Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

И. Г. БУРОВА, В. А. КОСТИН, И. Д. МИРОШНИЧЕНКО

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ К ИЗБРАННЫМ ГЛАВАМ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ 2. ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНАЯ КОМБИНАТОРИКА НА ГРАФАХ

Санкт-Петербург
2021

Методическое пособие «Методические заметки к избранным главам дискретной математики. Часть 2. Перечислительная комбинаторика на графах» предназначено для углубленного изучения раздела программирования обучающимися по направлению компьютерные и информационные науки. Методическое пособие ориентировано на развитие у студентов логического мышления, на иллюстрацию применений простейших методов исследования комбинаторных объектов и графов, возникающих при оценке сложности алгоритмов.

Методические материалы будут также полезны обучающимся по другим направлениям подготовки бакалавров, которые проявляют интерес к методам алгоритмизации и программирования.

Методическое пособие включает рассмотрение интересных вопросов теории перечисления графов, приемы доказательств, а также упражнений и заданий для самостоятельной работы.

Авторы: Бурова И. Г. — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики СПбГУ,

Костин В. А. — кандидат физ.-мат. наук, ассистент кафедры информатики СПбГУ,

Мирошниченко И. Д. — старший преподаватель кафедры параллельных алгоритмов СПбГУ

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Военно-морского политехнического института ВУНЦ ВМФ ВМА им. Н. Г. Кузнецова Аксенова О.А.

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского Политехнического университета Петра Великого Халидов И. А.

Выписка 18 февраля 2021 г. 05/2.1/02-03-1

Заседания Учебно-методической комиссии по УГСН 02.00.00
Компьютерные и информационные науки

Часть 2. Перечислительная комбинаторика на графах

1. Перечисление графов[1]

1.1. Число способов, которыми можно пометить граф

Граф G порядка p состоит из конечного непустого множества $V = V(G)$, содержащего p *вершин*, и множества X из q неупорядоченных пар различных вершин; при таком определении автоматически исключаются *петли* (ребра, соединяющие вершину с ней самой) и кратные (параллельные) ребра. Пара $x = \{u, v\}$, принадлежащая множеству X, называется *ребром* графа G и говорят, что ребро *соединяет* вершины u и v. Вершины u и v называют при этом смежными; вершина u и ребро x, также как вершина v и ребро x, называются *инцидентными* друг другу. Граф с p вершинами и q ребрами называется *(p, q) - графом.*

Значительно удобнее и нагляднее представлять графы *диаграммами*. Рассмотрим граф G, выбранный случайным образом, с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и множество ребер

$$X = \{ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_3\}\}$$

Его изображение в виде диаграммы дано на рис. 1.

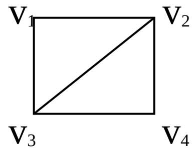


Рис. 1. Граф с четырьмя вершинами и пятью ребрами

На этой диаграмме буквами обозначены только вершины. Пять ребер графа G представлены отрезками прямых, которые соединяют на рисунке соответствующие пары вершин.

В помеченном графе порядка p вершинам приписываются целые числа от 1 до p. Например, граф, изображенный на рисунке 1 может быть помечен шестью различными способами, которые указаны на рисунке 2.

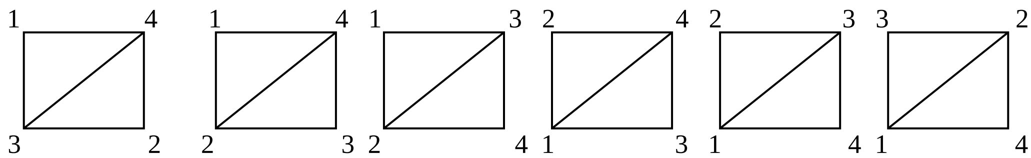


Рис. 2. Шесть различных распределений пометок в графе

Возникают два естественных вопроса.
Первый: “сколько существует помеченных графов порядка p?”
Второй: “сколько существует графов порядка p?”

Первый обсудим сейчас, а второй исследуем чуть позже.

Ответим на первый вопрос, незначительно обобщив задачу следующим образом: *найти число помеченных графов с данным числом вершин и ребер*.

---

[1]Ф. Харари, Э. Палмер. “Перечисление графов”. М., Мир, 1977.

Пусть $G_p(t)$ — многочлен, у которого коэффициент при t^k равен числу помеченных графов порядка p, имеющих ровно k ребер (здесь $G_p(t)$ — производящая функция для помеченных графов с заданным числом вершин и ребер).

Если V — множество из p вершин, то существует $\binom{p}{2}$ различных неупорядоченных пар этих вершин. В каждом помеченном графе с множеством вершин V любая пара вершин является либо смежной, либо нет. Следовательно, число помеченных графов с k ребрами равно $\binom{\binom{p}{2}}{k}$.

Теорема 1.1. Производящая функция $G_p(t)$ для помеченных графов порядка p задается соотношением

$$G_p(t)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}t^k=(1+t)^m,\text{ где } m=\binom{p}{2} \tag{1.1}$$

Так как $G_p(t) = (1+t)^m$ и число G_p помеченных графов порядка р равно $G_p(1)$, то

$$G_p = 2^{\binom{p}{2}}. \tag{1.2}$$

Для существует восемь помеченных графов порядка 3 и только четыре (непомеченных) графа этого порядка. Существует 64 помеченных графа порядка 4 и только 11 непомеченных графов порядка 4.
(Проверьте приведенные данные!).

Возникает вопрос: “*скольким способами можно пометить данный граф*?” Чтобы ответить на этот вопрос, требуется рассмотреть *симметрии*, или автоморфизмы, графа.

Взаимно однозначное отображение α множества $V(G)$ на множество $V(G_1)$, сохраняющее смежность, обычно называется *изоморфизмом*. Если $G = G_1$, то α является *автоморфизмом* графа G.

Совокупность всех автоморфизмов графа G, обозначаемая $\Gamma(G)$, образует группу, называемую *группой графа* G. Таким образом, элементы группы $\Gamma(G)$ являются подстановками (перестановками), действующими на множестве V.

Например, граф G, изображенный на рисунке *1*, имеет в точности четыре автоморфизма, так что $\Gamma(G)$ содержит следующие перестановки, записанные здесь с использованием обычного представления в виде произведения циклов:

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4),\ (v_1)(v_3)(v_2v_4),\ (v_1v_3)(v_2)(v_4),\ (v_1v_3)(v_2v_4).$$

Пусть $s(G)=|\Gamma(G)|$ — порядок группы $\Gamma(G)$, обозначающий число симметрий графа G. Тогда ответ на задачу распределения пометок, поставленную выше, содержится в следующей теореме.

Теорема 1.2. Число способов распределения пометок в данном графе порядка p равно

$$t(G)=\frac{p!}{s(G)}. \qquad (1.3)$$

Доказательство этого утверждения будет приведено позже.

Для иллюстрации теоремы заметим, что граф G (рис. 1) имеет $\frac{p!}{s(G)}=\frac{4!}{4}=6$ распределений пометок и шесть различных помеченных графов (рис. 2).

Хотя эта теорема сформулирована только для графов, подобные утверждения справедливы для любых конечных структур с заданными группами автоморфизмов, например, таких, как графы с корнями, орграфы, и тому подобное.

Ориентированный граф, или *орграф, D порядка p* состоит из конечного непустого множества $V = V(D)$, различных p объектов, называемых верши*нами*, вместе с заданным множеством X содержащим q упорядоченных пар различных вершин из множества V.

Пара $x = (u, v)$, принадлежащая множеству X, называется *дугой* орграфа D.

Говорят, что u *смежна* к вершине v; вершина u и дуга x являются *инцидентными* друг другу также, как вершина v и дуга x.

Полустепенью исхода вершины u называется число дуг, для которых вершина u является первой вершиной; *полустепенью захода* вершины u называется число дуг, для которых вершина u является второй вершиной.

Для орграфа также возможно представление в виде диаграммы, с которой будем обращаться, как с самим орграфом.

В помеченном орграфе порядка p вершинам приписываются целые числа от 1 до p, и группа орграфа D, обозначаемая $\Gamma(D)$, состоит из всех подстановок множества вершин $V(D)$ орграфа D, сохраняющая смежность. Так как число помеченных орграфов порядка p, имеющих в точности k ребер, равно $\binom{p(p-1)}{2}$, то получаем результаты, выражаемые следующей теоремой.

Теорема 1.3. Производящая функция $D_p(t)$ для помеченных орграфов порядка p задается соотношением

$$D_p(t) = \sum_{k=0}^{m}\binom{p(p-1)}{k}t^k = (1+t)^{p(p-1)}, \qquad (1.4)$$

Очевидно, что $D_p(t) = G_p^2(t)$, так что $D_p(1) = 2^{p(p-1)} = G_p^2(1)$.

Пример 1.1. В круговом турнире заданное множество игроков ведут игру, правилами которой запрещен ничейный исход. Любые два игрока встречаются между собой только один раз, и лишь один из них одержит победу. Следовательно, *турнир* представляет собой орграф, в котором каждая пара вершин соединяется только одной дугой.

Упражнение 1.1. Докажите, что число помеченных турниров порядка p, равно $2^{\binom{p}{2}}$.

1.2 Связные графы

Пусть G — граф и $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ — последовательность вершин графа G такая, что вершина v_i смежна с вершиной v_{i+1} при $i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Такая последовательность вместе с n ребрами $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \le i \le n - 1$, называется *маршрутом длины n*. Если ребра в маршруте различные, то он называется *цепью*. Если в маршруте различны все вершины (а, следовательно, и ребра), то называется *простой цепью. Связным графом* называется граф, в котором любые две различные вершины связаны простой цепью.

Число помеченных связных графов порядка 4 может быть вычислено тривиальным образом и равно 38. (Проверьте!).

Подграф H графа G имеет $V(H)\subseteq V(G)$ и $X(H)\subseteq X(G)$. *Компонента* графа представляет собой максимальный связный подграф.

Граф с корнем (и *корневой граф*) имеет одну выделенную вершину, называемую *корнем.* Два корневых графа называют *изоморфными*, если существует взаимно однозначная функция, отображающая множество вершин одного графа на множество вершин другого графа, которая сохраняет не только смежность вершин, но и корни[2].

Аналогичное требование накладывается и при описании корневых помеченных графов. Это понятие можно сейчас использовать для получения следующей рекурсивной формулы.

Пусть C_p — число связанных помеченных графов порядка p.

Теорема 1.4. Число C_p связанных помеченных графов удовлетворяет соотношению

$$C_p = 2^{\binom{p}{2}} - \frac{1}{p}\sum_{k-1}^{p-1} k\binom{p}{k} 2^{\binom{p-k}{2}} C_k . \qquad (1.5)$$

Доказательство.

Заметим, что если в помеченном графе делать корнями разные вершины, то получатся разные корневые помеченные графы. Следовательно, число корневых помеченных графов, в которых порядка p равно pG_p. число корневых помеченных графов, в которых корень находится в компоненте, содержащей в точности k вершин равно $kC_k\binom{p}{k}G_{p-k}$.

Суммируя эти произведения по k от 1 до p, опять получаем выражение для корневых помеченных графов, а именно

[2] То есть переводит корень одного графа в корень другого.

$$\sum_{k=1}^{p} k \binom{p}{k} C_k G_{p-k} \text{ - } C_k G_{p-k}.$$

Для дальнейших построений нам потребуется важное свойство экспоненциальных производящих функций для графов:

Для всякого $k = 1, 2, 3, \ldots$ обозначим через a_k число способов, которым можно пометить все графы порядка k, обладающие некоторым свойством $P(a)$. Пусть $a(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k t^k}{k!}$ экспоненциальная производящая последовательности a_k. Предположим также, что $b(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{b_k t^k}{k!}$ другая экспоненциальная производящая функция для класса графов, удовлетворяющих свойству $P(b)$.

Следующая лемма дает полезную интерпретацию коэффициентов произведения $a(t)\cdot b(\mathrm{t})$ этих двух производящих функций.

Лемма пересчета помеченных графов. Коэффициент при $\frac{t^k}{k!}$ в $a(t)\cdot b(\mathrm{t})$ равен числу упорядоченных пар (G_1, G_2) двух непересекающихся графов, где G_1 обладает свойством $P(a)$, G_2 обладает свойством $P(\mathrm{b})$, k — число вершин в $G_1 \cup G_2$ и пометки от 1 до k распределены на графе $G_1 \cup G_2$.

Для иллюстрации этой леммы положим, что $C(t)$ — экспоненциальная производящая функция для помеченных связных графов: $C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k t^k}{k!}$.

Тогда $C(t)\cdot C(t)$ является производящей функцией для упорядоченных пар связных графов. Разделив этот ряд на 2, получаем производящую функцию для помеченных графов, имеющих в точности две компоненты.

Аналогично, $\frac{C^n(t)}{n!}$ имеет при $\frac{t^k}{k}$ коэффициент, равный числу помеченных графов порядка k, содержащих в точности n компонент. Если через $G(t)$ обозначим экспоненциальную производящую функцию для помеченных графов, то

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^n(t)}{n!}. \qquad (1.6)$$

Таким образом, мы имеем следующее экспоненциальное соотношение между $G(t)$ и $C(t)$, найденное Риделлом (1951).

Теорема 1.5. Экспоненциальные производящие функции $G(t)$ и $C(t)$ для помеченных графов и для помеченных связных графов удовлетворяют соотношению

$$1 + G(t) = e^{C(t)}. \qquad (1.7)$$

Замечание. 1.1. Это равенство остается справедливым и для мультиграфов.

Риордан получил следующее рекуррентное соотношение для C_p.

$$C_p = \sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p-2}{k-1} (2^k - 1) C_k C_{p-k}. \quad (1.8)$$

Кроме того, очевидно, что если известна экспоненциальная производящая функция для некоторого класса графов, то экспоненциальная производящая функция для соответствующих связных графов получается формальным логарифмированием первого ряда, точно так же, как в теореме для всех графов.

Поэтому мы можем сформулировать следующий общий результат.

Следствие 1.1 Если $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m t^m}{m!} = e\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m t^m}{m!} \right)$, то для $m \geq 1$

$$a_m = A_m - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} k \binom{m}{k} a_k A_{m-k}. \quad (1.9)$$

Задача 1. Построить производящую функцию для связных помеченных орграфах.

Задача 2. Найти перечислительную формулу для помеченных (p, q)-графов, не имеющих изолированных вершин.

1.3 Эйлеровы графы

Степенью вершины v (обозначается $deg\ v$) в графе G называется число ребер, инцидентных вершине v. Граф, каждая вершина v, которого имеет четную степень, называется четным. Эйлеров граф — это связный четный граф.

Пусть W_p — число помеченных четных графов порядка p. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1.6. Число помеченных четных графов порядка p равно числу помеченных графов порядка $p - 1$:

$$W_p = 2^{\binom{p-1}{2}}.$$

Доказательство.

Чтобы доказать этот результат, установим сначала взаимно однозначное соответствие между этими двумя графов. Рассмотрим произвольный граф порядка $p - 1$. Граф G должен иметь четное число вершин нечетной степени. Добавим к нему вершину v, которой припишем пометку p. Наконец, из графа G и вершины v строим граф G', имеющей нечетную степень. Этот граф G' является помеченным четным графом порядка p. Легко видеть, что описанное соответствие является взаимно однозначным и что каждый помеченный четный граф порядка p может быть получен таким способом из некоторого помеченного графа порядка $p - 1$.

Чтобы получить формулу для числа помеченных эйлеровых графов, будем использовать производящие функции. Итак, пусть $W(t)$ — экспоненциальная производящая функция для помеченных четных графов, такая что

$$W(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{\binom{p-1}{2}} t^p}{p!}. \qquad (1.10)$$

Далее, пусть U_p — число помеченных эйлеровых графов порядка p, так что

$$U(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{U_p t^p}{p!} \qquad (1.11)$$

является соответствующей экспоненциальной производящей функцией.

Теорема 1.7. Экспоненциальная производящая функция $U(t)$ для помеченных эйлеровых графов удовлетворяет соотношениям

$$U(t) = \ln(W(t)+1) \qquad (1.12)$$

и

$$U_p = 2^{\binom{p}{2}} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p}{k} 2^{\binom{p-k-1}{2}} U_k. \qquad (1.13)$$

Формула (12) следует из того факта, упомянутого после равенства (8), что если известна производящая функция для произвольного класса графов, то производящая функция для соответствующих связных графов получается с помощью формального логарифмирования первого ряда. Рекуррентное соотношение (13) для U_p является следствием формул (12) и (9).

Для нескольких первых членов ряда $U(t)$ имеем равенство

$$U(t) = t + \frac{t^3}{3!} + 3\frac{t^4}{4!} + 38\frac{t^5}{5!} + \dots. \qquad (1.14)$$

Упражнение 2. Проверьте справедливость равенства (14).

К несколько более трудной относится задача определения числа помеченных эйлеровых графов с заданным числом вершин и ребер, установленный Ридом.

Теорема 1.8[3]. Многочлен $W_p(t)$, у которого коэффициент при t^q равен числу помеченных графов, имеющих p вершин четной степени и q ребер, задается формулой

$$W_p(t) = \frac{1}{2^p}(1+t)^{\binom{p}{2}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{k(p-k)}. \qquad (1.15)$$

[3] Ф. Харари, Э. Палмер. “Перечисление графов”. М., Мир, 1977 с. 24-26.

Для малых значений p находим, что (проверьте):

$$W_1(t) = W_2(t) = 1 \qquad W_3(t) = 1+t^3 \qquad W_4(t) = 1+4t^3+ 3t^4.$$

1.4 Деревья

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов. Известно, что всякое нетривиальное дерево имеет не менее двух висящих вершин (вершины степени 1). Это следует из того, что если T — дерево с p вершинами и q ребрами, то $q = p - 1$.

Теорема 1.9. (Кэли 1897). Число τ_p помеченных деревьев порядка p равно

$$\tau_p = p^{p-2}.$$

Доказательство.

Первый подход (Кэли). Установим соответствие между помеченными деревьями и функциями, отображающими множество из p-2 объектов в множество из p объектов. Например, если $p = 5$, то существует 5^3 функций из $\{a, b, c\}$ в $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Эти функции перечисляются многочленом

$$(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)^3. \qquad (1.16)$$

Слагаемые этого многочлена сопоставляются функциям естественным образом. Например, v_3^4 соответствует постоянной функции $f(x) = v_4$, слагаемое $3v_1v_4^2$ отвечает трем функциям, которые отображают только один элемент в v_1, два других — в v_3, $6v_2v_3v_5$ дает шесть функций, отображающих по одному элементу в v_2, v_3 и v_5. Теперь, умножая многочлен на $v_1v_2v_3v_4v_5$ и получая

$$(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)^3\, v_1v_2v_3v_4v_5, \qquad (1.17)$$

устанавливаем тем самым соответствие между слагаемыми из этого произведения и помеченными деревьями порядка 5. Это соответствие с использованием слагаемого $3v_1^2v_2v_3^2v_4v_5 = 3v_1v_3^2(v_1v_2v_3v_4v_5)$ выглядит так

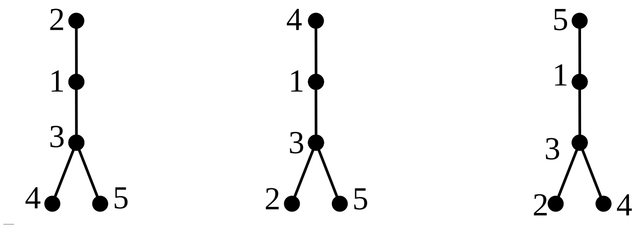


Рис. 3. Помеченные деревья, перечисляемые членом

Заметим, что в деревьях, соответствующих слагаемому $v_1^2v_2v_3^2v_4v_5$, степень вершины, помеченной числом k, равна показателю степени у v_k.

Справедливость этого высказывания может быть установлена и в общем случае. Следовательно, число помеченных деревьев, у которых вершины, помеченные числом k, имеют степень d_k, равно полиномиальному коэффициенту

$$\binom{p-2}{d_1-1, d_1-2, \ldots, d_p-1}. \qquad (1.18)$$

Кэли проиллюстрировал это соответствие для $p = 6$ и не стал рассматривать другие случаи, заметив: “Сразу видно, что доказательство, данное для этого частного случая, применимо при любом значении p”.

Второй подход (Прюфер 1917). Пусть дерево с n вершинами, помеченными числами $1, \ldots, n$. Свяжем с этим деревом последовательность натуральных чисел $i_1, \ldots, i_{n-2}$, построенную следующим образом:

1) положим $j = 0$;
2) повторим следующий процесс $n - 2$ раза:

  увеличим значение j на единицу;

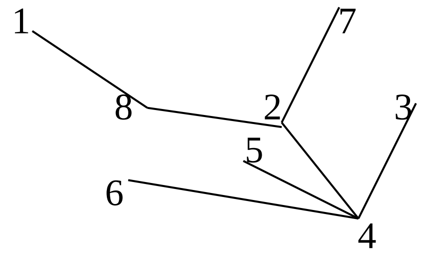
  найдем в дереве лист, помеченный натуральным числом с наименьшим значением. Пусть это значение k_j, и пусть отцом листа k_j является вершина, помеченная числом i_j.

  Выберем значение i_j в качестве j-ого элемента последовательности. Удалим в дереве ребро (i_j, k_j).

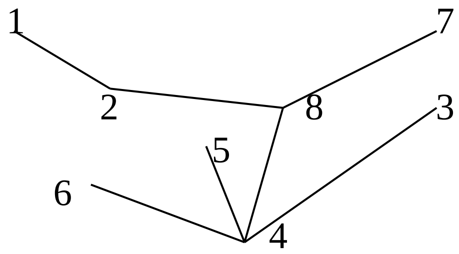
После исполнения этого алгоритма начальное дерево преобразуется в дерево, состоящее из одного ребра либо (i_{n-2}, n), либо, в случае $i_{n-2} = n$, — из ребра $(n, n\text{-}1)$.

Упражнение 3. *Выполните приведенный алгоритм для деревьев*

a)



b)



Заметим, что в приведенном алгоритме построенный им код определен однозначно.

Рассмотрим алгоритм восстановления дерево по его коду Прюфера $i_1, \ldots, i_{n-2}$.

Для этого выполним следующие действия.

1. Восстановим заключительное звено дерева. Как было отмечено, им является ребро либо (i_{n-2}, n), в случае $i_{n-2} \neq n$, либо ребро $(n, n - 1)$, в случае $i_{n-2} = n$.
2. Для восстановления других ребер дерева выполним следующее

   2.1 Пусть $j = n - 2$.

   2.2 Повторим $n - 2$ раза

Если вершина i_{j-1} (исключая $j = 1$) еще не включена в дерево, то строим в нем ребро (i_j, i_{j-1}); в противном случае строим ребро (i_j, m), где m — наибольший номер вершины, еще не включенной в дерево.

Упражнение 4. Восстановите деревья по кодам Прюфера, полученным в предыдущем упражнении.

Замечание. Пусть задана произвольная последовательность натуральных чисел $i_1, ..., i_{n-2}$, каждое из которых из промежутка $1 ... n$. Тогда по приведенному алгоритму для этой последовательности может быть построено помеченное дерево, при этом двум разным последовательностям соответствуют два разных дерева.

Таким образом, теорема Кэли следует из установленной биекции.

Третий подход (Пойа 1937). Экспоненциальная производящая функция для числа помеченных корневых деревьев может быть задана выражением

$$y = \sum_{p=1}^{\infty} p\iota_p \frac{t^p}{p!}. \qquad (1.19)$$

Пойа нашел функциональное уравнение для y как функции от t, и затем для нахождения τ_p применил формулу обращения Лагранжа.

Это функциональное уравнение для y будет сейчас выведено. Из леммы пересчета помеченных графов следует, что $\frac{y^n}{n!}$ является экспоненциальной производящей функцией для n-множеств помеченных корневых деревьев. Эти n-множества соответствуют в точности тем корневым деревьям, в которых корень имеет степень n и не помечен. Более точно, это соответствие получается так: сначала добавляем к каждому n-множеству новую вершину, не помечая ее, а затем соединяем эту новую вершину с каждым из старых корней.

Умножение выражения $\frac{y^n}{n!}$ на t отвечает приписыванию пометки новому корню и включению его в число пересчитываемых вершин. Таким образом, $t\cdot\frac{y^n}{n!}$ перечисляет корневые помеченные деревья, в которых корень имеет степень n. Суммируя по n, получаем

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} t\frac{y^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} t\, y^n/n!, \qquad (1.20)$$

и, следовательно, приходим к функциональному уравнению $y = te^y$. (1.21)
Чтобы найти решение (20), выразив y как функцию от x, применим весьма полезный частный случай формулы Лагранжа.

Формула обращения Лагранжа (частный случай)[4]. Если функция $\varphi(y)$ аналитична в некоторой окрестности точки $y=0$ и $\varphi(0)\neq 0$, то уравнение

$$t = \frac{y}{\varphi(y)} \tag{1.22}$$

имеет единственное решение, задаваемое производящей функцией

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k t^k , \tag{1.23}$$

коэффициенты которой определяются по формуле

$$c_k = \left(\frac{1}{k!}\right)\left\{\left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1}\left(\varphi(y)\right)^k\right\}_{y=0} . \tag{1.24}$$

Применяя эту формулу обращения к уравнению (21), где $\varphi(y) = e^y$, находим

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1} t^k}{k!} \qquad (1.25$$

и, сравнивая это выражение с (19), снова получаем формулу для τ_p.

Четвертый подход (Кирхгоф 1847). Более интересный и полезный результат, обычно называемый “Матричная теорема о деревьях” содержится в работе Кирхгофа 1847 года. Число помеченных деревьев может быть быстро получено как простое следствие этого результата.

Пусть $A = (G) + |a_{ij}|$ — матрица смежности графа G. Обозначим $M(G)$ матрицу, которая получается из $–A$ с помощью подстановки на место i-го диагонального элемента в ней числа $deg\ v_i$, для каждого i.

Теорема 1.10. (Матричная теорема о деревьях для графов). Для всякого связного помеченного графа G все алгебраические дополнения матрицы $M(G)$ равны друг другу, и их общее значение представляет собой число остовных деревьев графа G.

Для иллюстрации этой сформулированного утверждения рассмотрим

$$M(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad M(G) = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

Теорема Кэли является следствием применения матричной теоремы о деревьях к полному графу K_p. В самом деле, алгебраическое дополнение $M(K_p)$ равно

[4]Теорема Лагранжа для кольца формальных степенных рядов полностью рассмотрена в книге Я. Гульден, Д. Джексон, “Перечислительная комбинаторика”, М., Наука, 1990.

$$-\begin{vmatrix} p-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & p-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & p-1 \end{vmatrix} = p^{p-2}$$

(Напомним алгоритм вычисления определителя. Вычитаем первую строку из каждой другой и прибавляем последние $p-2$ столбцов к первому. Получается верхняя треугольная матрица, определитель которой равен p^{p-2}).

Доказательство (Матричной теоремы о деревьях для графов[5])

Лемма 1. Пусть B — произвольная числовая $n{\times}n$-матрица, в каждой строке которой и в каждом столбце сумма элементов равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij} = 0,\ i = 1, \dots, n; \qquad \sum_{j=1}^{n} B_{ij} = 0,\ j = 1, \dots, n.$$

Тогда алгебраические дополнения всех элементов матрицы B равны между собой. (В частности, этим свойством обладает матрица Кирхгофа произвольного графа.

Доказательство (леммы).

Очевидно, что $rank\,B < n$, если $rank < n-1$, то и алгебраические дополнения всех элементов матрицы равны 0.

Пусть $rank = n-1$ и C — присоединенная матрица для матрицы B, то есть элемент C_{ij} равен алгебраическому дополнению A_{ij} элемента B_{ij} в матрице B, $i=1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$. Известно, что $BC = (\det B)E$, где E — единичная матрица. В наших условиях $\det B = 0$, $BC = 0$ — нулевая матрица.

Следовательно, для столбца матрицы C с номером j, $j = 1, \dots, n$, верны равенства

$$B_{i1}C_{1j} + B_{i2}C_{2j} + \dots + B_{in}C_{nj} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

То есть $$B_{i1}A_{j1} + B_{i2}A_{j2} + \dots + B_{in}A_{jn} = 0,\ i = 1, \dots, n.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений с матрицей B относительно неизвестных $A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jn}$. Так как $rank\,B = n-1$, то все решения системы пропорциональны.

Но вектор $(1, \dots, 1)$ удовлетворяет системе, поэтому

$$A_{j1} = A_{j2} = \dots = A_{jn},\ j = 1, \dots, n.$$

Учитывая, что $CB = 0$, аналогично, получаем

$$A_{1i} = A_{2i} = \dots = A_{ni},\ i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $A_{ij} = A_{kl}$, $\qquad i, j, k, l = 1, \dots, n$.

[5] В. А. Емеличев, В. А. Мельников, В. И. Сарванов. Р. И Тышкевич “Лекции пои теории графов” М., Наука, 1990

Определение. Пусть G — (n, m)-граф, $n \times m$-матрица $I = I(G)$ называется матрицей инцидентности графа G, если I удовлетворяет условиям:

Для неориентированных графов

$$I_{k\,l} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } k \text{ и ребро } e_i \text{ инцидентны,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для ориентированных графов

$$I_{k\,l} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } k \text{ является началом дуги } a_i, \\ -1, \text{ если вершина } k \text{ является концом дуги } a_i, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть G — неориентированный граф. Превратим каждое его ребро в дугу, придав ему одну из двух возможных ориентаций. Полученный ориентированный граф называется ориентацией графа G. Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $M(G)$ — матрица Кирхгофа графа G, а I — матрица инцидентности какой-либо его ориентации H (нумерация вершин в H та же, что и в G), то $M(G) = I \cdot I^{tr}$ (здесь tr — операция транспонирования матрицы).

Лемма 2. Пусть H — $(m + 1, m)$-граф, I — матрица инцидентности какой-либо его ориентации, M — произвольный минор порядка m матрицы I. Тогда 1) если H — дерево, то $M = \pm 1$;

2) если H не является деревом, то $M = 0$.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что можно произвольно менять нумерации вершин и ребер графа H, от этого рассматриваемый минор может лишь изменить знак.

Пусть a — вершина, соответствующая строке матрицы I, не вошедшей в минор M. Если граф H не является деревом, то он несвязен.

Пусть $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ — его область связности, не содержащая вершины a. С помощью подходящей перенумерации ребер графа H матрицу I приведем к клеточно-диагональному виду $I = diag[I_1, I_2]$, где I_1 — матрица инцидентности компоненты $H(K)$. Минор M содержит все первые k строк матрицы I, сумма которых равна нулевой строке. Следовательно, $M = 0$.

Пусть теперь H — дерево. Заново перенумеруем вершины и ребра графа H следующим образом. Одной из концевых вершин v, отличных от вершины a, а также ребру инцидентному вершине v, присвоим номер 1.

Далее рассмотрим дерево $T_1 = H - v$. Если его порядок больше 1, то одной из его концевых вершин u, отличных от a, а также инцидентному ей ребру присвоим номер 2.

Рассмотрим дерево $T_2 = T_1 - u$. Итерируя этот процесс, получим новые нумерации вершин и ребер дерева H, причем вершина a будет иметь номер $m + 1$. Матрица I при этом примет вид

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \pm 1 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & \pm 1 \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

(Здесь символ * обозначает те элементы или блоки матрицы, значения которых не влияют на ход рассуждений.) Минор M, остающийся после удаления последней строки этой матрицы, равен ± 1.

Для доказательства теоремы Кирхгофа также воспользуемся формулой Бинэ–Коши, доказательство которой обычно приводится в любом достаточно полном курсе по теории матриц[6].

Пусть A и B — матрицы, размерности соответственно $n \times m$ и $m \times n$, где $n \le m$. Рассмотрим $C = AB$.

Минор порядка n матрицы B назовем соответствующим минору порядка n матрицы A, если множество номеров строк первого из них и номеров столбцов второго совпадают.

Формула Бинэ–Коши. Определитель матрицы C равен сумме произведений каждого минора порядка n матрицы A на соответствующий минор матрицы B.

Доказательство теоремы Кирхгофа.

Пусть I — матрица инцидентности какой-либо его ориентации (n, m)-графа G. Имеем $M(G) = I \cdot I^{tr}$. (*)

Поскольку G — связный граф, $m \ge n-1$. Если B — подматрица, остающаяся после удаления из $M(G)$ последних строки и столбца, C — подматрица, остающаяся после удаления из I последней строки, то в силу (*) $B = C \cdot C^{tr}$. Алгебраическое дополнение A_{nn} равно $\det B$. Из формулы Бинэ–Коши теперь следует, что A_{nn} равно сумме квадратов всех миноров порядка $n-1$ матрицы C.

Согласно, лемме 1 каждый такой минор M равен ± 1, если остовной подграф графа G, ребра которого соответствуют столбцам, вошедшим в M, является деревом, и нулю — в противном случае.

Следовательно, A_{nn} равно остовных деревьев в графе G. Поскольку алгебраические дополнения всех элементов матрицы $M(G)$ равны (лемма 2), то теорема доказана.

2. Теорема Пойа

2.1. Пример: раскраска узлов бинарного дерева[7]

Рассмотрим полное бинарное дерево с семью узлами и всевозможные различные варианты раскраски его узлов белым или черным цветом в предположении, что мы не отличаем «левое» от «правого». На следующем

---

[6] Ф. Р. Гантмахер. “Теория матриц” М.: Наука, 1966”, стр. 20.

[7] Э. Рейнгольд, Ю. Невергельт, Н. Део. “Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика”. М., Мир, 1980.

примере приведены различные представления одной и той же раскраски дерева:

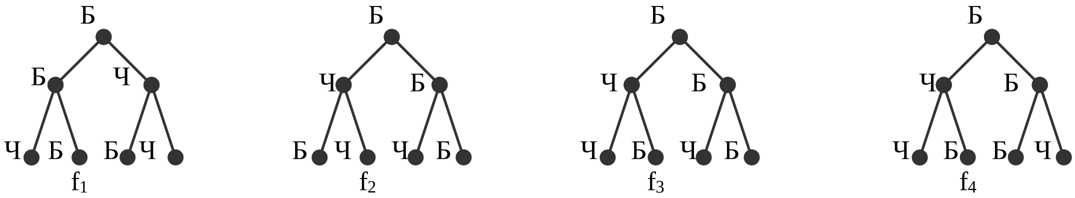


Рис. 3. Раскраска дерева

В противоположность этому каждая из следующих картинок представляет собой отличную от других раскраску дерева:

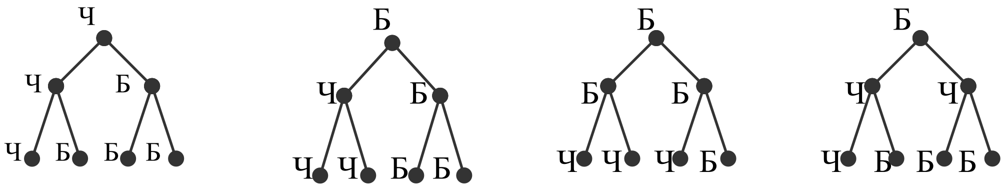


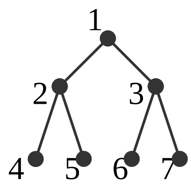
Рис. 4. Варианты раскраски деревьев

Чтобы уяснить, какое же множество объектов подлежит пересчету, определим *множество S представлений*. Каждой картинке такого типа, как показанные выше, поставим в соответствие функцию из области D семи узлов в область R двух цветов:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$R = \{Б, Ч\},$$

$$R^D = \{f \mid f: D \to R\}.$$



Заметим, что R^D состоит из $2^7=128$ элементов, называемых представлениями. Например, приведенные выше представления f_3 и f_4 соответствуют функциям

$$f_3(1) = f_3(3) = f_3(5) = f_3(7) = Б,\quad f_3(2) = f_3(4) = f_3(6) = Ч$$

и $$f_4(1) = f_4(3) = f_4(5) = f_4(6) = Б,\quad f_4(2) = f_4(4) = f_4(7) = Ч.$$

На множестве R^D всех функций, отображающих D в R, определим отношение эквивалентности γ и каждый класс эквивалентности отождествим с одним из подлежащих пересчету объектов (раскрасок дерева).

Интуитивно ясно, f_3 и f_4 должны принадлежать одному классу эквивалентности относительно γ. Почему это так?

В области D существует подстановка π, которая переставляет двух сыновей узла 3, а именно узлы 6 и 7, и две функции f_3 и f_4 отличаются только «*по модулю* π», то есть $f_4 = f_3\pi$, или, что эквивалентно, функция f_4

получается применением сначала подстановки π к D и последующим отображением D на R посредством функции f_3. Поскольку не отличаем «левое» от «правого», и π только переставляет левого и правого сыновей узла 3, две функции такого же типа, как f_3 и f_4 должны быть эквивалентны.

В таком случае наша первая задача при определении отношения эквивалентности γ состоит в выписывании группы всех подстановок, относительно которых раскраски эквивалентны. Эта группа, которую мы обозначим G, порождается перестановками:

$$\pi_1 = (1)(23)(46)(57),$$
$$\pi_2 = (1)(2)(3)(45)(6)(7),$$
$$\pi_3 = (1)(2)(3)(4)(5)(67);$$

и выглядит так

Перестановка	**Циклическое представление**	**Цикловой индекс**
тождественная	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$	$< 1^0, 2^0, 3^2, 4^0, \ldots >$
π_1	$(1)(23)(46)(57)$	$t_1 t_2^3$
π_2	$(1)(2)(3)(45)(6)(7)$	$t_1^5 t_2$
π_3	$(1)(2)(3)(4)(5)(67)$	$t_1^5 t_2$
$\pi_2\pi_3 = \pi_3\pi_2$	$(1)(2)(3)(45)(67)$	$t_1^3 t_2^2$
$\pi_1\pi_2 = \pi_3\pi_1$	$(1)(23)(4567)$	$t_1 t_2 t_4$
$\pi_1\pi_3 = \pi_2\pi_1$	$(1)(23)(4756)$	$t_1 t_2 t_4$
$\pi_1\pi_2\pi_3$	$(1)(23)(47)(56)$	$t_1 t_2^3$

Основное определение, используемое в теореме Пойа:

Определение. Если дана группа подстановок G, то *цикловым индексом* P_G *группы* G называется полином относительно переменных $t_1, t_2, t_3 \ldots$, который представляет собой среднее арифметическое цикловых индексов, взятых по всем подстановкам π группы G.

В нашем примере $\quad P_G = \dfrac{1}{8}\left(t_1^7 + 2t_1t_2^3 + 2t_1^5t_2 + 2t_1t_2t_4 + t_1^3t_2^3\right).$

В данном случае теорема Пойа утверждает:

«Число классов эквивалентности на множестве R^D, отображающих D в R, при отношении эквивалентности γ, индуцированном группой подстановок G на множестве D, получается сопоставлением значения $|R|$ (мощности множества R) каждой переменной t_i в цикловом индексе P_G группы G.

В нашем примере $|R| = 2$. Отсюда получаем

$$P_G = \frac{1}{8}\left(2^7 + 2^5 + 2^7 + 2^4 + 2^5\right) = 42$$

Упражнение. Проверьте путем систематического конструирования, что в нашем примере число различных раскрасок действительно равно 42.

2.2. Цикловой индекс группы подстановок.[8]

Пример 1. Пусть S — множество вершин куба, так что $m = |S| = 8$, и пусть G — множество всех тех подстановок S, которые могут быть получены вращением куба. Всего $6 \times 4 = 24$ таких вращений.

Их можно разбить на пять категорий.

(а) Тождественное.

(б) Три поворота на 180° вокруг прямых, соединяющих центры противоположных граней.

(в) Шесть поворотов на 90° вокруг прямых, соединяющих центры противоположных граней.

(г) Шесть поворотов на 180° вокруг прямых, соединяющих середины противоположных ребер.

(д) Восемь поворотов на 120° вокруг прямых, соединяющих середины противоположных вершин.

Поскольку $1 + 3 + 6 + 6 + 8 = 24$, этот список полон.

Легко представить себе циклы множества S в каждом случае. В случае

- (а) — восемь циклов длины 1;
- подстановки типа (б) дают четыре цикла длины 2;
- в случае (в) два цикла длины 4;
- (г) дает четыре цикла 2;
- в случае (д) два цикла длины 1 и два цикла длины 3.

Поэтому цикловой индекс таков: $P_G = \dfrac{1}{24}\left(t_1^8 + 9t_2^4 + 6t_4^2 + 8t_1^2t_3^2\right)$.

Пример 2. Пусть S — множество ребер куба, так что $m = 12$, и пусть G — множество всех 24 подстановок S, которые могут быть получены вращением куба.

Вращения те же, что и в примере 1. Теперь надо посмотреть, что делают вращения с ребрами.

Тождественное вращение — подстановка типа $<1^{12}, 2^0, 3^0, 4^0, \ldots>$.

Вращения (б) — типа $<1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \ldots>$,

в случае (в) — тип $<1^0, 2^0, 3^0, 4^3, \ldots>$,

в случае (г) — тип $<1^2, 2^5, 3^0, 4^3, \ldots>$,

и в случае (д) — тип $<1^0, 2^0, 3^4, 4^0, \ldots>$.

Поэтому имеем $$P_G = \frac{1}{24}\left(t_1^6 + 3t_1^2t_2^2 + 6t_1^2t_4 + 6t_1^3 + 8t_3^4\right).$$

---

[8] Н. Дж. Де Брейн. “Теория перечисления Пойа”. Сб. статей под редакцией Э. Беккенбаха “Прикладная комбинаторная математика”. М. Мир, 1968

Пример 3. Опять возьмем вращения куба, но теперь пусть S — множество всех его граней. Наши пять категорий вращений дают подстановки типов $<1^6, 2^0, 3^4, 4^0, ...>$, $<1^2, 2^2, 3^4, 4^0, ...>$, $<1^2, 2^2, 3^0, 4^0, ...>$, $<1^2, 2^0, 3^0, 4^1, ...>$, $<1^0, 2^3, 3^0, 4^0, ...>$, $<1^0, 2^0, 3^2, 4^0, ...>$,

соответственно, и поэтому $$P_G = \frac{1}{24}\left(t_1^6 + 3t_1^2t_2^2 + 6t_1^2t_4 + 6t_2^3 + 8t_3^2\right). \qquad (2.1)$$

Пример 4. Пусть S — множество из m элементов и G — группа всех подстановок S; то есть G — симметрическая группа степени m. Ее цикловой индекс согласно свойству циклового индикатора (см. пункт Цикловые типы), равен

$$\frac{C_m(t_1, t_2, ..., t_m)}{m!} = \sum \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!}\left(\frac{t_1}{1}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{t_2}{2}\right)^{k_2} \cdot ... \cdot \left(\frac{t_n}{n}\right)^{k_n}$$

или коэффициенту при u^m в разложении $e^{ut_1 + \frac{u^2t_2}{2} + \frac{u^3t_3}{3} + ...}$ (2.2)
по степеням u.

Пример 5. Пусть S — некоторая конечная группа, $m = |S|$. Если a — фиксированный элемент множества S, то отображение $s \to as$, как легко видеть, есть подстановка на множестве S. Обозначим ее через g_a. Заметим, что если a пробегает все множество S, то такие подстановки g_a образуют группу G. Имеем $g_ag_b = g_{ab}$, поэтому G изоморфно самой группе G, изоморфизм определяется так $g_a \leftrightarrow a$. Группа G называется представлением Кэли группы S.

Интересен ее цикловой индекс.

Если $a \in S$ имеет порядок $k(a)$, подстановка g_a разбивает S на циклы, длины которых все равны $k(a)$: если s — некоторый элемент S, то он принадлежит циклу, образованному из следующих элементов:

$$s \to as \to a^2s \to \ldots \to a^{k(a)}s = s.$$

Отсюда следует, что m делится на $k(a)$ и что подстановка g_a разбивает S на $\frac{m}{k(a)}$ циклов длины $k(a)$.

Таким образом, получаем цикловой индекс: $$P_G = \frac{1}{m}\sum_{a\in S}\left[t_{k(a)}\right]^{\frac{m}{k(a)}}. \qquad (2.3)$$

Эта сумма может быть записана также следующим образом:

$$P_G = \frac{1}{m}\sum_{\frac{d}{m}} v(d)\left(t_d\right)^{\frac{m}{d}}, \qquad (2.4)$$

где d пробегает все делители m, а $v(d)$ — это число элементов $a \in S$, порядок которых $k(a) = d$.

Пример 6. В качестве частного случая примера 5 возьмем следующую циклическую группу подстановок.

Пусть S — группа всех корней m-й степени из единицы $e^{\frac{2\pi ij}{m}}$, где $j = 1, \ldots, m$, i — мнимая единица.

Тогда для каждого $a \in S$ отображение $s \to as$ является подстановкой S, группа этих подстановок — циклическая.

Если $a = e^{\frac{2\pi ij}{m}}$, то порядок элемента a равен $k(a) = \dfrac{m}{(m, j)}$, где (m, j) — наибольший общий делитель m и j. Поэтому цикловой индекс

$$P_G = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(t_{\frac{m}{(m,j)}}\right)^{(m,j)}$$

Второе выражение получается из (2.4)

$$P_G = \frac{1}{m}\sum_{\frac{d}{m}}\varphi(d)\left(t_d\right)^{\frac{m}{d}},$$

где φ — функция Эйлера, то есть $\varphi(d)$ — это число целых n, удовлетворяющих условию $1 \le n \le d$ и $(n, d) = 1$.

Пример 7. Пусть G — группа подстановок множества S и пусть H — группа подстановок множества T. $S \cap T = \varnothing$, $U = S \cup T = \varnothing$. Любому выбору $g \in G$ и $h \in H$ соответствует подстановка множества U, определенная следующим образом: $u \to$ gu, если $u \in S$, $u \to hu$, если $u \in T$.

Обозначим такую подстановку множества U через $g \times h$. Легко видеть, что эти подстановки образуют группу, порядок которой равен произведению порядков групп G и H. Эта группа называется прямым произведением групп G и H и обозначается $G \times H$.

Если $g \in G$ и $h \in H$ и если g имеет тип $< 1^{b_1}, 2^{b_2}, 3^{b_3}, 4^{b_4}, \ldots >$, а h имеет тип $< 1^{c_1}, 2^{c_2}, 3^{c_3}, 4^{c_4}, \ldots >$, то $g \times h$ имеет тип $< 1^{b_1+c_1}, 2^{b_2+c_2}, 3^{b_3+c_3}, 4^{b_4+c_4}, \ldots >$, так как каждый цикл в U лежит либо целиком в S, либо целиком в T. Отсюда член циклового индекса группы $G \times H$, соответствующий элементу $g \times h$, равен произведению члена в P_G, соответствующего элементу g, и члена в P_H, соответствующего h. Применив это ко всем членам P_G и всем членам P_H, получим формулу для произведения $P_{G \times H} = P_G \cdot P_H$

Замечание. Тип перестановки g позволяет делать некоторые выводы о перестановке и о степенях $g^2, g^3, \ldots$, но очень мало можно сказать о типе произведения $g_1 g_2$, исходя из типов сомножителей. Соответственно, хотя цикловой индекс может дать информацию о комбинаторных вопросах, касающихся группы подстановок, он мало говорит о мультипликативной структуре группы. В 1937 г. Пойа привел пример двух неизоморфных групп подстановок с одинаковыми цикловыми индексами. Таким образом, цикловой индекс не всегда определяет группу однозначно.

Пойа берет две неизоморфные группы порядка p^3, где $p > 2$ простое, которые обладают тем свойством, что каждый элемент, кроме единичного, имеет порядок p.

В результате выражение (*) для циклового индекса представления Кэли дает один и тот же результат в обоих случаях.

2.3. Основная лемма.

Пусть G — конечная группа. Предположим, элементы G ведут себя, как подстановки множества S; это значит, что существует отображение G в симметрическую группу множества S. Другими словами $g \in G$ поставим в соответствие подстановку множества S, которую обозначим через π_g.

Предположим, что это отображение — гомоморфизм, то есть

$$\pi_{gg'} = \pi_g \cdot \pi_g \qquad \text{для всех } g \in G,\ g' \in G. \tag{3.1}$$

Заметим, что различные элементы G не обязательно соответствуют различным подстановкам.

В нашем случае G порождает отношение эквивалентности на элементах множества S. Два элемента s_1, s_2 множества S называются эквивалентными, записывается $s_1 \sim s_2$, если существует $g \in G$ такой, что $\pi_g s_1 \sim s_2$. В самом деле:

1. $s \sim s$, для всех $s \in S$ [так как формула (3.1) показывает, что если е — единичный элемент группы G, то π_e — тождественная подстановка, то есть оставляющая на месте все точки S].
2. Если $s_1 \sim s_2$, то $s_2 \sim s_1$ [так как формула (3.1) показывает, что если $g' = g^{-1}$, то, $\pi_{g'} = (\pi_g)^{-1}$].
3. Если $s_1 \sim s_2$, $s_2 \sim s_3$ то $s_1 \sim s_3$ [так как если $\pi_g s_1 \sim s_2$, $\pi_g s_2 \sim s_3$, то $\pi_{g' \cdot g}\, s_1 = \pi_{g'} \quad (\pi_g\, s_1) = \pi_g (s_2) = s_3$].

В нашем случае классы эквивалентности называют транзитивными множествами.

Лемма 3.1. Число транзитивных классов множества равно $\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g \in G} \psi(g)$,

где $|G|$ обозначает число элементов в группе G и для каждого g $\psi(g)$ обозначает число элементов множества S, остающихся инвариантными при подстановках π_g, то есть число элементов $s \in S$, для которых $\pi_g s = s$.

Доказательство.

Рассмотрим все пары (g, s), для которых $g \in G$, $s \in S$, $\pi_g s = s$. Число n таких пар может быть вычислено двумя способами.

Во-первых, для каждого фиксированного g можно подсчитать число элементов s, удовлетворяющих условию $\pi_g s = s$, отсюда число пар

$$n = \sum_{g \in G} \psi(g).$$

С другой стороны, для каждого $s \in S$ можно подсчитать число элементов g со свойством $\pi_g s = s$. Обозначив это число через $\eta(s)$, получим

$$\sum_{s \in S} \eta(s) = \sum_{g \in G} \psi(g). \tag{3.2}$$

Для фиксированного s элементы группы G, обладающие свойством $\pi_g s = s$, образуют подгруппу группы G, которую обозначим через G_s. Порядок этой группы равен $\eta(s)$.

Если s_i эквивалентно s, то число элементов g таких, что $\pi_g s = s_i$ равно $|G_s|$. Это следует из того, что существует элемент $h \in G$, удовлетворяющий условию $\pi_h s_1 = s$, а теперь равенство $\pi_g s = s_1$ означает то же самое, что и $hg \in G_s$. Таким образом, если s_1 и s фиксированы, то число возможностей для g равно как раз числу элементов в G_s.

Соответственно G может быть разбита на подмножества, каждое из которых состоит из $|G_s|$ элементов и соответствует ровно одному элементу того класса эквивалентности, в который входит s. Отсюда следует, что этот класс эквивалентности содержит $\dfrac{|G|}{|G_8|}$ элементов. Поэтому имеем

$$\eta(s) = \frac{|G|}{\text{число элементов в классе эквивалентности, содержащем } s}.$$

Суммируя по s, получаем, что сумма чисел $\eta(s)$ для всех s, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности, равны $|G|$. Следовательно, сумма всех $\eta(s)$ равна взятому $|G|$ раз числу классов эквивалентности, то есть формула (3.2) доказывает лемму.

2.4. Функции и классы.

Пусть D и R — конечные множества. Рассмотрим функции, определенные на D, со значениями в R; другими словами, рассмотрим отображения D в R. Множество всех таких функций обозначим через R^D. Число элементов в множестве R^D равно $|R|^{|D|}$, поскольку, если хотим построить функцию f, то имеем для каждого элемента $d \in D$ $|R|$ возможностей выбрать $f(d)$, и эти выборы независимы.

Далее предположим, что дана группа G множества D. Эта группа вводит отношение эквивалентности в R^D: две функции f_1 и f_2 (обе из R^D) называют эквивалентными (обозначим $f_1 \sim f_2$), если существует элемент $g \in G$, такой, что

$$f_1(gd) = f_2(d) \text{ для всех } d \in D. \tag{4.1}$$

Соотношение (4.1) может быть кратко записано так: $f_1 g = f_2$, ибо $f_1 g$ обозначает сложное отображение “сначала g потом f_1”. Легко установить обычные условия эквивалентности:

1) $f \sim f$;

2) если $f_1 \sim f_2$, то $f_2 \sim f_1$;

3) если $f_1 \sim f_2$ и $f_2 \sim f_3$, то $f_1 \sim f_3$.

Первое условие следует из того, что тождественная подстановка принадлежит G; второе условие следует из того, что если $g \in G$, то обратная подстановка g^{-1} принадлежит G; и третье — из того, что если $g_1 \in G$, $g_2 \in G$, то $g_1 g_2 \in G$.

Таким образом, ~ есть отношение эквивалентности, с помощью которого R^D разбивается на классы эквивалентности.

Пример 8. Пусть D — множество, состоящее из всех шести граней куба, и пусть G — группа всех подстановок D, которые могут быть получены вращениями куба (см. пример 3). Пусть R состоит из двух слов*: красный* и *белый*. Элемент $f \in R^D$ может быть рассмотрен как способ окрашивания куба (так что каждая грань красная, либо белая). Это может быть сделано 2^6 способами. Если два таких куба, расположенных параллельно окрашены различно, то может случиться, что один из них можно повернуть так, что кубы перестанут казаться различными. В этом случае они принадлежат одному классу эквивалентности.

В нашем примере десять классов эквивалентности, которые могут быть описаны следующим образом (в скобках — число функций в каждом классе эквивалентности):

(а) все грани красные (*1*);

(б) пять граней красные, одна белая (*6*);

(в) две противоположные грани белые, остальные четыре красные (*3*);

(г) две смежные грани белые, остальные четыре красные (*12*);

(д) три грани, имеющие общую вершину, красные, остальные белые (*8*);

(е) две противоположные и одна из оставшихся красные, три остальные белые (*12*);

(ж), (з), (и), (к) получаются из (г), (в), (б), (а) заменой слов ‘красный’ на ‘белый’. В качестве примера заметим, что

$$1 + 6 + 3 + 12 + 8 + 12 + 12 + 3 + 6 + 1 = 2^6.$$

Пример 9. Пусть D — множество, состоящее из трех элементов $\{1, 2, 3\}$, и пусть G — симметрическая группа всех перестановок из D и пусть R состоит из двух элементов x и y. В этом случае восемь функций, а классов эквивалентности четыре. Классы эквивалентности можно обозначить символами x^3, x^2y, xy^2, y^3 соответственно. Например, x^2y представляет класс отображений f, таких, что два из значений $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ равны x и одно y. Класс эквивалентности x^3 состоит только из одной функции, которая определена так: $f(1) = f(2) = f(3) = x$.

Полезно рассмотреть также x и y как независимые переменные и поставить в соответствие каждой функции f произведение $f(1)f(2)f(3)$, которое не зависит от порядка сомножителей. Другими словами, так как симметрическая группа дана, то говорить, что две функции f_1 и f_2 эквивалентны, — это то же, что сказать, что произведение $f_1(1)f_1(2)f_1(3)$ и $f_2(1)f_2(2)f_2(3)$ тождественны. Поэтому классы эквивалентности характеризуются возможными значениями произведений, а именно одночленами x^3, x^2y, xy^2, y^3.

2.5. Вес функции, вес класса эквивалентности

Опять возьмем конечные множества D и R и группу G постановок множества D. Каждому элементу множества R придадим вес. Этот вес может быть числом, или переменной, или вообще элементом коммутативного кольца, состоящего из рациональных чисел. Таким образом, можно образовывать суммы и произведения весов, произведения весов на рациональные числа, и эти операции удовлетворяют обычным законам ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности. Вес, придаваемый элементу $r\in R$, обозначим через $\omega(r)$.

После того, как выбраны эти веса, можно определить вес $W(f)$ функции $f\in R^D$ как произведение
$$W(f) = \prod_{d\in D} \varpi\left[f'(d)\right]. \tag{5.1}$$

Если f_1 и f_2 принадлежат одному классу эквивалентности, то они имеют одинаковый вес. Это следует из того факта, что если $f_1g = f_2$, $g\in G$, то
$$\prod_{d\in D} \varpi\left[f_1(d)\right] = \prod_{d\in D} \varpi\left[f_1(gd)\right] = \prod_{d\in D} \varpi\left[f_2(d)\right],$$
поскольку первое и второе произведение имеют одни и те же сомножители, разве что в другом порядке, и в силу коммутативности произведения весов.

Так как все функции, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности, имеют одинаковый вес, можно определить в качестве веса класса эквивалентности, это общее значение. Таким образом, если F обозначает класс эквивалентности, обозначим вес его через $W(F)$; использование символа W в качестве веса класс вряд ли вызовет путаницу.

Пример 10. Рассмотрим случай окрашивания куба из примера 8 и образуем кольцо всех многочленов от двух переменных x и y с рациональными коэффициентами. Множество R состоит из элементов *красный* и *белый*, которым мы придадим в качестве весов значения x и y соответственно. Десять классов эквивалентности (а), …, (к) имеют теперь веса $x^6, x^5y, x^4y^2, x^4y^2, x^3y^3, x^3y^3, x^2y^4, x^2y^4, xy^5, y^6$ соответственно. Отсюда можно видеть, что различные классы эквивалентности не обязаны иметь различные веса.

Пример 11. В примере 9 множество R имело два элемента x и y. Если считать x и y переменными, то нет причин, запрещающих дать элементу x вес x, а элементу y — вес y. Теперь символы x^3, x^2y, xy^2, y^3 действительно стали весами классов. В этом случае вес характеризует класс: различные классы обладают различными весами.

Пример 12. Если взять $\omega(r) = 1$ для всех $r\in R$, то будем иметь $W(f) = 1$ для всех функций $W(F) = 1$ для всех классов эквивалентности.

2.6. Запас и перечень

Как и раньше, имеем множества D и R, и каждый элемент $r \in R$ обладает весом. Считая R множеством, из которого выбираем значения для функций, назовем R *запасом*. Так как веса можно складывать, то существует сумма весов; эта сумма называется *производящей функцией* запаса или *перечнем* множества R:

$$\text{Перечень } R = \sum_{r \in R} \omega(R). \tag{6.1}$$

Пример 13. Терминология наводит на мысль, что перечень дает достаточно точное описание элементов R, однако это верно лишь отчасти. Пусть R — множество, содержащее три коробки мыла (назовем их $м_1, м_2, м_3$), два пакета чая (назовем $ч_1, ч_2$,) и четыре бутылки вина ($в_1$, $в_2$, $в_3$, $в_4$).

Если мы возьмем девять переменных $\underline{м}_1, \underline{м}_2, \underline{м}_3, \underline{ч}_1, \underline{ч}_2, \underline{в}_1, \underline{в}_2, \underline{в}_3, \underline{в}_4$ и придадим элементу $м_1$ вес $\underline{м}_1$ и так далее, то перечень будет иметь вид

$$\underline{м}_1 + \underline{м}_2 + \underline{м}_3 + \underline{ч}_1 + \underline{ч}_2 + \underline{в}_1 + \underline{в}_2 + \underline{в}_3 + \underline{в}_4,$$

и значение суммы даст полную информацию о запасе. Лавочник обычно применяет более простую систему, так как он не интересуется мелкими различиями между полностью эквивалентными предметами. Он обозначает символами *м, ч, в* абстрактные понятия ‘коробка мыла’, ‘пакет чая’, ‘бутылка вина’.

Затем он придаст всем элементам $м_1, м_2, м_3$ один вес $\underline{м}$; каждому из $ч_1$, *и* $ч_2$ — один вес $\underline{ч}$, $в_1$ и $в_2$ — вес $\underline{в}$, элементам $в_3$ и $в_4$ — вес $\frac{1}{2}\underline{в}$ (так как $в_3$ и $в_4$ полбутылки, а разница между ними самими к делу не относится). Его перечень имеет вид $3\underline{м} + 2\underline{ч} + 3\underline{в}$.

Иногда, впрочем, лавочник, или ревизор интересуется значением запаса в долларах. Если он оценивает коробку мыла в *3*, пакет чая в *1*, бутылку вина в *2*, а полбутылки в *1* доллар, то перечень примет вид $9 + 2 + 4 + 2 = 17$. Теперь перечень просто число; он не дает информации о том, из чего состоит запас, кроме того факта, что его общая стоимость равна *17* долларам.

В конце концов, у лавочника есть еще возможность обучить своего клерка считать: придавая каждому предмету перечня вес *1*, можно получить значение перечня, равное общему числу предметов, то есть *9*.

2.7. Перечень функции

Пусть имеются конечные множества D и R и требуется рассмотреть множество R^D всех отображений D в R. Каждый элемент $r \in R$ имеет вес $\omega(r)$; поэтому каждая функция $f \in R^D$ имеет вес

$$W(f) = \prod_{d \in D} \varpi\left[f(d) \right].$$

Тогда перечень множества R^D равен перечню множества R в степени, равной числу элементов множества D:

$$\text{Перечень } R^D = \sum_f W(f) = \left[\sum_{r\in R} \omega(R)\right]^{|D|}. \qquad (7.1)$$

Это можно увидеть следующим образом. $|D|$-я степень может быть записана как произведение $|D|$ сомножителей. Если в каждом сомножителе выделить один член и взять произведение таких членов, то получим один член полного выражения для произведения (которое содержит $|R|^{|D|}$ членов, то есть столько, сколько существует способов выбора). Возьмем некоторое взаимно однозначное соответствие между сомножителями в (7.1) и элементами множества D; благодаря этому соответствию можно сказать, что выбор членов из каждого сомножителя может быть описан отображением f множества D в R. Функция f соответствует член $\prod_{d\in D} \varpi[f(d)]$ из полного разложения для произведения.

Так как этот член равен $W(f)$, можно заметить, что полное произведение равно сумме всех $W(f)$, то есть равно перечню множества R^D.

Оценим теперь перечень некоторого подмножества S множества R^D. Пусть D разбито на несколько непересекающихся компонент $D_1, \ldots, D_k$, так что $|D| = |D_1| + \ldots + |D_k|$.

Рассмотрим множество S всех функций f, обладающих тем свойством, что f постоянна на каждой компоненте; функция может быть различной на различных компонентах, но не обязательно. Такие функции f можно рассматривать как сложные функции $f = \varphi\psi$, где φ и ψ определены следующим образом: ψ — функция отображающая d на индекс той компоненты, которой принадлежит d, так что всегда имеем $d\in D_{\psi(d)}$, а φ — отображение множества $\{1, \ldots, k\}$ в R. Заметим, что ψ — фиксированная функция, а для φ существует $|R|^k$ возможностей.

Справедливо следующее соотношение:

$$\text{Перечень } S = \prod_{d\in D}^{k} |\varpi(r)|^{|\mathrm{D}|}. \qquad (7.2)$$

Это соотношение также может быть получено при рассмотрении полного разложения произведения. Член этого разложения получается выбором одного члена в каждом сомножителе (7.2), а это означает выбор отображения φ множества $\{1, \ldots, k\}$ в R. Следовательно, такое отображение даст член

$$\{\omega[\varphi(1)]\}^{|D_1|} \ldots \{\omega[\varphi(k)]\}^{|D_k|} = \prod_{i=1}^{k} \{\omega[\varphi(i)]\}^{|D_i|}$$

Если $\varphi\psi = f$, то этот член равен в точности $W(f)$, так как, очевидно,

$$\{\omega[\varphi(i)]\}^{|D_i|} = \prod_{d\in D}\omega\{\varphi[\omega(d)]\}$$

и

$$\prod_{i=1}^{k}\prod_{d\in D_i}\omega[f(d)] = W(f).$$

Таким образом каждая функция $f\in S$ получается в точности один раз. Следовательно, сумма весов $W(f)$ для всех $f\in S$ равна сумме всех членов в разложении произведения (7.2), что и доказывает справедливость (7.2).

Пример 14. Три человека $Ч_1$, $Ч_2$, $Ч_3$ распределяют между собой m фишек так, чтобы $Ч_1$ получил такое количество фишек, что и $Ч_2$. Сколькими способами это можно сделать?

Интересуемся не отдельными фишками, а только тем, сколько фишек получает каждый человек. Иначе говоря, хотим получить функции f определенные на множестве $D = \{Ч_1, Ч_2, Ч_3\}$, с областью значений $R = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и ограничениями $f(Ч_1) = f(Ч_2)$ и $f(Ч_1) + f(Ч_2) + f(Ч_3) = m$. Положим $\{Ч_1, Ч_2\} = D_1$, $\{Ч_3\} = D_2$.

Возьмем переменную x и предадим элементам $0, 1, 2, \ldots$ множества R веса $1, x, x^2, x^3, \ldots$ соответственно. Таким образом, функции, которыми мы интересуемся, имеют вес x^m.

Из (7.2) перечень всех функций, постоянных на каждом D_i, равен

$$(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots). \tag{7.3}$$

Искомое число есть коэффициент при x^m в этом разложении. Поскольку

$$(1 - x^2)^{-1}(1 - x)^{-1} = \frac{1}{4}(1+x)^{-1} + \frac{1}{2}(1-x)^{-2} + \frac{1}{4}(1-x)^{-1},$$

то для требуемого числа функций получаем

$$\frac{1}{4}(1+x)^{-1} + \frac{1}{2}(1-x)^{-2} + \frac{1}{4}(1-x)^{-1},$$

то есть $\frac{1}{2}m+1$, если m четно, и $\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}$, если m нечетно. Легко получить этот результат непосредственно: заметим, что требуемое число может быть интерпретировано как число представлений натурального числа m в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых четно.

То, что запас есть бесконечное множество, а перечень — сумма бесконечного ряда, не должно особенно волновать. Можно обрезать запас, заменив его множеством $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$; остальные элементы не будут играть никакой роли в задаче в силу ограничения $f(Ч_1) + f(Ч_2) + f(Ч_3) = m$. Более того, коэффициент при x^m в (7.3) равен коэффициенту при x^m в выражении $(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2m})(1 + x + x^2 + \ldots + x^m)$.

2.8. Перечень классов эквивалентности, теорема Пойа

Снова рассмотрим конечные множества D и R и группу подстановок G множества D. Элементы R имеют вес $\omega(r)$, и, согласно (5.1), функция $f \in R^D$ и класс F имеют веса $W(f)$ и $W(F)$. Вместо перечня функции $\sum_F W(F)$, определенного в (7. 1), будем теперь искать перечень $\sum_F W(F)$ множества всех классов эквивалентности. Этот перечень дается следующей теоремой.

Теорема 2.1. (Основная теорема Пойа). Перечень классов эквивалентности равен

$$\sum_F W(F) = P_G\left\{\sum_{r\in R}\omega(r), \sum_{r\in R}\left[\omega(r)\right]^2, \sum_{r\in R}\left[\omega(r)\right]^3, ...\right\} \quad (8.1)$$

где P_G — цикловой индекс. В частности, если все веса выбраны равными *1*, получаем

$$\text{число классов эквивалентности} = P_G(|R|, |R|, |R|, \ldots). \quad (8.2)$$

Доказательство.

Пусть ω — одно из возможных значений, которое может принимать вес функции. Пусть S множество всех функций f, $f \in R^D$, удовлетворяющих условию $W(f) = \omega$.

Если $g \in G$ и $f_1 = f_2 g$, то f_1 и f_2 имеют одинаковый вес (см. п. 5). Отсюда, если $f_1 \in S$, то $f_1 g^{-1} \in S$. Таким образом, каждому элементу $g \in G$ соответствует отображение π_g множества S в себя, определенное следующим образом:

$$\pi_g f = fg^{-1};$$

здесь π_g — подстановка, так как она имеет обратную $\pi_{g^{-1}}$.

Отображение $g \to \pi_g$ удовлетворяет условию гомоморфизма (3.1). Поэтому если $g \in G$, $g' \in G$, то (3.1) выполняется, поскольку для каждого $f \in S$ имеем $\pi_{gg'} f = f(gg')^{-1}$, $\pi_g(\pi_{g'})f = \pi_g(fg')^{-1} = fg'^{-1}g^{-1}$, $(gg')^{-1} = g^{-1}g'^{-1}$.

Два элемента f_1 и f_2 из S эквивалентны в смысле п. 3 тогда и только тогда, когда они эквивалентны в смысле п. 4: существование элемента g группы G такого, что $\pi_g f_2 = f_1$, означает то же самое, что и существование элемента g группы G, такого, что $f_2 = f_1 g$. Следовательно, классы эквивалентности, поскольку они существуют в S, суть классы эквивалентности из п. 3. Тогда лемма 1 показывает, что число классов эквивалентности, поскольку они содержаться в S, равно

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_\omega(g), \quad (8.3)$$

где $\psi_\omega(g)$ обозначает число функций f, таких, что $W(f) = \omega$, $fg^{-1} = f$ (или, что то же самое, $f = fg$).

Все классы эквивалентности, принадлежащие S, имеют вес ω; поэтому если мы умножим (8.3) на ω и просуммируем по всем возможным значениям ω, то получим перечень классов эквивалентности

$$\sum_F W(F) = \frac{1}{|G|}\sum_\omega \sum_{g\in G} \psi_\omega(g).$$

Очевидно,
$$\sum_\omega \psi_\omega(g)\omega = \sum_f^{(g)} W(f),$$

где $\sum\limits_f^{(g)}$ означает, что суммирование происходит по всем $f\in R^D$, для которых $f = fg$.

Отсюда
$$\sum W(F) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \sum_f^{(g)} W(f). \tag{8.4}$$

Для того чтобы оценить $\sum\limits_f^{(g)} W(f)$ заметим, что g — подстановка множества D, и поэтому D распадается на циклы, элементы которых циклически переставляются подстановкой g. Условие $f = fg$ означает, что

$$f(d) = f(gd) = f(g^2d) = \ldots,$$

поэтому функция f постоянна на каждом цикле D. Обратно, каждая функция f, постоянная на каждом цикле, автоматически удовлетворяет условию $f = fg$, поэтому $g(d)$ принадлежит тому же циклу, что и d. Таким образом, если циклы суть $D_1, D_2, \ldots, D_k$, то сумма $\sum\limits_f^{(g)} W(f)$ есть как раз перечень, полученный в п. 7, который выражается формулой (7.2).

Пусть $< 1^{b_1}, 2^{b_2}, \ldots >$ — тип подстановки g. Это означает, что среди чисел $|D_1|, |D_2|, \ldots, |D_k|$ число 1 встречается b_1 раз, число 2 — b_2 раз и так далее.

Следовательно, имеем
$$\sum_f^{(g)} W(f) = \left\{\sum_{r\in R}\omega(r)\right\}^{b_1} \left\{\sum_{r\in R}\omega(r)^2\right\}^{b_2} \ldots \tag{8.5}$$

Число сомножителей конечно, но мы не будем стремиться записывать последний из них; в конце концов можно считать, что все b_i, начиная с некоторого i равны нулю, и произведение бесконечного числа единиц равно также единице.

Выражение (8.5) может быть получено подстановкой

$$t_1 = \sum_{r\in R}\omega(r) \qquad t_2 = \sum_{r\in R}[\omega(r)]^2, \quad t_3 = \sum_{r\in R}[\omega(r)]^3, \ldots$$

в произведении $t_1^{b_1}t_2^{b_2}t_3^{b_3}\ldots$, которое является членом, соответствующим g в $|G|P_G$ (см. п. 2). Суммируя по g и деля на $|G|$, заключаем, что значение (8.4) получено предыдущей подстановкой из $P_G(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ и это доказывает теорему Пойа.

Пример 15. Рассмотрим пример 8. Здесь D — множество граней куба, G — группа вращений, R — множество двух цветов: красного и белого.

Согласно формуле (8.2), число способов окрашивания равно $P_G(2, 2, 2, \ldots)$, а цикловой индекс P_G был дан в примере 3. Получаем

$$\frac{1}{24}(2^6 + 3\cdot 2^4 + 6\cdot 2^3 + 6\cdot 2^3 + 8\cdot 2^2) = 10,$$

то же число, если проверить, было получено в примере 8.

Возникает вопрос: сколько классов эквивалентности окрашиваний имеют четыре красные грани и две белые.

Для этого дадим вес x красному цвету и y белому и найдем перечень классов эквивалентности; по формулам (8.1) и (2.1), он равен

$$\frac{1}{24}\left[(x+y)^6 + 3\cdot(x+y)^2\left(x^2+y^2\right) + 6\cdot(x+y)^2\left(x^4+y^4\right) + 6\cdot\left(x^2+y^2\right)^3 + 8\cdot\left(x^3+y^3\right)^2\right].$$

Коэффициент при x^4y^2 равен $\frac{1}{24}(15 + 9 + 6 + 6\cdot 2^3 + 8\cdot 2^2) = 2.$

В самом деле, существует ровно два класса эквивалентности функций, при которых четыре грани окрашены в красный цвет [(c) и (d) в примере 9]. Для полного перечня классов эквивалентности легко получаем

$$x^6 + x^5y + 2x^4y^2 + 2x^3y^3 + 2x^2y^4 + xy^5 + y^6,$$

что согласуется с примером 10.

Литература

1. Дж. Риордан. “Введение в комбинаторный анализ”. ИЛ, М., 1962.
2. В. Липский. “Комбинаторика для программистов”. М., Мир, 1988.
3. Г. Эндрюс. “Теория разбиений”. М., Наука, 1982.
4. Ф. Харари, Э. Палмер. “Перечисление графов”. М., Мир, 1977.
5. В. А. Емеличев, В. А. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич “Лекции по теории графов”. М., Наука, 1990.
6. Э. Рейнгольд, Ю. Невергельт, Н. Део. “Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика”. М., Мир, 1980.
7. Сб. статей под редакцией Э. Беккенбаха. “Прикладная комбинаторная математика”. М. Мир, 1968.