условию Карлесона) .

Теорема доказана.

5.32. Замечание . Отметим, что в теоремах 5.22 и 5.26 доказана не только возможность интерполяции, когда множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона, но более того в них построены ограниченные правые обратные операторы W_p $(1<p\leq 2)$ и V_p $(2\leq p\leq+\infty)$ к оператору T_p . Тем самым операторы $P_p=I-W_pT_p$ $(1<p\leq 2)$ и $P_p=I-V_pT_p$ $(2\leq p\leq+\infty)$ (I - единичный оператор) есть непрерывные проекторы, действующие из l^p на $T_p^{-1}(0)$ ($T_p^{-1}(0)$ - ядро оператора T_p) .

Ясно, что для оператора S_p $(1<p\leq+\infty)$ можно высказать аналогичное замечание.

5.33. Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана.

Символом U_p $(1\leq p<+\infty)$ будем обозначать линейный оператор, заданный на $l^p(E,\mu)$ следующим образом

$$U_p\psi=\left\{\hat{f}(n)\right\}_{n=0}^{\infty},\ \psi\in l^p(E,\mu),\ p\in[1,+\infty),$$

где $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ -последовательность коэффициентов Маклорена функции
$$f(z)=\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)\frac{B_\xi(z)}{1-\bar{\xi}z}\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)},\ z\in D. \quad (35)$$

Равенство (35) задает функцию, голоморфную в круге D, так как
$$\max_{|z|\le\rho<1}\left|\frac{B_\xi(z)}{1-\bar{\xi}z}\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}\right|\le\frac{2}{\delta}\cdot\frac{1}{1-\rho}\quad(0<\rho<1)$$
и
$$\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|=\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|(1-|\xi|)^{-\frac{1}{p}}(1-|\xi|)^{\frac{1}{p}}\le$$
$$\le\Big(\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|^p(1-|\xi|)^{-1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}\quad\left(\tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1\right)$$

Первый сомножитель конечен, так как $\psi\in l^p(E,\mu)$, а второй - в силу того, что множество E удовлетворяет условию Ньюмана (см. <u>5.9</u>) и $\frac{q}{p}>0$ $(1<p<+\infty)$.

<u>5.34.</u> <u>Лемма.</u> Пусть множество E удовлетворяет условию Ньюмана. Тогда оператор U_p, определенный в <u>5.33</u>, удовлетворяет условию
$$|\hat{f}(n)|\le C\cdot\frac{\|\psi\|_{(p,\mu)}}{(n+1)^{\frac{1}{p}}},\ \psi\in l^p(E,\mu)\ (n=0,1,\dots),\quad(36)$$
$$1\le p<+\infty,$$
где f и ψ связаны равенством (35), а C - константа $(0<C<+\infty)$ не зависит от $n\ (n=0,1,2,\dots)$ и $\psi\in l^p(E,\mu)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть ψ - произвольная простая функция, заданная на множестве E и
$$f(z)=\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)\cdot\frac{B_\xi(z)}{1-\bar{\xi}z}\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)},\ z\in D.$$

Тогда

$$\overline{\hat{f}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{it})}\, e^{int}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, z^{n-1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\sum_{\xi\in E} \overline{\psi(\xi)} \cdot \frac{\overline{B_\xi(z)}}{1-\xi \bar{z}} \cdot \frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\right) z^{n-1}\, dz$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Так как $\bar{z} = \frac{1}{z}$, если $|z| = 1$, то

$$\overline{\hat{f}(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\sum_{\xi\in E} \overline{\psi(\xi)}\, \frac{1}{(z-\xi) B_\xi(z)} \cdot \frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\right) z^{n}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{B(z)}\left(\sum_{\xi\in E} \overline{\psi(\xi)}\, \frac{|\xi|}{\xi} \cdot \frac{1}{\bar{\xi} z - 1} \cdot \frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\right) dz$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Применяя теорему о вычетах, получим

$$\overline{\hat{f}(n)} = \sum_{\zeta\in E} \frac{\zeta^n}{B'(\zeta)}\left(\sum_{\xi\in E} \overline{\psi(\xi)}\, \frac{|\xi|}{\xi} \cdot \frac{1}{\bar{\xi}\zeta - 1} \cdot \frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\right)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Учитывая, что множество E удовлетворяет условию Карлесона (см. 3.7) и что

$$|B'(\zeta)| = \frac{|B_\zeta(\zeta)|}{1-|\zeta|^2} \geq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{1-|\zeta|}, \quad \zeta \in E,$$

$$\left(\delta = \inf_{\xi\in E} |B_\xi(\xi)| > 0\right)$$

, получим

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq \frac{4}{\delta^2} \sum_{z\in E} |z|^n (1-|z|) \left(\sum_{\xi\in E} \frac{|\psi(\xi)|}{1-|z||\xi|} \right) =$$

$$= \frac{4}{\delta^2} \sum_{\xi\in E} |\psi(\xi)| (1-|\xi|)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{z\in E} \frac{(1-|\xi|)^{\frac{1}{p}} (1-|z|)}{1-|z||\xi|} \cdot |z|^n \right), \quad (37)$$

$p \geq 1, \ n = 0, 1, 2, \dots .$

Пусть $1 < p < +\infty$, применяя к внешней сумме неравенство Гёльдера с показателями p и q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, получим

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq \frac{4}{\delta^2} \left(\sum_{\xi\in E} |\psi(\xi)|^p (1-|\xi|)^{-1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\xi\in E} \left(\sum_{z\in E} \frac{(1-|\xi|)^{\frac{1}{p}} (1-|z|)}{1-|\xi||z|} |z|^n \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

К последнему сомножителю применим неравенство Минковского:

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq \frac{4}{\delta^2} \|\psi\|_{(p,\mu)} \cdot \sum_{z\in E} \left(\sum_{\xi\in E} \frac{(1-|\xi|)^{\frac{q}{p}} (1-|z|)^q}{(1-|\xi||z|)^q} |z|^{nq} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \frac{4}{\delta^2} \|\psi\|_{(p,\mu)} \cdot \sum_{z\in E} |z|^n (1-|z|)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\xi\in E} \frac{(1-|\xi|)^{q-1} (1-|z|)}{(1-|\xi||z|)^q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Оценим внутреннюю сумму

$$s(z,q) = \sum_{\xi\in E} \left(\frac{1-|\xi|}{1-|\xi||z|} \right)^{q-1} \cdot \left(\frac{1-|z|}{1-|\xi||z|} \right) < \sum_{\substack{\xi\in E \\ |\xi|\leq|z|}} \frac{1-|z|}{1-|\xi|} +$$

$$+ \sum_{\substack{\xi\in E \\ |\xi|>|z|}} \left(\frac{1-|\xi|}{1-|z|} \right)^{q-1}.$$

Так как множество E

удовлетворяет условию Ньюмана, то (см. 5.9; (1))

$$S(z,q) \leq \sum_{k=1}^{m} \gamma^{m-k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma^{(k-m)(q-1)},$$

где γ - константа из 3.6 $(0<\gamma<1)$, а m - число точек ξ множества E, удовлетворяющих условию

$$|\xi| \leq |z|.$$

Следовательно,

$$S(z,q) < \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma^{q-1}}, \; z \in E \; (0<\gamma<1, \; q>1) \quad (38)$$

Учитывая (38), получим

$$|\hat{f}(n)| < \frac{4}{\delta^2}\left(\frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|\psi\|_{(p,\mu)} \left(\sum_{z \in E} |z|^n (1-|z|)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Применив лемму 5.12, получим, что существует константа $C = C(p,\gamma)$ $(0<C<+\infty)$ такая, что

$$|\hat{f}(n)| \leq C \frac{\|\psi\|_{(p,\mu)}}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}, \; \psi \in \Omega(E) \; (n=0,1,2,\dots), \quad (39)$$

$$1<p<+\infty.$$

Если $p=1$, то из (37) следует

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{4}{\delta^2} \|\psi\|_{(1,\mu)} \cdot \sup_{\xi \in E} \sum_{z \in E} \frac{(1-|\xi|)(1-|z|)}{1-|z||\xi|} |z|^n \leq$$

$$\leq \frac{4}{\delta^2} \|\psi\|_{(1,\mu)} \cdot \left(\sum_{z \in E} (1-|z|)|z|^n\right).$$

$(n=0,1,2,\dots)$, так как

$1-|\xi|<1-|\xi||z|$, $\xi, z\in E$. Остается только применить лемму 5.12. Итак, неравенство (36) установлено в случае, когда ψ - простая функция, но очевидно, что оно справедливо и в случае, если ψ - произвольная функция из $\ell^p(E,\mu)$ $(1\leq p<+\infty)$.

Лемма доказана.

5.35. Обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех неотрицательных целых чисел. Пусть ν - положительная мера, заданная на множестве всех подмножеств множества $\mathcal{N}$ следующим образом:

$\nu(\emptyset)=0$, где $\emptyset$ - пустое множество,

$\nu(e)$ равно числу элементов множества e $(e\subset\mathcal{N})$, если e - конечное множество, и

$\nu(e)=+\infty$, если множество e бесконечно.

Если $t>0$ и $x=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\in\ell^p$ $(1\leq p<+\infty)$, то символом $K_t(x)$ будем обозначать множество всех чисел n $(n\in\mathcal{N})$ таких, что $|x_n|>t$, т.е.

$$K_t(x)=\{n\in\mathcal{N}:\ |x_n|>t\}.$$

5.36. Теорема. Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана. Тогда $T_p(\ell^p)=\ell^p(E,\mu)$ и

$$S_p(\ell^p_A)=h^p(E)\quad(1<p<+\infty)$$

Доказательство. Так как утверждения, которые надо доказывать, равносильны, то достаточно доказать одно из них. Докажем, что в условиях теоремы верно первое утверждение. Включение $T_p(\ell^p)\subset\ell^p(E,\mu)$ $(1<p<+\infty)$ было доказано в 5.16.

Для доказательства обратного включения достаточно показать что оператор U_p, определенный в 5.33, есть правый обратный к оператору T_p $(1<p<+\infty)$, т.е. $U_p(\ell^p(E,\mu))\subset \ell^p$ и $T_p(U_p\psi)=\psi$ для любой функции $\psi\in \ell^p(E,\mu)$ $(1<p<+\infty)$

Действительно, если U_p есть правый обратный к оператору T_p $(1<p<\infty)$, то

$$\ell^p(E,\mu)=T_p(U_p(\ell^p(E,\mu)))\subset T_p(\ell^p) \quad (1<p<+\infty).$$

Докажем сначала, что $U_p(\ell^p(E,\mu))\subset \ell^p$ $(1<p<+\infty)$.

Пусть $p_0\in(1,+\infty)$, тогда из леммы 5.34 следует, что

$$\nu(K_t(U_{p_0}\psi))\leq\left(C(p_0,\gamma)\cdot\frac{\|\psi\|_{(p_0,\mu)}}{t}\right)^{p_0},\ t>0,\ \psi\in \ell^{p_0}(E,\mu)$$

и

$$\nu(K_t(U_{p_0}\psi))\leq C(1,\gamma)\cdot\frac{\|\psi\|_{(1,\mu)}}{t},\ t>0,\ \psi\in \ell^1(E,\mu),$$

кроме того $U_{p_1}\psi=U_{p_2}\psi$ для любой функции $\psi\in\Omega(E)$ и любых $p_1,p_2\in[1,+\infty)$. Применив интерполяционную теорему Марцинкевича (см.[25], стр. 167) получим, что если $1<p<p_0$, то U_p есть непрерывный оператор из $\ell^p(E,\mu)$ в ℓ^p и

$$\|U_p\psi\|_p\leq C_0\cdot C^{1-r}(p_0,\gamma)\,C^{r}(1,\gamma)\cdot\|\psi\|_{(p,\mu)},\ \psi\in \ell^p(E,\mu), \quad (40)$$

где $1<p<p_0<+\infty$, $r=\frac{p_0-p}{p(p_0-1)}$, C_0 – конечная положительная константа, зависящая только от p и p_0. Так как p_0 произвольное число из $(1,+\infty)$, то для любого $p\in(1,+\infty)$

$$U_p\left(\ell^p(E,\mu)\right)\subset\ell^p.$$

Равенство $T_p(U_p\psi)=\psi,\ \psi\in\ell^p(E,\mu)\ (1<p<+\infty)$ очевидно. Теорема доказана.

<u>5.37.</u> <u>Теорема.</u> Если множество E удовлетворяет условию $\underline{(VI)}$, то

1°. $T_p(\ell^p)=\ell^p(E,\mu)\quad(1<p<+\infty)$ и

2°. $S_p(\ell^p_A)=h^p(E)\quad(1<p<+\infty)$.

<u>Доказательство</u>. Отметим прежде всего, что в условиях нашей теоремы верно утверждение леммы <u>5.34</u>. Доказательство этого аналогично доказательству леммы <u>5.34</u> (то, что множество E удовлетворяет условию Карлесона следует из <u>5.8</u>). Но тогда верна и теорема : включение $T_p(\ell^p)\subset\ell^p(E,\mu)$ доказано в <u>5.16</u> и <u>5.17</u>, а включение $\ell^p(E,\mu)\subset T_p(\ell^p)$ $(1<p<+\infty)$ доказывается точно так же как и в предыдущей теореме.

<u>5.38. Замечание.</u> В условиях этой теоремы оператор

$P_p=I-U_pT_p\quad(1<p<+\infty)$ есть непрерывный проектор, действующий из ℓ^p на $T_p^{-1}(0)$ ($T_p^{-1}(0)$ - ядро оператора T_p, I - единичный оператор).

Если $p=+\infty$, то утверждение, доказанное в <u>5.24</u> можно дополнить следующей теоремой .

5.39 Теорема. Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию $(\underline{VI})$ и

$$\tau=\sum_{\xi\in E}\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)}{|\zeta-\xi|^2}<+\infty, \qquad (\underline{VII})$$

$$E_\xi=\{\zeta\in E:\zeta\neq\xi\}.$$

Тогда оператор V_∞, определенный в 5.24, есть непрерывный оператор из $\ell^\infty(E,\mu)$ в ℓ^∞ и

$$T_\infty(V_\infty\psi)=\psi \quad, \psi\in\ell^\infty(E,\mu).$$

Доказательство. Пусть ψ - простая функция, заданная на множестве E, и

$$f(z)=\sum_{\xi\in E}\psi(\xi)\frac{1-|\xi|^2}{(1-\bar\xi z)^2}B_\xi(z)\cdot\frac{1+|\xi|}{B_\xi(\xi)}, \quad z\in D.$$

Тогда

$$\overline{\hat f(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(e^{it})}\,e^{int}\,dt=$$

$$=\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}\cdot(1-|\xi|^2)\frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^{n+1}dz}{(z-\xi)^2\,\overline{B_\xi(z)}}. \qquad (41)$$

Интеграл, стоящий под знаком суммы в (41), вычислим по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{z^{n+1}\,dz}{(z-\xi)^2\,B_\xi(z)}=\sum_{\tau\in E_\xi}\frac{\tau^{n+1}}{(\tau-\xi)^2}\cdot\frac{1}{B'_\xi(\tau)}+$$

$$+\frac{(n+1)\,\xi^n}{B_\xi(\xi)}-\frac{\xi^{n+1}}{B^2_\xi(\xi)}\cdot B'_\xi(\xi). \qquad (42)$$

Учитывая (42), получим

$$\overline{\hat{f}(n)}=\left(\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}(1-|\xi|^2)\frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\cdot\sum_{\tau\in E_\xi}\frac{\tau^{(n+1)}}{(\tau-\xi)^2}\cdot\frac{1}{B'_\xi(\tau)}\right)+$$

$$+\left(\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}(1-|\xi|^2)\cdot\frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\cdot\frac{(n+1)\,\xi^n}{B_\xi(\xi)}\right)+$$

$$+\left(\sum_{\xi\in E}\overline{\psi(\xi)}(|\xi|^2-1)\cdot\frac{1+|\xi|}{\overline{B_\xi(\xi)}}\cdot\frac{\xi^{n+1}}{B^2_\xi(\xi)}\cdot B'_\xi(\xi)\right)=$$

$=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}+S_n^{(3)}$, где $S_n^{(1)}$ обозначает первое слагаемое, $S_n^{(2)}$ -второе, а $S_n^{(3)}$- третье.

Оценим каждое $S_n^{(j)}$ $(j=1,2,3)$ в отдельности.

$$|S_n^{(1)}|\le\frac{2}{\delta}\sum_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\sum_{\tau\in E_\xi}\frac{1-|\xi|^2}{|\tau-\xi|^2}\cdot\frac{|\tau|^{n+1}}{|B'_\xi(\tau)|},$$

где $\delta = \inf\limits_{\xi\in E} |B_\xi(\xi)| > 0$, так как E удовлетворяет условию $(\underline{VI})$.

Так как

$$|B_\xi^{\blacktriangledown}(\zeta)| = \frac{|B_{\xi,\zeta}(\zeta)|}{1-|\zeta|^2} \geqslant \frac{\delta}{1-|\zeta|^2}, \quad \xi,\zeta\in E,\ \xi\neq\zeta,$$

то

$$|S_n^{(1)}| \leqslant \frac{2}{\delta^2}\Big(\sup_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\Big)\cdot\sum_{\xi\in E}\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)}{|\zeta-\xi|^2} = \frac{2}{\delta^2}\tau\cdot\|\psi\|_{(\infty,\mu)}. \qquad (43)$$

Оценим $S_n^{(2)}$:

$$|S_n^{(2)}| \leqslant \frac{4}{\delta^2}\cdot\Big(\sup_{\xi\in E}|\psi(\xi)|\Big)\cdot(n+1)\cdot\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|)|\xi|^n,$$

применив утверждение 2° из $\underline{5.12}$, получим

$$|S_n^{(2)}| \leqslant \frac{4}{\delta^2}\cdot\frac{3m}{1-\gamma}\|\psi\|_{(\infty,\mu)}, \qquad (44)$$

где m - натуральное число из $\underline{5.6}$, а γ из $\underline{3.6}$.

Для $S_n^{(3)}$ имеем

$$|S_n^{(3)}| \leqslant \frac{2}{\delta^2}\|\psi\|_{(\infty,\mu)}\cdot\sum_{\xi\in E}\frac{(1-|\xi|^2)|\xi|^{n+1}}{|B_\xi(\xi)|}|B_\xi^{\blacktriangledown}(\xi)|.$$

Так как

$$B_\xi^{\blacktriangledown}(z) = B_\xi(z)\cdot\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{|\zeta|^2-1}{(\zeta-z)(1-\bar\zeta z)},$$

$z\in D\setminus E_\xi$, то

$$|S_n^{(3)}| \leqslant \frac{2}{\delta^2}\|\psi\|_{(\infty,\mu)} \cdot \sum_{\xi\in E}\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)}{|\zeta-\xi||1-\bar{\zeta}\xi|}|\xi|^{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\delta^2}\|\psi\|_{(\infty,\mu)} \cdot \sum_{\xi\in E}\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)}{|\zeta-\xi|^2} = \frac{2\tau}{\delta^2}\|\psi\|_{(\infty,\mu)}. \quad (45)$$

Из (43), (44), (45) вытекает, что существует конечная константа C_1 такая, что

$$\|V_\infty\psi\|_\infty \leqslant C_1 \cdot \|\psi\|_{(\infty,\mu)}, \quad \psi\in\Omega(E). \quad (46)$$

Ясно, что (46) имеет место и для любой функции $\psi\in l^\infty(E,\mu)$. То, что $T_\infty(V_\infty\psi)=\psi$, $\psi\in l^\infty(E,\mu)$, очевидно. Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> В условиях теоремы имеем

$$T_\infty(l^\infty) = l^\infty(E,\mu), \quad S_\infty(l_A^\infty) = h^\infty(E).$$

<u>Замечание</u>. Доказанная теорема действительно дополняет лему <u>5.24</u> и теорему <u>5.26</u> (при $p=+\infty$), так как из того, что множество E удовлетворяет условию ($\underline{\text{III}}$) и условию Карлесона, не следует, вообще говоря, что оно удовлетворяет ($\underline{\text{VII}}$). Например, если $E\subset[0,1)$, то для того чтобы E удовлетворяло условию ($\underline{\text{VII}}$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\xi_{k+1}}{1-\xi_k} < +\infty,$$

где $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность точек множества E $\left(\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\hat{\gamma}_E\right)$;

1.7) такая, что $0\leq\xi_k<\xi_{k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Отсюда вытекает, что уже множество

$$E=\{1-\gamma^{n}: n=0,1,2,\ldots\}\quad(0<\gamma<1)$$

не удовлетворяет $(\overline{\mathrm{VII}})$. С другой стороны, например, множество

$E=\left\{(1-\gamma^{k}k^{-2})e^{\frac{i}{k}}: k=1,2,\ldots\right\}$ $(0<\gamma<1)$ удовлетворяет и условию $(\overline{\mathrm{VII}})$ и условию $(\overline{\mathrm{VI}})$, т.е. условиям теоремы 5.39, но не удовлетворяет условию $(\overline{\mathrm{III}})$.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний.

5.40. Пусть $\lambda\geq1$, $\xi\in\partial D$ и

$$A_\xi=\left\{z\in D: |1-\bar{\xi}z|\leq\lambda(1-|z|)\right\}.$$

Все теоремы параграфов 3,4 и 5, в которых от множества E $(E\subset D)$ **требуется**, чтобы оно удовлетворяло условию $(\overline{\mathrm{III}})$, останутся верными (при этом в некоторых из этих теорем (см. 3.24, 3.26) придется слегка изменить формулировку) и в том случае, если это условие заменить следующим :

существует число $\lambda\geq1$ и конечное множество Ξ точек единичной окружности ∂D такие, что

$$E\subset\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi.$$

5.41. Полученные выше (в § 3 и § 5) результаты об интерполяции в пространствах l_A^p $(1\leq p\leq+\infty)$ будут верны и в том случае, если фигурирующие в них пространства функций заменить, на соответствующие им пространства функций со значениями в некотором фиксированном банаховом пространстве.

§ 6. О нулях в пространствах ℓ^p_A $(p>2)$.

6.1. Пусть $E\subset D$. Очевидно, что для того чтобы оператор S_p отображал ℓ^p_A на некоторое достаточно богатое (например, содержащее характеристические функции конечных подмножеств множества E) банахово пространство функций Y_E необходимо, чтобы множество E не являлось множеством единственности, т.е. чтобы существовала функция $f\in\ell^p_A$ $(f\not\equiv 0)$ такая, что $f(z)=0,\ z\in E$. Однако, обозримое описание множеств единственности для класса ℓ^p_A $(p\in[1,2)\cup(2,+\infty])$, насколько нам известно, не найдено. Очевидно, что конечность суммы $\sum\limits_{z\in E}(1-|z|)$ при $p\in[1,2]$ необходима, а при $p\in[2,+\infty]$ достаточна для того, чтобы множество E не было множеством единственности для класса ℓ^p_A. Ниже следующая теорема 6.3 показывает, что конечность суммы $\sum\limits_{z\in E}(1-|z|)$ не необходима для того, чтобы E не было множеством единственности для класса ℓ^p_A при $p>2$.

6.2. Лемма. Пусть $\varphi\in\ell^1_A$ и $\psi\in\ell^p_A$ $(p\geq 1)$.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число $r=r(\varepsilon,\varphi)$ такое, что для любого $n\geqslant r$

$$\|\varphi\psi_n\|_{\ell^p_A}\leq\|\varphi\|_{\ell^p_A}\|\psi\|_{\ell^p_A}(1+\varepsilon)\qquad(p\geq 1),$$

где $\psi_n(z)=\psi(z^n)$, $z\in D$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Пусть $r=r(\varepsilon,\varphi)$ такое число, что

$$\sum_{K=r}^{\infty} |\hat{\varphi}(K)| < \varepsilon \|\varphi\|_{\ell_A^p} .$$

Введем обозначения : $S_n(z)=\sum_{K=0}^{n-1}\hat{\varphi}(K)z^K$ и

$t_n(z)=\sum_{K=n}^{\infty}\hat{\varphi}(K)z^K$.Тогда для $n\geq r$ имеем

$$\|\varphi\psi_n\|_{\ell_A^p}=\|S_n\psi_n+t_n\psi_n\|_{\ell_A^p}\leqslant\|S_n\psi_n\|_{\ell_A^p}+\|t_n\psi_n\|_{\ell_A^p} .$$

Так как

$$\|S_n\psi_n\|_{\ell_A^p}=\|S_n\|_{\ell_A^p}\cdot\|\psi_n\|_{\ell_A^p}=\|S_n\|_{\ell_A^p}\cdot\|\psi\|_{\ell_A^p}$$

$$\left(\left(\sum_{K=0}^{n-1}\hat{\varphi}(K)z^K\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\hat{\psi}(m)z^{nm}\right)=\sum_{K=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\hat{\varphi}(K)\hat{\psi}(m)z^{nm+K}, \right.$$

$$\left. \|S_n\psi_n\|_{\ell_A^p}=\left(\sum_{K=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}|\hat{\varphi}(K)\hat{\psi}(m)|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|S_n\|_{\ell_A^p}\cdot\|\psi\|_{\ell_A^p} \right),$$

то

$$\|\varphi\psi_n\|_{\ell_A^p}\leqslant\|S_n\|_{\ell_A^p}\cdot\|\psi\|_{\ell_A^p}+\|t_n\|_{\ell_A^1}\cdot\|\psi_n\|_{\ell_A^p}<$$

$$<\|\varphi\|_{\ell_A^p}\cdot\|\psi\|_{\ell_A^p}+\varepsilon\|\varphi\|_{\ell_A^p}\|\psi\|_{\ell_A^p}=\|\varphi\|_{\ell_A^p}\cdot\|\psi\|_{\ell_A^p}(1+\varepsilon).$$

Лемма доказана.

6.3. Теорема. Существует функция $f\not\equiv 0$ и последовательность $\{z_K\}_{K=1}^{\infty}$ $(z_K\in D; z_K\neq z_m, K\neq m)$,удовлетворяющие следующим условиям :

1°. $f \in \bigcap_{p>2} \ell_A^p$,

2°. $f(z_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$,

3°. $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = +\infty$.

Доказательство. Для доказательства теоремы будут нужны следующие очевидные утверждения :

$$x \cdot \exp(-x) < \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \text{ для всех } x \in [0, +\infty) \quad , (1)$$

функция $y = \dfrac{x}{1 - \exp(-x)}$ возрастающая на $(0, +\infty)$. (2)

Пусть

$$g_n(z) = 1 - \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{2}{n}\right)\right)^2}{\left(1 - z\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^2} =$$

$$= 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{2}{n}\right)\right)^2 - \left(1 - \exp\left(-\frac{2}{n}\right)\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\exp\left(-\frac{k}{n}\right) z^k\right),$$

$z \in D$, $n = 1, 2, \ldots$.

Имеем оценки :

$$\left(1 - \exp\left(-\frac{2}{n}\right)\right)^2 (k+1)\exp\left(-\frac{k}{n}\right) < \left(\frac{2}{n}\right)^2 (2k)\exp\left(-\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \frac{8}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right) \exp\left(-\frac{k}{n}\right) < \frac{8}{n} \exp\left(-\frac{k}{2n}\right) \quad (k, n = 1, 2, \ldots),$$

$$\|g_n\|_{\ell_A^p} < \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{n}\right)^p\left(\exp\left(-\frac{p}{2n}\right)\right)^k\right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< \left(1+\left(\frac{8}{n}\right)^p\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{p}{2n}\right)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

применяя (2) при $x=\frac{p}{2n}$ $(n=1,2,\dots)$, получим

$$\|g_n\|_{\ell_A^p} < \left(1+\left(\frac{8}{n}\right)^p\frac{n}{1-\exp\left(-\frac{p}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(1+\frac{\alpha_p}{n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p\geq 1,\ n=1,2,\dots) \qquad (3)$$

где $\alpha_p = \dfrac{8^p}{1-\exp\left(-\frac{p}{2}\right)}$.

Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty$. Построим по индукции последовательность натуральных чисел $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\|f_n\|_{\ell_A^p} \leq \|f_{n-1}\|_{\ell_A^p}\cdot\|g_n\|_{\ell_A^p}(1+\varepsilon_n) \quad (p\geq 1,\ n=1,2,\dots), \qquad (4)$$

где

$$f_0\equiv 1,\quad f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}g_k(z^{\sigma_k}),\quad z\in D\ (n=1,2,\dots).$$

Полагаем $\sigma_1=1$. Пусть построены числа $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}$. Соответствующая им функция $f_{n-1}\in\ell_A^1$. Применив лемму 6.2 к $\varphi=f_{n-1}$, $\psi=g_n$ и $\varepsilon=\varepsilon_n$, найдем σ_n такое, что

$$\|f_n\|_{\ell^p_A} \leqslant \|f_{n-1}\|_{\ell^p_A} \cdot \|g_n\|_{\ell^p_A} \cdot (1+\varepsilon_n).$$

Бесконечное произведение $f(z)=\prod_{k=1}^{\infty} g_k(z^{\sigma_k})$ сходится равномерно в любом круге $|z|\leq\rho<1$. Следовательно, f есть функция, голоморфная в круге D, $f\not\equiv 0$, так что

$$0<f(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\exp\left(-\frac{2}{n}\right)\right)^2\right)<+\infty.$$

Для любого $p>2$ и любого n $(n=1,2,\dots)$, применяя (4) и (3), получим

$$\|f_n\|_{\ell^p_A} \leqslant \|f_{n-1}\|_{\ell^p_A} \cdot \|g_n\|_{\ell^p_A} \cdot (1+\varepsilon_n) \leqslant \dots \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\|g_k\|_{\ell^p_A}(1+\varepsilon_k)\right) < \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha_p}{n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_k) =$$

$$= A_p < +\infty. \quad (5)$$

Из того, что $f_n(z) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(z)$ равномерно во всяком круге $|z|\leq\rho<1$, и из (5) следует:

$$\|f\|_{\ell^p_A} \leqslant A_p < +\infty, \quad p>2.$$

Так как $g\left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=0$ $(n=1,2,\dots)$, то числа

$$z_{n,k}=\exp\left(-\frac{1}{n\sigma_n}+i\frac{2\pi k}{\sigma_n}\right)$$

$(k=0,1,\dots,\sigma_n-1;\ n=1,2,\dots)$ являются нулями функции f.

Рассмотрим сумму

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\sigma_n-1}(1-|z_{n,k}|)=\sum\sigma_n\left(1-\exp\left(\frac{-1}{n\sigma_n}\right)\right);$$

так как $\sigma_n\left(1-\exp\left(-\frac{1}{n\sigma_n}\right)\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, то

$$P=+\infty.$$

Итак, f удовлетворяет условиям теоремы.

Сделаем несколько замечаний по поводу теоремы 6.3..

6.4. Утверждение теоремы перестает быть верным при $f\in l_A^2=H^2$ (см. [1]).

6.5. Пусть $f\in l_A^{\infty}$ $(f\not\equiv 0)$ и $f(z_k)=0$, $|z_k|<1$. $k=1,2,\dots,$ $z_k\neq z_m$ при $k\neq m$. Тогда, так как

$$|f(z)|<\frac{\|f\|_{l_A^{\infty}}}{1-|z|},\quad z\in D,$$

то (см. [29])

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\varepsilon}<+\infty \tag{6}$$

для любого $\varepsilon>0$.

Разумеется, неравенство (6) справедливо для последовательности нулей любой функции класса l_A^p и при $p<+\infty$.

6.6. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ -последовательность чисел $(|z_k|<1;\ z_k\neq z_m,\ k\neq m)$, удовлетворяющая условию (III).

Для того, чтобы существовала функция $f \in \ell^p_A$ $(p>2)$ такая, что $f \not\equiv 0$ и $f(z_k)=0$ $(k=1,2,\dots)$ необходимо и достаточно, чтобы (см. [29])

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) < +\infty .$$

6.7. Пусть f - функция, построенная в теореме 6.3. Рассмотрим замкнутое подпространство I_f в ℓ^p_A $(p>2)$, натянутое на множество функций $\{z^n f : n=0,1,2,\dots\}$ $(z(t)=t, t\in D)$. Это подпространство инвариантно относительно оператора умножения на z. Изучение структуры таких подпространств очень важно для ряда разделов анализа. При $p=2$ все такие подпространства описаны в работе А. Бёрлинга (см. [2]). При $p\neq 2$ исчерпывающего описания нет. Теорема 6.3 опровергает естественную гипотезу, которая состоит в том, что, если I - нетривиальное замкнутое подпространство в ℓ^p_A $(p>2)$, инвариантное относительно умножения на z, то множество $I\cap H^q$ (при $p>2$ $H^q\subset \ell^p_A$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) представляет собою нетривиальное подпространство в H^q, инвариантное относительно умножения на z. Действительно, если $I=I_f$, то $I\cap H^q=\{0\}$. (См. по этому поводу также диссертацию Н.К.Никольского, [30], стр.44).

Г Л А В А П.

ПОВЕДЕНИЕ НОРМ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $C_A(G)$ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ БАНАХА И РУДИНА – КАРЛЕСОНА

§ 1. Предварительные сведения и обозначения.

Приведем некоторые обозначения, которые будем использовать в этой главе и Добавлении II .x)

1.1. $\hat{C}$ - расширенная комплексная плоскость, если $G \subset \hat{C}$, то $\bar{G}$ - замыкание G в плоскости $\hat{C}$ и ∂G - граница G .

1.2. Пусть G - область расширенной комплексной плоскости. Если $\infty \notin G$, то $C_A(G)$ будет обозначать пространство всех функций, регулярных в G и непрерывных в $\bar{G}$, если же $\infty \in G$, то $C_A(G)$ будет обозначать пространство всех функций f, регулярных в G, непрерывных в $\bar{G}$ и таких, что $f(\infty)=0$.

В $C_A(G)$ задается норма

$$\| f \|_{C_A(G)} = \sup_{z \in G} |f(z)| \quad , f \in C_A(G).$$

Когда $G = D$ будем писать вместо $C_A(D)$ просто C_A .

1.3. Пусть G - область расширенной комплексной плоскости. Символ $A(G)$ будет обозначать пространство всех функций, регулярных в G .

1.4. $\mathcal{N}$ - множество всех целых неотрицательных чисел.

---

x) В этой главе мы будем пользоваться также обозначениями, введенными в § 1, гл. I .

1.5. Пусть Γ - спрямляемая Жорданова кривая.

1°. $L^p(\Gamma)$ $(1\le p<+\infty)$ - пространство всех функций, модули которых суммируемы со степенью p на Γ по мере Лебега на кривой Γ.

2°. $M(\Gamma)$ - пространство всех борелевских мер, заданных на борелевской системе подмножеств кривой Γ.

1.6. Пусть G - односвязная область в $\hat{C}$, у которой граница ∂G - замкнутая Жорданова кривая. Обозначим через ω - конформное и однолистное отображение единичного круга D на область G.

Если $\infty\notin G$, то символ $E_p(G)$ $(0<p<+\infty)$ будет обозначать класс всех функций f, регулярных в G и таких, что

$$\sup_{0<\rho<1}\int\limits_{\omega(\partial D_\rho)}|f(z)|^p|dz|<+\infty \qquad (1)$$

$$\left(\partial D_\rho=\{z\in\hat{C}:\ |z|=\rho\}\right),$$

если же $\infty\in G$, то символ $E_p(G)$ $(0<p<+\infty)$ будет обозначать класс всех функций f, регулярных в G, равных нулю в бесконечно удаленной точке и таких, что имеет место неравенство (1).

Определение классов $E_p(G)$ $(0<p<+\infty)$ в многосвязных областях G можно найти, например, в [31]. Свойства классов $E_p(G)$ $(0<p<+\infty)$ изучены в [1], [31].

Заметим, что если $G = D$, то класс $E_p(D)$ $(0<p<+\infty)$ совпадает с классом Харди H^p (определение H^p см. в 1.2, гл. 1).

1.7. Если Γ - замкнутая Жорданова кривая, то внутренность Γ будем обозначать символом $\operatorname{Int}\Gamma$, а внешность Γ - символом $\operatorname{Ext}\Gamma$.

1.8. Теорема ([24], стр. 341). Пусть $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ - система Радемахера и $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty$. Тогда

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_0\left(\int_0^1\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, p\in(0,2), \quad (2)$$

где $K_0=K_0(p)$ зависит только от $p\in(0,2)$.

1.9. Теорема (В.И. Смирнов, [1]). Пусть μ - комплексная борелевская мера на окружности ∂D. Тогда

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\int_{|z|=\rho}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}\right|^s|dz|\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant K_1\int_{\partial D}|d\mu(\zeta)|, s\in(0,1),$$

где $K_1=K_1(s)$ зависит только от $s\in(0,1)$.

1.10. Лемма. Пусть Γ - замкнутая спрямляемая Жорданова кривая и $z=g(s)$ $(s\in[0,s_0])$ - параметрическое представление кривой Γ (s - длина дуги $\gamma=\{g(t): 0\leq t\leq s\}$).

Если функция g имеет непрерывную вторую производную, то существует константа $K_2=K_2(\Gamma,r)\in(0,+\infty)$ такая, что

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\int_{\Gamma_\rho}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\right|^r|dz|\right)^{\frac{1}{r}}\leq K_2\int_{\Gamma}|f(\zeta)||d\zeta|, \qquad (3)$$

$r\in(0,1)$,

для любой функции $f\in L^1(\Gamma)$,

где $\Gamma_\rho=\omega(\partial D_\rho)$, $\partial D_\rho=\{z\in\hat{\mathbb{C}}:|z|=\rho\}$,

ω - конформное и однолистное отображение открытого единичного круга D на область $G=\operatorname{Int}\Gamma$.

Доказательство приведено в Добавлении П, П.1.

Следующая лемма представляет собой незначительное видоизменение одной леммы, принадлежащей С.Б. Стечкину ([17], стр.108).

1.11. Лемма. Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - произвольная последовательность функций, суммируемых по некоторой положительной мере μ на множестве X. Тогда для любого натурального числа n и любого семейства чисел $\{d_k\}_{k=0}^{n}$ существует семейство вещественных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{n}$, по абсолютной величине равных единице $(|\varepsilon_k|=1,\ k=0,1,2,\dots,n)$, такое, что

$$\left(\int_X\left(\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2|\psi_k(x)|^2 d\mu\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\leq K_0\left(\int_X\left|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k d_k\psi_k(x)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (4)$$

$p\in(0,1]$, где $K_0=K_0(p)$ - константа из теоремы 1.8.

Доказательство. Применяя к семейству чисел $c_k=d_k\psi_k(x)$ $(k=0,1,2,\dots n)$ теорему 1.8, получим

$$\left(\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2|\psi_k(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq (K_0)^p \cdot \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{n} d_k\psi_k(x)\varphi_k(t)\right|^p dt \qquad (5)$$

для почти всех $x \in X$ (относительно меры μ).

Из (5) вытекает, что

$$\int_X \left(\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2|\psi_k(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(x) \leq (K_0)^p \int_0^1 \left(\int_X \left|\sum_{k=0}^{n} d_k\psi_k(x)\varphi_k(t)\right|^p d\mu(x)\right) dt. \qquad (6)$$

Из неравенства (6) следует, что существует семейство вещественных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{n}$ $(|\varepsilon_k|=1,\ k=0,1,2,\dots,n)$

такое, что

$$\left(\int_X \left(\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2|\psi_k(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_0 \left(\int_X \left|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k d_k\psi_k(x)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

$0 < p \leq 1$.

Лемма доказана.

§ 2. О нормах некоторых линейных операций в пространстве $C_A(G)$.

2.1. Введем некоторые обозначения :

1°. $d = \{d_k\}_{k\in Q}$ -семейство положительных чисел, $Q \subset \mathcal{N}$;

2°. $Q_n = \{k \in Q : k \leq n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

3°. $l^p(Q_n, d)$ - пространство всех числовых семейств $x = \{x_k\}_{k\in Q_n}$ (x_k - комплексного числа, $k \in Q_n$) с нормой

$$\|x\|_{(p,d)} = \left(\sum_{k\in Q_n} |x_k|^p d_k^2\right)^{\frac{1}{p}} \quad (0 < p < +\infty) \qquad (1)$$

Заметим, что (1) при $p \in (0,1)$ не является нормой в общепринятом смысле слова. Но мы будем пользоваться этим термином и для $p \in (0,1)$, чтобы не вводить нового.

4°. Пусть G - односвязная область в $\hat{C}$, причем $D \subset G$.

Символ $J^p_{n,G}$ будет обозначать линейный оператор из $C_A(G)$ в $l^p(Q_n, d)$, задаваемый равенством :

$$J^p_{n,G} f = \{\hat{f}(k) d_k^{-1}\}_{k \in Q_n}, \tag{2}$$

$$\| J^p_{n,G} \| = \sup_{\|f\|_{C_A(G)} \le 1} \| J^p_{n,G} f \|_{(p,d)} =$$

$$= \sup_{\|f\|_{C_A(G)} \le 1} \Big(\sum_{k \in Q_n} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

2.2. В этом параграфе изучается поведение норм $\| J^p_{n,G} \|$ линейных операторов $J^p_{n,G}$ $(p \in (0,2),\ n \in \mathcal{N})$.

Полученные результаты прилагаются к изучению коэффициентов Маклорена функций, регулярных в $\hat{C} \setminus \{1\}$ и равномерно непрерывных в круге D. Содержание этого параграфа примыкает к работам [14], [15], [16] Р. Пэли, С.Б. Стечкина и В.П. Хавина. Основным результатом этого параграфа является теорема 2.3, которая представляет собой обобщение одной теоремы Р. Пэли из [14].

2.3. Теорема. Пусть G - односвязная область в $\hat{C}$ (см. рис. 1) такая, что $D \subset G$, $G^* = \hat{C} \setminus \bar{G}$ - непустая ограниченная область, граница ∂G области G удовлетворяет условиям леммы 1.10 и $mes\, E > 0$, где $E = \partial D \cap \partial G$ (mes обозначает меру Лебега на окружности ∂D). Тогда

$$K_3 \Big(\sum_{k \in Q_n} d_k^2 \Big)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \le \| J^p_{n,G} \| \le \Big(\sum_{k \in Q_n} d_k^2 \Big)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, \tag{4}$$

$p\in(0,2),\ n\in\mathcal{N}$, где

$$K_3=\begin{cases} B_0K_2^{-1}(\operatorname{mes}E)^2, & \text{если } p\in[1,2),\\ \left(B_0K_2^{-1}(\operatorname{mes}E)^2\right)^{\frac{2}{p}-1}, & \text{если } p\in(0,1),\end{cases}$$

где B_0 - абсолютная константа, а K_2 - из леммы 1.10.

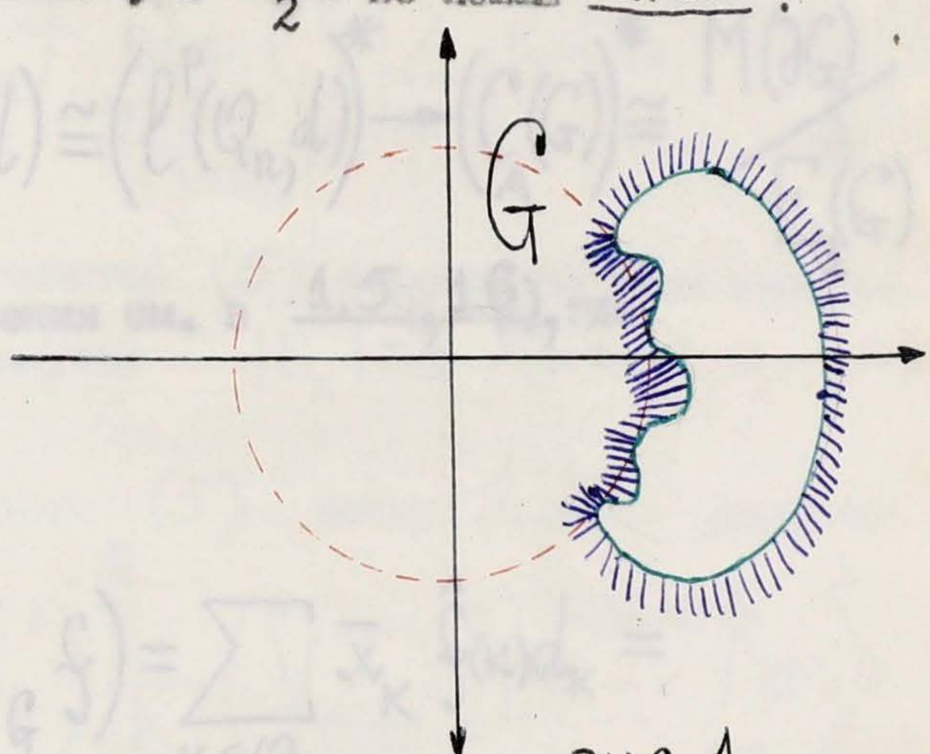

РИС. 1.

Доказательство. Доказательство правой части (4) не представляет особого труда:

$$\|J^p_{n,G}\|_{(p,d)}=\left(\sum_{k\in Q_n}|\hat f(k)|^p d_k^{2-p}\right)^{\frac1p}\le\left(\sum_{k\in Q_n}|\hat f(k)|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{k\in Q_n}d_k^2\right)^{\frac{2-p}{2p}}\le$$

$$\le\left(\sum_{k\in Q_n}d_k^2\right)^{\frac1p-\frac12}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|^2|d\zeta|\right)^{\frac12}\le\left(\sum_{k\in Q_n}d_k^2\right)^{\frac1p-\frac12}\|f\|_{C_A(G)}$$

для любой функции $f \in C_A(G)$.

Докажем левую часть (4). Пусть

$$J^p_{n,G} : C_A(G) \longrightarrow \ell^p(Q_n, d), \quad p \in [1,2),$$

(определение $J^p_{n,G}$ см. в 2.1).

Рассмотрим сопряженный оператор

$$\left(J^p_{n,G}\right)^* : \ell^q(Q_n, d) \cong \left(\ell^p(Q_n, d)\right)^* \to \left(C_A(G)\right)^* \cong M(\partial G) / E_1(G)$$

(соответствующие обозначения см. в 1.5, 1.6), где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Имеем

$$\left(J^{p*}_{n,G} x, f\right) = \left(x, J^p_{n,G} f\right) = \sum_{k \in Q_n} \bar{x}_k \hat{f}(k) d_k =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \left(\sum_{k \in Q_n} \bar{x}_k d_k \zeta^{-(k+1)} + h(\zeta) \right) f(\zeta) d\zeta,$$

$$f \in C_A(G), \quad x = \{x_k\}_{k \in Q_n} \in \ell^q(Q_n, d), \quad h \in E_1(G).$$

Следовательно,

$$\|J^p_{n,G}\| = \|J^{p*}_{n,G}\| = \sup_{\|x\|_{(q,d)} \le 1} \left(\inf_{h \in E_1(G)} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \left| \sum_{k \in Q_n} \bar{x}_k d_k \zeta^{-(k+1)} + h(\zeta) \right| |d\zeta| \right)$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \; p \in [1,2) \right).$$

Воспользуемся леммой 1.10 при $r=\frac{1}{2}$

$$\|J^{p}_{n,G}\| \geq \frac{1}{2\pi K_2} \sup_{\|x\|_{(q,d)}\leq 1} \left(\int_{\partial G} \left| \sum_{k\in Q_n} \bar{x}_k d_k \zeta^{-(k+1)} \right|^{\frac{1}{2}} |d\zeta| \right)^2 .$$

Пусть $x_k = \varepsilon_k \left(\sum_{j\in Q_n} d_j^2 \right)^{-\frac{1}{q}}$,где $|\varepsilon_k|=1,\ k\in Q_n$,

тогда

$$\|J^{p}_{n,G}\| \geq \frac{1}{2\pi K_2} \left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2 \right)^{-\frac{1}{q}} \sup_{\{\varepsilon_k\}_{k\in Q_n}} \left(\int_{\partial G} \left| \sum_{k\in Q_n} \varepsilon_k d_k \zeta^{-(k+1)} \right|^{\frac{1}{2}} |d\zeta| \right)^2, \quad (5)$$

$\sup$ в правой части неравенства (5) берется по всем семействам чисел $\{\varepsilon_k\}_{k\in Q_n}$ таким, что $|\varepsilon_k|=1 \quad (k=0,1,2,\dots,n)$.

Применив к правой части (5) лемму 1.11 ,получим

$$\|J^{p}_{n,G}\| \geq \frac{1}{2\pi K_2} \left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2 \right)^{-\frac{1}{q}} \cdot \frac{1}{K_0} \left(\int_{\partial G} \left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2 |\zeta|^{-2(k+1)} \right)^{\frac{1}{4}} |d\zeta| \right)^2 \geq \quad (6)$$

$$\geq \frac{1}{2\pi K_0 K_2} \left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2 \right)^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{E} \left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2 |\zeta|^{-2(k+1)} \right)^{\frac{1}{4}} |d\zeta| \right)^2,$$

где $E=\partial G\cap\partial D$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Так как $|\zeta|=1$ при $\zeta\in E$, то

$$\|J^{p}_{n,G}\| \geq \frac{(\operatorname{mes} E)^2}{2\pi K_0 K_2} \left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad p\in[1,2),\ n\in\mathcal{N}.$$

Пусть теперь $0<p<1$, тогда

$$\left\| J^1_{n,G} f \right\|_{(1,d)} = \sum_{k\in Q_n} |\hat{f}(k)| d_k = \sum_{k\in Q_n} |\hat{f}(k)|^{\frac{p}{2-p}} d_k \cdot |\hat{f}(k)|^{2\frac{1-p}{2-p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k\in Q_n} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} \right)^{\frac{1}{2-p}} \left(\sum_{k\in Q_n} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1-p}{2-p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| J^p_{n,G} f \right\|_{(p,d)}^{\frac{p}{2-p}} \cdot \|f\|_{C_A(G)}^{2\cdot\frac{1-p}{2-p}}, \quad f \in C_A(G).$$

Следовательно,

$$\left\| J^1_{n,G} \right\| \leqslant \left\| J^p_{n,G} \right\|^{\frac{p}{2-p}} \quad (p\in(0,1),\ n\in\mathcal{N}) \tag{7}$$

Так как $\left\| J^1_{n,G} \right\| \geqslant \frac{(\operatorname{mes} E)^2}{2\pi K_0 K_2} \left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, то

$$\left\| J^p_{n,G} \right\| \geqslant \left(\frac{(\operatorname{mes} E)^2}{2\pi K_0 \cdot K_2} \right)^{\frac{2}{p}-1} \cdot \left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad p\in(0,1), n\in\mathcal{N}.$$

Теорема доказана.

2.4. Следствие. Для любого семейства положительных чисел $d = \{d_k\}_{k\in Q}$, удовлетворяющего условию

$$\sum_{k\in Q} d_k^2 = +\infty$$

существует односвязная в $\hat{\mathbb{C}}$ область G $(\infty \in G)$ (см. рис. 2) такая, что $D \subset G$, $\partial G \cap \partial D = \{1\}$ и

$$\left\| J^p_{n,G} \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad (0<p<2).$$

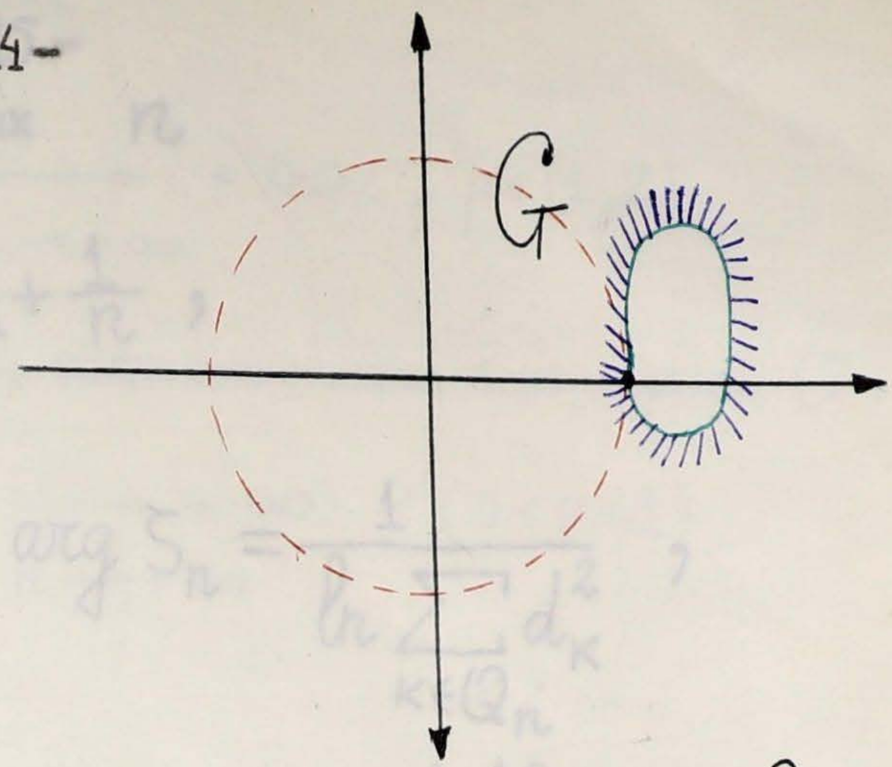

РИС. 2.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим последовательность чисел

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \exp\left(\frac{i}{\ln \sum\limits_{k\in Q_n} d_k^2}\right)\right\}_{n=l_0}^{\infty}$$

(l_0 - таково, что $\sum\limits_{k\in Q_{l_0}} d_k^2 > 1$). Легко видеть, что существует односвязная в $\hat{C}$ область G (см. рис. 2) ($\infty \in G$) , удовлетворяющая условиям

1°. $D \subset G$, $\partial G \cap \partial D = \{1\}$,

2°. существует число $\varepsilon > 0$ такое, что если

$$\zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma_\varepsilon = \partial G \cap \{z \in \hat{C} : |1-z| < \varepsilon\} \text{ и } 0 < t_1 < t_2 \text{ , то}$$

$$\rho_1 < \rho_2 ,$$

где $\zeta_1 = \rho_1 e^{it_1}$, $\zeta_2 = \rho_2 e^{it_2}$ $(t_1, t_2 \in [0, \pi])$, 3°. для достаточно больших n

$$|\zeta_n| \leqslant 1+\frac{1}{n},$$

где $\zeta_n \in \Gamma_\varepsilon$ и $\arg \zeta_n = \dfrac{1}{\ln \sum\limits_{k\in Q_n} d_k^2}$,

4°. $\Gamma=\partial G$ удовлетворяет условиям леммы 1.10.

Обозначим через Γ_n (для достаточно больших n) кривую $\Gamma_\varepsilon \cap \left\{ z\in\hat{\mathbb{C}} : 0<\arg z<\dfrac{1}{\ln \sum\limits_{k\in Q_n} d_k^2}\right\}$. Пусть $p\in[1,2)$, используя неравенство (6), будем иметь

$$\|J^p_{n,G}\| \geqslant \frac{1}{2\pi K_0 K_2}\Big(\sum_{k\in Q_n} d_k^2\Big)^{\frac{1}{p}-1}\cdot\Big(\int_{\partial G}\Big(\sum_{k\in Q_n} d_k^2|\zeta|^{-2(k+1)}\Big)^{\frac{1}{4}}|d\zeta|\Big)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi K_0 K_2}\Big(\sum_{k\in Q_n} d_k^2\Big)^{\frac{1}{p}-1}\Big(\int_{\Gamma_n}\Big(\sum_{k\in Q_n} d_k^2|\zeta|^{-2(k+1)}\Big)^{\frac{1}{4}}|d\zeta|\Big)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi K_0 K_2}\Big(\sum_{k\in Q_n} d_k^2\Big)^{\frac{1}{p}-1}\cdot\frac{1}{3\ln^2\sum\limits_{k\in Q_n} d_k^2}\Big(\sum_{k\in Q_n} d_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

(для достаточно больших n), так как $|\zeta|<1+\frac{1}{n}$,

если $\zeta\in\Gamma_n$. Следовательно,

$$\| J^{p}_{n,G} \| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty, \quad p \in [1,2).$$

Если $p \in (0,1)$ то, воспользовавшись неравенством (7), получим, что

$$\| J^{p}_{n,G} \| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \quad (0<p<1).$$

Следствие доказано.

2.5. Замечание. Теорема будет верна и в том случае, если граница ∂G области G есть просто замкнутая Жорданова кривая (не обязательно гладкая), содержащая дугу окружности ∂D.

Действительно, легко видеть, что можно подобрать область G_0 такую, что $G \subset G_0$ и G_0 удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы. Остается только заметить, что

$$\| J^{p}_{n,G_0} \| \leq \| J^{p}_{n,G} \|, \quad p \in (0,2), \ n = 0,1,2,\dots$$

2.6. Определение. Пусть E - замкнутое подмножество единичной окружности ∂D $(E \neq \partial D)$. Будем обозначать символом $A_C(E)$ - класс всех функций, заданных в $\hat{C}$, регулярных в $\hat{C} \setminus E$, непрерывных в замкнутом круге $\overline{D}$ и равных нулю в ∞.

2.7. Замечание. Пусть G - односвязная в $\hat{C}$ область $(\hat{C} \setminus \overline{G} \neq \emptyset, \ \infty \in G)$ такая, что $\Gamma_\alpha = \{e^{it} : -\alpha < t < \alpha\} \subset \partial G$ при некотором $\alpha \in (0, \pi)$. Тогда

$$\| J^{p}_{n,G} \| = \sup_{\substack{f \in A_C(\{1\}), \\ \|f\|_{C_A(G)} \leq 1}} \Big(\sum_{k \in Q_n} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}_1 = \{f \in C_A(\mathbb{G}) : \|f\|_{C_A(\mathbb{G})} \leq 1\}$.

Так как $A_C(\{1\})$ плотно в $C_A(G)$ (см. Добавление II , II.6), то

$$\overline{\mathcal{D}_1 \cap A_C(\{1\})} = \mathcal{D}_1$$

(замыкание берется в $C_A(G)$).

2.8. 1°. Обозначим через $U(G)$ пространство всех функций f , регулярных в области G $(D \subset G, \hat{C} \setminus \overline{G} \neq \emptyset)$ и имеющих конечную норму

$$\|f\|_{U(G)} = \sup_{z \in G} |f(z)| + \sup_{n \geq 0} \left(\sup_{z \in D} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \right| \right). \quad (8)$$

Очевидно, что $U(G)$ является банаховым пространством.

2°. Символом $U_0(G)$ будем обозначать замыкание в пространстве $U(G)$ всех функций регулярных в $\overline{G}$ .x)

В $U_0(G)$ будем рассматривать ту же норму, что и в $U(G)$. Но в том случае, когда $f \in U_0(G)$ вместо $\|f\|_{U(G)}$ будем писать $\|f\|_{U_0(G)}$. Заметим, что если $f \in U_0(G)$, то f непрерывна в $\overline{G}$ и ее ряд Маклорена равномерно сходится в круге $\overline{D}$.

2.9. Пусть n – натуральное число и $D_{\frac{n+1}{n}} = \{z \in \hat{C} : |z| < 1 + \frac{1}{n}\}$.

Лемма. Существует абсолютная константа $B_1 \in (0, +\infty)$ такая, что для любого натурального числа n и для любой функции

---

x) Функция f регулярна в $\overline{G}$, если существует открытое множество $\widetilde{G}$ такое, что $\overline{G} \subset \widetilde{G}$ и f регулярна в $\widetilde{G}$.

$f \in C_A(D_{\frac{n+1}{n}})$

$$\sup_{m\geq 0}\left(\max_{|z|\leq 1}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\hat{f}(k)z^k\right|\right)\leq B_1 \ln(n+1)\cdot\|f\|_{C_A(D_{\frac{n+1}{n}})}. \quad (9)$$

<u>Доказательство.</u> Пусть n и S - натуральные числа $f\in C_A(D_{\frac{n+1}{n}})$ и $P_{k,m}(z)=\sum_{j=k}^{m}\hat{f}(j)z^j$, $z\in\bar{D}$ $(m,k\in\mathcal{N})$.

Имеем

$$\left(P_{k,m}(z)\right)^S=\sum_{j=kS}^{mS}a_j z^j,$$

, где a_j $(j=kS, kS+1,\ldots,mS)$- коэффициенты многочлена $(P_{k,m})^S$

Далее, если $z\in\bar{D}$, то

$$\left|P_{k,m}(z)\right|^S=\left|\sum_{j=kS}^{mS}a_j\left(1+\frac{1}{n}\right)^j\left(\frac{z}{1+\frac{1}{n}}\right)^j\right|\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\left|\sum_{j=kS}^{mS}a_j\left(1+\frac{1}{n}\right)^j\zeta^j\right|^2|d\zeta|\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\left|\sum_{j=kS}^{mS}\left(\frac{z\bar{\zeta}}{1+\frac{1}{n}}\right)^j\right|^2|d\zeta|\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\left|\sum_{j=k}^{m}\hat{f}(j)\left(1+\frac{1}{n}\right)^j\zeta^j\right|^{2S}|d\zeta|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Итак,

$$\left|\sum_{j=k}^{m}\hat{f}(j)z^j\right|\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\left|\sum_{j=k}^{m}\hat{f}(j)\left(1+\frac{1}{n}\right)^j\zeta^j\right|^{2s}\right)^{\frac{1}{2s}}(n+1)^{\frac{1}{2s}},\qquad(10)$$

$$z\in\overline{D}.$$

Применив к первому сомножителю в правой части неравенства (10) теорему М. Рисса (см. [24], стр.414-416), получим

$$\left|\sum_{j=k}^{m}\hat{f}(j)z^j\right|\leqslant\tilde{B}\cdot s\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\left|f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\zeta\right)\right|^{2s}|d\zeta|\right)^{\frac{1}{2s}}(n+1)^{\frac{1}{2s}}\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{B}\cdot s\left(\max_{|z|=1+\frac{1}{n}}|f(z)|\right)(n+1)^{\frac{1}{2s}}=\tilde{B}\cdot s\cdot(n+1)^{\frac{1}{2s}}\cdot\|f\|_{C_A(D_{\frac{n+1}{n}})},$$

$z\in\overline{D}$, $(k,m\in\mathcal{N})$, $\tilde{B}$ - абсолютная константа $(\tilde{B}\geqslant 2)$. Полагая $s=1+[\ln(n+1)]$ x), получим, что для любого $z\in\overline{D}$ и любых k,m $(k\leqslant m;\ k,m\in\mathcal{N})$:

$$\left|\sum_{j=k}^{m}\hat{f}(j)z^j\right|<2\tilde{B}(\ln(n+1))\exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2(1+[\ln(n+1)])}\right)\cdot\|f\|_{C_A(D_{\frac{n+1}{n}})}<$$

$$<4\tilde{B}(\ln(n+1))\|f\|_{C_A(D_{\frac{n+1}{n}})}.$$

Откуда следует, что

$$\sup_{m\geqslant 0}\left(\max_{|z|\leqslant 1}\left|\sum_{k=m}^{\infty}\hat{f}(k)z^k\right|\right)\leqslant B_1(\ln(n+1))\|f\|_{C_A(D_{\frac{n+1}{n}})},$$

---

x) $[x]$ - целая часть числа x.

$B_1 = 4\tilde{B}$. Лемма доказана.

<u>2.10. Теорема</u> . Пусть $L = \hat{C} \setminus \{z \in \hat{C} : 1 \le |z| \le 1+\varepsilon\} \cap \{z \in \hat{C} : |\arg z| \le \varepsilon\}$

$(0 < \varepsilon < 1)$, $d = \{d_k\}_{k \in Q}$ – семейство положительных чисел $(Q \subset \mathcal{N})$ и $p \in (0,2)$. Тогда существует число $K_4 = K_4(L,p) \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\left\| J^p_{n,L} \right\| \geqslant \frac{K_4}{\ln(n+1)} \left(\sum_{k \in Q_n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{11}$$

где $\left\| J^p_{n,L} \right\| = \sup\limits_{\|f\|_{U_0(L)} \le 1} \left\| J^p_{n,L} f \right\|_{(p,d)}$

(определение $J^p_{n,G}$ см. в <u>2.1</u>)

<u>Доказательство</u>. Пусть $p \in (0,2)$, n – натуральное число $\left(n > \frac{2}{\varepsilon} + 1\right.$, где ε – число, входящее в определение области $\left.L\right)$ и $L_n = L \cup D_{\frac{n+1}{n}}$. Принимая во внимание неравенство (9) , получим

$$\left\| J^p_{n,L} \right\| \geqslant \sup_{\substack{f \in C_A(L_n), \\ \|f\|_{U_0(L)} \le 1}} \left\| J^p_{n,L} f \right\|_{(p,d)} \geqslant \sup_{\|f\|_{C_A(L_n)} \le \frac{1}{(B_1+1)\ln(n+1)}} \left\| J^p_{n,L} f \right\|_{(p,d)} =$$

$$= \frac{1}{(B_1+1)\ln(n+1)} \sup_{\|f\|_{C_A(L_n)} \le 1} \left\| J^p_{n,L} f \right\|_{(p,d)} . \qquad (12)$$

Пусть

$$\tilde{L}_n = \hat{C} \setminus \left\{ z \in \hat{C} : 1 \le |z| \le (1+\varepsilon)\frac{n}{n+1} \right\} \cap \left\{ z \in \hat{C} : |\arg z| \le \varepsilon \right\}$$

$$\left(n > \frac{2}{\varepsilon} + 1\right) \quad \text{и} \quad \tilde{L} = \hat{C} \setminus \left\{ z \in \hat{C} : 1 \le |z| \le 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cap \left\{ z \in \hat{C} : |\arg z| \le \varepsilon \right\} .$$

Заметим, что область $\tilde{L}_n$ получается из области L_n преобразованием подобия с центром в нуле и коэффициентом подобия $\frac{n}{n+1}$ $\left(n > \frac{2}{\varepsilon} + 1\right)$.

Очевидно, что $\tilde{L}_n \subset \tilde{L}$, $n > \frac{2}{\varepsilon} + 1$. Тогда

$$\sup_{\|f\|_{C_A(L_n)} \le 1} \left\| J^p_{n,L} f \right\|_{(p,d)} = \sup_{\|f\|_{C_A(L_n)} \le 1} \left(\sum_{k \in Q_n} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{\|f\|_{C_A(\tilde{L}_n)} \le 1} \left(\sum_{k \in Q_n} |\hat{f}(k)|^p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-kp} d_k^{2-p} \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{3} \sup_{\|f\|_{C_A(\tilde{L})} \le 1} \left(\sum_{k \in Q_n} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{3} \left\| J^p_{n,\tilde{L}} \right\| , \qquad (13)$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon} + 1 .$$

Применяя к (13) теорему 2.3, замечание 2.5 и учитывая (12), получим требуемое неравенство (11) для всех натуральных $n > \frac{2}{\varepsilon} + 1$. Ясно, что за счет уменьшения константы можно добиться, чтобы это неравенство было верно при всех n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема доказана.

2.11. 1°. Пусть $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ — убывающая последовательность банаховых пространств, причем вложение $X_{n+1} \subset X_n$ непрерывно при любом n $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ и в X введена топология при помощи системы полунорм $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$p_n(x) = \|x\|_n, \quad x \in X \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $\|\cdot\|_k$ — норма в X_k. Тогда X есть полное линейное локально выпуклое топологическое (метризуемое) пространство (см. [4], гл. $\overline{XI}$).

X называется проективным пределом последовательности банаховых пространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ / по вложению / и обозначается $X = \lim_n pr X_n$.

2°. Пусть Φ — функционал, заданный на X.

Будем говорить, что Φ полунепрерывен снизу, если для любого ~~xxxxx~~ номера m, для любого элемента $x_0 \in X$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $r = r(m, x_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $\Phi(x_0) < \Phi(x) + \varepsilon$

для любых $x \in X$ и $\|x - x_0\|_m < r$.

3°. Множество $B \subset X$ называется ограниченным, если $\sup\limits_{x \in B} \|x\|_n < +\infty$ для любого n $(n=1,2,\ldots)$.

По поводу приведенных выше понятий см. [4].

2.12. Лемма, [16]. Пусть $X = \lim\limits_{\leftarrow} pr\, X_n$ – проективный предел банаховых пространств X_n $(n=1,2,3,\ldots)$,

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots \supset X_n \supset \cdots,$$

$\|x\|_n \leq \|x\|_{n+1}$, X_{n+1} $(n=1,2,\ldots)$ и Φ – неотрицательный функционал, заданный на X и обладающий свойствами:

1. $\Phi(x+y) \leq \Phi(x) + \Phi(y)$ для любых $x, y \in X$.

2. $\Phi(\lambda x) = |\lambda|^s \Phi(x)$, $x \in X$, λ – произвольное комплексное число, $s > 0$ (s не зависит от x и λ)

3. функционал Φ полунепрерывен снизу на X.

Тогда $\sup\limits_{x \in B} \Phi(x) < +\infty$ для любого ограниченного множества $B \subset X$.

2.13. Теорема. Если $p \in (0,2)$, $\sum\limits_{k \in Q} d_k^2 = +\infty$, где $Q \subset N$ и $d_k > 0$ $(k \in Q)$, то существует функция f, аналитическая в $\hat{C} \setminus \{1\}$, непрерывная в круге $\bar{D}$

и такая, что

$$\sum_{n\in Q} |\hat{f}(n)|^p d_n^{2-p} = +\infty .$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность областей $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$$G_m = \hat{C} \setminus \{z\in\hat{C} : 1\leq|z|\leq 1+\tfrac{1}{m}\} \cap \{z\in\hat{C} : |\arg z|\leq\tfrac{1}{m}\}$$

$$(m=1,2,3,\ldots) .$$

и соответствующую ей последовательность банаховых пространств $\{C_A(G_m)\}_{m=1}^{\infty}$. Ясно, что $C_A(G_{m+1})$ непрерывно вложено в $C_A(G_m)$ $(m=1,2,\ldots)$ и что $C_A(G_{m+1})$ плотно в пространстве $C_A(G_m)$ $(m=1,2,3,\ldots)$. Но тогда проективный предел $\lim\limits_{m} pr\, C_A(G_m)$ последовательности пространств $\{C_A(G_m)\}_{m=1}^{\infty}$ плотен в $C_A(G_m)$ $(m=1,2,\ldots)$ (см. Добавление II, II.6).

Кроме того, очевидно, что $\lim\limits_{m} pr\, C_A(G_m)$ состоит из всех функций, регулярных в $\hat{C}\setminus\{1\}$ $(f(\infty)=0)$ и непрерывных в круге $\overline{D}$. (класс всех таких функций мы обозначали символом $A_C(\{1\})$ (см. 2.6), далее этим символом мы будем также обозначать и проективный предел последовательности пространств $\{C_A(G_m)\}_{m=1}^{\infty}$.

Пусть $p \in [1,2)$. Допустив, что теорема неверна, рассмотрим определенный всюду в $A_C(\{1\})$ функционал

$$\Phi_p(f) = \left(\sum_{k \in Q} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in A_C(\{1\}).$$

Этот функционал полунепрерывен снизу на $A_C(\{1\})$, как точная верхняя граница непрерывных функционалов. Выполнение условий 1 и 2 леммы 2.12 очевидно.

Построим последовательность функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям

(a) $f_m \in A_C(\{1\}), \quad \|f_m\|_{C_A(G_m)} \leq 1 \quad (m=1,2,\dots),$

(b) существует натуральное число n_m такое, что

$$m < \| J^p_{n_m, G_m} f_m \|_{(p,d)} \leq \Phi_p(f_m) \quad (m=1,2,3,\dots).$$

Существование этой последовательности следует из замечания 2.7 и теоремы 2.3. Последовательность $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена в $A_C(\{1\})$, но $\sup_m \Phi_p(f_m) = +\infty$.

Так как это противоречи утверждению леммы 2.12, то в случае $1 \leq p < 2$ теорема доказана.

Если $p \in (0,1)$, то положим

$$\Phi_p(f)=\sum_{k\in Q}|\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p}, \quad f\in A_C(\{1\}).$$

Предположим, что теорема неверна. Условия 2 и 3 леммы 2.12 очевидны. Условие 1 леммы 2.12 легко проверить, если учесть, что

$$(\alpha+\beta)^p\leqslant\alpha^p+\beta^p, \quad \alpha\geq 0, \beta\geq 0, \quad p\in(0,1).$$

Дальнейшее получается так же, как в случае $p\in[1,2)$.

Теорема доказана.

2.14. Теорема. Пусть $\{t_n\}_{n\in Q}$ – семейство положительных чисел $(Q\subset\mathbb{N})$ такое, что $t_n<1$ $(n\in Q)$ и

$$\sum_{n\in Q}t_n^s=+\infty$$

при любом $s\geqslant 1$. Тогда существует функция $f\in A_C(\{1\})$ такая, что

$$\sum_{n\in Q}|\hat{f}(n)|^{2-\varepsilon}t_n^s=+\infty$$

при всех $\varepsilon\in(0,1)$ и $s\geqslant 1$.

Доказательство. Так как $\sum_{k\in Q}t_k^s=+\infty$ при любом $s\geqslant 1$, то существует последовательность натуральных чисел $\{\Gamma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$\Gamma(n)\leqslant\Gamma(n+1)$ $(n=1,2,3,\dots)$, $\Gamma(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ и

$$\sum_{n\in Q}t_n^{\Gamma(n)}=+\infty.$$

Действительно, легко видеть, что существует последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=0}^{\infty}$ $(n_0=1)$ такая, что

$$\sum_{k=n_{m-1}}^{n_m-1} t_k^m \geqslant 1, \quad m=1,2,3,\ldots .$$

Положим $\Gamma(k)=m$, если $n_{m-1}\leqslant k<n_m$, $m=1,2,3,\ldots$.

Пусть

$$d_n=\frac{t^{\Gamma(n)}}{\left(\sum\limits_{k\in Q_n} t_k^{2\Gamma(k)}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (n\in Q\,;\ Q_n=\{k\in Q : k\leqslant n\}).$$

Из одной теоремы Абеля-Дини следует, что

$$\sum_{n\in Q} d_n^2=+\infty \qquad ([32], \text{стр. } 292).$$

Применив теорему 2.13, получим, что существует функция $f\in A_C(\{1\})$ такая, что $\sum\limits_{n\in Q}|\hat{f}(n)|d_n=+\infty$.

Пусть $\varepsilon\in(0,1)$ и $S\geqslant 1$. Тогда, учитывая, что

$$\left(\Gamma(n)-\frac{\sqrt{\Gamma(n)}}{2-\varepsilon}\right)\left(\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\geqslant 2\Gamma(n) \quad \text{при} \quad \Gamma(n)\geqslant\frac{1}{\varepsilon^2} \quad \text{и}$$

$0<t_n<1$ $(n\in Q)$, получим

$$+\infty=\sum_{\substack{n\in Q,\\ \Gamma(n)\geq s^2+\varepsilon^{-2}}}|\hat{f}(n)|d_n=\sum_{\substack{n\in Q,\\ \Gamma(n)\geq s^2+\varepsilon^{-2}}}|\hat{f}(n)|t_n^{\frac{\sqrt{\Gamma(n)}}{2-\varepsilon}}\cdot\frac{t_n^{\Gamma(n)-\frac{\sqrt{\Gamma(n)}}{2-\varepsilon}}}{\left(\sum_{k\in Q_n}t_k^{2\Gamma(k)}\right)^{\frac{1}{2}}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{\substack{n\in Q,\\ \Gamma(n)\geq s^2+\varepsilon^{-2}}}|\hat{f}(n)|^{2-\varepsilon}t_n^{\sqrt{\Gamma(n)}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\cdot\left(\sum_{\substack{n\in Q,\\ \Gamma(n)\geq s^2+\varepsilon^{-2}}}\frac{t_n^{\left(\Gamma(n)-\frac{\sqrt{\Gamma(n)}}{2-\varepsilon}\right)\left(\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}}{\left(\sum_{k\in Q_n}t_k^{2\Gamma(k)}\right)^{\frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}}}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{n\in Q}|\hat{f}(n)|^{2-\varepsilon}t_n^{s}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\left(\sum_{n\in Q}\frac{t_n^{2\Gamma(n)}}{\left(\sum_{k\in Q_n}t_k^{2\Gamma(k)}\right)^{\frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon}}}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Так как $\displaystyle\sum_{n\in Q}\frac{t_n^{2\Gamma(n)}}{\left(\sum_{k\in Q_n}t_k^{2\Gamma(k)}\right)^{1+\alpha}}<+\infty$ при $\alpha>0$

([32], стр.292), то $\displaystyle\sum_{n\in Q}|\hat{f}(n)|^{2-\varepsilon}t_n^{s}=+\infty$.

Теорема доказана.

Теоремы 2.13 и 2.14 являются обобщением некоторых результатов В.П.Хавина, содержащихся в [16].

2.15. Замечание. Все результаты из [17], [18], относящиеся к пространству всех функций, регулярных вне луча $[1,+\infty)$ и непрерывных в круге $\overline{D}$, сохранят силу, если это пространство заменить пространством $A_C(\{1\})$.

2.16. Принимая во внимание следствие 2.4 и рассуждая так же как и при доказательстве теоремы 2.13, легко установить следующее утверждение.

Теорема. Для любого числа $p\in(0,2)$ и любого семейства положительных чисел $d=\{d_n\}_{n\in Q}$ $(Q\subset\mathcal{N})$, удовлетворяющего условию $\sum\limits_{n\in Q} d_n^2=+\infty$, существует односвязная в $\hat{C}$ область G $(\infty\in G)$ и функция f, регулярная в $\hat{C}\setminus\{1\}$ и непрерывная в $\overline{G}$, такие, что

$$(a)\quad D\subset G\ ,\quad \partial G\cap\partial D=\{1\},$$

$$(b)\quad \sum_{n\in Q}|\hat{f}(n)|^p d_n^{2-p}=+\infty .$$

2.17. Лемма. Пусть L - область, определенная в 2.10 и $G_a=\hat{C}\setminus\{a\}$, где a - произвольная точка из области $\hat{C}\setminus\overline{L}$. Тогда множество функций $A(G_a)$ плотно в пространстве $U_0(L)$ (определение $A(G)$ см. в 1.3).

Доказательство приведено в Добавлении II, II.5.

2.18. Теорема. Пусть $d=\{d_k\}_{k\in Q}$ - семейство положительных чисел $(Q\subset\mathcal{N})$ и $p\in(0,2)$. Тогда, если последовательность

$$\left\{\frac{1}{\ln(n+1)}\left(\sum_{k\in Q_n} d_k^2\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

неограничена, то существует функция f, удовлетворяющая условиям:

1^0. f регулярна в $\hat{C}\setminus\{1\}$ и ее ряд Маклорена равномерно сходится в круге $\overline{D}$.

$$2^0 \quad \sum_{k\in Q} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p} = +\infty .$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим последовательность областей $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$G_n = \hat{C}\setminus\left\{z\in\hat{C}: 1\le|z|\le 1+\frac{1}{n}\right\}\cap\left\{z\in\hat{C}: |\arg z|\le\frac{1}{n}\right\}$$

$$(n=1,2,3,\dots)$$

и соответствующую ей последовательность банаховых пространств $\{U_0(G_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Из леммы <u>2.17</u> вытекает, что $U_0(G_{n+1})$ непрерывно вложено в $U_0(G_n)$ $(n=1,2,\dots)$ и что $U_0(G_{n+1})$ плотно в $U_0(G_n)$ $(n=1,2,\dots)$. Пусть $A_U(\{1\}) = \lim_n pr\, U_0(G_n)$. Так как $A_U(\{1\})$ плотно в пространстве $U_0(G_n)$ $(n=1,2,\dots)$ (см. Добавление П, <u>П.6</u>), то

$$\| J_{m,G_n} \| = \sup_{\substack{f\in A_U(\{1\}),\\ \|f\|_{U_0(G_n)}\le 1}} \left(\sum_{k\in Q_m} |\hat{f}(k)|^p d_k^{2-p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p\in(0,2);$$

$$m,n=1,2,3,\dots .$$

Заметим, что, если $f \in A_U(\{1\})$, то функция f регулярна в $\hat{C} \setminus \{1\}$ и ее ряд Маклорена равномерно сходится в круге $\bar{D}$.

Теперь, чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что, рассуждая от противного точно так же, как при доказательстве теоремы 2.13, мы придем к противоречию с утверждением леммы 2.12.

Теорема доказана.

2.19. Следствие. x) Существует функция f такая, что

1° f регулярна в $\hat{C} \setminus \{1\}$ и ее ряд Маклорена равномерно сходится в круге $\bar{D}$,

2°. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^{2-\varepsilon} = +\infty$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$.

Доказательство. Пусть $d_k = \dfrac{\ln^2(k+1)}{\sqrt{k+1}}$ $(k=0,1,2,\ldots)$

и $p=1$.

Тогда
$$\frac{1}{\ln(n+1)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} d_k^2\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^4(k+1)}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

и по теореме 2.18 существует функция f, удовлетворяющая условиям: f регулярна в $\hat{C} \setminus \{1\}$, ее ряд Маклорена равномерно сходится в круге $\bar{D}$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)| \frac{\ln^2(k+1)}{\sqrt{k+1}} = +\infty .$$

---

x) Это утверждение представляет собой обобщение одной известной теоремы Карлемана (см. [33]).

Далее имеем

$$+\infty=\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|\frac{\ln^2(k+1)}{\sqrt{k+1}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^{2-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\ln^2(k+1)}{\sqrt{k+1}}\right)^{\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}, \quad (14)$$

где $\varepsilon\in(0,1)$. Так как $\frac{2-\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}>1$ при любом $\varepsilon\in(0,1)$, то второй сомножитель в правой части неравенства (14) конечен и тем самым

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^{2-\varepsilon}=+\infty$$

для любого $\varepsilon\in(0,1)$. Следствие доказано.

§ 3. Обобщение интерполяционных теорем Банаха и Рудина- Карлесона.

Следуя [34] , введем несколько определений.

<u>3.1. Определение</u>. Пусть $Q \subset \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ - множество всех целых неотрицательных чисел) . Множество Q называется множеством Адамара (или лакунарным), если

$$\inf_{\substack{m, n \in Q,\\ m > n > 0}} \left(\frac{m}{n}\right) > 1$$

<u>3.2. Определение .</u>

(a) Пусть Q - некоторое множество целых чисел. Функция $f \in L^1(\partial D)$ называется Q- функцией, если

$$\hat{f}(n) = 0 \quad \text{для всех} \quad n \notin Q$$

$$\left(\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right).$$

(b) Пусть $0 < r < s < +\infty$. Будем называть множество Q множеством типа (r, s) , если существует конечная постоянная $K_s = K_s(r, s)$ такая, что

$$\|f\|_{L^s} \leq K_s \|f\|_{L^r}$$

для всякой Q - функции $f \in L^r(\partial D)$.

3.3. Теорема (В. Рудин , [34]) . Пусть $0<r<s<t<+\infty$. Тогда Q есть множество типа (r,t) тогда и только тогда, когда Q есть множество типа (s,t).

3.4. Определение. Пусть $s\in(0,+\infty)$. Множество Q называется множеством типа $\Lambda(s)$ (или $Q\in\Lambda(s)$), если Q есть множество типа (r,s) для некоторого $r\in(0,s)$.

3.5. Теорема ([24] ,стр.345) . Если Q есть множество Адамара, то Q есть множество типа $\Lambda(s)$ для любого $s\in(0,+\infty)$.x)

3.6. Теорема ([24] ,стр. 355) . Пусть Q есть подмножество множества целых неотрицательных чисел и

$$\min_{\substack{n,k\in Q\\ n>k}}(n-k)\geqslant\sigma>0. \tag{1}$$

Тогда

$$\sum_{n\in Q}|\hat{f}(n)|^2\leqslant B_2\sigma\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{i\theta})|^2d\theta$$

для любой Q - функции $f\in H^2$,где B_2 - абсолютная константа.

3.7 Лемма. Пусть $Q\subset N$ и m_0 - натуральное число. Тогда, если

$$\min_{\substack{n,k\in Q\\ n>k\geqslant m_0}}(n-k)\geqslant\sigma>0,$$

то существует константа $K_\sigma=K_\sigma(\sigma,m_0)\in(0,+\infty)$ такая, что

---

x) Существуют и другие множества типа $\Lambda(s)$ (см., например, [35], стр.359).

$$\sum_{n\in Q} |\hat{f}(n)|^2 \leq K_\sigma \cdot \int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

для любой Q - функции $f \in H^2$.

Доказательство приведено в Добавлении II, II.3.

3.8. Лемма. Пусть $Q \subseteq \mathcal{N}$ и m_0 - натуральное число. Тогда, если

$$\min_{\substack{n,k\in Q \\ n>k\geq m_0}} (n-k) \geq \sigma > 0$$

и множество Q есть множество типа $\Lambda(S)$ при некотором $S \in (2,+\infty)$, то

$$\left(\sum_{k\in Q} |\hat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{K}_\sigma \left(\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma} |f(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0,2),$$

для любой Q- функции $f \in H^2$, где $\tilde{K}_\sigma = \tilde{K}_\sigma(\sigma, m_0, S, p) \in (0,+\infty)$ зависит только от σ, m_0, S и p.

Доказательство приведено в Добавлении II, II.4.

3.9. Лемма. Пусть банаховы пространства X, Y, Z и операторы J_X, J_Y удовлетворяют условиям :

1° $X \subset Y$, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ для всех $x \in X$

($\|\cdot\|_1$ -норма в X, $\|\cdot\|_2$ -норма в Y), 2°. X всюду плотно в пространстве Y.

3°. J_X – линейный непрерывный оператор, действующий из X на Z (т.е. $J_X(X)=Z$).

J_Y – линейный непрерывный оператор, действующий из Y на Z,

4°. $J_X(x)=J_Y(x)$ для всех $x\in X$.

Тогда замыкание множества $\overset{-1}{J_X}(0)=\{x\in X:\ J_X(x)=0\}$ в пространстве Y совпадает с $\overset{-1}{J_Y}(0)=\{y\in Y:\ J_Y(y)=0\}$.

Доказательство[x]. Пусть X^* обозначает сопряженное пространство к пространству X, а Y^* – сопряженное пространство к пространству Y. Обозначим через $[\overset{-1}{J_X}(0)]^{\perp}_{X^*}$ поляру к $\overset{-1}{J_X}(0)$ в пространстве X^*, через $[\overset{-1}{J_X}(0)]^{\perp}_{Y^*}$ – поляру к $\overset{-1}{J_X}(0)$ в пространстве Y^*, через $[\overset{-1}{J_Y}(0)]^{\perp}_{Y^*}$ – поляру к $\overset{-1}{J_Y}(0)$ в пространстве Y^*.

Легко видеть, что утверждение леммы равносильно следующему:

$$[\overset{-1}{J_X}]^{\perp}_{Y^*}\subset[\overset{-1}{J_Y}(0)]^{\perp}_{Y^*}. \qquad (2)$$

---

x) Приведенное здесь доказательство сообщено мне В.П. Хавиным.

Докажем (2) . Пусть $f \in \left[\overset{-1}{J_X}(0)\right]^{\perp}_{Y^*}$, тогда

$f_{|X} \in \left[\overset{-1}{J_X}(0)\right]^{\perp}_{X^*}$ (где $f_{|X}$ – сужение f на X) и существует функционал $g \in Z^*$ такой, что $f_{|X} = J_X^* g$

(см. [36] , стр. 525) . Докажем, что

$$J_X^* g = (J_Y^* g)_{|X}$$

Действительно, если $x \in X$, то $(J_X^* g)(x) = g(J_X(x)) =$

$= g(J_Y(x)) = (J_Y^* g)(x)$. Следовательно,

$$f_{|X} = (J_Y^* g)_{|X} ,$$

но так как X плотно в Y , значит $f = J_Y^* g$, но тогда

$f \in \left[\overset{-1}{J_Y}(0)\right]^{\perp}_{Y^*}$. Лемма доказана.

3.10. Лемма. Пусть последовательность банаховых пространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям :

1°. $X_{n+1} \subset X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и эти вложения непрерывны.

2°. X_{n+1} всюду плотно в X_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Тогда, если J есть линейный непрерывный оператор, действующий из X_1 на банахово пространство Z и такой, что $J(X_n) = Z$ при всех n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то $J\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) = Z$.

Доказательство. Обозначим через J_n сужение оператора J на пространство X_n $(n=1,2,3,\dots)$. Пусть $z\in Z$, тогда из леммы 3.9 следует, что замыкание множества

$\overset{-1}{J}_{n+1}(z)=\{x\in X_{n+1}: J_{n+1}(x)=z\}$ в пространстве X_n совпадает с $\overset{-1}{J}_n(z)=$

$=\{x\in X_n: J_n(x)=z\}$. Кроме того, $\overset{-1}{J}_{n+1}(z)\subset \overset{-1}{J}_n(z)$ и $\overset{-1}{J}_n(z)$ замкнуто в X_n $(n=1,2,\dots)$. Применяя к последовательности множеств $\{\overset{-1}{J}_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ замечание II.7 из Добавления II, получим, что $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overset{-1}{J}_n(z)\neq\emptyset$. Пусть $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overset{-1}{J}_n(z)$, т.е. $x\in X_n$ и $J_n(x)=z$ $(n=1,2,3,\dots)$. Следовательно, $J(x)=z$.

3.11. Обозначим через $\ell^2(Q)$ $(Q\subset N)$ пространство всех семейств комплексных чисел $x=\{x_k\}_{k\in Q}$, имеющих конечную норму

$$\|x\|_{\ell^2(Q)}=\Big(\sum_{k\in Q}|x_k|^2\Big)^{\frac12}<+\infty .$$

Символом R будем обозначать линейный оператор, заданный на пространстве $A(G)$ $(D\subset G)$ равенством

$$Rf=\{\hat f(k)\}_{k\in Q},\quad f\in A(G)$$

(определение $A(G)$ см. в 1.3.).

3.12. Теорема. Пусть G - односвязная область в $\hat{C}$ такая, что

(a) $D \subset G$,

(b) $G^{*} = \hat{C} \setminus \overline{G}$ = непустая ограниченная область,

(c) граница ∂G области G удовлетворяет условиям леммы 1.10, и

(d) $\Gamma_{\sigma} = \left\{ e^{it} : -\frac{2\pi}{\sigma} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\sigma} \right\} \subset \partial D \cap \partial G$ при некотором $\sigma > 2\pi$.

Тогда, если множество Q $(Q \subset \mathcal{N})$ есть множество типа $\Lambda(s)$ (см. определение 3.4) при некотором $s \in (2, +\infty)$, и существует натуральное число m_0 такое, что

$$\min_{\substack{n, k \in Q \\ n > k \geqslant m_0}} (n-k) \geqslant \sigma ,$$

то

$$R(C_A(G)) = l^2(Q).$$

Доказательство. Рассмотрим сопряженный оператор

$$R^{*} : l^2(Q) \longrightarrow (C_A(G))^{*} \cong M(\partial G) / E_1(G)$$

(соответствующие обозначения см. в §1).

Имеем :

$$(R^{*}x, f) = (x, Rf) = \sum_{k \in Q} \bar{x}_k \hat{f}(k) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\Big(\sum_{k\in Q}\bar{x}_k\,\varsigma^{-(k+1)}+h(\varsigma)\Big)f(\varsigma)\,d\varsigma\,,$$

$f\in C_A(G)$, $h\in E_1(G)$ и $x=\{x_k\}_{k\in Q}$ - семейство комплексных чисел, имеющее лишь конечное число элементов, отличных от нули. (Множество всех таких семейств в дальнейшем будет обозначаться через $\Omega(Q)$).

Далее

$$\|R^*x\|_{C_A^*(G)}=\inf_{h\in E_1(G)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial G}\Big|\sum_{k\in Q}\bar{x}_k\,\varsigma^{-(k+1)}+h(\varsigma)\Big|\,|d\varsigma|\,,$$

$x=\{x_k\}_{k\in Q}\in\Omega(Q)$.

Применяя лемму 1.10 при $r=\frac{1}{2}$, получим

$$\|R^*x\|_{C_A^*(G)}\geqslant\frac{1}{2\pi K_2}\Big(\int\limits_{\partial G}\Big|\sum_{k\in Q}\bar{x}_k\,\varsigma^{-(k+1)}\Big|^{\frac{1}{2}}|d\varsigma|\Big)^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi K_2}\Big(\int\limits_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}\Big|\sum_{k\in Q}\bar{x}\,e^{-i(k+1)t}\Big|^{\frac{1}{2}}dt\,,\ x\in\Omega(Q). \qquad (3)$$

Из (3) и леммы 3.8 вытекает, что

$$\|R^*x\|_{C_A^*(G)}\geqslant\frac{1}{2\pi K_2 K_6}\Big(\sum_{k\in Q}|x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}},\ x\in\Omega(Q).$$

По теореме Банаха ([4] , стр. 433) заключаем, что

$$R(C_A(G))=\ell^2(Q).$$

Теорема доказана.

3.13. Теорема. Пусть множество Q $(Q\subset\mathcal{N})$ есть множество типа $\Lambda(s)$ при некотором $s\in(2,+\infty)$ и

$$\lim_{k\to\infty}(n_{k+1}-n_k)=+\infty, \qquad (4)$$

где $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ -строго возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел, множество значений которой совпадает с Q.

Тогда

$$R(A_C(\{1\}))=l^2(Q)$$

(определение $A_C(\{1\})$ см. в 2.6.).

Доказательство. Рассмотрим последовательность областей $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

1° G_n удовлетворяет условиям теоремы 3.12, причем условие (d) выполняется с $\sigma=2\pi(n+1)$,

2° $G_n\subset G_{n+1}$ $(n=1,2,3,\dots)$,

3° $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=\hat{C}\setminus\{1\}$.

Легко видеть, что $A_C(\{1\})=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_A(G_n)$, $C_A(G_{n+1})$ непрерывно вложено в $C_A(G_n)$ $(n=1,2,3,\dots)$, $C_A(G_{n+1})$ плотно в $C_A(G_n)$ $(n=1,2,3,\dots)$ и $R(C_A(G_n))=l^2(Q)$

$(n=1,2,3,\ldots)$ (последнее следует из теоремы 3.12).
Остается только применить лемму 3.10.
Теорема доказана.

Доказанная теорема является обобщением одной известной интерполяционной теоремы Банаха (см. [13]).

3.14. Теорема. Пусть E – замкнутое множество, лежащее на окружности ∂D, причем $mes\, E = 0$ (mes – мера Лебега на окружности ∂D), пусть Q есть множество типа $\Lambda(s)$ при некотором $s \in (2, +\infty)$ и множество Q удовлетворяет условию (4). Тогда для любой функции ψ, непрерывной на множестве E и для любого семейства $x = \{x_k\}_{k\in Q} \in \ell^2(Q)$ существует функция $f \in A_C(E)$ (определение $A_C(E)$ см. в 2.6) такая, что

$$Sf = \psi \quad \text{и} \quad Rf = x$$

(S – оператор, сопоставляющий каждой функции $f \in C_A(G)$ $(D \subset G)$ ее сужение на множество E, т.е. $(Sf)(z) = f(z),\ z \in E$).

Доказательство. Пусть E – замкнутое подмножество единичной окружности ∂D. Легко видеть, что существует последовательность $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(G_n \subset \hat{C},\ n=1,2,\ldots)$ открытых множеств, удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $D \subset G_n$ для любого n $(n=1,2,3,\ldots)$,

(b) $G_n' = \hat{C} \setminus \bar{G}_n$ – открытое множество, являющееся объединением n попарно непересекающихся ограниченных односвязных областей.

(c) граница ∂G_n области G_n состоит из n невырожденных замкнутых Жордановых кривых, каждая из которых удовлетворяет условиям леммы 1.10, множество $\partial D \cap \partial G_n$ есть объединие n попарно непересекающихся невырожденных замкнутых дуг единичной окружности ∂D, причем $E \subset \partial D \cap \partial G_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$,

(d) $$\hat{C} \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \quad ,$$

(e) $$G_n \subset G_{n+1} \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Рассмотрим пространства $C_A(G_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Ясно, что $C_A(G_{n+1}) \subset C_A(G_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, причем вложение непрерывно, и $A^c(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_A(G_n)$.

На пространстве $C_A(G_1)$ зададим оператор P:

$$Pf = (Rf, Sf) \quad , \quad f \in C_A(G_1).$$

Очевидно, что P есть непрерывный линейный оператор, действующий из $C_A(G_1)$ в $\ell^2(Q) \times C(E)$ x).

Покажем, что если множества Q и E удовлетворяют условиям теоремы, то

$$P_n(C_A(G_n)) = \ell^2(Q) \times C(E) \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

---

x) Пусть X_1 и X_2 - банаховы пространства, тогда символ $X_1 \times X_2$ обозначает прямое произведение банаховых пространств X_1 и X_2, т.е. пространство всех упорядоченных пар (x_1, x_2) $(x_1 \in X_1, x_2 \in X_2)$ с нормой $\|(x_1,x_2)\| = (\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$, где $\|\cdot\|_j$ - норма в X_j $(j=1,2)$.

для любого n $(n=1,2,\dots)$, где P_n - сужение оператора на пространство $C_A(G_n)$ $(n=1,2,\dots)$.

Отметим прежде всего, что

$$R\left(C_A(G_n)\right)=\ell^2(Q) \quad (n=1,2,\dots). \qquad (5)$$

Это вытекает из того, что $C_A(G_n)\supset C_A(\tilde{G}_n)$, где $\tilde{G}_n$ - односвязная область такая, что $\tilde{G}_n\supset G_n$ и $\tilde{G}_n$ удовлетворяет условиям теоремы 3.12 (существование такой области следует из условий (a),(b),(c)).

Пусть P_n^* - оператор сопряженный с оператором P_n :

$$P_n^*:\left(\ell^2(Q)\times C(E)\right)^*\longrightarrow\left(C_A(G_n)\right)^*$$

Известно, что (см. [37])

$$\left(C_A(G_n)\right)^*\cong M(\partial G_n)/E_1(G_n)\;,\quad \overset{*}{C}(E)\cong M(E)$$

(соответствующие обозначения см. в §1).

Применив определение сопряженного оператора и соответствующие теоремы об общем виде функционалов из пространств $\overset{*}{C}(E)$, $\left(\ell^2(Q)\right)^*$ и $\left(C_A(G_n)\right)^*$ получим

$$(P_n\Phi)(f)=\sum_{k\in Q}\bar{x}_k\hat{f}(k)+\int_E Sf\,d\mu \qquad (6)$$

для любой функции $f\in C_A(G_n)$ и для любого элемента

$\Phi=(x,\mu)\in\left(\ell^2(Q)\times M(E)\right)$ такого, что

$x=\{x_k\}_{k\in Q}\in\Omega(Q)$ ($\Omega(Q)$ определено при доказательстве теоремы $\underline{3.12}$) и $\mu \in M(E)$.

Преобразовывая правую часть (6), получим

$$(P_n^*\Phi)(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_n}\Big(\sum_{k\in Q}\bar{x}_k \zeta^{-(k+1)}\Big) f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\partial G_n} f\,d\tilde{\mu},$$

где $\tilde{\mu}$ - мера, равная нулю вне E, а на множестве E, совпадающая с μ, $f \in C_A(G_n)$, $\Phi = (x,\mu)$,

$x \in \Omega(Q)$, $\mu \in M(E)$.

Далее имеем

$$(P_n^*\Phi)(f) = \int_{\partial G_n} f(\zeta)\Big\{\Big(\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\in Q}\bar{x}_k \zeta^{-(k+1)} + h(\zeta)\Big)d\zeta + d\tilde{\mu}\Big\}$$

для любой $h \in E_1(G_n)$.

Учитывая, что $mes\,E = 0$, получим

$$\|P_n^*\Phi\|_{(C_A(G_n))^*} = \inf_{h\in E_1(G_n)} \int_{\partial G_n}\Big|\Big(\frac{1}{2\pi i}\sum \bar{x}_k \zeta^{-(k+1)} + h(\zeta)\Big)d\zeta + d\tilde{\mu}\Big| =$$ x)

---

x) Если ν мера на X, то $\int_X |d\nu|$ обозначает полную вариацию меры ν на множестве X.

$$= \inf_{h\in E_1(G_n)} \int_{\partial G_n} \left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in Q} \bar{x}_k\, \zeta^{-(k+1)} + h(\zeta)\right| |d\zeta| + \int_E |d\mu| =$$

$$= \|R_n^* x\|_{(C_A(G_n))^*} + \|\mu\|_{M(E)}, \qquad (7)$$

$$x = \{x_k\}_{k\in Q} \in \Omega(Q),$$

$\mu\in M(E) \cong C^*(E)$ и R_n^* - оператор сопряженный с сужением оператора R на пространство $C_A(G_n)$.

Из (5) и теоремы Банаха ([4] , стр. 433), следует, что существует константа $v>0$ такая, что

$$\|R_n^* x\|_{(C_A(G_n))^*} \geqslant v\, \|x\|_{\ell^2(Q)} \qquad (8)$$

для всех

$$x\in \ell^2(Q).$$

Сопоставляя (7) и (8), получим

$$\|P_n^*\Phi\|_{(C_A(G_n))^*} \geqslant \min(1, v)\left(\|x\|_{\ell^2(Q)} + \|\mu\|_{M(E)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \min(1,v)\left(\|x\|^2_{\ell^2(Q)}+\|\mu\|^2_{M(E)}\right)^{\frac{1}{2}}=\min(1,v)\,\|\Phi\|_{(\ell^2(Q)\times M(E))} \tag{9}$$

для любого $\Phi=(x,\mu)\,,\ x\in\Omega(Q)\,,\ \mu\in M(E)\,.$

Так как множество элементов Φ, для которых имеет место (9) плотно в $\ell^2(Q)\times M(E)$, то по только что цитированной теореме Банаха будем иметь

$$P_n\left(C_A(G_n)\right)=\ell^2(Q)\times C(E)\qquad (n=1,2,3,\dots).$$

Но $C_A(G_{n+1})$ плотно в пространстве $C_A(G_n)$ $(n=1,2,3,\dots)$, поэтому остается только применить к последовательности пространств $\{C_A(G_n)\}_{n=1}^{\infty}$ лемму 3.10.

Теорема доказана.

Доказанная теорема представляет собой одновременное обобщение инерполяционных теорем Банаха и Рудина- Карлесона.(см. [13]; [2], стр.117).

ДОБАВЛЕНИЕ I.

<u>I.1. Лемма</u>. Пусть E - счетное подмножество единичного круга D. Тогда следующие утверждения равносильны

1°. множество E удовлетворяет условию Карлесона, т.е.

$$\delta = \inf_{\xi\in E} \prod_{z\in E_\xi} \left|\frac{\xi - z}{1-\xi\bar z}\right| > 0 , \qquad (I)$$

где $E_\xi = \{ z\in E : z \neq \xi \}$,

2°. $$\tau = \sup_{\xi\in E} \left(\sum_{z\in E_\xi} \frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{|\xi - z|^2} \right) < +\infty . \qquad (1)$$

<u>Доказательство.</u> Прежде всего заметим, что

$$\left|\frac{1-\xi\bar z}{\xi - z}\right|^2 = 1 + \frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|\xi - z|^2} , \quad \xi\neq z . \qquad (2)$$

Пусть множество E удовлетворяет условию Карлесона. Тогда

$$\sum_{z\in E_\xi} \frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{|\xi - z|^2} \leq \prod_{z\in E_\xi} \left(1 + \frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{|\xi - z|^2}\right) =$$

$$= \prod_{z\in E_\xi} \left|\frac{1-\xi\bar z}{\xi - z}\right|^2 \leq \frac{1}{\delta^2} , \quad \xi \in E .$$

Докажем теперь, что из 2° следует 1°. Учитывая (2) и (1), получим

$$\prod_{z\in E_\xi}\left|\frac{1-\xi\bar z}{\xi-z}\right|^2=\exp\left\{\sum_{z\in E_\xi}\ln\left(1+\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|\xi-z|^2}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\sum_{z\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|\xi-z|^2}\leqslant\exp\tau \qquad (3)$$

для любого $\xi\in E$, лемма доказана.

<u>I.2.</u> <u>Лемма</u> ([11]). Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию Карлесона с константной δ. Тогда

$$\sup_{\xi\in E}\left(\sum_{z\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar z\xi|^2}\right)\leqslant 2\ln\frac{1}{\delta}, \qquad (4)$$

где $E_\xi=\{z\in E: z\neq\xi\}$.

<u>Доказательство.</u> Так как $\left|\dfrac{\xi-z}{1-\xi\bar z}\right|^2=1-\dfrac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\xi\bar z|^2}$

и $a\leqslant-\ln(1-a)$ $(0\leqslant a<1)$, то

$$\sum_{z\in E_\xi}\frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{|1-\xi\bar z|^2}\leqslant-\sum_{z\in E_\xi}\ln\left(1-\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\xi\bar z|^2}\right)=$$

$$=-\ln\prod_{z\in E_\xi}\left|\frac{\xi-z}{1-\bar z\xi}\right|^2\leqslant 2\ln\frac{1}{\delta}$$

для любого $\xi \in E$. Лемма доказана.

I.3. Лемма . Пусть множество $E\ (E \subset D)$ удовлетворяет условию Карлесона с константой $\delta > 0$ и условию (III) с константой $\lambda \geqslant 1$. Тогда

$$1^\circ.\ \sup_{\xi\in E}\left(\sum_{z\in E}\frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{(1-|\xi||z|)^2}\right)\leqslant(1-2\ln\delta)\lambda^2=M_0, \quad (5)$$

$$2^\circ.\ \sup_{\xi\in E}\left(\sum_{\substack{z\in E,\\ |z|\leqslant|\xi|}}\frac{1-|\xi|}{1-|z|}\right)\leqslant M_0, \quad (6)$$

$$3^\circ.\ \sum_{\substack{z\in E,\\ |\xi|\leqslant|z|}}(1-|z|)\leqslant M_0(1-|\xi|),\ \xi\in E, \quad (7)$$

$$4^\circ.\ \sup_{\xi\in E}\left(\sum_{\substack{z\in E,\\ |1-\xi|\leqslant|1-z|}}\frac{|1-\xi|}{|1-z|}\right)\leqslant M_0, \quad (8)$$

$$5^\circ.\ \sum_{\substack{z\in E,\\ |1-z|\leqslant|1-\xi|}}|1-z|\leqslant M_0\cdot|1-\xi|,\ \xi\in E. \quad (9)$$

Доказательство. Так как множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) (см. 3.8, гл. I), то

$$|1-\bar{z}\xi| = |1-\bar{z}+\bar{z}(1-\xi)| \leqslant |1-\bar{z}|+|\bar{z}||1-\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\Big((1-|z|)+|z|(1-|\xi|)\Big) = \lambda(1-|\xi||z|). \qquad (10)$$

Принимая во внимание (10) и (4), получим

$$\sum_{z\in E'} \frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{(1-|\xi||z|)^2} \leqslant \lambda^2 \sum_{z\in E'} \frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\xi\bar{z}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2(1-2\ln\delta) = M_0, \qquad (11)$$

$\xi\in E$. Следовательно, утверждение 1° доказано.

Докажем 2° и 3°. Так как $1 \leqslant \frac{1-|a|^2}{1-|a||b|}$,

когда $|a|\leqslant|b|<1$, то (см. (11))

$$M_0 \geqslant \sum_{\substack{z\in E,\\ |z|\leqslant|\xi|}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|z||\xi|}\right)\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-|z|^2}\right) + \sum_{\substack{z\in E,\\ |\xi|<|z|}} \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-|z||\xi|}\right)\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\xi|^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\substack{z\in E,\\ |z|\leqslant|\xi|}} \frac{(1-|\xi|^2)}{(1-|z|^2)} + \sum_{\substack{z\in E,\\ |\xi|<|z|}} \frac{(1-|z|^2)}{(1-|\xi|^2)} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\substack{z\in E,\\ |z|\leqslant|\xi|}} \frac{1-|\xi|}{1-|z|} + \sum_{\substack{z\in E,\\ |\xi|<|z|}} \frac{1-|z|}{1-|\xi|}, \quad \xi\in E.$$

Тем самым утверждения 2° и 3° доказаны.

Далее, учитывая, что множество E удовлетворяет условию (III), т.е.

$$|\xi| \leqslant 1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi| \quad , \quad \xi \in E,$$

получим

$$\frac{1}{\lambda}|1-\bar{z}\xi| = \frac{1}{\lambda}|1-\xi+\xi(1-\bar{z})| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|1-\xi|+|\xi||1-z|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|1-\xi|+\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)|1-z|\right) =$$

$$= 1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|-\frac{1}{\lambda}|1-z|+\frac{1}{\lambda^2}|1-\xi||1-z|\right) =$$

$$= 1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right) \quad , \quad \xi, z \in E, \tag{12}$$

и

$$1-|\xi|^2 \geqslant 1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^2 \quad , \quad \xi \in E . \tag{13}$$

Из неравенств (4), (12) и (13) следует, что

$$M_0 = \lambda^2(1-2\ln\delta) \geqslant \sum_{z\in E} \frac{\left(1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^2\right)\left(1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)^2\right)}{\left(1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)\right)^2} \tag{14}$$

для любого $\xi \in E$. Очевидно, что (14) влечёт выполнение неравенств (8) и (9) (см. доказательство неравенств (6) и (7)). Лемма доказана.

<u>I. 4.</u> <u>Лемма</u>. Пусть множество E удовлетворяет усло-

вию (III) с константой $\lambda \geq 1$. Тогда для любого $z \in E$ и любого $\zeta \in \partial D$ имеем

$$|1-z\zeta|^2 \leq (1+\lambda^2)\,|1-\zeta\cdot|z||^2, \tag{15}$$

$$|1-\zeta|z||^2 \leq (1+\lambda^2)\,|1-\bar{z}\zeta|^2. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем сначала (15). Пусть $z = re^{i\theta}$, $\zeta = e^{it}$, $0 \leq t < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq r < 1$. Тогда

$$|1-z\zeta|^2 = 1-2r\cos(\theta+t)+r^2 = 1-2r\cos\theta+r^2+$$

$$+2r(\cos\theta-\cos(\theta+t)) = (1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}+$$

$$+2r(\cos\theta-\cos\theta\cos t+\sin\theta\sin t)=$$

$$=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}+4r\cos\theta\sin^2\frac{t}{2}+8r\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\leq$$

$$\leq (1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}+4r\sin^2\frac{t}{2}+8r\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}.$$

Докажем, что

$$(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}+4r\sin^2\frac{t}{2}+8r\sin\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\leq$$

$$\leq (1+\lambda^2)(1-r)^2+(1+\lambda^2)4r\sin^2\frac{t}{2} = (1+\lambda^2)|1-\zeta|z||^2. \tag{17}$$

Неравенство (17) равносильно неравенству

$$4\lambda^2 r\sin^2\frac{t}{2}-8r\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{t}{2}+\lambda^2(1-r)^2-4r\sin^2\frac{\theta}{2}\geq 0. \quad (18)$$

В левой части (18) стоит квадратный трехчлен относительно $\sin\frac{t}{2}$, следовательно, остается показать, что дискриминант этого трехчлена неположителен, т.е.

$$64r^2\sin^2\frac{\theta}{2}-16r\lambda^4(1-r)^2+64r^2\lambda^2\sin^2\frac{\theta}{2}\leq 0,$$

что равносильно

$$|1-z|^2=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}\leq\frac{\lambda^4}{1+\lambda^2}(1-r)^2+(1-r)^2=$$

$$=\frac{\lambda^4+\lambda^2+1}{\lambda^2+1}(1-r)^2=\lambda^2(1-|z|)^2+\frac{1}{1+\lambda^2}(1-|z|)^2.$$

Последнее неравенство верно при любом $z\in E$, в силу условия ($\boxed{III}$). Тем самым (15) доказано.

Если теперь к $z\in E$ и $\frac{|z|}{z}\zeta\in\partial D$ применить неравенство (15), то получим

$$|1-\zeta\cdot|z||^2\leq(1+\lambda^2)|1-\bar z\zeta|^2.$$

Лемма доказана.

<u>I.5.</u> <u>Лемма</u>. Пусть $\mathcal{U}$ - ограниченное счетное множество положительных чисел, что
$$K=\sup_{v\in\mathcal{U}}\left(\sum_{u\in\mathcal{U}}\frac{uv}{u^2+v^2}\right)<+\infty. \quad (19)$$

Тогда

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{ux}{u^2+x^2} \le 2K .$$

<u>Доказательство.</u> Очевидно, что множество $\mathcal{U}$ имеет только одну предельную точку $u=0$. Пусть $\tilde{v}$ обозначает наибольший элемент множества $\mathcal{U}$. Если x – произвольное положительное число, то либо $x>\tilde{v}$, либо существуют два числа v_0 и v_1 $(v_0, v_1 \in \mathcal{U})$ такие, что $v_0 \le x \le v_1$ и $(v_0,v_1)\cap\mathcal{U}=\phi$.

Предположим сначала, что имеет место вторая возможность. Тогда

$$\frac{ux}{u^2+x^2} \le \frac{uv_1}{u^2+v_1^2}, \text{ если } v_1 \le u \ (u\in\mathcal{U}),$$

$$\frac{ux}{u^2+x^2} \le \frac{uv_0}{u^2+v_0^2}, \text{ если } v_0 \ge u \ (u\in\mathcal{U}).$$

Проверить эти неравенства можно, например, так: привести всё к общему знаменателю, затем перенести все в правую часть и разложить на множители.

Далее

$$\sum_{\substack{u\in\mathcal{U},\\ v_1\le u}} \frac{ux}{u^2+x^2} + \sum_{\substack{u\in\mathcal{U},\\ v_0\ge u}} \frac{ux}{u^2+x^2} \le \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{uv_1}{u^2+v_1^2} + \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{uv_0}{u^2+v_0^2} \le 2K.$$

Если же $x>\tilde{v}$, то

$$\frac{ux}{u^2+x^2} \le \frac{u\tilde{v}}{u^2+\tilde{v}^2}, \quad u\in\mathcal{U}.$$

Следовательно,

$$\sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{ux}{u^2+x^2} \leqslant \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{u\tilde{v}}{u^2+\tilde{v}^2} \leqslant K < 2K.$$

Лемма доказана.

I.6. Лемма. Если множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона, то

1°. $$\frac{|1-\zeta^2|(1-|z|^2)}{|1-\zeta\cdot|z||^2} = 4\, ux \big/ u^2+x^2,$$

где $\zeta = e^{it}$, $t\in(-\pi,\pi)$, $x = \left|tg\frac{t}{2}\right|$, $u = \frac{1-|z|}{1+|z|}$;

2°. множество $\mathcal{U} = \left\{u:\ u = \frac{1-|z|}{1+|z|},\ z\in E\right\}$

удовлетворяет условиям леммы I.5, причем

$$K \leqslant \frac{1}{2} M_0$$

где K – из леммы I.5, а M_0 из I.3.

Доказательство. Имеем

$$\frac{|1-\zeta^2|(1-|z|^2)}{|1-\zeta\cdot|z||^2} = \frac{(1-|z|^2)\,2\,|\sin t|}{1-2|z|\cos t+|z|^2} = \frac{4\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)\left|tg\frac{t}{2}\right|}{\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^2+tg^2\frac{t}{2}} =$$

$$= 4\frac{ux}{u^2+x^2},$$

где

$$u=\frac{1-|\tau|}{1+|\tau|}\quad(\tau\in E),\quad x=\left|tg\frac{t}{2}\right|\ (-\pi<t<\pi).$$

Покажем, что множество

$$\mathcal{U}=\left\{u:\ u=\frac{1-|\tau|}{1+|\tau|},\ \tau\in E\right\}$$

удовлетворяет условиям леммы I.5. Если $\xi\in E$, то

$$S=\sum_{\tau\in E}\frac{\left(\frac{1-|\tau|}{1+|\tau|}\right)\left(\frac{1-|\xi|}{1+|\xi|}\right)}{\left(\frac{1-|\tau|}{1+|\tau|}\right)^2+\left(\frac{1-|\xi|}{1+|\xi|}\right)^2}=\sum_{\tau\in E}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\tau|^2)}{(1-|\tau|)^2(1+|\xi|)^2+(1-|\xi|)^2(1+|\tau|)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\tau\in E}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\tau|^2)}{(1-|\xi||\tau|)^2+(|\xi|-|\tau|)^2}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\tau\in E}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\tau|^2)}{(1-|\xi||\tau|)^2}.$$

Остается только применить утверждение 1^0 леммы I.3.

I.7. Лемма. Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда существует константа $M_1\in(0,+\infty)$ такая, что

$$\chi(z)=\sum_{\tau\in E}\frac{(1-|\tau|)|1-z|}{|1-\bar{\tau}z|^2}\leqslant M_1$$

для всех $z\in\partial D$.

Доказательство. Применяя неравенство (16) из леммы I.4 получим

$$\chi(z)\leqslant(1+\lambda^2)\sum_{\tau\in E}\frac{(1-|\tau|)|1-z|}{|1-z\cdot|\tau||^2}.$$

Далее, если $z\in\partial D$ и $|1+z|\leq\frac{1}{2}$, то

$$\chi(z)\leq 2(1+\lambda^2)\sum_{\zeta\in E}\frac{(1-|\zeta|)}{\big|1+|\zeta|-|\zeta|(1+z)\big|^2}\leq$$

$$\leq 2(1+\lambda^2)\sum_{\zeta\in E}\frac{1-|\zeta|}{(1-|1+z|)^2}\leq$$

$$\leq 8(1+\lambda^2)\sum_{\zeta\in E}(1-|\zeta|)\leq 8(1+\lambda^2)M_0 \quad (\text{см.}(7)).$$

Если же $z\in\partial D$ и $|1+z|>\frac{1}{2}$, то

$$\chi(z)\leq 2|1+z|\cdot\chi(z)\leq 2(1+\lambda^2)\sum_{\zeta\in E}\frac{(1-|\zeta|^2)|1-z^2|}{\big|1-z\cdot|\zeta|\big|^2}. \quad (20)$$

Применяя к правой части неравенства (20) лемму I.6 и одновременно используя введенные в нее обозначения, будем иметь

$$\chi(z)\leq 8(1+\lambda^2)\cdot\sum_{u\in\mathcal{U}}\frac{ux}{u^2+x^2}.$$

Используя результаты лемм I.6 и I.5, получим

$$\chi(z)\leq 8(1+\lambda^2)M_0,\quad z\in\partial D,$$

(λ, M_0 - константы из 3.8, гл.I и I.3).

Лемма доказана.

I.8. Лемма. Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда

1°. если h_ξ $(\xi \in E)$ – семейство функций, регулярных и ограниченных в круге D, такое, что $\sup\limits_{\xi\in E}\|h_\xi\|_{H^\infty} < +\infty$, то функция

$$g(z) = \sum_{\xi\in E} h_\xi(z)\frac{(1-|\xi|)(1-z)}{(1-\bar{\xi}z)^2}, \quad z\in D, \qquad (21)$$

регулярна в круге D и

$$\sup_{z\in D}|g(z)| \leqslant M_1 \cdot \sup_{\xi\in E}\|h_\xi\|_{H^\infty}, \qquad (22)$$

где константа M_1 из леммы <u>I.7</u>.

2°. если, кроме того, $\|h_\xi\|_{H^\infty} \xrightarrow[\xi\to 1,\ \xi\in E]{} 0$ и функции h_ξ непрерывны в $\bar{D}\setminus\{1\}$ $(\xi\in E)$, то функция g, задаваемая равенством (21), регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$.

<u>Доказательство.</u> Так как

$$\sum_{\xi\in E}\max_{|z|\leqslant\rho<1}\left|h_\xi(z)\frac{(1-|\xi|)(1-z)}{(1-\bar{\xi}z)^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{(1-\rho)^2}\cdot\left(\sup_{\xi\in E}\|h_\xi\|_{H^\infty}\right)\cdot\sum_{\xi\in E}(1-|\xi|) < +\infty, \qquad (23)$$

$0<\rho<1$,

(конечность последнего сомножителя в правой части неравенства (23) следует из условия Карлесона (см. (4))), то функция g ,задаваемая равенством (21) ,регулярна в круге D . Докажем теперь,что имеет место (22) . Если $0<r<1$,то множество $E\cap\{z\in D:|z|<r\}$ конечно. Применяя принцип максимума модуля, [redacted] [redacted] получим

$$\sup_{z\in D}\left|\sum_{\substack{\xi\in E\\|\xi|<r<1}} h_\xi(z)\frac{(1-|\xi|)(1-z)}{(1-\bar{\xi}z)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant v.\sup_{z\in\partial D}\left|\sum_{\substack{\xi\in E\\|\xi|<r<1}} h_\xi(z)\frac{(1-|\xi|)(1-z)}{(1-\bar{\xi}z)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sup_{\xi\in E}\|h_\xi\|_{H^\infty}\right)\cdot\sup_{z\in\partial D}\left(\sum_{\xi\in E}\frac{(1-|\xi|)|1-z|}{|1-\bar{\xi}z|^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant M_1\cdot\sup_{\xi\in E}\|h_\xi\|_{H^\infty}$$

для любого $r\in(0,1)$. Вместе с (23) это дает

$$\|g\|_{H^\infty}\leqslant M_1\cdot\sup_{\xi\in E}\|h_\xi\|_{H^\infty}.$$

Перейдем к доказательству утверждения 2° . Из условий леммы следует,что при любом $\xi\in E$ функция

$$h_\xi(z)\frac{(1-|\xi|)(1-z)}{(1-\bar{\xi}z)^2}\qquad(z\in\bar{D})$$

непрерывна в $\bar{D}$. Покажем,что семейство этих функций равномерно суммируемо относительно $z\in\bar{D}$.

Пусть $0<r_1<r_2<1$,тогда,используя лемму <u>I.7</u>, будем иметь

$$\max_{z\in\bar D}\left|\sum_{\substack{\xi\in E,\\ r_1\le|\xi|\le r_2}} h_\xi(z)\frac{(1-|\xi|)(1-z)}{(1-\bar\xi z)^2}\right| =$$

$$=\max_{z\in\partial D}\left|\sum_{\substack{\xi\in E,\\ r_1\le|\xi|\le r_2}} h_\xi(z)\frac{(1-|\xi|)(1-z)}{(1-\bar\xi z)^2}\right| \le$$

$$\le\left(\max_{\substack{\xi\in E,\\ r_1\le|\xi|\le r_2}}\|h_\xi\|_{H^\infty}\right)\cdot\sup_{z\in\partial D}\sum_{\xi\in E}\frac{(1-|\xi|)|1-z|}{|1-\bar\xi z|^2}\le$$

$$\le M_1\cdot\max_{\substack{\xi\in E,\\ r_1\le|\xi|\le r_2}}\|h_\xi\|_{H^\infty}\xrightarrow[r_1\to 1]{} 0$$

(M_1 из леммы <u>I.7</u>). Лемма доказана.

<u>I.9.</u> <u>Лемма.</u> Пусть множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана с константой $\gamma\in(0,1)$ и $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$ – последовательность точек множества E ($\{\xi_k\}_{k=0}^\infty\in\Gamma_E$, см. <u>1.7</u>, гл. I), такая, что $|\xi_k|<|\xi_{k+1}|$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Тогда имеют место неравенства

$$\frac{1-|\xi_{k+m}|}{1-|\xi_k|}\le\gamma^m\quad(k,m=0,1,2,\dots),\tag{24}$$

$$\sup_{\xi\in E}\left(\sum_{z\in E}\frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{(1-|\xi||z|)^2}\right)\leqslant\frac{8}{1-\gamma}, \qquad (25)$$

$$\sup_{\xi\in E}\left(\sum_{\substack{z\in E,\\ |z|\leqslant|\xi|}}\frac{1-|\xi|}{1-|z|}\right)\leqslant\frac{8}{1-\gamma}, \qquad (26)$$

$$\sup_{\xi\in E}\left(\sum_{\substack{z\in E,\\ |\xi|\leqslant|z|}}\frac{1-|z|}{1-|\xi|}\right)\leqslant\frac{8}{1-\gamma}. \qquad (27)$$

Доказательство. Докажем сначала (24):

$$\frac{1-|\xi_{k+m}|}{1-|\xi_k|}=\prod_{j=k}^{k+m-1}\frac{1-|\xi_{j+1}|}{1-|\xi_j|}\leqslant\gamma^m \quad (k,m=0,1,2,\dots).$$

Из доказательства леммы I.3 легко усмотреть, что неравенства (26), (27) вытекают из (25), поэтому достаточно установить (в условиях нашей леммы) справедливость утверждения (25).

Имеем

$$\sup_{\xi\in E}\sum_{z\in E}\frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{(1-|\xi||z|)^2}=\sup_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-|\xi_k|^2)(1-|\xi_n|^2)}{(1-|\xi_n||\xi_k|)^2}\leqslant$$

$$\leqslant 4\sup_n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-|\xi_k|)(1-|\xi_n|)}{(1-|\xi_k||\xi_n|)^2}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1-|\xi_k|)(1-|\xi_n|)}{(1-|\xi_n||\xi_k|)^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 4\sup_n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1-|\xi_n|}{1-|\xi_k|}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-|\xi_k|}{1-|\xi_n|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 4 \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n} \gamma^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma^{k-n} \right) \leqslant \frac{8}{1-\gamma} \quad .$$

1.10. Лемма. (Ньюман, [5]). Если множество E удовлетворяет условию Ньюмана с константой γ $(0<\gamma<1)$, то

1°. оно удовлетворяет условию Карлесона с константой

$$\delta \geqslant \exp\left(-\frac{16}{(1-\gamma)^3}\right) , \tag{28}$$

2°. имеет место неравенство

$$\frac{\big||z|-|\xi|\big|}{1-|z||\xi|} \geqslant \frac{1}{2}(1-\gamma) , \quad \xi \neq z, \ \xi, z \in E. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $|z|>|\xi|$, тогда

$$\frac{|z|-|\xi|}{1-|z||\xi|} > \frac{|z|-|\xi|}{1-|\xi|^2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{|z|-|\xi|}{1-|\xi|} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-|z|}{1-|\xi|}\right) \geqslant \frac{1}{2}(1-\gamma) .$$

Следовательно, утверждение 2° доказано. Для доказательства 1° воспользуемся результатами лемм I.1 и I.9. Из (3) вытекает, что

$$\frac{1}{\delta}=\sup_{\xi\in E}\prod_{\zeta\in E_\xi}\left|\frac{1-\xi\bar\zeta}{\xi-\zeta}\right| \leq \exp\frac{\tau}{2},$$

где

$$\tau=\sup_{\xi\in E}\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)}{|\xi-\zeta|^2}$$

Учитывая неравенства (29) и (25), получим

$$\tau\leq\frac{4}{(1-\gamma)^2}\sup_{\xi\in E}\sum_{\zeta\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)}{(1-|\xi||\zeta|)^2}\leq\frac{32}{(1-\gamma)^3}.$$

Итак, $\delta\geq\exp\left(-\frac{16}{(1-\gamma)^3}\right)$. Лемма доказана.

<u>1.11.</u> Лемма, [11]. Если множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию Ньюмана, с константой $\gamma\in(0,1)$, то

$$\sup_{\xi\in E}\sum_{\zeta\in E}\frac{(1-|\xi|)^{\frac12}(1-|\zeta|)^{\frac12}}{1-|\xi||\zeta|}<\frac{4}{1-\gamma}.$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ обозначает последовательность точек множества E $\left(\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\mathcal{J}_E\right.$, см. <u>1.7</u>, гл. I) такая, что $|\xi_k|\leq|\xi_{k+1}|$ $(k=0,1,2,\dots)$. Тогда

$$\sup_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-|\xi_k|)^{\frac12}(1-|\xi_n|)^{\frac12}}{1-|\xi_k||\xi_n|}\leq$$

$$\leqslant \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-|\xi_n|}{1-|\xi_k|} \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1-|\xi_k|}{1-|\xi_n|} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n} \gamma^{\frac{n-k}{2}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma^{\frac{k-n}{2}} \right) <$$

$$< \frac{2}{1-\sqrt{\gamma}} < \frac{4}{1-\gamma} .$$

Лемма доказана.

I.12. Лемма. Пусть множество E удовлетворяет условию Ньюмана с константой $\gamma \in (0,1)$. Тогда

1° $$\sum_{z \in E} (1-|z|)^2 |z|^n \leqslant \frac{2}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

2° $$\sum_{z \in E} (1-|z|)^{\frac{1}{p}} |z|^n \leqslant \frac{3p}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

$1 \leqslant p < +\infty$.

Доказательство. Пусть $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ -последовательность точек множества E $(\{z_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{Y}_E;$ 1.7, гл.I) такая, что

[redacted]

$$|z_k| < |z_{k+1}| \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Так как $\dfrac{1-|z_{k+1}|}{1-|z_k|} \leqslant \gamma$ $(k=0,1,2,\dots)$, то

$$\frac{|z_{k+1}|-|z_k|}{1-|z_k|} = 1 - \frac{1-|z_{k+1}|}{1-|z_k|} \geqslant 1-\gamma > 0, \qquad (30)$$
$$k=0,1,2,\dots .$$

Докажем сначала 1°. Применив (30), получим

$$\sum_{z\in E}(1-|z|)^2|z|^n = \sum_{k=0}^{\infty}(1-|z_k|)^2|z_k|^n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}(1-|z_k|)|z_k|^n(|z_{k+1}|-|z_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\gamma}\int_0^1 y_n(t)\,dt, \quad n=0,1,2,\dots,$$

где

$$y_n(t) = \begin{cases} (1-t)t^n, & t\in\left[0, 1-\frac{1}{n+1}\right] \\ \max\limits_{1-\frac{1}{n+1}\leqslant t\leqslant 1}\{(1-t)t^n\} = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n, & t\in\left(1-\frac{1}{n+1}, 1\right]. \end{cases}$$

Остается только заметить, что

$$\int_0^1 y_n(t)\,dt < \int_0^1 (1-t)t^n\,dt + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{2}{(n+1)^2}.$$

Теперь докажем 2°. Используя (30), будем иметь

$$\sum_{z\in E}(1-|z|)^{\frac{1}{p}}|z|^n=\sum_{k=0}^{\infty}(1-|z_k|)^{\frac{1}{p}}|z_k|^n\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z_k|^n}{(1-|z_k|)^{1-\frac{1}{p}}}(|z_{k+1}|-|z_k|)\leqslant\frac{1}{1-\gamma}\int\frac{t^n\,dt}{(1-t)^{1-\frac{1}{p}}},$$

$p\in[1,+\infty)$, $n=0,1,2,\ldots$.

Оценим полученный интеграл. Проинтегрируем n раз по частям $(n=1,2,\ldots)$

$$\int_0^1 t^n(1-t)^{\frac{1-p}{p}}dt=\frac{-1}{\left(\frac{1}{p}\right)}\int_0^1 t^n\,d(1-t)^{\frac{1}{p}}=\frac{n}{\left(\frac{1}{p}\right)}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\frac{1}{p}}dt=\ldots$$

$$=\frac{n}{\left(\frac{1}{p}\right)}\cdot\frac{(n-1)}{\left(1+\frac{1}{p}\right)}\cdots\frac{2}{\left(n-2+\frac{1}{p}\right)}\cdot\frac{1}{\left(n-1+\frac{1}{p}\right)}\int_0^1(1-t)^{n-1+\frac{1}{p}}dt=$$

$$=p\cdot\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{kp}\right)}=p\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{kp}\right)\right)<$$

$$<p\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{pk}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2p^2}\right)<$$

$$<p\left(\exp\frac{1}{2p^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{1}{\exp\frac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\right)<$$

$$<p\left(\exp\frac{1}{p^2}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}<3p\cdot\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Итак, $$\sum_{z\in E}(1-|z|)^{\frac{1}{p}}|z|^n<\frac{3p}{1-\gamma}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$(n=0,1,2,\dots)$, $p\in[1,+\infty)$. Лемма доказана.

1.13. Лемма . Если множество E $(E\subset D)$ удовлетворяет условию $(\overline{VI})$ (см. 5.6, гл.I), то оно удовлетворяет условию Карлесона.

Доказательство. Так как множество E удовлетворяет условию $(\overline{VI})$, то существуют m попарно непересекающихся множеств $E^{(j)}$ $(j=1,2,\dots m)$, каждое из которых удовлетворяет условию Ньюмана с константой $\gamma\in(0,1)$ и $E=\bigcup_{j=1}^{m}E^{(j)}$.

Кроме того, если множество E удовлетворяет условию $(\overline{VI})$, то

$$\delta_0=\inf_{z,\xi\in E,\ \xi\neq z}\left|\frac{\xi-z}{1-\xi\bar z}\right|>0$$

Учитывая все это, получим

$$\tau=\sup_{\xi\in E}\sum_{z\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|\xi-z|^2}\leq\frac{1}{\delta_0}\sup_{\xi\in E}\sum_{z\in E_\xi}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar z\xi|^2}\leq$$

$$\leq\frac{4}{\delta_0^2}\sup_{\xi\in E}\sum_{z\in E}\frac{(1-|\xi|)(1-|z|)}{(1-|\xi||z|)^2}=$$

$$=\frac{4}{\delta_0^2}\sum_{j=1}^{m}\sup_{\xi\in E}\sum_{z\in E^{(j)}}\frac{(1-|\xi|)(1-|z|)}{(1-|\xi||z|)^2}\leq$$

$$\leq\frac{4}{\delta_0^2}\sum_{j=1}^{m}\sup_{z\in D}\left|\sum_{z\in E^{(j)}}\frac{(1-z)(1-|z|)}{(1-z|z|)^2}\right|.$$

Применив к множеству $\{|z| : z \in E^{(j)}\}$ $(j=1,2,\dots,m)$ лемму I.8, получим, что

$$\tau < +\infty .$$

А это равносильно тому, что множество E удовлетворяет условию Карлесона (лемма I.1) . Лемма доказана.

I.14. Лемма. Пусть множество E удовлетворяет условию (III). Тогда условие (IV) и условие Карлесона равносильны.

Доказательство. Очевидно, что из условия Карлесона всегда вытекает (IV). Покажем, что если множество E удовлетворяет условиям (III) и (IV), то оно удовлетворяет условию Карлесона.

Пусть множество E удовлетворяет условию (III) с константой $\lambda \geq 1$ и условию (IV) с константой $\delta_0 \in (0,1)$, т.е.

$$|1-\xi| \leq \lambda(1-|\xi|) , \quad \xi \in E,$$

и

$$\frac{|\xi - z|}{|1-\xi \bar{z}|} \geq \delta_0 > 0 , \quad \xi \neq z , \quad \xi, z \in E .$$

Если

$$|\xi| - |z| \geq 2\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right| \geq 0 \quad (\xi \neq z, \xi, z \in E), \tag{31}$$

где $\theta = \arg \xi$, $\varphi = \arg z$ $(\theta, \varphi \in [-\pi,\pi))$,

то

$$\frac{1}{\delta_0^2} \geq \frac{|1-\bar{z}\xi|^2}{|\xi - z|^2} \geq \frac{(1-|z||\xi|)^2}{(|\xi|-|z|)^2 + 4|\xi||z|\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{(1-|\xi||z|)^2}{2(|\xi|-|z|)^2} ,$$

следовательно,

$$1-\frac{\delta_0^2}{2}\geqslant 1-\frac{(|\xi|-|z|)^2}{(1-|\xi||z|)^2}=\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)}{(1-|\xi||z|)^2}\geqslant\frac{1-|\xi|^2}{1-|z|^2}\geqslant\frac{1-|\xi|}{1-|z|},\quad (32)$$

при $|\xi|\geqslant|z|$.

Так как множество E удовлетворяет условию $(\underline{III})$ и

$|\Theta|\leqslant\pi \quad (\Theta=\arg\xi\ ,\ \xi\in E)$, то

$$\frac{2}{\pi}|\Theta||\xi|\leqslant 2|\xi|\left|\sin\frac{\Theta}{2}\right|\leqslant|1-\xi|\leqslant\lambda(1-|\xi|),$$

или

$$|\Theta|\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\lambda}{|\xi|}(1-|\xi|)\quad ,\text{ если } |\xi|>0\ ,\ \xi\in E.\quad (33)$$

Пусть $\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E ($\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}\in\gamma_E^1$, см. 1.7, гл. I) такая, что $|\zeta_k|\leqslant|\zeta_{k+1}|$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Если натуральное число $l_0>3\pi\frac{\lambda}{|\zeta_0|\delta_0}$ (не умаляя общности, можно считать, что $|\zeta_0|>0$), то

$$\frac{1-|\zeta_{n+l_0}|}{1-|\zeta_n|}\leqslant 1-\frac{\delta_0^2}{2}\quad (34)$$

для любого n $(n=0,1,2,\dots)$. Предположим, что это не так, т.е. существует целое число m_0 такое, что

$$\frac{1-|\zeta_{m_0+l_0}|}{1-|\zeta_{m_0}|}>1-\frac{\delta_0^2}{2}>\frac{1}{2}.\quad (35)$$

В этом случае, если

$$|\zeta_{m_0}|\leqslant|z|\leqslant|\xi|\leqslant|\zeta_{m_0+l_0}|\quad (\xi,z\in E,\ \xi\neq z),$$

то

$$(|\xi|-|\zeta|)^2<4\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}\qquad(\theta=\arg\xi,\ \varphi=\arg\zeta;\ \theta,\varphi\in[-\pi,\pi]).\qquad(36)$$

Действительно, если (36) не имеет место, то из (31) и (32) вытекает, что

$$\frac{1-|\zeta_{m_0+l_0}|}{1-|\zeta_{m_0}|}\leq\frac{1-|\xi|}{1-|\zeta|}\leq 1-\frac{\delta_0^2}{2}.$$

Учитывая неравенства (36) и (35), будем иметь

$$\frac{1}{\delta_0^2}\geqslant\left|\frac{1-\xi\bar\zeta}{\xi-\zeta}\right|^2\geqslant\frac{(1-|\xi||\zeta|)^2}{(|\xi|-|\zeta|)^2+4|\xi||\zeta|\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(1-|\zeta_{m_0+l_0}|)^2}{8\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}}\geqslant\frac{(1-|\zeta_{m_0+l_0}|)^2}{2(\theta-\varphi)^2}>\frac{1}{8}\frac{(1-|\zeta_{m_0}|)^2}{(\theta-\varphi)^2},$$

следовательно,

$$\frac{\delta_0}{3}(1-|\zeta_{m_0}|)<|\theta-\varphi|\qquad\left(|\zeta_{m_0}|\leq|\zeta|\leq|\xi|\leq|\zeta_{m_0+l_0}|;\ \begin{array}{c}\xi,\zeta\in E,\\ \xi\neq\zeta\end{array}\right)\qquad(37)$$

Из неравенства (33) следует, что

$$|\arg\xi-\arg\zeta|\leq|\arg\xi|+|\arg\zeta|\leq\frac{\pi\lambda}{|\zeta_{m_0}|}(1-|\zeta_{m_0}|)\leq$$

$$\leq\frac{\pi\lambda}{|\zeta_0|}(1-|\zeta_{m_0}|)\qquad(38)$$

$$(|\zeta_{m_0}|\leq|\zeta|\leq|\xi|\leq|\zeta_{m_0+l_0}|;\ \xi,\zeta\in E).$$

Занумеруем в порядке возрастания аргументы всех точек $\xi\in E$ таких, что $|\zeta_{m_0}|\leq|\xi|\leq|\zeta_{m_0+l_0}|$:

$$\min_{\xi\in E,\,|\zeta_{m_0}|\leq|\xi|\leq|\zeta_{m_0+l_0}|}(\arg\xi)=\theta_0\leq\theta_1\leq\dots\leq\theta_{l_0}=\max_{\xi\in E,\,|\zeta_{m_0}|\leq|\xi|\leq|\zeta_{m_0+l_0}|}(\arg\xi).$$

Используя неравенства (38),(37) ,получим

$$\pi\frac{\lambda}{|\zeta_0|}(1-|\zeta_{m_0}|)=\Theta_{\ell_0}-\Theta_0=$$

$$=(\Theta_{\ell_0}-\Theta_{\ell_0-1})+(\Theta_{\ell_0-1}-\Theta_{\ell_0-2})+\dots+(\Theta_1-\Theta_0)>\ell_0\frac{\delta_0}{3}(1-|\zeta_{m_0}|),$$

следовательно, $\ell_0<3\pi\frac{\lambda}{|\zeta_0|\delta_0}$. Но это противоречит выбору числа ℓ_0. Из полученного противоречия заключаем,что имеет место (34). Остается только применить лемму I.13.

Лемма доказана.

I.15. Лемма. Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E ($\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\hat{\gamma}_E$) и множество E удовлетворяет условию (III) и условию Карлесона. Тогда

1°. если последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что

$$|\xi_k|\leqslant|\xi_{k+1}| \quad (k=0,1,2,\dots)$$

,то для любого числа $\gamma_0\in(0,1)$ и натурального $\ell_0>\frac{M_0}{\gamma_0}$ имеем

$$\frac{1-|\xi_{m+\ell_0}|}{1-|\xi_m|}<\gamma_0<1 \quad (m=0,1,2,\dots) \tag{39}$$

(где M_0 - константа из I.3)

и

$$\frac{|\xi_{m+\ell_0}|-|\xi_m|}{1-|\xi_m||\xi_{m+\ell_0}|}\geqslant\frac{1}{2}(1-\gamma_0) \quad (m=0,1,2,\dots), \tag{40}$$

2°. если же последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что

$$|1-\xi_{k+1}| \leq |1-\xi_k|$$

$(k=0,1,2,\ldots)$, то для любого числа $\gamma_0 \in (0,1)$ и натурального $\ell_0 > \frac{M_0}{\gamma_0}$ имеем

$$\frac{|1-\xi_{m+\ell_0}|}{|1-\xi_m|} < \gamma_0 < 1 \quad (m=0,1,2,\ldots) \quad (41)$$

и

$$\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{|1-\xi_m|-|1-\xi_{m+\ell_0}|}{1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_m|\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi_{m+\ell_0}|\right)} \geq \frac{1}{2}(1-\gamma_0) \quad (42)$$

$(m=0,1,2,\ldots)$.

<u>Доказательство</u>. Докажем сначала утверждение 1^0.

Предположим, что существуют целые числа ℓ_0, $m_0 \geq 0$ и число $\gamma_0 \in (0,1)$ такие, что

$$\ell_0 > \frac{M_0}{\gamma_0} \quad \text{и} \quad \frac{1-|\xi_{m_0+\ell_0}|}{1-|\xi_{m_0}|} \geq \gamma_0$$

Тогда, используя утверждение 3^0 леммы <u>I.3</u>, получим, что

$$M_0(1-|\xi_{m_0}|) \geq \sum_{k=0}^{\infty}(1-|\xi_{k+m_0}|) \geq \sum_{k=0}^{\ell_0}(1-|\xi_{k+m_0}|) \geq$$

$$\geq (\ell_0+1)(1-|\xi_{m_0+\ell_0}|) \geq (\ell_0+1)\gamma_0(1-|\xi_{m_0}|),$$

следовательно, $\frac{M_0}{\gamma_0} \geq \ell_0+1$. Полученное противоречие показывает, что имеет место (39).

Применив неравенство (39) ,будем иметь

$$\frac{|\xi_{m+l_0}|-|\xi_m|}{1-|\xi_m||\xi_{m+l_0}|} \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{|\xi_{m+l_0}|-|\xi_m|}{1-|\xi_m|} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1-|\xi_{m+l_0}|}{1-|\xi_m|}\right) \geqslant \frac{1}{2}(1-\gamma_0)\,, \quad l_0 > \frac{M_0}{\gamma_0}\,,$$
$$m=0,1,2,\ldots\ .$$

Утверждение 2° доказывается точно так же, как утверждение 1° .

Лемма доказана.

<u>I.16.</u> <u>Лемма</u> . Пусть множество $E\ (E\subset D)$ удовлетворяет условию (III) с константой $\lambda\geqslant 1$ и условию

$$\gamma_0 = \sup_{\substack{z,\xi\in E,\\ |1-z|\leqslant|1-\xi|,\ z\neq\xi}} \left|\frac{1-z}{1-\xi}\right| < 1\,. \qquad (43)$$

Тогда имеет место неравенство

$$\left|\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^n - z^n\right| \leqslant \frac{2\lambda}{1-\gamma_0}\left|\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^n-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)^n\right|$$

для всех $z,\xi\in E,\ z\neq\xi$ и всех $n\ (n=0,1,2,\ldots)$.

<u>Доказательство.</u> Прежде всего заметим,что множество

$$\tilde{E}=\left\{\tilde{\xi}:\ \tilde{\xi}=1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\,,\ \xi\in E\right\}$$

удовлетворяет условию Ньюмана с константой $\gamma_0\in(0,1)$,и поэтому (см. (29))

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_0)\leqslant\frac{|\tilde{\xi}-\tilde{z}|}{1-\tilde{\xi}\tilde{z}}=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\big||1-\xi|-|1-z|\big|}{1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)},\qquad(44)$$

$$z,\xi\in E,\quad z\neq\xi .$$

Так как множество E удовлетворяет условию (III) с константой $\lambda\geqslant 1$, то

$$\left|1-z\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)\right|=\left|1-z+\frac{z}{\lambda}|1-\xi|\right|\leqslant$$

$$\leqslant|1-z|+|z|\,|1-\xi|\leqslant|1-z|+\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)|1-\xi|=$$

$$=\lambda\left(1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)\right),\quad \xi,z\in E.\qquad(45)$$

Применив (45) и (44), получим

$$\left|z^n-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^n\right|=\left|z-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)\right|\left|\sum_{k=1}^{n}z^{k-1}\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^{n-k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|1-z\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)\right|\cdot\sum_{k=1}^{n}|z|^{k-1}\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\lambda\left(1-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\lambda}{1-\gamma_0}\left|\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)\right|\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^{n-k}\leqslant$$

$$=\frac{2\lambda}{1-\gamma_0}\left|\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-\xi|\right)^n-\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)^n\right|\quad(n=0,1,2,\dots),$$

$$\xi,z\in E,\ \xi\neq z .$$

Лемма доказана.

I.17. Лемма. Пусть $W(z)=1-\sqrt{1-z}$, $z\in\bar{D}$.

Тогда $W(\bar{D})\subset\bar{D}$ и $W(\bar{D})$ удовлетворяют условию (III) с $\lambda=2+\sqrt{2}$.

Доказательство. Пусть $z\in\bar{D}$, тогда

$$|1-z|^2-2\cos(\arg(1-z))+1=|z|^2\leq 1$$

, т.е.

$$|1-z|\leqslant 2\cos(\arg(1-z)) \quad (z\in\bar{D}\setminus\{1\}). \tag{46}$$

Далее

$$|W(z)|^2=|1-W(z)|^2-2|1-W(z)|\cos(\arg(1-W(z)))+1 . \tag{47}$$

Так как $|1-W(z)|^2=|1-z|$ $(z\in\bar{D})$ и

$$\arg(1-z)=2\arg(1-W(z)) \quad (z\in\bar{D}\setminus\{1\})$$

то, применяя к (47) неравенство (46), получим

$$|W(z)|^2\leqslant|1-W(z)|\sqrt{2\cos 2\alpha}-2|1-W(z)|\cos\alpha+1, \tag{48}$$

где $\alpha=\arg(1-W(z))$ $(|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{4})$.

Из (48) вытекает, что

$$1-|w(z)|^2 \geqslant \sqrt{2}\,|1-w(z)|\left(\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{\cos 2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,|1-w(z)|}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{\cos 2\alpha}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}|1-w(z)| \geqslant 0.$$

Итак,

$$|1-w(z)| \leqslant (2+\sqrt{2})(1-|w(z)|), \quad z\in\bar{D}. \qquad (49)$$

Лемма доказана.

I.18. Лемма. Пусть E – счетное подмножество множества $\bar{D}\setminus\{1\}$. Для того, чтобы множество $w(E)$ удовлетворяло условию Карлесона, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\substack{\xi,z\in E,\\ z\neq\xi}} \frac{|1-\xi|+|1-z|}{|\xi-z|^2}\sqrt{|1-\xi||1-z|} < +\infty. \qquad (\mathrm{V})$$

Доказательство. Так как $w(z)=1-\sqrt{1-z}$, $z\in\bar{D}$, то

$$|1-w(z)|\, e^{i\arg(1-w(z))} = |1-z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg(1-z)}{2}}, \quad z\in\bar{D}, \qquad (50)$$

причем $|\arg(1-z)|\leq\frac{\pi}{2}$ $\quad (z\in\bar{D}\setminus\{1\})$.

Имеем

$$|w(\xi)-w(z)|^2 = |1-w(\xi)|^2 + |1-w(z)|^2 - 2|1-w(\xi)||1-w(z)|\cos(\theta-\varphi),$$

где $\Theta=\arg(1-w(\xi)),\ \varphi=\arg(1-w(z))$

$(\xi, z\in \bar{D}\setminus\{1\}\ ,\ \Theta,\varphi\in[-\pi,\pi])$

Учитывая (50), получим

$$|w(\xi)-w(z)|^2=|1-\xi|+|1-z|-2|1-\xi|^{\frac{1}{2}}|1-z|^{\frac{1}{2}}\cos(\Theta-\varphi)=$$

$$=\frac{(|1-\xi|+|1-z|)^2-4|1-\xi||1-z|\cos^2(\Theta-\varphi)}{|1-\xi|+|1-z|+2|1-\xi|^{\frac{1}{2}}|1-z|^{\frac{1}{2}}\cos(\Theta-\varphi)}, \quad (51)$$

далее

$$|\xi-z|^2=|1-\xi|^2+|1-z|^2-2|1-z||1-\xi|\cos 2(\Theta-\varphi)=$$

$$=|1-\xi|^2+|1-z|^2+2|1-\xi||1-z|-4|1-\xi||1-z|\cos^2(\Theta-\varphi)=$$

$$=(|1-\xi|+|1-z|)^2-4|1-\xi||1-z|\cos^2(\Theta-\varphi). \quad (52)$$

Из (51) и (52) следует, что

$$|w(\xi)-w(z)|^2=\frac{|\xi-z|^2}{|1-\xi|+|1-z|+2|1-\xi|^{\frac{1}{2}}|1-z|^{\frac{1}{2}}\cos(\Theta-\varphi)}$$

и

$$0\leq 2|1-\xi|^{\frac{1}{2}}|1-z|^{\frac{1}{2}}\cos(\Theta-\varphi)=\left((|1-\xi|+|1-z|)^2-|\xi-z|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq|1-\xi|+|1-z|,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{|\xi-z|^2}{|1-\xi|+|1-z|}\leq|w(\xi)-w(z)|^2\leq\frac{|\xi-z|^2}{|1-\xi|+|1-z|} \tag{53}$$

$(\xi, z\in\bar{D}\setminus\{1\})$.

Оценим теперь $1-|w(\xi)|^2 \quad (\xi\in\bar{D}\setminus\{1\})$.

Имеем

$$|w(\xi)|^2=|1-w(\xi)|^2+1-2|1-w(\xi)|\cos\Theta=$$

$$=|1-\xi|+1-2|1-\xi|^{\frac{1}{2}}\cos\Theta=1+\frac{|1-\xi|^2-4|1-\xi|\cos^2\Theta}{|1-\xi|+2|1-\xi|^{\frac{1}{2}}\cos\Theta}, \tag{54}$$

где $\Theta=\arg(1-w(\xi))$, $|\Theta|\leq\frac{\pi}{4}$,

$$|\xi|^2=|1-\xi|^2+1-2|1-\xi|\cos2\Theta=|1-\xi|^2+1+2|1-\xi|-4|1-\xi|\cos^2\Theta. \tag{55}$$

Из (54) и (55) следует, что

$$1-|w(\xi)|^2=\frac{1-|\xi|^2+2|1-\xi|}{|1-\xi|+2|1-\xi|^{1/2}\cos\Theta}$$

и

$$2|1-\xi|^{\frac{1}{2}}\cos\Theta=\left(1-|\xi|^2+|1-\xi|^2+2|1-\xi|\right)^{1/2},$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}|1-\xi|^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2|1-\xi|}{\sqrt{2|1-\xi|}+\sqrt{6|1-\xi|}} \leqslant 1-|w(\xi)|^2, \qquad (56)$$
$$\xi \in \bar{D} \setminus \{1\}.$$

Применяя неравенства (53) и (56), получим

$$\frac{1}{4}\,\frac{|1-\xi|+|1-z|}{|\xi-z|^2}\sqrt{|1-\xi||1-z|} \leqslant \frac{(1-|w(\xi)|^2)(1-|w(z)|^2)}{|w(\xi)-w(z)|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4|1-w(\xi)||1-w(z)|}{|w(\xi)-w(z)|^2} \leqslant 8\,\frac{|1-\xi|+|1-z|}{|\xi-z|^2}\sqrt{|1-\xi||1-z|}, \qquad (57)$$
$$\xi, z \in \bar{D} \setminus \{1\}, \ \xi \neq z.$$

Так как множество $w(E)$ $(E \subset \bar{D})$ удовлетворяет условию (III) (лемма I.17), то для того чтобы множество $w(E)$ удовлетворяло условию Карлесона, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\delta_0} = \sup_{\substack{\xi, z \in E,\\ \xi \neq z}} \left| \frac{1-w(\xi)\overline{w(z)}}{w(\xi)-w(z)} \right| < +\infty \qquad (58)$$

(см. лемму I.14).

Но условие (58) равносильно следующему условию

$$\sup_{\substack{\xi, z \in E,\\ \xi \neq z}} \frac{(1-|w(\xi)|^2)(1-|w(z)|^2)}{|w(\xi)-w(z)|^2} < +\infty, \qquad (59)$$

в силу того, что

$$\frac{|1-a\bar{b}|^2}{|a-b|^2} = 1 + \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|a-b|^2}, \quad a \neq b.$$

Итак, из (57), (58) и (59) вытекает, что для того чтобы множество $w(E)$ удовлетворяло условию Карлесона, необходимо и достаточно, чтобы множество E удовлетворяло условию $(\underline{V})$.

Лемма доказана.

<u>I.19.</u> <u>Следствие.</u> Пусть множество E $(E\subset \bar{D}\setminus\{1\})$ удовлетворяет условию

$$\gamma_1 = \sup_{\substack{z,\xi\in E,\\ z\neq\xi,\ |1-z|\leq|1-\xi|}} \left|\frac{1-z}{1-\xi}\right| < 1 . \tag{60}$$

Тогда множество E удовлетворяет условию $(\underline{V})$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $z,\xi\in E$, $z\neq\xi$ и $|1-z|\leq|1-\xi|$, тогда

$$\frac{|1-\xi|+|1-z|}{|\xi-z|^2}\sqrt{|1-\xi||1-z|}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{|1-\xi|+|1-z|}{|\xi-z|}\right)^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{|1-\xi|+|1-z|}{|1-\xi|-|1-z|}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{|1-z|}{|1-\xi|}}{1-\frac{|1-z|}{|1-\xi|}}\right)^2\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}\right)^2.$$

<u>I.20.</u> Лемма. Обозначим символами α_n, w, β, ω_n функции, задаваемые равенствами

$$\alpha_n(z)=\frac{1}{n\left(\frac{n+1}{n}-z\right)}\ ,\quad z\in\hat{C}\setminus\left\{1+\frac{1}{n}\right\},$$

($\hat{C}$ – расширенная комплексная плоскость , $n\geq 1$),

$$w(z)=1-\sqrt{1-z}\ ,\quad z\in\hat{C}\setminus(1,+\infty),$$

$$\beta(z)=\frac{z}{2-z}\ ,\quad z\in\hat{C}\setminus\{2\},$$

$$\omega_n(z)=\beta(w(\alpha_n(z)))\ ,\quad z\in\hat{C}\setminus\left(1,1+\frac{1}{n}\right),$$

$n\geqslant 1$.

Следующие утверждения равносильны:

1°. множество $\omega_n(E)$ $(E\subset\bar{D}\setminus\{1\})$ удовлетворяет условию Карлесона.

2°. множество E удовлетворяет условию $(\underline{V})$.

<u>Доказательство</u>. Заметим, что если $z\in\bar{D}$, то

$$\left.\begin{aligned}&|\beta(z)|=\frac{|z|}{|2-z|}\leqslant\frac{|z|}{2-|z|}\leqslant|z|\ ,\\ &|\alpha_n(z)|=\frac{1}{n\left|1+\frac{1}{n}-z\right|}\leqslant 1\ .\end{aligned}\right\}\qquad(61)$$

Далее, легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{9n}|a-b|\leqslant|\alpha_n(a)-\alpha_n(b)|\leqslant n|a-b|\quad(a,b\in\bar{D}),\\ &\frac{2}{9}|a-b|\leqslant|\beta(a)-\beta(b)|\leqslant 2|a-b|\quad(a,b\in\bar{D}),\\ &\frac{1}{3}|1-a|\leqslant|1-\alpha_n(a)|\leqslant n|1-a|\quad(a\in\bar{D}),\\ &|1-\beta(a)|\leqslant 2|1-a|\quad(a\in\bar{D}),\\ &1-|a|^2\leqslant 1-|\beta(a)|^2\leqslant 4|1-a|\quad(a\in\bar{D}).\end{aligned}\right\}\qquad(62)$$

Пусть $\xi, \zeta \in \bar{D} \setminus \{1\}$, $\xi \neq \zeta$ и $a = \alpha_n(\xi)$, $b = \alpha_n(\zeta)$, $\tilde{a} = w(a)$, $\tilde{b} = w(b)$. Принимая во внимание неравенства (61), (62), (57), будем иметь

$$\frac{(1-|\omega_n(\xi)|^2)(1-|\omega_n(\zeta)|^2)}{|\omega_n(\xi)-\omega_n(\zeta)|^2} = \frac{(1-|\beta(\tilde{a})|^2)(1-|\beta(\tilde{b})|^2)}{|\beta(\tilde{a})-\beta(\tilde{b})|^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\frac{(1-|\tilde{a}|^2)(1-|\tilde{b}|^2)}{|\tilde{a}-\tilde{b}|^2} = \frac{1}{4}\frac{(1-|w(a)|^2)(1-|w(b)|^2)}{|w(a)-w(b)|^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4^2}\frac{|1-a|+|1-b|}{|a-b|^2}\sqrt{|1-a||1-b|} =$$

$$= \frac{1}{4^2}\frac{|1-\alpha_n(\xi)|+|1-\alpha_n(\zeta)|}{|\alpha_n(\xi)-\alpha_n(\zeta)|^2}\sqrt{|1-\alpha_n(\xi)||1-\alpha_n(\zeta)|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4^2 \cdot 3^2 n^2}\cdot\frac{|1-\xi|+|1-\zeta|}{|\xi-\zeta|^2}\sqrt{|1-\xi||1-\zeta|}$$

и, рассуждая аналогичным образом, получим

$$\frac{(1-|\omega_n(\xi)|^2)(1-|\omega_n(\zeta)|^2)}{|\omega_n(\xi)-\omega_n(\zeta)|^2} \leqslant 8(9n)^4 \frac{|1-\xi|+|1-\zeta|}{|\xi-\zeta|^2}\sqrt{|1-\xi||1-\zeta|}.$$

Легко видеть, что (см. (61), (62) и лемму I.17)

$$|1-\omega_n(\xi)| = |1-\beta(\tilde{a})| \leqslant 2|1-\tilde{a}| = 2|1-w(a)| \leqslant$$

$$\leqslant 2(2+\sqrt{2})(1-|w(a)|) = 2(2+\sqrt{2})(1-|\tilde{a}|) \leqslant 2(2+\sqrt{2})(1-|\beta(\tilde{a})|) =$$

$$= 2(2+\sqrt{2})(1-|\omega_n(\xi)|)$$

$(\xi \in \bar{D},\ a = \alpha_n(\xi),\ \tilde{a} = w(a))$, т.е. множество $\omega_n(E)$ удовлетворяет условию (III).

Остается только, как и при доказательстве леммы I.18 применить лемму I.14.

Лемма доказана.

I.21. Лемма. Имеет место равенство

$$J=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)(1-\zeta)^2\,d\zeta}{(\zeta-\xi)(\zeta-z)(1-\bar\xi\zeta)(1-\bar z\zeta)}=$$

$$=\frac{(1-|z|^2)|1-\xi|^2+(1-|\xi|^2)|1-z|^2}{|1-\xi\bar z|^2}\quad(\xi,z\in D).$$

Доказательство.

1°. $\xi\neq z$. Принимая во внимание теорему о вычетах, получим:

$$J=-\left\{\frac{(1-\xi)^2}{(\xi-z)(1-|\xi|^2)(1-\bar z\xi)}+\frac{(1-z)^2}{(z-\xi)(1-|z|^2)(1-\bar\xi z)}\right\}(1-|\xi|^2)(1-|z|^2)=$$

$$=\frac{1}{z-\xi}\cdot\frac{(1-\xi)^2(1-|z|^2)(1-\bar\xi z)-(1-z)^2(1-|\xi|^2)(1-\bar z\xi)}{|1-\bar z\xi|^2}=$$

$$=\frac{1-|z|^2-\bar\xi z+z^2\bar z\bar\xi-2\xi+\cancel{2\xi|z|^2}+\cancel{2z|\xi|^2}-2|\xi|^2|z|^2z+\xi^2-\xi|z|^2-\xi z|\xi|^2+\cancel{|\xi|^2|z|^2\xi z}}{(z-\xi)|1-\bar z\xi|^2}+$$

$$+\frac{-\cancel{1}+|\xi|^2+\bar z\xi-\xi^2\bar\xi\bar z+2z-\cancel{2z|\xi|^2}-\cancel{2\xi|z|^2}+2|z|^2|\xi|^2\xi-z^2+z^2|\xi|^2+z\xi|z|^2-\cancel{|z|^2|\xi|^2z\xi}}{(z-\xi)|1-\bar z\xi|^2}=$$

$$=\frac{-\bar z-\bar\xi+2+\bar\xi|z|^2-\bar z|\xi|^2-2|\xi|^2|z|^2-\xi-z+z|\xi|^2+\xi|z|^2-|\xi|^2+|\xi|^2-|z|^2+|z|^2}{|1-\bar z\xi|^2}=$$

$$=\frac{(1-z-\bar z+|z|^2)+(1-\xi-\bar\xi+|\xi|^2)-|\xi|^2(1-z-\bar z+|z|^2)-|z|^2(1-\xi-\bar\xi+|\xi|^2)}{|1-\bar z\xi|^2}=$$

$$=\frac{(1-|\xi|^2)|1-z|^2+(1-|z|^2)|1-\xi|^2}{|1-\bar z\xi|^2}.$$

2°. $\xi = \zeta$.

$$J = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{(1-|\xi|^2)^2 (1-\zeta)^2 d\zeta}{(\zeta-\xi)^2 (1-\bar\xi\zeta)^2} = -2\,\frac{(1-\xi)(-1+\cancel{\bar\xi\zeta}+\bar\xi-\cancel{\bar\xi\zeta})}{1-|\xi|^2} =$$

$$= 2\,\frac{|1-\xi|^2}{1-|\xi|^2}\,.$$

I.22. **Лемма.** Имеет место равенство

$$I_{\xi,\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(1-\bar\xi z)(z-\xi)(z-\zeta)(1-\bar\zeta z)} = \frac{1-|\xi|^2|\zeta|^2}{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)|1-\bar\zeta\xi|^2}\,,$$

$$\xi,\zeta \in D.$$

Доказательство. Применяя теорему о вычетах, получим

1°. $\zeta \neq \xi$.

$$I_{\xi,\zeta} = \frac{\xi}{(1-|\xi|^2)(\xi-\zeta)(1-\bar\zeta\xi)} + \frac{\zeta}{(1-\bar\xi\zeta)(\zeta-\xi)(1-|\zeta|^2)} =$$

$$= \frac{\xi - \cancel{|\xi|^2}\zeta - \cancel{|\zeta|^2}\xi + \zeta|\xi|^2|\zeta|^2 - \zeta + \cancel{|\zeta|^2}\xi + \cancel{|\xi|^2}\zeta - \xi|\zeta|^2|\xi|^2}{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)|1-\xi\bar\zeta|^2\,(\xi-\zeta)} =$$

$$= \frac{1-|\zeta|^2|\xi|^2}{(1-|\xi|^2)(1-|\zeta|^2)|1-\xi\bar\zeta|^2}\,.$$

2°. $\xi = \zeta$.

$$I_{\xi,\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z-\xi)^2(1-\bar\xi z)^2} = \frac{1}{(1-|\xi|^2)^2} + \frac{2\xi\bar\xi}{(1-|\xi|^2)^3} =$$

$$= \frac{1+|\xi|^2}{(1-|\xi|^2)^3}\,.$$

1.23. Лемма. Пусть последовательность точек $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(|\xi_k|<1, k=0,1,2,\dots)$ удовлетворяет условию

$$\sup_k \left|\frac{1-\xi_{k+1}}{1-\xi_k}\right| < \frac{1}{2}.$$

Тогда, если $\Gamma_k = \{z\in D : |1-z| = |1-\xi_k|\}$ $(k=0,1,2,\dots)$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma_k} |f(z)|\,|dz| < +\infty$$

для любой функции $f\in H^1$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $|1-\xi_k|<1$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Пусть $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$. На системе всех борелевских подмножеств круга D зададим меру μ:

$$\mu P = mes(\Gamma\cap P), \quad P\subset D \qquad (63)$$

(mes обозначает меру Лебега на "кривой" Γ).

Обозначим через $D_{\zeta,l}$ множество $\{z\in D : |\zeta - z|\le l\}$, $\zeta\in\partial D$, $0<l\le 1$.

Известно (см. [38], стр. 548), что если мера ν в круге D удовлетворяет условию:

$$\nu D_{\zeta,l} \le Kl, \quad \zeta\in\partial D,\ l\in(0,1] \qquad (64)$$

(константа $K\in(0,+\infty)$ не зависит от $\zeta\in\partial D$ и $l\in(0,1)$), то

$$\int_D |f(z)|\,d\nu(z) \le A\cdot K \int_{|z|=1} |f(z)|\,|dz|$$

для любой функции $f\in H^1$ (A - абсолютная константа).

Следовательно, достаточно показать, что мера μ, задаваемая равенством (63), удовлетворяет условию (64).

Пусть $\zeta_k = e^{i\theta_k}$, $\theta_k = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}|1-\xi_k|\right)$ $(k=0,1,2,\dots)$, $\zeta_{-1}=-1$.

Заметим, что $|1-\xi_k|=|1-\zeta_k| \quad (k=0,1,2,\dots).$

Поэтому

$$\left|\frac{1-\zeta_{k+1}}{1-\zeta_k}\right| < \frac{1}{2} \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Рассмотрим несколько случаев :

1. Так как $\left|\dfrac{1-\zeta_{k+m}}{1-\zeta_k}\right| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^m \quad (m,k=0,1,2,\dots),$

то

$$\mu D_{1,l} \leq 2\pi \sum_{\substack{k \\ |1-\zeta_k|\leq l}} |1-\zeta_k| \leq 2\pi\cdot 2l, \quad l\in[0,1].$$

2. Оценим $\mu D_{\zeta_n,l} \quad (n=0,1,2,\dots;\ 0<l\leq 1).$

(a) Если $0<l<|1-\zeta_n|-|1-\zeta_{n+1}| \ (n=0,1,2,\dots)$, $z\in D_{\zeta_n,l}$, то

$$|1-z| \begin{cases} \leq |1-\zeta_n|+|\zeta_n-z| \leq |1-\zeta_n|+l < 2|1-\zeta_n| < |1-\zeta_{n-1}| \\ \geq |1-\zeta_n|-|\zeta_n-z| \geq |1-\zeta_n|-l > |1-\zeta_{n+1}| \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что

$$\Gamma_k \cap D_{\zeta_n,l} = \varnothing \quad \text{при } k\neq n.$$

Следовательно,

$$\mu D_{\zeta_n,l} = \operatorname{mes}(D_{\zeta_n,l}\cap\Gamma_n) \leq 2\pi l.$$

(b) Если $|1-\zeta_n|-|1-\zeta_{n+1}| \leq l < |1-\zeta_{n-1}|-|1-\zeta_n|$,
$z\in D_{\zeta_n,l}$,
то [redacted]

$$|1-z| \leq |1-\zeta_n|+|\zeta_n-z| \leq |1-\zeta_n|+l < |1-\zeta_{n-1}|.$$

Отсюда вытекает, что $\Gamma_k\cap D_{\zeta_n,l}=\varnothing$ при $0\leq k<n.$

Следовательно,

$$\mu D_{\zeta_n,l} \leq 2\pi \sum_{\substack{k \\ |1-\zeta_k|\leq|1-\zeta_n|}} |1-\zeta_k| \leq 4\pi|1-\zeta_n| =$$

$$=4\pi(|1-\zeta_n|-|1-\zeta_{n+1}|+|1-\zeta_{n+1}|)\le 4\pi(l+|1-\zeta_{n+1}|)\le 8\pi l,$$

так как $|1-\zeta_{n+1}|<|1-\zeta_n|-|1-\zeta_{n+1}|$.

(c) Если $|1-\zeta_m|-|1-\zeta_n|\le l<|1-\zeta_{m-1}|-|1-\zeta_n|$ $(m=n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0)$,

то при $z\in D_{\zeta_n, l}$

$$|1-z|\le|1-\zeta_n|+|\zeta_n-z|\le|1-\zeta_n|+l<|1-\zeta_{m-1}|.$$

Поэтому $\Gamma_k \cap D_{\zeta_n,l}=0$ при $0\le k<m$ и

$$\mu D_{\zeta_n,l}\le 2\pi\sum_{j=m}^{\infty}|1-\zeta_j|\le 4\pi|1-\zeta_m|=$$

$$=4\pi(|1-\zeta_m|-|1-\zeta_n|+|1-\zeta_n|)\le 4\pi(l+|1-\zeta_n|)\le 8\pi l,$$

так как $|1-\zeta_n|<|1-\zeta_m|-|1-\zeta_n|$.

Точно так же оценивается $\mu D_{\bar\zeta_n, l}$ $(n=0,1,2,\dots;\ 0<l\le 1)$.

3. Если $D_{\zeta,l}\cap\Gamma=\emptyset$ $(\zeta\in\partial D)$, то $\mu D_{\zeta,l}=0$.
Если же $D_{\zeta,l}\cap\Gamma\neq\emptyset$, то существует n такое, что либо $|\zeta_n-\zeta|\le 2l$, либо $|\bar\zeta_n-\zeta|\le 2l$ $(n=0,1,\dots)$.

Поэтому $D_{\zeta,2l}\subset D_{\zeta_n,4l}\cup D_{\bar\zeta_n,4l}$.

Остальное ясно. Лемма доказана.

1.24 Лемма. Пусть $X(D)$ - банахово пространство функций, заданных в круге D, такое, что

$$\sup_{\|x\|_{X(D)}\le 1} |x(z)| < +\infty, \quad z\in D, \qquad (65)$$

и $Y(E)$ - банахово пространство функций, заданных на множестве $E\ (E\subset D)$, такое, что

$$\sup_{\|y\|_{Y(E)}\le 1} |y(z)| < +\infty, \quad z\in E. \qquad (66)$$

Обозначим через S оператор, сопоставляющий каждой функции $x\in X(D)$ её сужение на множество E, т.е.

$$(Sx)(z) = x(z), \quad z\in E, \quad x\in X(D).$$

Если $S(X(D))\subset Y(E)$, то оператор S непрерывен.

Доказательство. Пусть $\|x_n - x\|_{X(D)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\|Sx_n - y\|_{Y(E)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(y\in Y(E))$.

Тогда $x_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(z)$ для любого $z\in D$

и $(Sx_n)(z) \longrightarrow y(z)$ для любого $z \in E$ (см. (65) и (66)).

С другой стороны, если $z \in E$, то

$$(Sx_n)(z) = x_n(z) \xrightarrow[n \to \infty]{} x(z).$$

Следовательно, $y = Sx$. По теореме о замкнутом графике ([36] ,стр. 70) заключаем, что S непрерывен. Лемма доказана.

<u>I.25. Лемма</u>. Пусть E - счетное подмножество круга D. $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек множества E ($\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \gamma_E$; 1.7, гл. I).

Тогда имеют место следующие утверждения :

1° если $S(l_A^1) = bv$, то множество E удовлетворяет условию Карлесона.

2° если $S(V_A) = bv$, то множество E удовлетворяет условию Карлесона.

<u>Доказательство</u>. Докажем 1°. Если $S(l_A^1) = bv$, то из леммы $\underline{1.24}$ и теоремы Банаха ([4] ,стр. 425) вытекает, что S - гомоморфизм. Рассмотрим оператор

$$J : l_A^1 / S^{-1}(0) \longrightarrow bv$$ такой, что $S = J\varphi$,

где φ - канонический гомоморфизм $l_A^1 \longrightarrow l_A^1 / S^{-1}(0)$.

J - изоморфизм. Имеем

$$\| J^{-1} x \|_{l_A^1 / S^{-1}(0)} \le \| J^{-1} \| \cdot \| x \|_{bv}$$

для любого элемента $x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\in bv$. Пусть

$$x^{(n)}=\{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}\quad \left(x_k^{(n)}=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}\right)\quad (n=0,1,2,\dots),$$

тогда

$$\inf_{f\in S^{-1}(x^{(n)})}\|f\|_{\ell_A^1}\leq \|J^{-1}\|\cdot\|x^{(n)}\|_{bv}\leq 2\|J^{-1}\|\quad (n=0,1,2,\dots).$$

Отсюда следует, что существует функция $f_n\in S^{-1}(x^{(n)})$ такая, что

$$\|f_n\|_{\ell_A^1}\leq 3\|J^{-1}\|,\quad n=0,1,2,\dots .$$

Так как $\|f_n\|_{\ell_A^1}\geq \max\limits_{|z|=1}|f_n(z)|$ и $f_n\in S^{-1}(x^{(n)})$, то

$$3\|J^{-1}\|\geq \max_{|z|=1}|f_n(z)|=\max_{|z|=1}\left|\frac{f_n(z)}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{m}\frac{\xi_k-z}{1-\bar{\xi}_k z}}\right|\geq$$

$$\geq\frac{|f_n(\xi_n)|}{\left|\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{m}\frac{\xi_k-\xi_n}{1-\bar{\xi}_k\xi_n}\right|}=\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{m}\left|\frac{1-\bar{\xi}_k\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right|$$

для любого натурального $m>n$. В силу произвольности m, получим

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\left|\frac{\xi_k-\xi_n}{1-\bar{\xi}_k\xi_n}\right| \geqslant \frac{1}{3\|J^{-1}\|} \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Доказательство утверждения 2° почти дословно совпадает с доказательством утверждения 1°. Лемма доказана.

I.26 Лемма. Если $S_p(l_A^p)=h^p(E)$ $(1<p\leq+\infty)$, то существует семейство функций $\{f_\xi\}$ $(\xi\in E)$ такое, что

1°. $f_\xi\in l_A^p$ $(\xi\in E)$;

2°. $f_\xi(\zeta)=\varepsilon_{\xi\zeta}(1-|\xi|)^{-\frac{1}{q}}$ $(\xi,\zeta\in E)$;

$\varepsilon_{\xi\zeta}=\begin{cases}1, & \xi=\zeta\\ 0, & \xi\neq\zeta\end{cases}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

3° $M_{12}=\sup\limits_{\xi\in E}\|f_\xi\|_{l_A^p}<+\infty.$

Доказательство. Если $S_p(l_A^p)=h^p(E)$, то из леммы I.24 и теоремы Банаха ([4] , стр. 425) вытекает, что S_p - гомоморфизм. Рассмотрим оператор

$$J_p: l_A^p/S_p^{-1}(0)\longrightarrow h^p(E)$$

такой, что $S_p=J_p\varphi_p$

где φ_p - канонический гомоморфизм $l_A^p\longrightarrow l_A^p/S_p^{-1}(0)$.

J_p - изоморфизм. Имеем

$$\| J_p^{-1} \psi \|_{\ell_A^p / S_p^{-1}(0)} \leqslant \| J_p^{-1} \| \cdot \| \psi \|_{h^p(E)}$$

для любой функции $\psi \in h^p(E)$. Пусть

$$\psi_\xi(z) = \varepsilon_{\xi z} (1 - |\xi|)^{-\frac{1}{q}}, \ z \in E, \ \varepsilon_{\xi z} = \begin{cases} 1, & \xi = z \\ 0, & \xi \neq z \end{cases} \ (\xi, z \in E),$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

, тогда

$$\inf_{f \in S_p^{-1}(\psi_\xi)} \| f \|_{\ell_A^p} \leqslant \| J_p^{-1} \| \cdot \| \psi_\xi \|_{h^p(E)} = \| J_p^{-1} \|, \ \xi \in E.$$

Отсюда следует, что существует функция $f_\xi \in S_p^{-1}(\psi_\xi)$

такая, что

$$\| f_\xi \|_{\ell_A^p} \leqslant 2 \| J_p^{-1} \|, \ \xi \in E.$$

Так как $f_\xi \in S_p^{-1}(\psi_\xi)$, то

$$f_\xi(z) = \psi_\xi(z) = \varepsilon_{\xi z} (1 - |\xi|)^{-\frac{1}{q}} \ (\xi, z \in E).$$

Лемма доказана.

<u>I.28. Лемма .</u> Пусть $f \in \ell_A^p \ (p \geq 1), \ g \in \ell_A^1$.

Тогда

$$\|f\cdot g\|_{l^p_A} \leq \|f\|_{l^p_A}\cdot\|g\|_{l^1_A} .$$

Доказательство. Обозначим через z функцию, задаваемую равенством : $z(\zeta)=\zeta$, $\zeta\in D$. Тогда

$$\|f\cdot g\|_{l^p_A} = \Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\hat{g}(k)\,z^k f\Big\|_{l^p_A} \leq \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{g}(k)|\,\|z^k f\|_{l^p_A} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{g}(k)|\,\|f\|_{l^p_A} = \|f\|_{l^p_A}\cdot\|g\|_{l^1_A} .$$

Лемма доказана.

1.28. Лемма. Если $|1-z|\leq\lambda(1-|z|)$ $(\lambda\geq 1)$, то $\cos(\arg(1-z))\geq\frac{1}{\lambda}$ $(z\neq 1)$.

Доказательство. Неравенства

$$|1-z|\leq\lambda(1-|z|), \tag{67}$$

$$|1-(1-z)|^2\leq\left(1-\frac{1}{\lambda}|1-z|\right)^2,$$

$$1-2|1-z|\cos(\arg(1-z))+|1-z|^2\leq 1-\frac{2}{\lambda}|1-z|+\frac{1}{\lambda^2}|1-z|^2,$$

$$2|1-z|\cos(\arg(1-z))\geq\frac{2}{\lambda}|1-z|+\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)|1-z|^2$$

равносильны.

Следовательно, если имеет место (67), то тогда

$$\cos(\arg(1-z))\geq\frac{1}{\lambda} \quad (z\neq 1).$$

Лемма доказана.

ДОБАВЛЕНИЕ П .

II. 1. Лемма. Пусть Γ – замкнутая спрямляемая Жорданова кривая и $z = g(s)$ $(s \in [0, s_0])$ – параметрическое представление кривой Γ (s – длина дуги $\gamma = \{g(t) : 0 \le t \le s\}$).

Если функция g имеет непрерывную вторую производную, то существует константа $K_2 = K_2(\Gamma, r) \in (0, +\infty)$ такая, что

$$\sup_{0<\rho<1} \left(\int_{\Gamma_\rho} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \right|^r |dz| \right)^{1/r} \le K_2 \int_{\Gamma} |f(\zeta)|\, |d\zeta|, \quad 0<r<1, \quad (1)$$

для любой функции $f \in L^1(\Gamma)$,

где $\Gamma_\rho = \omega(D_\rho)$, $D_\rho = \{z \in \hat{C} : |z| < \rho\}$, ω – конформное и однолистное отображение открытого единичного круга D на область $G = \operatorname{Int} \Gamma$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий леммы вытекают следующие неравенства (см. [40], гл. X).

$$a_0 = \sup_{|z|<1} |\omega'(z)| < +\infty, \quad (2)$$

$$a_1 = \sup_{|z|<1} |\omega''(z)| < +\infty, \quad (3)$$

$$a_2 = \sup_{\substack{|\zeta| \le 1, |z| \le 1, \\ \zeta \ne z}} \left| \frac{\zeta - z}{\omega(\zeta) - \omega(z)} \right| < +\infty. \quad (4)$$

Пусть $0<r<1,\ 0<\rho<1$, тогда

$$I(r,\rho)=\int\limits_{\Gamma_\rho}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right|^r|dz|=$$

$$=\int\limits_{|z|=\rho}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\omega(\zeta))\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)-\omega(z)}d\zeta\right|^r|\omega'(z)||dz|.$$

Так как $a_0=\sup\limits_{|z|<1}|\omega'(z)|<+\infty$, то

$$I(r,\rho)\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^r a_0^{1-r}\int\limits_{|z|=\rho}\left|\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\omega(\zeta))\omega'(\zeta)\,\omega'(z)}{\omega(\zeta)-\omega(z)}d\zeta\right|^r|dz|.$$

Учитывая, что

$$\omega'(z)=\frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\zeta-z}-(\zeta-z)\cdot\alpha(\zeta,z),\ |\zeta|=1,|z|<1,$$

где $\alpha(\zeta,z)=\int\limits_0^1\omega''(z+t(\zeta-z))\cdot(1-t)dt$ (см. [32], стр. 147)

и тем самым $\sup\limits_{|\zeta|=1,|z|<1}|\alpha(\zeta,z)|\leqslant a_1$ (см. (3)), (5)

получим

$$I(r,\rho)\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^r a_0^{1-r}\int\limits_{|z|=\rho}\left|\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\omega(\zeta))\omega'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\omega(\zeta))\omega'(\zeta)\alpha(\zeta,z)}{\omega(\zeta)-\omega(z)}(\zeta-z)d\zeta\right|^r|dz|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^r a_0^{1-r}\left(\int\limits_{|z|=\rho}\left|\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\omega(\zeta))\omega'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|^r|dz|+\int\limits_{|z|=\rho}\left(\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|f(\omega(\zeta))||\omega'(\zeta)||\alpha(\zeta,z)||\zeta-z||d\zeta|}{|\omega(\zeta)-\omega(z)|}\right)^r|dz|\right). \quad (6)$$

Применив к первому слагаемому неравенства (6) теорему 1.9 главы II, а к второму - неравенства (4), (5), будем иметь

$$I(r,\rho)\le\left(\frac{1}{2\pi}\right)^r a_0^{1-r}\left(\left(K_1\int_\Gamma|f(\zeta)||d\zeta|\right)^r+2\pi(a_1a_2)^r\left(\int_\Gamma|f(\zeta)||d\zeta|\right)^r\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^r a_0^{1-r}\left(K_1^r+2\pi(a_0a_1)^r\right)\left(\int_\Gamma|f(\zeta)||d\zeta|\right)^r,\quad 0<\rho<1.$$

Лемма доказана.

II.2. Лемма. Пусть

$$f_m\in H^2,\quad \|f_m\|_{H^2}\le 1\quad (m=1,2,3,\dots),$$

$$\int_T|f_m(e^{it})|^2dt\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0,\ \text{где}\ T\subset[-\pi,\pi]\ \text{и}\ mes\,T>0$$

(mes - мера Лебега на $[-\pi,\pi]$). Тогда

$$\max_{|z|\le\rho<1}|f_m(z)|\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0\qquad(0<\rho<1).$$

Доказательство. Из теоремы Егорова (см. [36], гл. III) следует, что существует множество $\tilde T$ такое, что

$$\tilde T\subset T,\quad mes\,\tilde T>0\quad \text{и}\quad \sup_{t\in\tilde T}|f_m(e^{it})|\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Пусть $0<r<1$, $0\le\rho\le r$, $-\pi\le\theta\le\pi$ и m_0 таково, что $\sup\limits_{t\in\tilde{T}}|f_m(e^{it})|\le 1$ при $m>m_0$. Тогда, если $m>m_0$, то

$$\ln|f_m(\rho e^{i\theta})|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)\ln|f_m(e^{it})|\,dt}{1-2\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\tilde{T}}\frac{(1-\rho^2)\ln|f_m(e^{it})|\,dt}{1-2\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus\tilde{T}}\frac{(1-\rho^2)\ln|f_m(e^{it})|\,dt}{1-2\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}\le$$

$$\le\frac{\operatorname{mes}\tilde{T}}{2\pi}\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)\cdot\ln\left(\sup_{t\in\tilde{T}}|f_m(e^{it})|\right)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)|f_m(e^{it})|^2\,dt}{1-2\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}\le$$

$$\le\frac{\operatorname{mes}\tilde{T}}{2\pi}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)\ln\left(\sup_{t\in\tilde{T}}|f_m(e^{it})|\right)+\frac{1+r}{1-r}\xrightarrow[m\to\infty]{}-\infty.$$

Лемма доказана.

<u>II. 3.</u> <u>Лемма.</u> Пусть $Q\subset N$ и m_0 - натуральное число. Тогда, если

$$\min_{\substack{n,k\in Q\\ n>k\ge m_0}}(n-k)\ge\delta>0,$$

то существует константа $K_\sigma = K_\sigma(\sigma, m_0) \in (0,+\infty)$ такая, что

$$\sum_{n\in Q} |\hat{f}(n)|^2 \le K_\sigma \int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

для любой Q - функции $f\in H^2$.

<u>Доказательство.</u> Предположим, что лемма неверна, т.е. существует последовательность Q - функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(f_n\in H^2, n=1,2,\dots)$ такая, что

$$\|f_n\|_{H^2}=1 \quad (n=1,2,3,\dots) \text{ и } \int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma} |f_n(e^{it})|^2 dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (7)$$

Из леммы <u>II.2</u> следует, что

$$\sum_{k=0}^{m_0} |\hat{f}_n(k)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (8)$$

Тогда, учитывая (7), (8) и теорему <u>3.6</u> главы II, получим

$$1 \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} \Big(\sum_{\substack{k\in Q,\\ k>m_0}} |\hat{f}_n(k)|^2\Big)^{\frac12} \le \sqrt{B_2\sigma}\Big(\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma} \Big|f_n(e^{it}) - \sum_{\substack{k\in Q,\\ k\le m_0}} \hat{f}_n(k)e^{ikt}\Big|^2 dt\Big)^{\frac12} \le$$

$$\le \sqrt{B_2\sigma}\Big\{\Big(\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma} |f_n(e^{it})|^2 dt\Big)^{\frac12} + \frac{4\pi}{\sqrt{\sigma}} \sum_{\substack{k\in Q,\\ k\le m_0}} |\hat{f}_n(k)|\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Полученное противоречие показывает, что лемма верна.

<u>II.4.</u> Лемма. Пусть $Q\subset\mathcal{N}$ и m_0 - натуральные

число. Тогда, если

$$\min_{\substack{n,k\in Q,\\ n>k\geq m_0}}(n-k)\geq \sigma>0$$

и множество Q есть множество типа $\Lambda(s)$ при некотором $s\in(2,+\infty)$, то

$$\left(\sum_{k\in Q}|\hat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq \tilde{K}_6\left(\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\quad (0<p<2)$$

для любой Q - функции $f\in H^2$, где

$\tilde{K}_6=\tilde{K}_6(\sigma,m_0,s,p)$ зависит только от σ, m_0, s и p.

<u>Доказательство.</u> Так как множество Q есть множество типа $\Lambda(s)$ при некотором $s\in(2,+\infty)$, то

$$\|f\|_{H^s}\leq K_5\|f\|_{H^2}$$

для всякой Q - функции $f\in H^2$.

Пусть f — Q -функция из H^2. Тогда, учитывая результат леммы <u>II.3</u>, получим

$$(\|f\|_{H^2})^2=\sum_{n\in Q}|\hat{f}(n)|^2\leq K_6\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{it})|^2 dt=$$

$$=K_6\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{it})|^{\frac{p}{r}}\cdot|f(e^{it})|^{2-\frac{p}{r}}dt\leq$$

$$\leq K_6\left(\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{it})|^{(2-\frac{p}{r})r'}dt\right)^{\frac{1}{r'}},$$

где

$$0<p<2\,,\; r=\frac{s-p}{s-2}>1\,,\; \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1\,,\; s\in(2,+\infty).$$

Далее, так как $\left(2-\frac{p}{r}\right)r'=s$, то

$$\left(\|f\|_{H^2}\right)^2\leq K_6\left(\int\limits_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{it})|^p\right)^{\frac{1}{r}}\left(\|f\|_{H^s}\right)^{\frac{r-1}{r}s}\leq$$

$$\leq K_6\cdot K_5^{\frac{r-1}{r}s}\left(\int\limits_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{it})|^p\right)^{\frac{1}{r}}\left(\|f\|_{H^2}\right)^{\frac{r-1}{r}s}.$$

Следовательно,

$$\left(\|f\|_{H^2}\right)^{\left(2-\frac{r-1}{r}s\right)\frac{r}{p}}\leq K_6^{\frac{r}{p}}K_5^{\frac{r-1}{p}s}\left(\int\limits_{-2\pi/\sigma}^{2\pi/\sigma}|f(e^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

но

$$\left(2-\frac{r-1}{r}s\right)\frac{r}{p}=1.$$

Лемма доказана.

<u>II.5.</u> <u>Лемма</u>. Пусть L – область, определенная в <u>2.10</u> (гл. II) и $G_a=\hat{C}\setminus\{a\}$, где a – произвольная точка из области $\hat{C}\setminus\bar{L}$. Тогда множество функций $A(G_a)$ плотно в пространстве $U_0(L)$ (определение $A(G)$ см. в <u>1.3</u> (гл. II)).

<u>Доказательство.</u> Пусть $\varepsilon>0$ и функция $f\in U_0(L)$.

Из определения пространства $U_0(L)$ (2. , гл. II) вытекает, что существует область G $(G\supset L)$ и функция g, регулярная в ней, такие, что

$$\|f-g\|_{U_0(L)}<\varepsilon \ .$$

Ясно, что существует такое натуральное число n, что

$\bar{L}_n\subset G\cap G_a$, где $L_n=\{z\in\hat{C}:|z|<1+\frac{1}{n}\}\cup L,\ G_a=\hat{C}\setminus\{a\},\ a\in\hat{C}\setminus\bar{L}.$

Тогда найдется функция $h\in A(G_a)$ такая, что

$$\|g-h\|_{C_A(L_n)}<\varepsilon/\ln(n+1) \ .$$

Применив лемму 2.9 гл. II, получим

$$\|g-h\|_{U_0(L)}<(B_1+1)\varepsilon$$

(B_1 - абсолютная константа) . Итак,

$$\|f-h\|_{U_0(L)}<(2+B_1)\varepsilon \ .$$

Лемма доказана.

II.6. Лемма. Пусть последовательность банаховых пространств $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

1°. $X_{n+1}\subset X_n \quad (n=0,1,2,\dots)$,

2°. $\|x\|_n\le\|x\|_{n+1}\ ,\quad x\in X_{n+1} \ (n=0,1,2,\dots)$, где $\|\cdot\|_n$ - норма в X_n $(n=0,1,2,\dots)$,

3°. X_{n+1} плотно в X_n $(n=0,1,2,\dots)$.

Тогда $X=\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$ плотно в X_m $(m=0,1,2,\dots)$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы при $m=0$, так как при всех остальных m $(m=1,2,\dots)$ оно доказывается аналогичным образом.

Пусть $\varepsilon>0$ и $x_0\in X_0$. Так как X_1 плотно в X_0, то существует элемент $x_1\in X_1$ такой, что $\|x_0-x_1\|_0<\frac{\varepsilon}{2}$; так как X_2 плотно в X_1, то существует элемент $x_2\in X_2$ такой, что $\|x_1-x_2\|_1<\frac{\varepsilon}{2^2}$.

Ясно, что по индукции можно построить последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с такими свойствами:

1. $x_n\in X_m$ $(m\le n,\ n=1,2,\dots)$,

2. $\|x_{n-1}-x_n\|_{n-1}<\frac{\varepsilon}{2^n}$ $(n=1,2,\dots)$.

Докажем, что последовательность $\{x_k\}_{k=m}^{\infty}$ есть последовательность Коши в пространстве X_m $(m=0,1,2,\dots)$: пусть номер $k\ge m$, тогда

$$\|x_k-x_{k+p}\|_m\le\sum_{j=0}^{p-1}\|x_{k+j}-x_{k+j+1}\|_m\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{p-1}\|x_{k+j}-x_{k+j+1}\|_{k+j}<\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+j+1}}=\frac{\varepsilon}{2^k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$$

$(k=m,m+1,\dots;\ p=1,2,3,\dots)$.

Следовательно, последовательность $\{x_k\}_{k=m}^{\infty}$ имеет предел $\bar{x}_m \in X_m$ $(m=0,1,2,\dots)$. Очевидно, что

$$\bar{x}_m = \bar{x}_{m+1} \quad (m=0,1,2,\dots).$$

Обозначим этот общий предел через $\bar{x}$. Так как

$$\|x_0 - x_n\|_0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - x_{k+1}\|_0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - x_{k+1}\|_k <$$

$$< \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon,$$

то

$$\|x_0 - \bar{x}\|_0 < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

II.7. Замечание. Пусть $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность банаховых пространств удовлетворяет условию

$X_{n+1} \subset X_n$ $(n=0,1,2,\dots)$ и эти вложения непрерывны.

Если $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность множеств такая, что

1. $F_n \subset X_n$, F_n замкнуто в X_n $(n=0,1,2,\dots)$,
2. $F_{n+1} \subset F_n$ $(n=0,1,2,\dots)$,
3. замыкание множества F_{n+1} в пространстве X_n совпадает с F_n $(n=0,1,2,\dots)$,

то ~~[illegible]~~ замыкание множества $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ в пространстве X_m $(m=0,1,2,\dots)$ совпадает с F_m.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Привалов И.И., Граничные свойства аналитических функций. М.-Л., 1950.

[2] Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций. Перев. с англ. М. Изд-во ин. лит., 1963.

[3] Kahane J.-P., Salem R., Séries trigonométriques et ensembles parfaits. Paris, Hermann, 1963.

[4] Канторович Л.В. и Акилов Г.П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.

[5] Newman D.J., Interpolation in H^∞. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, vol. 92, №3, 501-507.

[6] Ахиезер Н.И., Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.

[7] Бари Н.К., Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.

[8] Carleson L., An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math., 1958, vol. 80, №4, 921-930.

[9] Нафталевич А.Г., Об интерполировании функций ограниченного вида. Уч. зап. Вильнюсского университета., Сер. матем., физ. и хим. наук, 1956, 5, 5-27.

[10] Кабайла В., Об интерполяции функций в классе H_δ. Успехи матем. наук, 1958, 13, № 1, 181-188.

[11] Shapiro H.S, Shields A.L., On some interpolation problems for analytic functions. Amer. J. Math., 1961, vol. 83, №3, 513-532.

[12] Хавин В.П., Пространства аналитических функций. В сб. "Математический анализ. 1964". Москва, 1966, 76-164.

[13] Banach S., Über einige Eigenschaften der lacunären trigonometrischen Reihen. Studia Math., 1930, vol. 2, 207-220.

[14] Paley R.E.A.C., A note on power series. Journal London Math. Soc., vol. 7, 1932, 122-130.

[15] Стечкин С.Б., Одна экстремальная задача для многочленов. Известия АН СССР, серия матем., 1956, т.20, 765-774.

[16] Хавин В.П., О нормах некоторых операций в пространстве многочленов. Вестник Ленинградского Университета, 1959, вып.4, №19, серия матем., мех. и астр., 47-59.

[17] Махмудов А.С., О коэффициентах Фурье и Тейлора непрерывных функций. В сб. "Некоторые вопросы функционального анализа и его применений", Баку, 1965, 103-128.

[18] Махмудов А.С., О коэффициентах Фурье и Тейлора непрерывных функций. Известия АН Азерб. ССР, 1964, серия физ.-матем. и техн., № 2 и № 4.

[19] Виноградов С.А., Об интерполяции и нулях степенных рядов с последовательностью коэффициентов из ℓ^p, ДАН СССР, 1965, т.160, № 2.

[20] Виноградов С.А., Об интерполяции степенных рядов, абсолютно сходящихся на границе круга сходимости. Вестник Ленинградского Университета, 1965, вып.2, № 7, серия матем., мех. и астр., 30-44.

[21] Виноградов С.А., Об интерполяции степенных рядов с последовательностью коэффициентов из . Функциональный анализ и его приложения, 1967, т.1, вып.3, 83-85.

[22] Gabriel R.M., Concerning integrals of moduli of regular functions along convex curves, Proc. London Math. Soc. (2), vol. 39, 1935, 216-231.

[23] Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, 1916.

[24] А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, т.I, М., Изд-во "Мир", 1965.

[25] А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, т.II, М., Изд-во "Мир", 1965.

[26] Schur I, Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. Journal für die Reihe und Angewandte Mathematik, vol. 140, 1911, 1-28.

[27] Newman D.J., Shapiro H.S., The Taylor coefficients of inner functions. Michigan Math. Journal, vol. 9, 1962, 249-255.

[28] Macintyre A.J., Rogosinski W.W., Extremum problems in the theory of analytic functions. Acta Math., vol. 82, 1950, 275-325.

[29] М.М.Джрбашян, Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, в.2 (1948) стр. 9, 27.

[30] Н.К.Никольский. Диссертация. Инвариантные подпространства оператора сдвига в некоторых пространствах последовательностей, Лд, 1966.

[31] Г.Ц.Тумаркин, С.Я.Хавинсон. Классы аналитических функций в многосвязных областях. В сб. "Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М.-Л., Физматгиз, 1960, 45-77.

[32] Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.II, М., Физматгиз, 1962.

[33] Carleman T., Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Fucktion. Acta Math., vol. 41, 1918, 377-384.

[34] Rudin W., Trigonometric series with Gaps. Journal of Math. and Mech., vol. 9, №2, 1960, 203-228.

[35] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, перев. с нем., М., Физматгиз, 1958.

[36] Н.Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория, перев. с англ., М., Изд-во ин. лит., 1962.

[37] Хавинсон С.Я., Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях. Матем. сб., 1955, т.36 (78), № 3, 445-478.

[38] Carleson L., Interpolations by bounded analytic functions and corona problem. Annals of Math., vol. 76, №3, 1962.

[39] Г.П.Акилов, А.М.Вершик. О взаимно непрерывном распространении линейных операций, Вестник ЛГУ, вып.2, № 7, 1958 (серия матем., мех., астр.).

[40] Г. М. Голузин., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.-Л., 1952.

6-00.